Darstellungstheorie

§1 Lineare Darstellungen

(1.1) Definitionen
Sei G eine Gruppe. Eine (lineare) Darstellung von G ist ein Homomorphismus

$$\rho : G \to GL_K(V),$$

wobei V ein K-Vektorraum ist. Falls keine anderen Angaben gemacht werden, so nehmen wir für diese Vorlesung jeweils an, daß $K = \mathbb{C}$ und $\dim_K V < \infty$. Für eine Darstellung ρ gilt: $\rho(1_G) = \mathrm{id}_V$, $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}$.
Den Vektorraum V nennen wir den Darstellungsraum von ρ und $n = \dim V$ wird der Grad der Darstellung ρ genannt.

Zu einer festen Basis $\mathcal{B}$ von V existiert ein kanonischer Isomorphismus $\varphi : GL(V) \to GL_n(\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\varphi : \sigma \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma).$$

Dies bedeutet, daß zu gegebenem ρ ein Homomorphismus $R : G \to GL_n(\mathbb{C})$ existiert, nämlich $R = \varphi\rho$. Für $g \in G$ bezeichnen wir mit R_g die Matrix $R(g) \in GL_n(\mathbb{C})$. Sind $r_{ij}(g)$ die Koeffizienten der Matrix R_g, so gilt:

$$(+) \qquad r_{ik}(gh) = \sum_j r_{ij}(g) r_{jk}(h),$$

denn $R_{gh} = R_g R_h$. Wir nennen R die zu ρ (bezüglich $\mathcal{B}$) gehörige Matrixdarstellung von G.

Schließlich heißt die Darstellung ρ unitär, falls auf V eine G-invariante positiv definite hermitische Form $f = \langle\, , \rangle$ existiert; G-invariant bedeutet:

$$(**) \qquad \langle v, w \rangle = \langle v^{\rho(g)}, w^{\rho(g)} \rangle \qquad \forall v, w \in V, g \in G.$$

Ist $U(V)$ die bzgl. f definierte unitäre Gruppe, also $U(V) := U(V, f)$, so ist $\rho : G \to U(V)$.

(1.2) Satz
Jede Darstellung ρ einer endlichen Gruppe G ist unitär.

Beweis: Der Beweis beruht auf 'Mittelbildung', einem in der Darstellungstheorie häufig benutzten Argument.

Sei V der Darstellungsraum von ρ und $(\, ,) : V \times V \to \mathbb{C}$ eine beliebige positiv definite hermitische Form. Für $v \in V$, $g \in G$ setze $v^g := v^{\rho(g)}$ und

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (v^g, w^g).$$

Wir zeigen: $\langle\, , \rangle$ ist G-invariante positiv definite hermitische Form.

(1): $\langle\,,\rangle$ ist hermitische Form:

$$\langle v+u, w\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Big((v+u)^g, w^g\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(v^g, w^g) + \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(u^g, w^g) = \langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle,$$

da $(v+u)^g = v^g + u^g$; und

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G}(\overline{w^g, v^g})\Big) = \overline{\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(w^g, v^g)} = \overline{\langle w, v\rangle}.$$

Weiterhin $\langle v, v\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(v^g, v^g) \geq 0$ (liegt insbesondere in $\mathbb{R}$!) und

$$\langle v, v\rangle = 0 \Longleftrightarrow (v^g, v^g) = 0 \quad \forall g\in G \Longleftrightarrow v = 0.$$

(2): $\langle\,,\rangle$ ist G-invariant:
Sei hierzu $h\in G$ fest. Dann

$$\langle v^h, w^h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(v^{hg}, w^{hg}) = \frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}(v^{hg}, w^{hg}) = \langle v, w\rangle,$$

da mit g auch hg über ganz G läuft.

□

(1.3) Folgerung
Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe G mit zugehöriger Matrixdarstellung $R : G \to GL_n(\mathbb{C})$, wobei $n = \dim V$. Dann existiert eine Matrix $P \in GL_n(\mathbb{C})$ derart, daß

$$P^{-1}R_gP \text{ unitär ist für alle } g\in G.$$

($T \in GL_n(\mathbb{C})$ ist unitär, falls $T^{-1} = \overline{T}^t$!)

Beweis: Sei $R = \varphi\rho$ und $\varphi : \sigma \to M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma)$ für eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei $\langle\,,\rangle$ die G-invariante positiv definite hermitische Form auf V und $\mathcal{A}$ Orthonomalbasis von V bzgl. $\langle\,,\rangle$. Dann ist nach Linearer Algebra $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\Big(\rho(g)\Big)$ unitär für alle $g\in G$. Sei $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id})$. Dann gilt nach Linearer Algebra, daß

$$P^{-1}R_gP = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\Big(\rho(g)\Big)M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}\Big(\rho(g)\Big)$$

unitär ist für alle $g\in G$. □

(1.4) Folgerung

(a) Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$ Matrix endlicher Ordnung. (Das heißt, $A^m = I_n$ für ein $m\in\mathbb{N}$.) Dann ist A diagonalisierbar.

(b) Sei $\rho : G \to GL(V)$ Darstellung der endlichen Gruppe G mit zugehöriger Matrixdarstellung $R : G \to GL_n(\mathbb{C})$, wobei $n = \dim V$. Dann ist R_g diagonalisierbar für jedes $g\in G$.

Beweis:
(a): $\langle A\rangle$ ist endliche Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C}) = GL(\mathbb{C}^n)$. Somit ist A nach (1.3) zu einer unitären Matrix ähnlich. Unitäre Matrizen sind nach Linearer Algebra jedoch diagonalisierbar.
(b): folgt aus (a), da $R_g \in GL_n(\mathbb{C})$ Element endlicher Ordnung ist. □

(1.5) Definition
Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung von G. Ein Unterraum U von V ist G-invariant, falls $U^{\rho(g)} \subseteq U$ für alle $g \in G$.

Die Darstellung ρ (bzw. V) ist irreduzibel, falls es keinen echten G-invarianten Unterraum gibt.

Ist U ein G-invarianter Unterraum, so ist $\varphi : G \to GL(U)$ definiert durch $\varphi : g \mapsto \rho(g)|_U$ eine Darstellung von G auf U. Ist $V = V_1 \oplus V_2$ mit G-invarianten $V_i \neq \{0\}$ und ist $\rho_i : g \mapsto \rho(g)|_{V_i}$, $i = 1, 2$, so sagt man, daß ρ die Summe der Darstellungen ρ_i ist; das heißt, $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$. Ist $v = v_1 + v_2$ mit $v_i \in V_i$, so gilt $v^{\rho(g)} = v_1^{\rho_1(g)} + v_2^{\rho_2(g)} \quad \forall g \in G$.

Sind $R_g^i, i = 1, 2$ die Darstellungsmatrizen der $\rho_i(g)$, so gilt nach Linearer Algebra:

$$R_g = \left[\begin{array}{c|c} R_g^1 & 0 \\ \hline 0 & R_g^2 \end{array}\right].$$

Analog definiert man die direkte Summe von n Darstellungen.

(1.6) Satz von Maschke
Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe G und U ein echter G-invarianter Unterraum von V. Dann existiert ein G-invariantes Komplement W zu U in V. (Das heißt, ein G-invarianter Unterraum W mit $V = U \oplus W$.)

Beweis: Nach (1.2) existiert auf V eine positiv definite G-invariante hermitische Form $\langle\, ,\rangle$. Nach Linearer Algebra gilt daher bzgl. $\langle\, ,\rangle$, daß $V = U \oplus U^\perp$. Da U G-invariant ist und da G die Form $\langle\, ,\rangle$ respektiert, ist auch $W = U^\perp$ G-invariant. □

(1.7) Folgerung
Jede Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ der endlichen Gruppe G ist Summe irreduzibler Darstellungen.

Beweis: (Mit Induktion nach $\dim V$.) Ist V (bzw. ρ) irreduzibel, so gilt die Behauptung. Sei daher die Behauptung gültig für alle Darstellungen $\varphi : G \to GL(W)$ mit $\dim W < \dim V$.

Sei U echter G-invarianter Unterraum. Dann gilt nach (1.6), daß $V = U \oplus W$ mit G-invariantem Komplement W und $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ mit entsprechenden ρ_i. Wegen $\dim U < \dim V$ und $\dim W < \dim V$ können wir auf jedes ρ_i, $i = 1, 2$ die Induktionsannahme anwenden. □

(1.8) Beispiel
Sei $\rho : G \to GL(V)$ Darstellung vom Grad 1. Das heißt, $\dim V = 1$. Dann ist $V = \mathbb{C}v$ für ein $0 \neq v \in V$. Es folgt, daß $v^{\rho(g)} = c_g \cdot v$ mit $c_g \in \mathbb{C}^*$, und $\rho(g)$ ist durch die Gleichung eindeutig bestimmt. Desweiteren ist $\widetilde{\rho} : G \to \mathbb{C}^*$ mit $\widetilde{\rho}(g) = c_g$ ein Homomorphismus von G in $\mathbb{C}^*$ und $\rho, \widetilde{\rho}$ entsprechen sich eindeutig. Man identifiziere daher die Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ vom Grad 1 mit dem Homomorphismus $\widetilde{\rho} : G \to \mathbb{C}^*$.

Nach dem Isomorphiesatz ist: $G/\mathrm{Kern}\,\widetilde{\rho} \simeq \widetilde{\rho}(G) \subseteq \mathbb{C}^*$, also kommutativ. Ist G endlich, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\widetilde{\rho}(g)^n = 1$ für alle $g \in G$. Somit $\widetilde{\rho}(G) \subseteq S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Nun kann man S^1 mit der Drehgruppe $SO_2(\mathbb{R})$ identifizieren. $\widetilde{\rho}(G)$ ist als endliche Untergruppe von $SO_2(\mathbb{R})$ daher zyklisch. Daher ist $G/\mathrm{Kern}\,\rho \simeq G/\mathrm{Kern}\,\widetilde{\rho} \simeq \widetilde{\rho}(G)$ zyklisch.

Man nennt die Darstellung ρ treu, falls $\mathrm{Kern}\,\rho = \{1_G\}$.

Zusammengefaßt erhalten wir: Die endliche Gruppe G besitzt genau dann eine treue Darstellung vom Grad 1, wenn G zyklisch ist. (Jede endliche zyklische Gruppe kommt als Untergruppe von $SO_2(\mathbb{R}) \simeq S^1$ vor !)

(1.9) Bemerkung
Eine Untergruppe G von $GL_n(\mathbb{C})$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt in der natürlichen Topologie des $\mathbb{C}^{n^2}$ ist ($GL_n(\mathbb{C}) \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$!). Die klassischen Gruppen $O_n(\mathbb{R})$ und $U_n(\mathbb{C})$ sind kompakt. Für stetige Darstellungen $\varphi : G \to GL_m(\mathbb{C})$ der kompakten Gruppe G gilt (1.2), und daher die Folgerungen (1.6), (1.7). Der Beweis ist analog, nur wird die Summe $\sum_{g\in G}$ durch $\int_G$ ersetzt.

§2 Gruppencharaktere, Permutationsdarstellungen

(2.1) Definition
Die Spur einer $n \times n$-Matrix (a_{ij}) ist definiert durch $\mathrm{Sp}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(2.2) Hilfssatz
Sei $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

(a) $P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Sp}(A)x^{n-1}+$ (Terme zu kleineren Potenzen von x).

(b) Ist B ähnlich zu A, so ist $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$.

Beweis: Es ist

$$P_A(x) = \det \begin{bmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & & \vdots \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & & & a_{nn}-x \end{bmatrix} = (a_{11}-x)\cdots(a_{nn}-x) + \sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_n \\ \sigma\neq\mathrm{id}}} \mathrm{sgn}\sigma(b_{1\sigma(1)}\cdots b_{n\sigma(n)}),$$

wobei b_{ij} die Einträge von $A - xI_n$ sind. Nun kommen für $\sigma \neq \mathrm{id}$ höchstens $n-2$ Diagonaleinträge in $b_{1\sigma(1)}\dots b_{n\sigma(n)}$ vor; das heißt, der zugehörige Exponent von x ist $\leq n-2$. Daher ist

$$\begin{aligned} &P_A(x) \\ &\quad = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}(a_{11}x^{n-1} + a_{22}x^{n-1} + \cdots + a_{nn}x^{n-1}) + \text{ Terme zu kleineren Potenzen von } x \\ &\quad = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Sp}(A)x^{n-1} + \text{ Terme zu kleineren Potenzen von } x. \end{aligned}$$

Dies ergibt (a). (b) folgt aus (a), da nach Linearer Algebra $P_A(x) = P_B(x)$. □

(2.3) Definition
(2.2) erlaubt es uns, die Spur eines Endomorphismus zu definieren. Ist $\varphi \in \mathrm{End}\,(V)$ so definiere $\mathrm{Sp}(\varphi) := \mathrm{Sp}\Big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)\Big)$ für eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Nach (2.2) ist diese Definition unabhängig von der gewählten Basis $\mathcal{B}$ von V.

Sei nun $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der Gruppe G. Dann ist $\rho(g) \in GL(V)$ für $g \in G$. Wir definieren den zugehörigen Charakter der Darstellung ρ durch

$$\chi(g) := \mathrm{Sp}\Big(\rho(g)\Big) \quad \forall g \in G.$$

Dann ist $\chi : G \to \mathbb{C}$ Abbildung. Da nach Linearer Algebra $\rho(g)$ trigonalisierbar ist (wobei auf der Diagonalen die Eigenwerte von $\rho(g)$ stehen), gilt daß $\chi(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, wobei λ_i die Eigenwerte von $\rho(g)$ sind (gezählt mit ihren Vielfachheiten).

(2.4) Satz
Sei χ der Charakter der Darstellung $\rho : G \to GL(V)$. Dann gilt:

(1) $\chi(1) = \mathrm{Grad}\, \rho$.

(2) $\chi(h^{-1}gh) = \chi(g) \quad \forall g, h \in G$. (Das heißt, χ ist konstant auf den Konjugiertenklassen von Elementen von G!)

(3) Ist $\rho' : G \to GL(W)$ weitere Darstellung von G mit Charakter χ', so ist $\chi + \chi'$ der Charakter von $\rho \oplus \rho'$.

(4) Ist ρ unitär, so ist $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} \quad \forall g \in G$.

Beweis:
(1): ist klar.
(2): Es ist

$$\chi(h^{-1}gh) = \mathrm{Sp}\Big(\rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h)\Big) = \mathrm{Sp}(R_h^{-1}R_gR_h) = \mathrm{Sp}(R_g) = \mathrm{Sp}\Big(\rho(g)\Big) = \chi(g)$$

nach (2.2)(b), wobei die R_x die zugehörigen Darstellungsmatrizen sind.
(3): ist klar, da nach (1.5) eine Darstellungsmatrix von $\rho \oplus \rho'$ von der Form $\left[\begin{array}{c|c} R_g & 0 \\ \hline 0 & R'_g \end{array}\right]$ ist.
(4): Sei $\langle\, ,\rangle$ eine G-invariante positiv definite hermitische Form auf V. Dann existiert nach Linearer Algebra, Kap.VII (2.11) eine Orthonomalbasis $\mathcal{B}$ von V, so daß $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\Big(\rho(g)\Big)$ Diagonalmatrix ist mit Diagonaleinträgen λ_i und $|\lambda_i| = 1$. Es folgt $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ und

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\Big(\rho(g^{-1})\Big) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\Big(\rho(g)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten:

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{Sp}\Big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\rho(g^{-1}))\Big) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} = \overline{(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)} = \overline{\chi(g)}.$$

□

Nach (1.2) gilt (2.4)(4) insbesondere für alle Darstellungen von endlichen Gruppen!

(2.5) Beispiel
Zum praktischen Berechnen des Charakters χ einer Darstellung ρ einer Gruppe G sind zwei Tatsachen wichtig:

(1) χ ist konstant auf den Konjugiertenklassen von G. Das heißt, wir brauchen χ nur auf Repräsentanten dieser Konjugiertenklassen zu berechnen.

(2) $\chi(g)$ ist basisunabhängig. Das heißt, wir können uns für jedes $g \in G$ eine geeignete Basis des Darstellungsraumes V wählen, um die Spur von R_g zu berechnen.

Sei $G = D_6 = \Sigma_3$. Wir wollen den Charakter χ der Darstellung ρ von G als Symmetriegruppe von Δ berechnen. (Wir fassen hierbei $\mathbb{R}^2$ als Untermenge von $\mathbb{C}^2$ auf und $GL(\mathbb{R}^2) \subseteq GL(\mathbb{C}^2)$.)

G hat 3 Konjugiertenklassen:
Einselement 1, drei Transpositionen mit Repräsentant $(1\,2)$ und zwei 3-Zykel mit Repräsentant $(1\,2\,3)$.

Es ist $\chi(1) = 2$ nach (2.4)(1). Weiter ist $\rho\Big((1\,2)\Big)$ Spiegelung. Das heißt bzgl. geeigneter Basis gilt $R_{(12)} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$. Somit $\chi\Big((1\,2)\Big) = 0$. Schließlich ist $\rho\Big((1\,2\,3)\Big)$ Drehung um $120°$ (bzw. $240°$). Das heißt nach Linearer Algebra:

$$R_{(123)} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi}{3}) & -\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \sin(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix}.$$

Somit $\chi\Big((1\,2\,3)\Big) = -1$ (da $\cos 120° = -\frac{1}{2}$!)

(2.6) Definition
Die Gruppe G operiere auf der Menge $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Das heißt, daß ein Homomorphismus $\sigma : G \to \Sigma_\Omega$ gegeben ist. Wir wollen nun einen Vektorraum $V(\Omega)$ mit Basis Ω konstruieren.

Sei $V(\Omega) := \{\sum_{i=1}^n c_i\alpha_i \mid c_i \in \mathbb{C}\}$ die Menge der formalen Summe mit skalarer Multiplikation

$$d(\sum_i c_i\alpha_i) = \sum_i (dc_i)\alpha_i$$

und Addition

$$(\sum_i c_i\alpha_i) + (\sum_i d_i\alpha_i) := \sum_i (c_i + d_i)\alpha_i.$$

Dann ist $V(\Omega)$ ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$ Vektorraum mit Basis Ω. Wir definieren nun eine lineare Darstellung $\rho : G \to GL\Big(V(\Omega)\Big)$ durch:

$$(\sum_i c_i\alpha_i)^{\rho(g)} := \sum_i c_i\alpha_i^{\sigma(g)} = \sum_i c_i\alpha_i^g.$$

Man rechnet leicht nach, daß ρ eine lineare Darstellung von G ist mit $\operatorname{Kern}\rho = \operatorname{Kern}\sigma$. Wir nennen ρ die zur Operation von G auf Ω (bzw. zu σ) gehörige (lineare) Permutationsdarstellung von G.

Diese Darstellung ρ ist niemals irreduzibel (falls $|\Omega| > 1$), denn es gibt immer einen echten G-invarianten Unterraum von $V(\Omega)$, nämlich $\mathbb{C}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)$ (da die Elemente $\rho(g)$ die Basis Ω permutieren und daher $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ festlassen).

Zerlegt man ρ nach (1.7) in irreduzible Darstellungen, so erhält man auf diese Weise häufig viele irreduzible Darstellungen von G.

Ist $\dim V = 1$ und $\varphi : G \to GL(V)$ mit $\varphi(g) = \mathrm{id}_V$, so nennt man φ die triviale Darstellung von G. Für ihren Charakter χ gilt: $\chi(g) = 1 \ \ \forall g \in G$.
Zwei Darstellungen $\rho : G \to GL(V)$ und $\rho' : G \to GL(V')$ heißen äquivalent, falls es einen Isomorphismus $\sigma : V \to V'$ gibt mit:

$$\sigma\rho'(g) = \rho(g)\sigma \quad \forall \quad g \in G.$$

(2.7) Hilfssatz
Die Gruppe G operiere auf der endlichen Menge Ω. Sei $\rho : G \to GL\Big(V(\Omega)\Big)$ die zugehörige lineare Permutationsdarstellung mit Charakter χ. Dann gilt:

$$\chi(g) = |\mathrm{Fix}(g)| = \#\ \text{Fixpunkte von } g \text{ auf } \Omega.$$

Beweis: Sei R_g die Darstellungsmatrix von g bzgl. der Basis Ω von $V(\Omega)$, wobei $\Omega = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Dann ist R_g Permutationsmatrix, wobei genau dann eine Eins auf der Diagonalen steht, falls das entsprechende α_i festbleibt. Ist $\alpha_i^g \neq \alpha_i$, so ist $r_{ii} = 0$. Es folgt:

$$\chi(g) = \mathrm{Sp}(R_g) = \#\ \text{Fixpunkte von } g \text{ auf } \Omega.$$

□

(2.8) Beispiel
Sei $G = \Sigma_3$, $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und ρ die Permutationsdarstellung von G auf $V(\Omega)$ mit Charakter χ. Dann gilt: $\chi(1) = 3$, $\chi(1\,2) = 1$ und $\chi(1\,2\,3) = 0$.

Sei nun ρ_1 die triviale Darstellung von G mit Charakter χ_1 und ρ_2 die Darstellung von G aus (2.5) mit Charakter χ_2. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\chi(1) &= 3 = 1 + 2 = \chi_1(1) + \chi_2(1), \\
\chi(1\,2) &= 1 = 1 + 0 = \chi_1(1\,2) + \chi_2(1\,2), \\
\chi(1\,2\,3) &= 0 = 1 + (-1) = \chi_1(1\,2\,3) + \chi_2(1\,2\,3).
\end{aligned}$$

Es folgt daher $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Wir werden in §3 sehen, daß hieraus $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ folgt.

(2.9) Satz
Seien $\rho : G \to GL(V)$ und $\rho' : G \to GL(V')$ äquivalente Darstellungen der Gruppe G mit Charakteren χ und χ'. Dann ist $\chi = \chi'$.

Beweis: Da ρ äquivalent zu ρ' ist, existiert ein Isomorphismus $\sigma : V \to V'$ mit $\sigma\rho'(g) = \rho(g)\sigma$ für alle $g \in G$. Dies bedeutet für die Matrix A von σ bzgl. fester Basen von V und V', daß $AR'_g = R_g A$ für alle $g \in G$; äquivalent: $R'_g = A^{-1} R_g A$ für alle $g \in G$. Es folgt

$$\chi'(g) = \mathrm{Sp}(R'_g) = \mathrm{Sp}(A^{-1} R_g A) = \mathrm{Sp}(R_g) = \chi(g)$$

für alle $g \in G$, und daher $\chi = \chi'$. □

§3 Die Orthogonalitätsrelationen

(3.1) Definition
Sei G eine endliche Gruppe und seien $g_1, \dots, g_d$ Repräsentanten der Konjugiertenklassen von Elementen von G mit $g_1 = 1_G$. Sei V der Vektorraum der Klassenfunktionen auf G; das heißt, der Abbildungen $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(g) = f(g^h) \quad \forall g, h \in G$. Dann ist V mit der natürlichen Addition und skalaren Multiplikation (das heißt,

$$(f + f')(g) := f(g) + f'(g) \text{ und } (c \cdot f)(g) := cf(g))$$

ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Da jede Klassenfunktion durch die Angabe ihrer Werte auf $g_1, \ldots, g_d$ bestimmt ist, bilden die Funktionen f_i mit $f_i(g_j) = \delta_{ij}$ eine Basis von V. Das heißt, $\dim V = d$. Auf V definieren wir eine hermitische Form durch

$$(f, h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\overline{h(g)}.$$

Dann gilt:

(3.2) <u>Hilfssatz</u>
$(\ ,\ )$ ist eine positiv definite hermitische Form auf V.

<u>Beweis:</u> Offensichtlich gilt $(f, h) = \overline{(h, f)}$ und $(f_1 + f_2, h) = (f_1, h) + (f_2, h)$ sowie $(cf, h) = c(f, h)$. Nun gilt $(f, f) = \frac{1}{|G|} \sum_g f(g)\overline{f(g)} \in \mathbb{R}$ und ≥ 0. Weiter

$$(f, f) = 0 \Longleftrightarrow f(g) = 0 \quad \forall g \in G;$$

das heißt, $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (als Vektor von V!) $\square$

(3.3) <u>Hauptsatz</u> (Orthogonalitätsrelationen)
Sei G eine endliche Gruppe mit d Konjugiertenklassen von Elementen. Seien $\rho_1, \rho_2, \ldots$ Repräsentanten der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G mit Charakteren $\chi_1, \chi_2, \ldots$. Dann gilt:

(1) $\#\ \chi_i = d$. (Das heißt, es gibt genau d Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G.)

(2) Die χ_i bilden eine Orthonomalbasis von V. Das heißt, $(\chi_i, \chi_j) = \delta_{ij}$.

(3) $\sum_{i=1}^{d} \chi_i(1)^2 = |G|$. ($\chi_i(1)$ ist der Grad von ρ_i!)

Wir wollen in diesem Paragraphen einige Folgerungen aus (3.3) ziehen und einige Beispiele besprechen. Der Beweis erfolgt in §4.

(3.4) <u>Folgerung</u>
Sei ρ Darstellung der endlichen Gruppe G mit Charakter χ. Sei $n_i = (\chi_i, \chi)$ für $i = 1, \ldots, d$, wobei die χ_i die irreduziblen Charaktere von G sind. Dann ist $\chi = n_1\chi_1 + \cdots + n_d\chi_d$.

<u>Beweis:</u> Es ist $\chi = \sum_{i=1}^{d} c_i\chi_i$, da die χ_i eine Basis des Raums der Klassenfunktionen bilden. Somit $c_i = (\chi_i, \chi) = n_i$ nach (3.3)(2). $\square$

(3.5) <u>Definition</u>
Sei G endliche Gruppe und $\rho : G \to GL(V)$ beliebige Darstellung von G. Dann ist nach (1.7) ρ Summe irreduzibler Darstellungen.

Seien $\rho_1, \ldots, \rho_d$ Repräsentanten der Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen. Kommen in der Summendarstellung von ρ jeweils n_i Summanden vor, die äquivalent zu ρ_i sind, so schreiben wir

$$(*) \qquad \rho \approx n_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus n_d\rho_d.$$

Für den Darstellungsraum V von ρ bedeutet dies

$$V = \overbrace{(V_1 \oplus \cdots \oplus V_1)}^{n_1 \text{ mal}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{(V_d \oplus \cdots \oplus V_d)}^{n_d \text{ mal}}$$

wobei $n_i = 0$ möglich ist und $g \mapsto \rho(g)\,|_{V_i}$ äquivalent zu ρ_i ist.

Die Schreibweise $(*)$ ist vernünftig, denn wir können formal die Darstellungen $n_i\rho_i$ bilden durch $n_i\rho_i = \rho_i \oplus \cdots \oplus \rho_i (n_i \text{ mal})$, und dann die Darstellung $n_1\rho_1 \oplus n_2\rho_2 \oplus \cdots \oplus n_d\rho_d$. $(*)$ bedeutet, daß ρ äquivalent zu dieser formal gebildeten Darstellung ist.

(3.6) Folgerung
Sei G endliche Gruppe mit d Konjugiertenklassen von Elementen. Seien $\rho_1, \dots, \rho_d$ Repräsentanten der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von G mit Charakteren $\chi_1, \dots, \chi_d$. Ist ρ beliebige Darstellung von G mit Charakter χ und $\chi = \sum_{i=1}^n n_i\chi_i$, so ist $\rho \approx n_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus n_d\rho_d$.

Beweis: Nach (3.5) ist $\rho \approx m_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus m_d\rho_d$ mit $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für den zugehörigen Charakter χ von ρ bedeutet dies jedoch offensichtlich $\chi = \sum_{i=1}^d m_i\chi_i$. Nach (3.3)(2) folgt $m_i = n_i$ für $i = 1, \dots, d$. $\square$

(3.7) Folgerung
Haben zwei Darstellungen ρ und ρ' der endlichen Gruppe G denselben Charakter χ, so sind sie äquivalent.

Beweis: Ist $\chi = \sum_{i=1}^d n_i\chi_i$, so gilt nach (3.5), daß $\rho \approx n_1\rho_1 \oplus \cdots \oplus n_d\rho_d \approx \rho'$. $\square$

(3.8) Folgerung
Sei χ Charakter der endlichen Gruppe G. Genau dann ist χ irreduzibel, wenn $(\chi, \chi) = 1$.

Beweis: Sei $\chi = \sum_{i=1}^d n_i\chi_i$. Dann gilt nach (3.3)(2) daß $(\chi, \chi) = \sum_{i=1}^d n_i^2$. Das heißt, $(\chi, \chi) = 1$ impliziert $\chi = \chi_i$ für ein i. $\square$

(3.8) ist ein nützliches Kriterium um zu testen, ob eine Darstellung irreduzibel ist.

(3.9) Beispiel
$G = A_5$. Dann hat G nach Algebra fünf Konjugiertenklassen von Elementen mit Repräsentanten: $1 = \mathrm{id}, (1\,2)(3\,4), (1\,2\,3), \rho = (1\,2\,3\,4\,5)$ und $\rho^2 = (1\,3\,5\,2\,4)$. Sei ρ die Permutationsdarstellung von G auf $V(\Omega)$ mit $\Omega = \{1, \dots, 5\}$ und Charakter χ. Dann ist χ nach (2.6) nicht irreduzibel, sondern enthält den trivialen Charakter χ_1. Das heißt $\chi = \chi_1 + \chi_2$, wobei $\chi_2 = \chi - \chi_1$ der Charakter einer Darstellung vom Grad 4 ist. (Es ist $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, wobei ρ_1 die triviale Darstellung ist. Also $\operatorname{Grad}\rho_2 = 5 - 1 = 4$!)
Wir berechnen (χ_2, χ_2):

$$\begin{aligned}
\chi_2(1) &= \chi(1) - \chi_1(1) = 5 - 1 = 4, \\
\chi_2\Big((1\,2)(3\,4)\Big) &= |\mathrm{Fix}\Big((1\,2)(3\,4)\Big)| - 1 = 0, \\
\chi_2\Big((1\,2\,3)\Big) &= |\mathrm{Fix}\Big((1\,2\,3)\Big)| - 1 = 1, \\
\chi_2(\rho) &= -1 = \chi_2(\rho^2).
\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
(\chi_2, \chi_2) &= \frac{1}{60}\Big(\chi_2(1)^2 + 15 \cdot \chi_2\Big((1\,2)(3\,4)\Big)^2 + 20 \cdot \chi_2\Big((1\,2\,3)\Big)^2 + 12 \cdot \chi_2(\rho)^2 + 12 \cdot \chi_2(\rho^2)^2\Big) \\
&= \frac{1}{60}(16 + 0 + 20 + 12 + 12) = 1.
\end{aligned}$$

Daher ist χ_2 irreduzibler Charakter von A_5 vom Grad 4. Nach (3.3)(3) gilt:

$$60 = |A_5| = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(1)^2 = 1^2 + 4^2 + \chi_3(1)^2 + \chi_4(1)^2 + \chi_5(1)^2.$$

Durch Diskutieren der Möglichkeiten erhält man $\chi_3(1) = 3 = \chi_4(1)$ und $\chi_5(1) = 5$ (bis auf Umnumerierung!) Dies bedeutet: A_5 hat, bis auf die triviale Darstellung, vier nichtäquivalente irreduzible Darstellungen mit Graden $4, 3, 3$ und 5.

(3.10) Hilfssatz
Sei G endliche kommutative Gruppe. Dann hat jede irreduzible Darstellung von G den Grad 1.

Beweis: Da G kommutativ ist, ist $|G| = \#$ Konjugiertenklassen von Elementen von $G = d$. Nach (3.3)(3) folgt: $d = \sum_{i=1}^{d} \chi_i(1)^2$. Also $\chi_i(1) = \operatorname{Grad} \chi_i = 1$ für alle i. □

(3.11) Beispiel (Charaktertafeln)
Eine Tafel, bei der man in die Zeilen die irreduziblen Charaktere und in die Spalten Repräsentanten der Konjugiertenklassen von Elementen schreibt, nennt man Charaktertafel der Gruppe G. Üblicherweise schreibt man in die erste Zeile den trivialen Charakter und in die erste Spalte das Einselement.

(a) Charaktertafel von Σ_3:
Σ_3 hat drei Konjugiertenklassen von Elementen mit Repräsentanten $1, (1\,2)$ und $(1\,2\,3)$. Daher hat Σ_3 drei irreduzible Charaktere χ_1, χ_2, χ_3, wobei χ_1 der triviale Charakter ist. Nach (3.3)(3) folgt $\chi_1(1) = \chi_2(1) = 1$, $\chi_3(1) = 2$. Das heißt, χ_3 ist der Charakter der Darstellung von $\Sigma_3 \simeq D_6$ als Symmetriegruppe von Δ. Wir erhalten

	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1		
χ_3	2	0	-1

Wegen $\chi_2(1) = 1$ ist $\Sigma_3/\operatorname{Kern}\chi_2 \subseteq \mathbb{C}^*$, also kommutativ. Es folgt $A_3 = \langle (1\,2\,3) \rangle = \operatorname{Kern}\chi_2$ und $\chi_2\Big((12)\Big)$ ist Element von $\mathbb{C}^*$ der Ordnung 2; daher

	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

(b) Charaktertafel von A_4:
A_4 hat vier Konjugiertenklassen von Elementen mit Repräsentanten: $1, \rho = (1\,2\,3), \rho^2$ und $\sigma = (1\,2)(3\,4)$. Daher hat A_4 vier irreduzible Charaktere $\chi_1, \dots, \chi_4$, wobei χ_1 der triviale Charakter ist.

Ist nun N die Kleinsche Vierergruppe, so ist $A_4/N \simeq \mathbb{Z}_3$. Daher gibt es einen surjektiven Homomorphismus $\pi : A_4 \to \mathbb{Z}_3$. Nun hat $\mathbb{Z}_3$ nach (3.10) genau 3 irreduzible Darstellungen $\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \overline{\rho}_3$ vom Grad 1. Dies bedeutet, die Hintereinanderausführung $\rho_i = \pi\overline{\rho}_i$, $(i = 1, 2, 3)$ sind irreduzible Darstellungen vom Grad 1 von A_4. Sei o.B.d.A. ρ_1 die triviale Darstellung und χ_1, χ_2, χ_3 die zugehörigen Charaktere. Wir erhalten, falls $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ primitive 3-te Einheitswurzel ist:

	1	ρ	ρ^2	σ
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ξ	ξ^2	1
χ_3	1	ξ^2	ξ	1
χ_4	3	0	0	-1

.

(Da wie in (3.9), $\chi_4 = \chi - \chi_1$, wobei χ der Charakter der 4-dimensionalen Permutationsdarstellung von A_4 ist.)

§4 Das Schur'sche Lemma, Beweis der Orthogonalitätsrelationen

(4.1) Definition
Seien ρ und ρ' Darstellungen der Gruppe G mit Darstellungsräumen V bzw. V'. Eine lineare Abbildung $\sigma \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$ heißt G-invariant (bzgl. ρ und ρ'), falls

$$\rho(g)\sigma = \sigma\rho'(g) \qquad \forall g \in G.$$

$\mathrm{Hom}_G(V, V') := \{\ \sigma \in \mathrm{Hom}\,(V, V') \mid \sigma\ G\text{-invariant}\ \}$.

(4.2) Hilfssatz
Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$. Dann sind $\mathrm{Kern}\,\sigma$ und $\sigma(V)$ G-invariante Unterräume von V bzw. V'.

Der Beweis hierzu ist offensichtlich.

(4.3) Schur'sches Lemma
Seien ρ und ρ' irreduzible Darstellungen der Gruppe G mit Darstellungsräumen V bzw. V'. Dann gilt:

(1) Sind ρ und ρ' nicht äquivalent, so ist $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \{0\}$.

(2) Sind ρ und ρ' äquivalent, so ist $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \mathbb{C} \cdot \sigma$, wobei σ G-invarianter Isomorphismus von V nach V' ist.

Beweis: Sei $\sigma \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ mit $\sigma \neq 0$. Dann ist $\mathrm{Kern}\,\sigma$ nach (4.2) G-invarianter Unterraum, also $\mathrm{Kern}\,\sigma = \{0\}$, da ρ irreduzibel. Analog $\sigma(V) = V'$, da $\sigma(V)$ G-invarianter Unterraum von V' ist. Somit ist σ Isomorphismus von V nach V' mit $\rho(g)\sigma = \sigma\rho'(g) \quad \forall g \in G$. Nach (2.6) bedeutet dies jedoch, daß ρ und ρ' äquivalent sind.

Dies bedeutet insbesondere $\mathrm{Hom}_G(V, V') = \{0\}$, falls ρ und ρ' nicht äquivalent sind, also (1). Desweiteren gilt, falls ρ und ρ' äquivalent sind:

$$\text{Ist } \ 0 \neq \sigma \in \mathrm{Hom}_G(V, V'), \ \text{ so ist } \ \sigma \ \text{ Isomorphismus.}$$

Sei nun $0 \neq \tau \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$. Wir zeigen $\tau\sigma^{-1} = c \cdot \mathrm{id}_V$ mit $c \in \mathbb{C}^*$. Es ist $\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$. Sei c Eigenwert von $\tau\sigma^{-1}$ und V_c der zugehörige Eigenraum. Dann ist V_c G-invariant, also $V_c = V$, da V irreduzibel ist. Dies bedeutet $\tau\sigma^{-1} = c \cdot \mathrm{id}_V$.

Wir erhalten: $\tau = c \cdot \sigma$ für jedes weitere $0 \neq \tau \in \mathrm{Hom}_G(V, V')$ mit $c \in \mathbb{C}^*$. Dies beweist (2). □

Sind ρ und ρ' Darstellungen der endlichen Gruppe G mit Darstellungsräumen V bzw. V', so definiert man zu $\sigma \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$ ein $\widetilde{\sigma}$ durch:

$$\widetilde{\sigma} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)\sigma\rho'(g^{-1}).$$

Wegen $\rho(g)\sigma\rho'(g^{-1}) \in \mathrm{Hom}\,(V, V')\ \forall g \in G$ und da $\mathrm{Hom}\,(V, V')$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, folgt, daß $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$. Es gilt:

(4.4) Hilfssatz

(1) Zu jedem $\sigma \in \mathrm{Hom}\,(V,V')$ ist $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{Hom}_G(V,V')$.

(2) Die Abbildung $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ ist linear von $\mathrm{Hom}\,(V,V')$ in $\mathrm{Hom}\,(V,V')$.

<u>Beweis:</u>
(1): Für $h \in G$ gilt:

$$\begin{aligned}\rho(h)\widetilde{\sigma} &= \rho(h)\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\sigma\rho'(g^{-1})\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(h)\rho(g)\sigma\rho'(g^{-1})\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{hg\in G}\rho(hg)\sigma\rho'\Big(g^{-1}h^{-1}\Big)\rho'(h) = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{hg\in G}\rho(hg)\sigma\rho'\Big((hg)^{-1}\Big)\Big)\rho'(h) = \widetilde{\sigma}\rho'(h).\end{aligned}$$

Der Beweis von (2) folgt durch direktes Rechnen. □

Wir zeigen nun:

(4.5) <u>Satz.</u>
Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt für die irreduziblen Charaktere χ_i von G, daß $(\chi_i,\chi_j) = \delta_{ij}$.

<u>Beweis:</u> Seien ρ,ρ' beliebige Darstellungen von G mit Charakteren χ,χ' und Darstellungsräumen V,V'. Zu beliebigem $g \in G$ sei $\Phi_g : \mathrm{Hom}\,(V,V') \to \mathrm{Hom}\,(V,V')$ definiert durch: $\Phi_g : \varphi \mapsto \rho(g)\varphi\rho'(g^{-1})$.

Wir zeigen zuerst:

$$(*)\qquad \mathrm{Sp}(\Phi_g) = \chi(g)\chi'(g^{-1}).$$

Sei $\dim V = n$, $\dim V' = m$. Dann können wir $\mathrm{Hom}\,(V,V')$ mit $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ identifizieren und Φ_g mit $\widetilde{\Phi}_g : A \mapsto R_g A R'_{g^{-1}}$, $A \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$, wobei R_g bzw. $R'_{g^{-1}}$ Darstellungsmatrizen von $\rho(g)$ bzw. $\rho'(g^{-1})$ sind.

Sei nun $(E_{ij})1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ Basis aus Elementarmatrizen von $M_{n\times m}(\mathbb{C})$. Dann gilt nach Übungsaufgabe

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\Phi_g &= \mathrm{Sp}\widetilde{\Phi}_g = \sum_{i,j}\Big(\widetilde{\Phi}_g(E_{ij})\Big)_{i,j} = \sum_{i,j}(R_g E_{ij} R'_{g^{-1}})_{i,j} = \sum_{i,j}(R_g)_{i,i}(R'_{g^{-1}})_{j,j}\\ &= \Big(\sum_i (R_g)_{i,i}\Big)\Big(\sum_j (R'_{g^{-1}})_{j,j}\Big) = (\mathrm{Sp}R_g)(\mathrm{Sp}R'_{g^{-1}}) = \chi(g)\chi'(g^{-1}),\end{aligned}$$

wobei für eine beliebige Matrix M, $(M)_{i,j}$ der i,j-te Eintrag von M bedeutet.

Sei nun $\Phi : \mathrm{Hom}\,(V,V') \to \mathrm{Hom}\,(V,V')$ die Abbildung, die jedem $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V,V')$ die lineare Abbildung $\widetilde{\varphi}$ aus (4.4) zuordnet. Dann gilt nach Definition von $\widetilde{\varphi}$, daß

$$\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi_g(\varphi),$$

also $\Phi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\Phi_g$ als lineare Abbildung. Es folgt:

$$(+)\qquad \mathrm{Sp}\Phi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Sp}\Phi_g = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\chi'(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi'(g)} = (\chi,\chi')$$

nach (2.4)(4) und der Definition von (,).

Nun ist nach (4.4) $\widetilde{\varphi}$ G-invariante lineare Abbildung. Sind jedoch χ und χ' verschiedene irreduzible Charaktere, so ist nach (4.3)(1) $\widetilde{\varphi} = 0$ für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, V')$. Dies bedeutet, daß Φ die Nullabbildung ist; insbesondere also $\mathrm{Sp}\Phi = 0$. Wir haben gezeigt:

(**) Sind χ und χ' verschiedene irreduzible Charaktere von G, so ist $(\chi, \chi') = \mathrm{Sp}\Phi = 0$.

Ist nun $\chi = \chi'$ irreduzibel und $V = V'$, so ist nach (4.3)(2) $\widetilde{\varphi} = c_\varphi \mathrm{id}$ für ein $c_\varphi \in \mathbb{C}$ für jedes $\varphi \in \mathrm{Hom}\,(V, V)$. Desweiteren ist nach Definition

$$\widetilde{\mathrm{id}}_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \mathrm{id}_V \rho(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}(|G| \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V.$$

Dies bedeutet, daß Φ Projektion von $\mathrm{Hom}\,(V, V)$ auf $\mathbb{C}\mathrm{id}_V$ ist. Nach Linearer Algebra bedeutet dies, daß $(\chi, \chi) = \mathrm{Sp}\Phi = 1$. Dies beweist (4.5). □

(4.5) bedeutet insbesondere, daß die irreduziblen Charaktere von G linear unabhängige Vektoren im Raum der Klassenfunktionen von G sind. Wir erhalten:

(4.6) Folgerung
Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt:

$$\#\ \text{der irreduziblen Charaktere von } G \leq l = \#\ \text{Konjugiertenklassen von } G.$$

Um zu zeigen, daß $l = \#$ irreduziblen Charaktere von G, benutzen wir die sogenannnte reguläre Darstellung von G.

(4.7) Definition
Sei G eine Gruppe. Dann operiert G auf der Menge $\Omega = G$ durch Rechtsmultiplikation $g : h \mapsto hg$. Auf diese Weise erhält man eine transitive Permutationsdarstellung von G auf sich, die sogenannte reguläre Permutationsdarstellung von G.

Ist G endlich, so sei $V = V(G)$ wie in (2.6). Dann ist V Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Basis G. Also $\dim V = |G|$. Die lineare Permutationsdarstellung von G auf $V(G)$ gegeben durch (2.6) nennen wir reguläre Darstellung von G und bezeichnen sie mit ρ^{reg}. Der zugehörige Charakter sei χ^{reg}.

Für die reguläre Permutationsdarstellung gilt:

(4.8) Hilfssatz
Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt:

(1) $\chi^{\mathrm{reg}}(1) = |G|$.

(2) $\chi^{\mathrm{reg}}(g) = 0$ für $1 \neq g \in G$.

(3) $h^{\rho^{\mathrm{reg}}(g)} = hg \quad \forall g, h \in G$.

(3) ist klar. (1) und (2) folgen aus (2.7).

(4.9) Satz
Sei G eine endliche Gruppe. Dann gilt:

$$\#\ \text{irreduzible Charaktere von } G = l = \#\ \text{Konjugiertenklassen von } G.$$

Beweis: Da nach (3.1) der Raum der Klassenfunktionen auf G ein l-dimensionaler unitärer Raum ist, reicht es zu zeigen:

(∗) Ist $\Phi : G \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion, die auf allen irreduziblen Charakteren senkrecht steht, so ist $\Phi = 0$.

Sei Φ eine solche Klassenfunktion. Nach (1.7) können wir die reguläre Darstellung von G zerlegen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen, also:

$$\rho^{\text{reg}} = \bigoplus_i \rho_i \ , \ \chi^{\text{reg}} = \sum_i \chi_i \ , \ V(G) = \bigoplus_i V_i.$$

Zu jedem ρ_i bilden wir:

$$\varphi_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_i(g)\overline{\Phi(g)} \in \operatorname{Hom}(V_i, V_i).$$

Dann gilt:

$$\operatorname{Sp}\varphi_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Sp}\Big(\rho_i(g)\overline{\Phi(g)}\Big) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \operatorname{Sp}\Big(\rho_i(g)\Big)\overline{\Phi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\Phi(g)} = (\chi_i, \Phi) = 0.$$

Wir zeigen als nächstes:

(a) φ_i ist G-invariant.

(b) $\varphi_i = 0 \quad \forall i$.

Es gilt:

$$\rho_i(h)\varphi_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_i(h)\rho_i(g)\overline{\Phi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_i(hg)\overline{\Phi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho_i(g'h)\overline{\Phi(g')} = \varphi_i\rho_i(h),$$

wobei $g' = hgh^{-1}$ ist, und $\Phi(g) = \Phi(g')$, da Φ Klassenfunktion. Dies zeigt (a).
Da ρ_i irreduzibel ist, folgt aus (4.3)(2), daß $\varphi_i = c_i \mathrm{id}_{V_i}$ mit $c_i \in \mathbb{C}$. Wegen $\operatorname{Sp}\varphi_i = 0$ folgt $\varphi_i = 0$.

Aus (b) folgt für $\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho^{\text{reg}}(g)\overline{\Phi(g)}$, daß auch $\varphi = 0$ ist, da $\varphi \mid_{V_i} = \varphi_i$. Wir erhalten, angewendet auf $1_G \in V = V(G)$:

$$0 = 1^{\varphi} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\Phi(g)} 1^{\rho^{\text{reg}}}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\Phi(g)} g$$

nach (4.8)(3). Nun bildet G eine Basis von $V = V(G)$. Dies bedeutet $\Phi(g) = 0 \ \forall g \in G$, und somit $\Phi = 0$. □

(4.5) und (4.9) beweisen Teil (1) und (2) von (3.3). Zum Beweis von Teil (3) berechnen wir:

$$(\chi_i, \chi^{\text{reg}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\overline{\chi^{\text{reg}}(g)} = \frac{1}{|G|}\chi_i(1)\chi^{\text{reg}}(1) = \chi_i(1) =: d_i$$

nach (4.8) für jeden irreduziblen Charakter χ_i von G. Da die irreduziblen Charaktere eine Orthonomalbasis des Raumes der Klassenfunktionen bilden, folgt $\chi^{\text{reg}} = \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_i$.

Es folgt:

$$|G| = \chi^{\text{reg}}(1) = \sum_{i=1}^{l} d_i \chi_i(1) = \sum_{i=1}^{l} \chi_i(1)^2.$$

Dies beweist (3.3) vollständig.

Als Folgerung von (3.3) zeigen wir noch:

(4.10) Satz
Seien $\chi_1, \cdots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G und $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ die Konjugiertenklassen. Wähle $x_i \in \mathcal{C}_i$ und setze $h_i = |\mathcal{C}_i|$. Dann gilt:

$$\sum_{m=1}^{n} \chi_m(x_i)\overline{\chi_m(x_j)} = \delta_{ij}\frac{|G|}{h_j}.$$

Beweis. Wir definieren zwei $h \times h$-Matrizen $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ durch

$$b_{ij} = \frac{h_j}{|G|}\overline{\chi_i(x_j)} \text{ und } c_{ij} = \chi_j(x_i).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{h} b_{rt}c_{ts} &= \sum_{t=1}^{h} \frac{h_t}{|G|}\overline{\chi_r(x_t)}\chi_s(x_t) \\ &= \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G} \chi_s(g)\overline{\chi_r(g)}\Big) = \delta_{rs} \text{ nach (3.3)(2).} \end{aligned}$$

Es folgt $BC = I_h$, also auch $CB = I_h$. Daher gilt für den i,j-ten Eintrag von CB:

$$\delta_{ij} = \sum_{m=1}^{h} c_{im}b_{mj} = \sum_{m=1}^{h} \chi_m(x_i)\frac{h_j}{|G|}\overline{\chi_m(x_j)}.$$

□

§5 Ganze algebraische Zahlen und der $p^a q^b$-Satz von Burnside

(5.1) Definition. Ein algebraischer Zahlkörper ist eine endliche Erweiterung K von $\mathbb{Q}$. (Das heißt $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{C}$ und $\dim_{\mathbb{Q}} K < \infty$!). Ein $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt ganze algebraische Zahl, falls α Wurzel eines Polynoms $f(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$ mit $a_n = 1$ ist. (Ein solches Polynom heißt normiert. $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, falls es eine Wurzel eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[x]$ ist.)

(5.2) Hilfssatz. Sei α algebraisch. Dann sind äquivalent:

(1) α ist ganze algebraische Zahl.

(2) Ist $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ das Minimalpolynom von α, so ist $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

(3) $\mathbb{Z}[\alpha] := \{\sum_{i=0}^{m} c_i\alpha^i \mid m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c_i \in \mathbb{Z}\}$ ist endlich erzeugt. (Das heißt es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\mathbb{Z}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n} c_i\alpha^i \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$!)

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2)
Sei α Wurzel des normierten Polynoms $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Dann ist $h(x)$ Vielfaches des Minimalpolynoms $f(x)$ von α, das heißt

$$h(x) = f(x)g(x) \text{ mit } g(x) \in \mathbb{Q}[x],$$

wobei auch $g(x)$ normiert ist. Sei nun $f(x) = \Sigma_{i=0}^{n} \frac{p_i}{q_i} x^i$ mit $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ und $p_n = 1 = q_n$. Setze $b =$ kgV (q_i) und $a =$ ggT (p_i) und $F(x) = \frac{b}{a} f(x)$. Dann ist $F(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und der ggT der Koeffizienten von $F(x)$ ist 1.

Analog setze $G(x) = \frac{d}{c} g(x)$, sodaß $G(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und der ggT der Koeffizienten von $G(x)$ auch 1 ist. Dann gilt:

$(*)$ Der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von $F(x)G(x)$ ist auch 1.

Angenommen $(*)$ ist falsch. Dann existiert eine Primzahl p die alle Koeffizienten von $F(x)G(x)$ teilt. Es bezeichne $- : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$, indem man die Koeffizienten eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[x]$ mod p liest. Dann

$$\overline{F(x)}\ \overline{G(x)} = \overline{F(x)G(x)} = 0.$$

Es folgt $\overline{F(x)} = 0$ oder $\overline{G(x)} = 0$, da $\mathbb{Z}_p[x]$ nullteilerfrei. (Nach Algebra ist $K[x]$ nullteilerfrei für jeden Körper K!) Dies würde jedoch bedeuten, dass p alle Koeffizienten von $F(x)$ bzw. $G(x)$ teilt, ein Widerspruch. Dies zeigt $(*)$.

Nun gilt $bd\, h(x) = acF(x)G(x)$.
Daher ist $bd =$ ggT der Koeffizienten von $bd\, h(x) = ac$. Es folgt $h(x) = F(x)G(x)$. Daher sind auch $F(x)$ und $G(x)$ normiert. Es folgt $\frac{b}{a} = 1$ und $F(x) = f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ und $a_n = 1$. Dann gilt $(+)\, \alpha^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i$. Es folgt $\mathbb{Z}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha^i \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$. $(\alpha^{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} a_{i-1}\alpha^n$. Setzt man nun für α^n den Ausdruck $(+)$ ein, so folgt $\alpha^{n+1} \in \{\sum_{i=0}^{n-1} c_i \alpha^i \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$ usw.!)

(3) $\Rightarrow$ (1)

Sei $\mathbb{Z}[\alpha] = \{\sum_{i=0}^{n} c_i \alpha^i \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$. Dann

$$\alpha^{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i, a_i \in \mathbb{Z},$$

also $\alpha^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0$. Hieraus folgt nach Definition, daß α ganz algebraisch ist. □

(5.3) Folgerung. Es gelten:

(1) Die ganzen algebraischen Zahlen bilden einen Unterring von $\mathbb{C}$.

(2) Ist $\chi : G \to \mathbb{C}$ Charakter der endlichen Gruppe G, so ist $\chi(g)$ ganz algebraisch für alle $g \in G$.

Beweis.

(1) Es reicht zu zeigen, daß $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ ganz algebraisch sind, falls α und β ganz algebraisch. Nach (5.2)(3) wird $\mathbb{Z}[\alpha]$ erzeugt von $\alpha^0, \cdots, \alpha^n$ und $\mathbb{Z}[\beta]$ von $\beta^0, \cdots, \beta^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Somit wird $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ erzeugt von $\{\alpha^i\beta^j \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$. ($\mathbb{Z}[\alpha, \beta] = \{\sum_{i,j} c_{ij}\alpha^i\beta^i \mid c_{ij} \in \mathbb{Z}\}$!) Daher werden nach $\mathbb{Z}[\alpha+\beta]$ und $\mathbb{Z}[\alpha\beta]$ als Unterringe von $\mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ endlich erzeugt. Daher sind $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ nach (5.2) ganz algebraisch.

(2) Sei ρ die zu χ gehörige Darstellung mit zugehöriger Matrixdarstellung $R : G \to GL_n(\mathbb{C})$. Dann ist nach (2.3) $\chi(g) = \mathrm{Sp}(R_g) =$ Summe der Eigenwerte von R_g. Da g endlich, also $g^n = 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sind die Eigenwerte von R_g n-te Einheitswurzeln, also ganz algebraisch. Daher ist nach (1) auch $\chi(g)$ ganz algebraisch. □

(5.4) Folgerung. Die einzigen ganzen algebraischen Zahlen die gleichzeitig rational sind, sind die ganzen Zahlen.

Beweis. Ist α rational, so ist $x - \alpha$ das Minimalpolynom von α. Ist nun α ganz algebraisch, so ist nach (5.2) $x - \alpha \in \mathbb{Z}[x]$, also $\alpha \in \mathbb{Z}$. □

(5.5) Definition. Sei $G = \{g_1, \cdots, g_n\}$ eine endliche Gruppe. Dann nennen wir die Menge aller formalen Summen

$$\mathbb{C}G := \{\sum_{i=1}^{n} c_i g_i \mid c_i \in \mathbb{C}\}$$

die Gruppenalgebra von G.

$\mathbb{C}G$ wird mit der Addition:

$$(\sum c_i g_i) + (\sum d_i g_i) := \sum (c_i + d_i) g_i$$

und der skalaren Multiplikation

$$d(\sum c_i g_i) := \sum (dc_i) g_i$$

zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit Basis $(g_1, \cdots, g_n)$. Außerdem ist auf $\mathbb{C}G$ eine Multiplikaiton gegeben durch:

$$(\sum c_i g_i)(\sum d_j g_j) = \sum_{i,j} c_i d_j g_i g_j$$

und $\mathbb{C}G$ bildet mit dieser Multiplikation einen Ring. Es ist

$$Z(\mathbb{C}G) = \{a \in \mathbb{C}G \mid ab = ba \text{ für alle } b \in \mathbb{C}G\}$$

das Zentrum von $\mathbb{C}G$. Offensichtlich ist $Z(\mathbb{C}G)$ ein Unterring und ein Untervektorraum von G.

(5.6) Hilfssatz. Sei G eine endliche Gruppe und seien $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ die Konjugiertenklassen von Elementen von G. Sei $C_i = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} x$ (gebildet in $\mathbb{C}G$) $\qquad i = 1, \cdots, h$.

Dann bildet $(C_1, \cdots, C_h)$ eine Basis von $Z(\mathbb{C}G)$. Insbesondere $\dim Z(\mathbb{C}G) = h$.

Beweis. Sei $x \in \mathcal{C}_i$ und $g \in G$. Dann $g^{-1}xg \in \mathcal{C}_i$, also $g^{-1}C_i g = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} g^{-1}xg = C_i$. Es folgt $C_i g = gC_i$ für alle $g \in G$ und daher $C_i \in Z(\mathbb{C}G); i = 1, \cdots, h$. Da $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ und da $\{g_1, \cdots, g_n\} = G$ eine Basis von $\mathbb{C}G$ bildet, sind $C_1, \cdots, C_h$ auch linear unabhängig.

Sei nun $\mathcal{C}_i = \{x_{ij} \mid j = 1, \cdots, n_i\}$ mit $n_i = |\mathcal{C}_i|$. Dann läßt sich jedes $a \in Z(\mathbb{C}G)$ eindeutig in der Form

$$(*) \qquad a = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \text{ mit } c_{ij} \in \mathbb{C} \text{ und } i = 1, \cdots, h \text{ und } j = 1, \cdots, n_i$$

darstellen. Wir zeigen $c_{ij} = c_{ik} = c_i$ für alle $j, k \leq n_i$ und alle i. Ist dies gezeigt, so folgt

$$a = \sum_{i=1}^{h} c_i (\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}) = \sum_{i=1}^{h} c_i C_i$$

und daher ist jedes $a \in Z(\mathbb{C}G)$ Linearkombination der C_i was (3.6) beweist.

Nun gilt für $g \in G : g^{-1}\mathcal{C}_i g = \mathcal{C}_i$. Es folgt

$$\sum_{i=1}^{h} (\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_{ij}) = a = g^{-1} a g = \sum_{i=1}^{h} (\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} g^{-1} x_{ij} g).$$

Ist nun $g^{-1} x_{ij} g = x_{ik}$ so müssen, da $\{x_{ij} \mid i = 1, \cdots, h, j \leq n_i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}G$ bildet, die Koeffizienten bei x_{ij} und x_{ik} gleich sein. Es folgt $c_{ij} = c_{ik}$. Wegen

$$\mathcal{C}_i = \{x_{i1}, \cdots, x_{in_i}\} = \{g^{-1} x_i g \mid g \in G\} \text{ für } x_i \in \mathcal{C}_i$$

folgt daher $c_{ij} = c_{ik}$ für alle $j, k \leq n_i$. □

(5.7) <u>Satz.</u> Seien $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ die Konjugiertenklassen der endlichen Gruppe G mit Vertretern $x_i \in \mathcal{C}_i$ und sei $h_i = |\mathcal{C}_i|$. Seien $\chi_1, \cdots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G und $n_i = \chi_i(1)$. Dann sind die Zahlen

$$(*) \qquad w_{ij} = \frac{h_i \chi_j(x_i)}{n_j}; \; i, j \leq h$$

ganz algebraisch.

<u>Beweis.</u> Sei wie in (5.6) $C_i = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} x$. Dann ist nach (5.6) $\{C_1, \cdots, C_n\}$ Basis von $Z(\mathbb{C}G)$. Daher existiert $c_{ijm} \in \mathbb{Z}$ mit

$$C_i C_j = \sum_{m=1}^{h} c_{ijm} C_m.$$

(Die c_{ijm} sind in $\mathbb{Z}$, da $C_i C_j$ Summe von Gruppenelementen ist!) Sei nun χ_k Charakter der Darstellung ρ_k mit Darstellungsraum V_k. Dehne ρ_k zu einem Ringhomomorphismus

$$\rho_k : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}\,(V_k)$$

aus, durch $\rho_k(\sum_{g \in G} c_g g) = \sum_{g \in G} c_g \rho_k(g)$. Dann gilt

$$(+) \qquad \rho_k(C_i)\rho_k(C_j) = \sum_{m=1}^{h} c_{ijm} \rho_k(C_m).$$

Da $C_i \in Z(\mathbb{C}G)$ kommutieren $\rho_k(C_i)$ und $\rho_k(x)$ für alle $x \in G$. Es folgt $\rho_k(C_i) \in Hom_G(V_k, V_k) = \mathbb{C}\mathrm{id}_{V_k}$ nach (4.2). Also $\rho_k(C_i) = w_{ik} \cdot \mathrm{id}_{V_k}$ für ein $w_{ik} \in \mathbb{C}$. Es ist:

$$\begin{aligned} n_k w_{ik} &= \mathrm{Sp}(w_{ik} \cdot \mathrm{id}_{V_k}) = \mathrm{Sp}(\rho_k(C_i)) = \mathrm{Sp}(\sum_{x \in \mathcal{C}_i} \rho_k(x)) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{C}_i} \mathrm{Sp}(\rho_k(x)) = \sum_{x \in \mathcal{C}_i} \chi_k(x) = h_i \cdot \chi_k(x_i) \end{aligned}$$

Daher sind die w_{ik} wie in $(*)$. Gleichung $(+)$ wird zu

$$w_{ik}w_{jk} = \sum_{m=1}^{h} c_{ijm}w_{mk}, \text{ oder}$$

$\sum_{m=1}^{h}(c_{ijm} - \delta_{jm}w_{ik})w_{mk} = 0\,;\ \delta_{jm} = \begin{cases} 0 & j \neq m \\ 1 & j = m \end{cases}$

Sei nun $\mathcal{C}_1 = \{1\}$. Dann $h_1 = 1$ und $w_{1k} = \frac{1\cdot\chi_k(1)}{n_k} = 1$. Fixiert man nun i und k, so bedeutet dies, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$[c_{ijm} - \delta_{jm}w_{ik}]X = 0\,;\ 1 \leq j \leq h, 1 \leq m \leq h$$

eine nichttriviale Lösung hat, nämlich $X = (w_{1k}, \cdots, w_{hk})$ (da $w_{1k} \neq 0!$) Es folgt

$$0 = \det[c_{ijm} - \delta_{jm}w_{ik}] = \det \begin{bmatrix} c_{i11} - w_{ik} & \cdots & c_{i1h} \\ c_{i21} & c_{i22} - w_{ik} & \cdots c_{i2h} \\ \vdots & & \\ c_{ih1} & \cdots & c_{ihh} - w_{ik} \end{bmatrix}$$

Dies bedeutet w_{ik} ist ein Eigenwert der Matrix $(c_{ijm}), 1 \leq j, m \leq h$. Nun sind die Einträge dieser Matrix in $\mathbb{Z}$, das heißt w_{ik} ist Wurzel eines Polynoms aus $\mathbb{Z}[x]$ mit höchstem Koeffizienten ± 1. Daher ist w_{ik} ganz algebraisch für $1 \leq i, k \leq h$. $\square$

(5.8) Hilfssatz. Sei $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe vom Grad n mit zugehörigem Charakter χ. Dann ist $|\chi(g)| \leq n$ für alle $g \in G$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\rho(g) = \alpha \mathrm{id}_V$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis. Angenommen $\rho(g)$ hat die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Dann sind die λ_i Einheitswurzeln, also $|\lambda_i| = 1$. Es folgt

$$|\chi(g)| = |\lambda_1 + \cdots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \leq n.$$

Desweiteren gilt Gleichheit genau dann, wenn $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \lambda$. In diesem Fall ist $(\lambda - x)^n$ das charakteristische Polynom von $\rho(g)$. Wegen $\rho(g)^{|G|} = \rho(g^{|G|}) = \rho(1) = \mathrm{id}_V$ ist das Minimalpolynom $f(x)$ von $\rho(g)$ ein Teiler von $x^{|G|} - 1$. Daher ist $f(x)$ ein Teiler von $(x - \lambda)^n$ und $x^{|G|} - 1$. Es folgt $f(x) = x - \lambda$ und daher $\rho(g) - \lambda \mathrm{id}_V = 0$. $\square$

(5.9) Definition. Eine Gruppe G heißt auflösbar, falls eine Reihe von Untergruppen

$$1 = G_0 \subset G_1 \cdots G_m = G$$

existiert, sodaß G_i ein Normalteiler von G_{i+1} ist und G_{i+1}/G_i abelsch für $i = 0, \cdots, m-1$. Aus der Algebra sind bekannt:

(1) Untergruppen und Faktorgruppen von auflösbaren Gruppen sind auflösbar.

(2) Besitzt die Gruppe G einen auflösbaren Normalteiler N, sodaß G/N auflösbar ist, so ist G auflösbar.

Eine Gruppe G heißt einfach, falls sie keinen echten (von $\{1\}$ und G verschiedenen) Normalteiler besitzt. Die einzigen endlichen Gruppen die auflösbar und einfach sind, sind die zyklischen Gruppen von Primzahlordnung $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Eine endliche Gruppe G heißt p-Gruppe, falls $|G| = p^n, p$ Primzahl.

Das Zentrum $Z(G)$ einer Gruppe G ist

$$Z(G) := \{x \in G \mid gx = xg \,\forall\, g \in G\}.$$

(5.10) Hilfssatz. Sei G eine endliche p-Gruppe. Dann ist $Z(G) \neq \{1\}$.

Beweis. Sei $|G| = p^m$ und seien $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_h$ die Konjugiertenklassen von G mit Vertretern x_i und $x_1 = 1$. (i.e. $\mathcal{C}_1 = \{1\}$). Dann ist $|\mathcal{C}_i| = |G : C(x_i)| = p^{\alpha_i}, \alpha_i \geq 0$ nach Algebra. Es folgt:

$$|G| = \sum_{i=1}^{h} |\mathcal{C}_i| = 1 + \sum_{i=2}^{h} p^{\alpha_i}.$$

Daher existiert ein $i > 1$ mit $\alpha_i = 0$. Es folgt $G = C(x_i)$ und $x_i \in Z(G)$. □

(5.11) Folgerung. Endliche p-Gruppen sind auflösbar.

Beweis. Mit Induktion nach $|G|$.
Sei G eine endliche p-Gruppe. Dann ist nach (5.10) $|G/Z(G)| < |G|$, also $G/Z(G)$ auflösbar. Da $Z(G)$ abelsch, also auch auflösbar ist, folgt die Behauptung. □

(5.12) Hilfssatz. Sei χ ein irreduzibler Charakter der endlichen Gruppe G. Angenommen es existiert eine Konjugiertenklasse $\mathcal{C}$ von G mit ggT $(|\mathcal{C}|, \chi(1)) = 1$. Dann gilt $\chi(x) = 0$ oder $|\chi(x)| = \chi(1)$ für jedes $x \in \mathcal{C}$.

Beweis. Wegen ggT $(|\mathcal{C}|, \chi(1)) = 1$ existieren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s|\mathcal{C}| + t\chi(1) = 1$. Es folgt

$$\frac{s|\mathcal{C}|\chi(x)}{\chi(1)} + t\chi(x) = \frac{\chi(x)}{\chi(1)}.$$

Nach (5.7) ist $\frac{|\mathcal{C}|\chi(x)}{\chi(1)}$ ganz algebraisch. Daher ist nach (5.3)(2) auch $a = \frac{\chi(x)}{\chi(1)}$ ganz algebraisch. Nach (5.8) ist $|a| \leq 1$.

Sei nun ϵ primitive $|G|$-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\epsilon)$. Dann ist K Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$. Sei $\mathrm{Aut}(K : \mathbb{Q}) = A$ und $n = \chi(1)$. Dann ist nach (2.3) $\chi(x)$ Summe von n $|G|$-ten Einheitswurzeln, also $\chi(x) \in K$ und $a \in K$.

Seien $a = a_1, \cdots, a_m$ die Bilder von a unter A und $N(a) = a_1 \cdots a_m$. Dann $N(a)^\sigma = (a_1 \cdots a_m)^\sigma = a_1^\sigma \cdots a_m^\sigma = N(a)$ für alle $\sigma \in A$ und daher $N(a) \in \mathbb{Q}$ nach dem Hauptsatz der Galoistheorie. Da auch $a_2, \cdots, a_m$ Wurzeln des Minimalpolynoms von a sind folgt nach (5.2), daß alle a_i und damit $N(a)$ ganz algebraisch ist. Somit nach (5.4) $N(a) \in \mathbb{Z}$.

Nun $a = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{n}$ mit $|G|$ Einheitswurzeln λ_i. Es folgt

$a_i = a^{\sigma_i} = \frac{\lambda_1^{\sigma_i} + \cdots + \lambda_n^{\sigma_i}}{n}$ für ein $\sigma_i \in A$ und die $\lambda_j^{\sigma_i}$ sind auch $|G|$-te Einheitswurzeln. Hieraus folgt $|a_i| \leq 1$ für $i = 1, \cdots, m$ und daher $|N(a)| \leq 1$. Wir erhalten $N(a) = 0$ oder $N(a) = \pm 1$. Im ersten Fall folgt $a = 0 = \chi(x)$. Im zweiten Fall folgt $|a| = 1$ und daher $|\chi(x)| = \chi(1)$. □

(5.13) Hilfssatz. Angenommen die endliche Gruppe G besitzt eine Konjugiertenklasse $\mathcal{C} \neq \{1\}$, sodaß $|\mathcal{C}|$ eine Primzahlpotenz ist. Dann ist G keine nichtzyklische einfache Gruppe.

Beweis. Wir nehmen an, daß G einfach und nichtzyklisch ist und führen dies zum Widerspruch. Sei $|\mathcal{C}| = p^c$ und wähle $x \in \mathcal{C}$. Ist $c = 0$, so ist $\mathcal{C} = \{x\}$ und $x \in Z(G)$, im Widerspruch zur Annahme. Daher $c \geq 1$.

Seien nun $\chi_1, \cdots, \chi_h$ die irreduziblen Charaktere von G, wobei χ_1 der triviale Charakter ist. Dann folgt aus (4.10)

$$0 = \sum_{m=1}^{h} \chi_m(x)\overline{\chi_m(1)} = 1 + \sum_{m=2}^{h} \chi_m(1)\chi_m(x) \quad (*).$$

Wir numerieren nun die χ_m, sodaß $\begin{array}{l} p \nmid \chi_m(1) \text{ für } 2 \leq m \leq h_o \\ p \mid \chi_m(1) \text{ für } h_0 + 1 \leq m \leq h \end{array}$

Dann gilt ggT $(|\mathcal{C}|, \chi_m(1)) = 1$ für $2 \leq m \leq h_0$. Daher folgt nach (5.12) $\chi_m(x) = 0$ oder $|\chi_m(x)| = \chi_m(1)$ für diese m. Wäre nun $|\chi_m(x)| = \chi_m(1)$ für ein solches m, so folgt nach (5.8) für die zugehörige Darstellung ρ_m, daß $\rho_m(x) = c\mathrm{id}_V$. Da G einfach ist, ist ρ_m treu. Wegen $\rho_m(x) \in Z(\rho_m(G))$ folgt $x \in Z(G)$, ein Widerspruch zur Einfachheit von G.

Wir erhalten daher $\chi_m(x) = 0$ für $2 \leq m \leq h_o$. Setze nun $\chi_m(1) = pc_m, c_m \in \mathbb{Z}$ für $m > h_0$. Dann wird $(*)$ zu

$$0 = 1 + \sum_{m=h_0+1}^{h} \chi_m(1)\chi_m(x) = 1 + \sum_{m=h_0+1}^{h} pc_m\chi_m(x).$$

Nun ist $\beta = \sum_{m=h_0+1}^{h} c_m\chi_m(x)$ eine ganze algebraische Zahl. Jedoch $\beta = \frac{-1}{p}$, im Widerspruch zu (5.4). Dieser Widerspruch beweist (5.13). $\square$

(5.14) Satz. (Burnside) Sei $|G| = p^a q^b$ mit Primzahlen p und q. Dann ist G auflösbar.

Beweis. Mit Induktion nach $|G|$. Sei P eine p-Sylowuntergruppe von G. (Also $|P| = p^a$) und $1 \neq x \in Z(P)$. Dann ist $P \subseteq C(x)$ und daher gilt für die Konjugiertenklassen $\mathcal{C}$ von x:

$$|\mathcal{C}| = \frac{|G|}{|C(x)|} \mid \frac{|G|}{|P|} = q^b.$$

Daher folgt nach (5.13), daß G keine nichtzyklische einfache Gruppe ist. Also G zyklisch oder es gibt eine echten Normalteiler N von G. Im zweiten Fall sind nach Induktionsannahme N und G/N auflösbar und daher ist auch G auflösbar. $\square$

§6 Tensorprodukt von Vektorräumen und Darstellungen

(6.1) Definition
Seien V, W Vektorräume über K mit $\dim V = n$, $\dim W = m$. Seien t_{ij} für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ Symbole und T der Vektorraum aller formalen Linearkombinationen der t_{ij}. Das heißt

$$T := \Big\{ \sum_{i,j} c_{ij}t_{ij} \mid c_{ij} \in K \Big\}.$$

Dann ist T ein nm-dimensionaler Vektorraum über K mit Basis $\Big(t_{ij} \mid 1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m\Big)$.

Sei nun $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V und $(w_1, \dots, w_m)$ Basis von W. Zu $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^n b_j w_j$ mit $a_i, b_j \in K$ setzen wir

$$v \otimes w := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j t_{ij}.$$

Insbesondere also $v_i \otimes w_j = t_{ij}$.

Dann gilt:

(6.2) Satz
Seien V, W und T wie in (6.1). Dann ist die Abbildung $V \times W \to T$ definiert durch $(v, w) \mapsto v \otimes w$ bilinear und es gilt:

T1: Ist U ein Vektorraum über K und $g : V \times W \to U$ eine bilineare Abbildung, so existiert genau eine lineare Abbildung $g^* : T \to U$ mit

$$g^*(v \otimes w) = g\Big((v, w)\Big) \quad \forall v \in V, w \in W.$$

T2: Ist $(v_1', \dots, v_n')$ Basis von V und $(w_1', \dots, w_m')$ Basis von W, so ist $(v_i' \otimes w_j' \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ Basis von T.

Beweis: Wir zeigen $v \otimes (w + w') = (v \otimes w) + (v \otimes w')$. Sei hierzu $w' = \sum_j b_j' w_j$. Dann ist $w + w' = \sum_j (b_j + b_j') w_j$ und nach Definition:

$$v \otimes (w + w') = \sum_{i,j} a_i (b_j + b_j') t_{ij} = \sum_{i,j} a_i b_j t_{ij} + \sum_{i,j} a_i b_j' t_{ij} = v \otimes w + v \otimes w'.$$

Analog zeigt man: $(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$ und $c(v \otimes w) = (c \cdot v) \otimes w = v \otimes (cw)$, $c \in K$. Dies zeigt die Bilinearität von $(v, w) \mapsto v \otimes w$.

T1: Sei $g : V \times W \to U$ bilinear. Da die t_{ij} eine Basis von T bilden, existiert genau eine lineare Abbildung $g^* : T \to U$ mit $g^*(t_{ij}) = g\Big((v_i, v_j)\Big)$. Für g^* gilt:

$$g^*(v \otimes w) = g^*\Big(\sum_{i,j} a_i b_j t_{ij}\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j g^*(t_{ij}) = \sum_{i,j} a_i b_j g\Big((v_i, w_j)\Big) = g\Big(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j w_j\Big) = g(v, w).$$

Die Eindeutigkeit von g^* folgt, da für jede solche lineare Abbildung $\widetilde{g}$ gelten muß $\widetilde{g}(t_{ij}) = g\Big((v_i, v_j)\Big)$.

T2: Wir müssen zeigen, daß $(v_i' \otimes w_j' \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ Basis von T ist. Da $\dim T = nm$, reicht es zu zeigen, daß die $v_i' \otimes w_j'$ den Raum T erzeugen. Da $\{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}$ ganz T erzeugt, reicht es zu zeigen, daß jeder Vektor $v \otimes w$ Linearkombination der $v_i' \otimes w_j'$ ist. Sei hierzu $v = \sum_{i=1}^n d_i v_i'$, $w = \sum_{j=1}^m e_j w_j'$. Wegen der Bilinearität von $(v, w) \mapsto v \otimes w$ folgt: $v \otimes w = \sum_{i,j} d_i e_j (v_i' \otimes w_j')$. $\square$

(6.3) Bezeichnung
Den Vektorraum T zusammen mit der bilinearen Abbildung $(v, w) \mapsto v \otimes w \in T$ nennt man das Tensorprodukt von V und W. Abgekürzt $T = V \otimes_K W = V \otimes W$ (falls K fest ist!) Weiter nennt man $v \otimes w$ das Tensorprodukt von v und w.

Das Tensorprodukt $V \otimes W$ ist durch seine Eigenschaften T1 und T2 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Das heißt, ist $\widetilde{T}$ ein K-Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\varphi : V \times W \to \widetilde{T}$ die T1 und T2 genügt, so ist $T \simeq \widetilde{T}$. Denn nach T1, angewandt auf T, gibt es eine lineare Abbildung $\varphi^* : T \to \widetilde{T}$ mit $\varphi^*(v \otimes w) = \varphi\Big((v, w)\Big)$. Nach T2, angewandt auf $\widetilde{T}$, ist φ^* surjektiv. Nach T1, angewandt auf $\widetilde{T}$, existiert eine lineare Abbildung $\psi^* : \widetilde{T} \to T$ mit $\psi^*\Big(\varphi(v, w)\Big) = v \otimes w$. Dies bedeutet, daß φ^* ein Isomorphismus ist.

(6.4) Satz
Seien V, W und U endlich-dimensionale Vektorräume über K. Dann $(V \otimes W) \otimes U \simeq V \otimes (W \otimes U)$.

Beweis: Sei $(v_i \mid i = 1, \dots, n)$ Basis von V, $(w_j \mid j = 1, \dots, m)$ Basis von W und $(u_l \mid l = 1, \dots, k)$ Basis von U. Dann ist nach (5.2) $\Big((v_i \otimes w_j) \otimes u_l\Big)$ Basis von $(V \otimes W) \otimes U$ und $\Big(v_j \otimes (w_j \otimes u_l)\Big)$ Basis von $V \otimes (W \otimes U)$.

Daher kann man die Abbildung $(v_i \otimes w_j) \otimes u_l \mapsto v_i \otimes (w_j \otimes u_l)$ zu einer bijektiven linearen Abbildung ausdehnen. □

(6.5) Satz
Sei $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, $\psi \in \mathrm{End}_K(W)$. Dann gilt:

(a) Es existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi \otimes \psi \in \mathrm{End}_K(V \otimes W)$ mit $(v \otimes w)^{\varphi \otimes \psi} = v^\varphi \otimes w^\psi$ für alle $v \in V, w \in W$.

(b) Ist $\varphi \in GL(V), \psi \in GL(W)$, so ist $\varphi \otimes \psi \in GL(V \otimes W)$.

Beweis:
(a): Die Abbildung $(v, w) \mapsto v^\varphi \otimes w^\psi$ von $V \times W$ in $V \otimes W$ ist bilinear. Daher existiert nach T1 genau eine lineare Abbildung $\sigma \in \mathrm{End}_K(V \otimes W)$ mit $(v \otimes w)^\sigma = v^\varphi \otimes w^\psi \; \forall v \in V, w \in W$. Man schreibt $\sigma = \varphi \otimes \psi$.

(b): Sei $(v_i \mid i = 1, \dots, n)$ Basis von V und $(w_j \mid j = 1, \dots, m)$ Basis von W. Sind $\varphi \in GL(V)$ und $\psi \in GL(W)$, so sind $(v_i^\varphi \mid i = 1, \dots, n)$ und $(w_j^\psi \mid j = 1, \dots, m)$ Basen von V bzw. W. Daher ist nach T2 auch $(v_i^\varphi \otimes w_j^\psi \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$ Basis von $V \otimes W$. Dies bedeutet, daß $\varphi \otimes \psi$ eine Basis von $V \otimes W$ auf eine Basis abbildet, also $\varphi \otimes \psi \in GL(V \otimes W)$. □

(6.6) Hilfssatz
Seien $\varphi_i \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\psi_i \in \mathrm{End}_K(W)$ für $i = 1, 2$. Dann gilt:

(a) $(\varphi_1 \otimes \psi_1)(\varphi_2 \otimes \psi_2) = \varphi_1\varphi_2 \otimes \psi_1\psi_2$.

(b) $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi_1 = \varphi_1 \otimes \psi_1 + \varphi_2 \otimes \psi_1$ und $\varphi_1 \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi_1 \otimes \psi_1 + \varphi_1 \otimes \psi_2$.

(c) Ist $\varphi \in GL(V)$ und $\psi \in GL(W)$, so ist $(\varphi \otimes \psi)^{-1} = \varphi^{-1} \otimes \psi^{-1}$.

Beweis: (a) und (b) sind direkte Rechnungen. Zum Beispiel

$$(v \otimes w)^{(\varphi_1 \otimes \psi_1)(\varphi_2 \otimes \psi_2)} = (v^{\varphi_1} \otimes w^{\psi_1})^{(\varphi_2 \otimes \psi_2)} = v^{\varphi_1\varphi_2} \otimes w^{\psi_1\psi_2} = (v \otimes w)^{\varphi_1\varphi_2 \otimes \psi_1\psi_2}.$$

(c) folgt aus (a). □

(6.7) Hilfssatz
Sei $A = (a_{il})$ die Matrix von $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ bezüglich $v_1, \dots, v_n$ und $B = (b_{jk})$ die Matrix von $\psi \in \operatorname{End}_K(W)$ bezüglich $w_1, \dots, w_m$. Dann ist die $nm \times nm$ Matrix:

$$(a_{il}b_{jk}) \ 1 \le i, l \le n, \ \ 1 \le j, k \le m$$

die Matrix von $\varphi \otimes \psi$ bezüglich der Basis $v_i \otimes w_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

Beweis: Es ist

$$(v_i \otimes w_j)^{\varphi \otimes \psi} = v_i^{\varphi} \otimes w_j^{\psi} = \Big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} v_l\Big) \otimes \Big(\sum_{k=1}^{m} b_{jk} w_k\Big) = \sum_{l,k} a_{il} b_{jk} (v_l \otimes w_k).$$

□

(6.8) Hilfssatz
Sei $\varphi \in \operatorname{End}_K(V), \psi \in \operatorname{End}_K(W)$. Dann ist

$$\operatorname{Sp}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{Sp}\varphi \cdot \operatorname{Sp}\psi.$$

Beweis: Wähle Basen $v_1, \dots, v_n$ von V und $w_1, \dots, w_m$ von W bezüglich deren die Matrizen (a_{il}) und (b_{jk}) von φ und ψ Dreiecksmatrizen sind. Dann ist nach (5.7) die Matrix von $\varphi \otimes \psi$ bezüglich der Basis $v_i \otimes w_j, i = 1, \dots, n \ j = 1, \dots, m$ auch Dreiecksmatrix mit den Diagonaleinträgen $a_{ii}b_{jj}$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Es folgt:

$$\operatorname{Sp}(\varphi \otimes \psi) = \sum_{i,j} a_{ii} b_{jj} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{m} b_{jj}\Big) = \operatorname{Sp}\varphi \cdot \operatorname{Sp}\psi.$$

□

(6.9) Definition.
Seien $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ und $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ Darstellungen der Gruppen G_i mit Charakteren χ_i, $i = 1, 2$. Wir definieren eine Darstellung

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$$

durch $(\rho_1 \otimes \rho_2)((g_1, g_2)) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$
Dann ist nach (6.6)(a) und (c) $\rho_1 \otimes \rho_2$ Darstellung von $G_1 \times G_2$ mit Darstellungsraum $V_1 \otimes V_2$. Der Charakter χ von $\rho_1 \otimes \rho_2$ ist nach (6.8) gegeben durch $\chi((g_1, g_2)) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$.

Sei nun $G_1 = G_2 = G$. Dann können wir G mit der Teilmenge $\widetilde{G} = \{(g, g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$ identifizieren. Dann ist $\rho_1 \otimes \rho_2 \mid_{\widetilde{G}} : \widetilde{G} \to GL(V_1 \otimes V_2)$ eine Darstellung von G mit Darstellungsraum $V_1 \otimes V_2$ und Charakter $\chi_1\chi_2$. (das heißt $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$). Man nennt $\rho_1 \otimes \rho_2 \mid_{\widetilde{G}}$ das Tensorprodukt der Darstellungen ρ_1 und ρ_2 von G. Insbesondere erhält man, daß zu je zwei Charakteren χ_1 und χ_2 von G auch $\chi_1\chi_2$ ein Charakter von G ist.

(6.10) Satz
Seien G_1, G_2 endliche Gruppen und $\rho_1 : G_1 \to GL(V)$, $\rho_2 : G_2 \to GL(W)$ Darstellungen. Dann gilt:

(a) Sind ρ_1 und ρ_2 irreduzibel, so ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ eine irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$.

(b) Jede irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$ ist äquivalent zu einer Darstellung $\rho_1 \otimes \rho_2$ mit irreduziblen Darstellungen ρ_i von G_i.

Beweis:
(a): Seien χ_i, $i = 1, 2$ die Charaktere der ρ_i. Sind die ρ_i irreduzibel, so gilt nach (3.3), daß

$$\begin{aligned} 1 &= (\chi_1, \chi_1) = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} \chi_1(g_1)\overline{\chi_1(g_1)} = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} |\chi_1(g_1)|^2, \\ 1 &= (\chi_2, \chi_2) = \frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \chi_2(g_2)\overline{\chi_2(g_2)}. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir mit $|G_1 \times G_2| = |G_1|\,|G_2|$:

$$1 = \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{g_1, g_2} |\chi_1(g_1)|^2\,|\chi_2(g_2)|^2 = \frac{1}{|G_1|}\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_1, g_2} |\chi(g_1, g_2)|^2 = (\chi, \chi).$$

Somit ist χ und damit $\rho_1 \otimes \rho_2$ irreduzibel nach (3.8).
(b): Offensichtlich gilt:

(g_1, g_2) und (h_1, h_2) sind in $G_1 \times G_2$ konjugiert. $\Leftrightarrow$ g_1, h_1 sind in G_1 und g_2, h_2 sind in G_2 konjugiert.

Sind daher $l_i = \#$ Konjugiertenklassen von $G_i, i = 1, 2$, so gilt:

$$l_1 l_2 = \#\ \text{Konjugiertenklassen von}\ G_1 \times G_2.$$

Seien nun $\chi_1, \cdots, \chi_{\ell_1}$ und $\Psi_1, \cdots, \Psi_{\ell_2}$ die irreduziblen Charaktere von G_1 bzw. G_2 und seien

$$\varphi_{ij} = \chi_i \Psi_j \text{ die } \ell_1 \ell_2 \text{ irreduziblen Charaktere}$$

von $G_1 \times G_2$ gegeben durch $\varphi_{i,j}(g_1, g_2) = \chi_i(g_1)\Psi_j(g_2)$. Um zu zeigen, daß dies alle irreduziblen Charaktere von $G_1 \times G_2$ sind reicht es zu zeigen, daß sie paarweise verschieden sind. Nach den Orthogonalitätsrelationen gilt nun

$$\begin{aligned} (\varphi_{ij}, \varphi_{i'j'}) &= \frac{1}{|G_1 \times G_2|} \sum_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} \varphi_{ij}(g_1, g_2)\overline{\varphi_{i'j'}(g_1, g_2)} \\ &= \Big(\frac{1}{|G_1|} \sum_{g_1 \in G_1} \chi_i(g_1)\overline{\chi_{i'}(g_1)}\Big)\Big(\frac{1}{|G_2|} \sum_{g_2 \in G_2} \Psi_j(g_2)\overline{\Psi_{j'}(g_2)}\Big) \\ &= (\chi_i, \chi_{i'})(\Psi_j, \Psi_{j'}) = \delta_{ii'}\delta_{jj'} = 0 \end{aligned}$$

falls $i \neq i'$ oder $j \neq j$. Dies bedeutet $\varphi_{ij} \neq \varphi_{i'j'}$, falls $i \neq i'$ oder $j \neq j'$. □

(6.11) Bezeichnungen
Sei V ein Vektorraum mit Basis $(v_1, \ldots, v_n)$. Sei σ lineare Abbildung von $V \otimes V \to V \otimes V$ mit

$$\sigma : v_i \otimes v_j \mapsto v_j \otimes v_i \ \text{ für } \ 1 \leq i, j \leq n.$$

Dann gilt für $v = \sum_i a_i v_i$ und $w = \sum_j b_j v_j$, daß

$$(v \otimes w)^\sigma = \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j)^\sigma = w \otimes v.$$

Desweiteren folgt $\sigma^2 = \mathrm{id}_{V\otimes V}$. Nach Linearer Algebra gilt für $W = V \otimes V$, daß $W = W_+ \oplus W_-$, wobei $W_+ = \{w \in W \mid w^\sigma = w\}$ und $W_- = \{w \in W \mid w^\sigma = -w\}$. Wir nennen:

$\mathrm{Sym}^2(V) := W_+$ symmetrisches Quadrat von V und $\mathrm{Alt}^2(V) := W_-$ alternierendes Quadrat von V.

(6.12) Satz
In den Bezeichnungen von (6.11) gilt:

(1) $(v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i \leq j \leq n)$ ist Basis von $\mathrm{Sym}^2(V)$.

(2) $(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i < j \leq n)$ ist Basis von $\mathrm{Alt}^2(V)$.

(3) $\dim\Big(\mathrm{Sym}^2(V)\Big) = \frac{n(n+1)}{2}$ und $\dim\Big(\mathrm{Alt}^2(V)\Big) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(4) Ist $\rho : G \to GL(V)$ Darstellung von G und $\overline{\rho} = \rho \otimes \rho : G \to GL(V \otimes V)$, so sind $\mathrm{Sym}^2(V)$ und $\mathrm{Alt}^2(V)$ $\overline{\rho}(G)$-invariante Unterräume von $V \otimes V$. (Das heißt wir erhalten Darstellungen $G \to GL(\mathrm{Sym}^2(V))$ und $G \to GL(\mathrm{Alt}^2(V))$ vom Grad $\frac{n(n+1)}{2}$ bzw. $\frac{n(n-1)}{2}$.)

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} 2(v_i \otimes v_j) &= [v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i] + [v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i] \\ 2(v_j \otimes v_i) &= [v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i] - [v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i] \end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq j \leq n$, erzeugen die Vektoren aus (1) und (2) zusammen ganz V. Desweiteren liegen die Vektoren aus (1) in $\mathrm{Sym}^2(V)$ und die aus (2) in $\mathrm{Alt}^2(V)$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mid \{v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} \mid &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ \mid \{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i < j \leq n\} \mid &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \dim(V \otimes V)$, bedeutet dies, daß die Vektoren aus (1) und (2) zusammen eine Basis von W bilden.

Setzt man $L = \langle v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$ und $M = \langle v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle$ so folgt $W = L \oplus M$ und $L \subseteq W_+ = \mathrm{Sym}^2(V)$, $M \subseteq W_- = \mathrm{Alt}^2(V)$. Wegen $W = W_+ \oplus W_-$ folgt $L = W_+$ und $M = W_-$, sowie (1) - (3) der Behauptung.

Für $v, w \in V$ gilt weiter:

$$(v \otimes w)^{\sigma\overline{\rho}(g)} = (w \otimes v)^{\overline{\rho}(g)} = w^{\rho(g)} \otimes v^{\rho(g)} = \Big(v^{\rho(g)} \otimes w^{\rho(g)}\Big)^\sigma = (v \otimes w)^{\overline{\rho}(g)\sigma}.$$

Daher ist σ mit der Operation von $\overline{\rho(G)}$ vertauschbar. Hieraus folgt (4). $\square$

§7 Permutationsgruppen

(7.1) Definition
Die Gruppe G operiere auf der Menge Ω. Dann heißt G transitiv auf Ω falls zu jedem α und α' aus Ω

ein $g \in G$ existiert mit $\alpha^g = \alpha'$. G heißt <u>2-fach transitiv</u> auf Ω, falls zu $\alpha \neq \beta$ aus Ω und $\alpha' \neq \beta'$ auch aus Ω ein $g \in G$ existiert mit:

$$\alpha^g = \alpha', \beta^g = \beta'.$$

Für $\alpha \in \Omega$ sei $G_\alpha := \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ die <u>Fixgruppe</u> (oder <u>Stabilisator</u>) von α. Offensichtlich ist G_α eine Untergruppe von G. Desweiteren gilt:

$$G_\alpha^g = g^{-1} G_\alpha g = G_{\alpha^g}.$$

(7.2) <u>Hilfssatz</u>
Die Gruppe G operiere auf Ω. Dann sind äquivalent:

(1) G ist 2-fach transitiv auf Ω.

(2) G ist transitiv auf Ω und G_α ist transitiv auf $\Omega - \{\alpha\}$ für jedes $\alpha \in \Omega$.

Der Beweis ist trivial.

(7.3) <u>Satz</u>
Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf der Menge Ω. Für $x \in G$ sei $f(x) = |\mathrm{Fix}(x)|$. Dann gilt:

(a) $|G| = \sum_{x \in G} f(x)$.

(b) Ist G 2-fach transitiv auf Ω, so ist $2\,|G| = \sum_{x \in G} f(x)^2$.

<u>Beweis:</u>
(a): Wir benutzen die sogannte Fahnengleichung. (Auch Prinzip der doppelten Abzählung genannt!) Wir nennen die Elemente von G 'Punkte' und die Untergruppen $G_\alpha, \alpha \in \Omega$ 'Blöcke'. Ein Punkt g liegt auf dem Block G_α falls $g \in G_\alpha$. Eine Fahne ist ein Paar (g, G_α) mit $g \in G_\alpha$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} f(g) &= \sum_{g \in G} (\#\ \text{Blöcke durch}\ g) = \#\ \text{Anzahl der Fahnen} \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} (\#\ \text{Punkte in}\ G_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Omega} |G_\alpha| = |\Omega|\,|G_\alpha| = |G : G_\alpha|\,|G_\alpha| = |G|, \end{aligned}$$

da $|\Omega| = |G : G_\alpha|$ für $\alpha \in \Omega$ wegen der Transitivität.

(b): Sei $\Omega = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Dann ist nach (6.1) G_{α_i} transitiv auf $\Omega - \{\alpha_i\}$. Desweiteren ist für $x \in G_{\alpha_i}$ auch $f(x) - 1 = \#$ Fixpunkte von x auf $\Omega - \{\alpha_i\}$. Es folgt nach (a), daß $\sum_{x \in G_{\alpha_i}} (f(x) - 1) = |G_{\alpha_i}|$; daher

$$(*) \qquad \sum_{x \in G_{\alpha_i}} f(x) = 2\,|G_{\alpha_i}|.$$

Durch Aufsummieren von $(*)$ folgt:

$$\sum_{x \in G} f(x)(\#\ \text{der}\ G_{\alpha_i}\ \text{mit}\ x \in G_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{x \in G_{\alpha_i}} f(x) \Big) = 2 \Big(\sum_{i=1}^{n} |G_{\alpha_i}| \Big) = 2\,|G|.$$

Nun ist jedoch: $\#$ (der G_{α_i} mit $x \in G_{\alpha_i}$) $= f(x)$. Es folgt $\sum_{x \in G} f(x)^2 = 2\,|G|$. $\square$

(7.4) <u>Folgerung</u>
Die endliche Gruppe G operiere transitiv auf Ω. Sei $\rho : G \to GL\Big(V(\Omega)\Big)$ die zugehörige Permutationsdarstellung mit Charakter π. Dann gilt:

(a) Der triviale Charakter χ_1 kommt genau mit der Vielfachheit 1 in der Zerlegung von π in irreduzible Charaktere vor.

(b) Ist G 2-fach transitiv auf Ω, so gilt $\pi = \chi_1 + \chi$ mit einem irreduziblen Charakter χ.

Beweis:
(a): Es ist

$$(\pi, \chi_1) = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G} \pi(g)\overline{\chi_1(g)}\Big) = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G} f(g)\Big) = 1.$$

(b):

$$(\pi, \pi) = \frac{1}{|G|}\Big(\sum_{g\in G} \pi(g)\overline{\pi(g)}\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)^2 = 2$$

nach (7.3)(b). Hieraus folgt nach den Orthogonalitätsrelationen, daß in der Zerlegung von π in irreduzible Charaktere genau zwei solche, jeweils mit der Vielfachheit 1 vorkommen. Nun folgt (b) aus (a). □

(7.5) Beispiel: Charaktertafel von A_5

	1	(1 2)(3 4)	(1 2 3)	ρ	ρ^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3				
χ_3	3				
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

, $\rho = (1\,2\,3\,4\,5)$.

Hierbei ist $\chi_4 = \chi - \chi_1$, wobei χ der Charakter der Permutationsdarstellung vom Grad 5 von A_5 ist; und $\chi_5 = \widehat{\chi} - \chi_1$, wobei $\widehat{\chi}$ der Charakter der Permutationsdarstellung vom Grad 6 (auf den 5-Sylowgruppen von A_5) ist.

Sei nun $\sigma \in \Sigma_5 - A_5$ mit $\rho^\sigma = \rho^2$. Dann ist für jede irreduzible Darstellung φ mit Charakter χ von A_5 auch φ^σ mit $\varphi^\sigma(g) := \varphi(g^\sigma)$ für $g \in A_5$ irreduzible Darstellung mit Charakter χ^σ (mit $\chi^\sigma(g) = \chi(g^\sigma)$). Daher $\{\chi_2^\sigma, \chi_3^\sigma\} = \{\chi_2, \chi_3\}$. Falls $\chi_2^\sigma = \chi_2$, so auch $\chi_3^\sigma = \chi_3$; aber dann $\chi_i(\rho) = \chi_i(\rho^2)$ für alle $i = 1, \ldots, 5$ – im Widerspruch dazu, daß die irreduziblen Charaktäre eine Basis für den Raum der Klassenfunktionen bilden (da dann die Klassenfunktion gegeben durch $1 \mapsto 0$, $(1\,2)(3\,4) \mapsto 0$, $(1\,2\,3) \mapsto 0$, $\rho \mapsto 0$, $\rho^2 \mapsto 1$ nicht im Erzeugnis von $\chi_1, \ldots, \chi_5$ liegt). Daher $\chi_2^\sigma = \chi_3$ und $\chi_3^\sigma = \chi_2$; da σ die Konjugiertenklasse von $(1\,2)(3\,4)$ und $(1\,2\,3)$ festläßt, bedeutet dies:

$$\chi_2\big((1\,2)(3\,4)\big) = \chi_3\big((1\,2)(3\,4)\big),\ \chi_2\big((1\,2\,3)\big) = \chi_3\big((1\,2\,3)\big) \text{ und } \chi_2(\rho) = \chi_3(\rho^2),\ \chi_2(\rho^2) = \chi_3(\rho). \qquad (*)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
(\chi_1, \chi_4^2) &= \frac{1}{60}(16 + 0 + 20 + 12 + 12) = 1,\\
(\chi_4, \chi_4^2) &= \frac{1}{60}(4 \cdot 16 + 0 + 20 - 12 - 12) = 1,\\
(\chi_5, \chi_4^2) &= \frac{1}{60}(5 \cdot 16 + 0 - 20 + 0 + 0) = 1.
\end{aligned}$$

Somit folgt nach (3.4), daß $\chi_4^2 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5$, oder $\chi_4^2 = \chi_1 + 2 \cdot \chi_j + \chi_4 + \chi_5$ mit $j = 2, 3$. Im letzteren Fall folgt $\chi_3(\rho^2) = \chi_2(\rho) = \frac{1}{2}(1-1+1-0) = \frac{1}{2}$ und $\chi_3(\rho) = \chi_2(\rho^2) = \frac{1}{2}(1-1+1-0) = \frac{1}{2}$ – im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von χ_2 und χ_3. Also

$$\chi_4^2 = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5.$$

Mit $(*)$ folgt:

$$\begin{aligned} 2\chi_2\Big((1\,2)(3\,4)\Big) = 2\chi_3\Big((1\,2)(3\,4)\Big) &= \chi_2\Big((1\,2)(3\,4)\Big) + \chi_3\Big((1\,2)(3\,4)\Big) = 0 - 1 - 0 - 1 = -2, \\ 2\chi_2(1\,2\,3) = 2\chi_3(1\,2\,3) &= \chi_2(1\,2\,3) + \chi_3(1\,2\,3) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0, \\ \chi_2(\rho) + \chi_2(\rho^2) &= \chi_2(\rho) + \chi_3(\rho) = 1 - 1 + 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Dies ergibt:

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	ρ	ρ^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	a	$1-a$
χ_3	3	-1	0	$1-a$	a
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

mit $a := \chi_2(\rho) = \chi_3(\rho^2)$.

Da $\sigma^2 \in A_5$, ist $\rho^{-1} = \rho^4 = \rho^{\sigma^2}$ in A_5 konjugiert zu ρ; also $a = \chi_2(\rho) = \chi_2(\rho^{-1}) = \overline{\chi_2(\rho)} = \overline{a}$, und damit $a \in \mathbb{R}$. Nun $0 = (\chi_2, \chi_3) = 3^2 + 15 \cdot (-1)^2 + 20 \cdot 0^2 + 12 \cdot a(1-a) + 12 \cdot a(1-a) = -24(a^2 - a - 1)$, und damit $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Also o.B.d.A.

	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	ρ	ρ^2
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0

§8 Induzierte Darstellungen

(8.1) Definition

Sei G eine endliche Gruppe, R eine Untergruppe von G und $\{x_1, \ldots, x_n\}$ festes Rechtsnebenklassenvertretersystem von R in G mit $x_1 = 1$. Dann $G = \dot{\bigcup}_{i=1}^n R x_i$; das heißt, jedes $g \in G$ läßt sich eindeutig in der Form $r x_j$ mit $r \in R$ darstellen.

Dies bedeutet, daß zu $g \in G$ und $i \leq n$ eindeutig bestimmte $r_i(g) \in R$ und $i(g) \leq n$ existieren mit:

$$x_i g = r_i(g) x_{i(g)}.$$

Sei nun $\rho : R \to GL(V)$ eine Darstellung von R. Für $v \in V$, $r \in R$ schreibe $v^r := v^{\rho(r)}$. Seien $V_i, i = 1, \ldots, n$ isomorphe Kopien von V mit $V = V_1$ und $v \mapsto v_i \in V_i$ Isomorphismus von V auf V_i. Sei $W = \bigoplus_{i=1}^n V_i$. Definiere eine Operation von G auf W durch:

$$v_i^g := \left(v^{r_i(g)}\right)_{i(g)}$$

und lineare Ausdehnung. Dann gilt:

$$(v_i + v_i')^g = (v + v')_i^g = (v + v')_{i(g)}^{r_i(g)} = (v^{r_i(g)} + v'^{r_i(g)})_{i(g)} = v_{i(g)}^{r_i(g)} + v'^{r_i(g)}_{i(g)} = v_i^g + v_i'^g.$$

Hieraus folgt leicht, daß g eine lineare Abbildung auf W bewirkt. Bezeichne mit ρ^G die Abbildung, die jedem $g \in G$ die so definierte lineare Abbildung von W in W zuordnet.

(8.2) Satz:
Seien die Bezeichnungen wie in (8.1). Dann gilt:

(1) $\rho^G : G \to GL(W)$ ist eine Darstellung von G.

(2) Ist ρ die triviale Darstellung von R, so ist ρ^G die Permutationsdarstellung von G auf $V(\Omega)$, wobei $\Omega = \{Rx_i \mid i = 1, \ldots, n\}$.

Beweis:
(1): Wegen $x_i 1_G = 1_G x_i$ folgt $v_i^{1_G} = v_i$ für alle $v \in V$, $i \leq n$. Somit $\rho^G(1_G) = \mathrm{id}_W$. Seien $g, h \in G$. Dann gilt:

$$r_i(gh)x_{i(gh)} = x_i \cdot (gh) = (r_i(g)x_{i(g)})h = r_i(g)(x_{i(g)}h) = r_i(g)r_{i(g)}(h)x_{i(g)(h)}.$$

Es folgt, daß $r_i(gh) = r_i(g)r_{i(g)}(h)$ und $x_{i(gh)} = x_{i(g)(h)}$. Wir erhalten, daß $\left(v^{r_i(gh)}\right)_{i(gh)} = v_i^{gh}$ und

$$(v_i^g)^h = \left(v_{i(g)}^{r_i(g)}\right)^h = (v^{r_i(g)r_{i(g)}(h)})_{i(g)(h)} = (v^{r_i(gh)})_{i(gh)} = v_i^{gh}.$$

Hieraus folgt $\rho^G(gh) = \rho^G(g)\rho^G(h)$.

Wegen

$$\mathrm{id}_W = \rho^G(1_G) = \rho^G(gg^{-1}) = \rho^G(g)\rho^G(g^{-1})$$

ist $\rho^G(g)$ invertierbar, also $\rho^G(g) \in GL(W)$.

(2): Ist ρ die triviale Darstellung von R, so ist $\dim V = 1$ und $V_i = \langle v_i \rangle$. Desweiteren gilt nach Definition von ρ^G, daß $v_i^{\rho^G(g)} = v_i^g = v_{i(g)}$, da R trivial auf V operiert. Dies zeigt (2). $\square$

(8.3) Definition:
Seien die Bezeichnungen wie in (8.1) und sei χ der Charakter von ρ. Sei

$$\chi_0(g) = \begin{cases} \chi(g) & \text{falls } g \in R \\ 0 & \text{falls } g \notin R \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \chi^G(g) := \sum_{i=1}^n \chi_0(x_i g x_i^{-1}).$$

Ist $y_i = r_i x_i$ mit $r_i \in R$ so gilt:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n \chi_0(y_i g y_i^{-1}) = \sum_{i=1}^n \chi_0(r_i x_i g x_i^{-1} r_i^{-1}) = \sum_{i=1}^n \chi_0\left((x_i g x_i^{-1})^{r_i^{-1}}\right) = \sum_{i=1}^n \chi_0(x_i g x_i^{-1}),$$

da

$$x_i g x_i^{-1} \in R \Longleftrightarrow (x_i g x_i^{-1})^{r_i^{-1}} \in R,$$

und in diesem Falle die Werte von χ_0 und χ gleich sind. Dies zeigt, daß die Definition von χ^G unabhängig vom gewählten Nebenklassenvertretersystem ist. Desweiteren gilt:

$$\chi^G(g^h) = \sum_{i=1}^{n} \chi_0(x_i h^{-1} g h x_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_0(x_i g x_i^{-1}) = \chi^G(g),$$

da die Menge $\{x_i h^{-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$ auch ein Rechtsnebenklassenvertretersystem von R ist. (Aus $Rx_ih^{-1} = Rx_jh^{-1}$ folgt $Rx_i = Rx_j$ und $i = j$!) Daher ist $\chi^G : G \to \mathbb{C}$ eine Klassenfunktion.

(8.4) Satz
Seien die Bezeichnungen wie in (8.3). Dann ist χ^G der Charakter von ρ^G.

Beweis: Sei $g \in G$. Dann gilt:

$$\mathrm{Sp}(\rho^G(g)) = \sum_{i \text{ mit } i=i(g)} \chi\Big(r_i(g)\Big),$$

da wegen $x_ig = r_i(g)x_{i(g)}$ und $V_i^g = V_{i(g)}$ man nur im Falle $i = i(g)$ im i-ten Diagonalblock einer Matrixdarstellung von $\rho^G(g)$ von Null verschiedene Diagonaleinträge bekommt. In diesem Fall ist wegen $v_i^g = v_i^{r_i(g)}$ die Summe der Diagonaleinträge im i-ten Diagonalblock gerade $\chi\Big(r_i(g)\Big)$.

Wegen $i = i(g) \Longleftrightarrow x_ig = r_i(g)x_i \Longleftrightarrow x_igx_i^{-1} \in R$ erhalten wir:

$$\mathrm{Sp}(\rho^G(g)) = \sum_{\substack{i \text{ mit} \\ i=i(g)}} \chi\Big(r_i(g)\Big) = \sum_{\substack{i \text{ mit} \\ x_igx_i^{-1} \in R}} \chi(x_igx_i^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_0(x_igx_i^{-1}) = \chi^G(g).$$

□

(8.5) Satz.
Sei R eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und sei χ ein Charakter von R. Setze:

$$\chi_0(y) := \begin{cases} \chi(y) & \text{falls } y \in R \\ 0 & \text{falls } y \notin R \end{cases}$$

Dann gilt:

(1) $\chi^G(y) = \frac{1}{|R|} \sum_{g \in G} \chi_0(gyg^{-1})$ für alle $y \in G$.

(2) $\chi^G(y) = 0$ falls y in keinem Konjugierten von R liegt.

(3) Falls $\mathrm{Kern}\,\chi$ Normalteiler von G ist, so ist $\mathrm{Kern}\,\chi \leq \mathrm{Kern}\,\chi^G$.

(4) Äquivalente Darstellung von R induzieren den gleichen Charakter von G.

Beweis: (1) Nach (8.3)($*$) gilt:

$$\begin{aligned} \chi^G(y) &= \sum_{i=1}^{n} \chi_0(x_iyx_i^{-1}) = \frac{1}{|R|} \sum_{r \in R} \sum_{i=1}^{n} \chi_0(rx_iyx_i^{-1}r^{-1}) \\ &= \frac{1}{|R|} \sum_{g \in G} \chi_0(gyg^{-1}) \end{aligned}$$

da wir in der Form $rx_i, r \in R$ und $i = 1, \dots, n$ jedes $g \in G$ erhalten.
(2) folgt unmittelbar aus (1).
(3) Ist $K = \operatorname{Kern}\chi$ Normalteiler von G, so ist $K \leq gRg^{-1}$ für alle $g \in G$. Somit folgt aus (1) für $y \in K$:

$$\chi^G(y) = \frac{|G|}{|R|}\chi(1) = |G : R|\chi(1) = \chi^G(1).$$

Somit folgt nach (5.8) bzw. Übungsaufgabe $y \in \operatorname{Kern}\chi^G$.
(4) ist klar, da äquivalente Darstellungen von R den gleichen Charakter von R haben. □

(8.6) Definition. Ist Ψ Charakter der Gruppe G und R eine Untergruppe von G, so sei $\Psi_R := \Psi\,|_R$. Offensichtlich ist Ψ_R der Charakter der eingeschränkten Darstellung. Eine ganzzahlinge Linearkombination von Charakteren der Gruppe G nennt man verallgemeinerten Charakter. Offensichtlich ist jeder verallgemeinerte Charakter von der Form $\chi - \Psi$ mit Charakteren χ und Ψ von G. Die Menge der verallgemeinerten Charaktere von G bildet nach (6.9) einen Ring genannt $Ch(G)$.

Ist nun G endlich und R eine Untergruppe von G, so ist für $\chi \in Ch(G)$ und $\Psi \in Ch(R)$ auch χ_R bzw. Ψ^G definiert. Ist nämlich $\chi = \chi_1 - \chi_2$ bzw. $\Psi = \Psi_1 - \Psi_2$ mit Charakteren χ_1, χ_2 von G bzw. Ψ_1, Ψ_2 von R, so ist

$$\begin{aligned} \chi_R &= \chi_{1R} - \chi_{2R}, \\ \Psi^G &= \Psi_1^G - \Psi_2^G. \end{aligned}$$

Für die hermitische Form $(,)$ aus (3.1) auf dem Raum der Klassenfunktionen schreiben wir auch $(,)_G$ um anzudeuten über welcher Gruppe wir die Summe bilden.

(8.7) Reziprozitätssatz von Frobenius.
Sei G eine endliche Gruppe und R eine Untergruppe von G. Sei Ψ verallgemeinerter Charakter von G und χ verallgemeinerter Charakter von R. Dann gilt:

$$(\chi, \Psi_R)_R = (\chi^G, \Psi)_G$$

Beweis: Mit den Bezeichnungen von (8.3) gilt:

$$\begin{aligned} (\chi^G, \Psi)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G}\chi^G(g)\overline{\Psi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|}\frac{1}{|R|}\sum_{g \in G}\Big(\sum_{y \in G}\chi_0(ygy^{-1})\Big)\overline{\Psi(g)} \end{aligned}$$

nach (8.5)(1). Da $\Psi(g) = \Psi(ygy^{-1})$ ist, folgt

$$(\chi^G, \Psi)_G = \frac{1}{|G|}\frac{1}{|R|}\sum_{g,y \in G}\chi_0(ygy^{-1})\overline{\Psi(ygy^{-1})}.$$

Nun hat für jedes $z \in G$ die Gleichung

$$z = ygy^{-1} \text{ genau } |G| \text{ Lösungen,}$$

nämlich $g = y^{-1}zy$ und $y \in G$ beliebig. Daher

$$(\chi^G, \Psi)_G = \frac{1}{|R|} \sum_{z \in G} \chi_0(z)\overline{\Psi(z)} = \frac{1}{|R|} \sum_{z \in R} \chi_0(z)\overline{\Psi(z)}.$$

Nun ist für $z \in R$: $\chi_0(z) = \chi(z)$ und $\overline{\Psi(z)} = \overline{\Psi_R(z)}$. Daher

$$(\chi^G, \Psi)_G = \tfrac{1}{|R|} \textstyle\sum_{z \in R} \chi(z)\overline{\Psi_R(z)} = (\chi, \Psi_R)_R.$$

□

(8.8) Beispiel

Sei $G = A_5, R = A_4$ auf den Ziffern $1, \ldots, 4$. Ist χ der triviale Charakter von R, so ist nach (7.6)(2) χ^G Charakter der Permutationsdarstellung vom Grad 5 von G, also $\chi^G = \chi_1 + \chi_4$ in den Bezeichnungen von (6.5).

Sei nun χ Charakter vom Grad 1 von R mit $\chi((1\,2\,3)) = \xi$ primitive 3-te Einheitswurzel. Dann ist $\operatorname{Kern}\chi = \langle (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4) \rangle$. Wir berechnen $\chi^G(1\,2\,3)$.

Sei $x \in G - R$; wir zeigen, daß

$$(1\,2\,3)^{x^{-1}} \in R \Longleftrightarrow x \in Rh,$$

wobei $h = (1\,2)(4\,5)$. Dies ergibt, daß es genau zwei Nebenklassen von R gibt (nämlich R und Rh) mit $(1\,2\,3)^{x^{-1}} \in R$ für die Elemente x dieser Nebenklassen.

Sei $(1\,2\,3)^{x^{-1}} \in R$. Dann ist $(1\,2\,3)^{x^{-1}}$ entweder konjugiert zu $(1\,2\,3)$ oder $(1\,2\,3)^2$ in A; also entweder $(1\,2\,3)^{x^{-1}} = (1\,2\,3)^y$ oder $(1\,2\,3)^{x^{-1}} = \left((1\,2\,3)^2\right)^y = (1\,3\,2)^y$ für ein $y \in R$. Im ersten Fall ist $(1\,2\,3)^{yx} = (1\,2\,3)$, also $yx \in C_G(1\,2\,3) = \langle (1\,2\,3) \rangle \leq R$, und damit $x \in R$ – im Widerspruch zu unserer Annahme, daß $x \notin R$. Im zweiten Fall ist $(1\,3\,2)^{yxh} = (1\,2\,3)^h = (1\,3\,2)$, und damit $yxh \in C_G(1\,3\,2) \subseteq R$; daher $xh \in R$ und somit $Rx = Rh^{-1} = Rh$. Umgekehrt ist für $x = rh \in Rh$ sicherlich

$$(1\,2\,3)^{x^{-1}} = (1\,2\,3)^{h^{-1}r^{-1}} = (1\,3\,2)^{r^{-1}} \in R.$$

Nach der Definition von χ^G aus (7.7) folgt:

$$\chi^G(1\,2\,3) = \chi(1\,2\,3) + \chi\Big((1\,2\,3)^{h^{-1}}\Big) = \xi + \xi^2 = -1,$$

da nach (7.7) χ^G unabhängig von der Wahl der Nebenklassenvertreter von R in G ist. Nun ist χ^G Summe von irreduziblen Charakteren von A_5. Aus der Tafel (6.5) ergibt sich, daß die einzige Möglichkeit, -1 als Summe von Werten $\chi_i(1\,2\,3)$ darzustellen, folgende ist:

$$\chi^G(1\,2\,3) = -1 = \chi_5(1\,2\,3).$$

Es folgt, daß $\chi^G = \chi_5$ irreduzibel ist.

§9 Frobeniusgruppen.

(9.1) Bezeichnung.

Eine Teilmenge A der Gruppe G heißt TI-Menge, falls $A \cap A^g = A$ oder $\subseteq \{1\}$ für alle $g \in G$.

(9.2) Satz.

Sei A TI-Menge der endlichen Gruppe G und $N = N_G(A)$. Seien χ und θ verallgemeinerte Charaktere von N mit $\chi(n) = 0 = \theta(n)$ für alle $n \in N \backslash A$. Dann gilt:

(1) $\chi^G(y) = \chi(y)$ für alle $y \in A\backslash\{1\}$.

(2) Ist $\chi(1) = 0$, so ist $(\chi, \theta)_N = (\chi^G, \theta^G)_G$.

Beweis. (1) Nach (8.5)(1) gilt für beliebiges $g \in G$

$$\chi^G(y) = \frac{1}{|N|} \sum_{g \in G} \chi_0(gyg^{-1}).$$

Nach Voraussetzung ist $\chi_0(y) = 0$ für $y \in N\backslash A$. Daher ist $\chi^G(y) = 0$ falls nicht $y \in A^g$ für ein $g \in G$. (Also $y \in G\backslash \bigcup_{g\in G} A^g$!)

Ist $y \in A\backslash\{1\}$ so ist $\chi_0(gyg^{-1}) = 0$ oder $gyg^{-1} \in A$. Im zweiten Fall ist jedoch $A = A^{g^{-1}}$ und $g^{-1} \in N$. Dann ist jedoch $\chi(gyg^{-1}) = \chi(y)$ da χ Klassenfunktion von N. Also gilt für $y \in A\backslash\{1\}$:

$$\chi_0(gyg^{-1}) = 0 \text{ oder } \chi_0(gyg^{-1}) = \chi_0(y) \text{ und } g \in N.$$

Daher gilt für $y \in A\backslash\{1\}$:

$$\chi^G(y) = \frac{1}{|N|} \sum_{g \in N} \chi_0(gyg^{-1}) = \frac{1}{|N|}\chi_0(g) = \chi(y).$$

Dies zeigt (1).

(2) Sei nun $\chi(1) = 0$. Dann ist auch $\chi^G(1) = 0$. Somit

$$(+) \quad (\chi^G, \theta^G)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G^\#} \chi^G(y)\overline{\theta^G(y)}.$$

Nun ist, wie unter (1) gezeigt, $\chi^G(y) = 0$ falls $y \in G\backslash \bigcup_{g\in G} A^g$. Desweiteren nach (1), falls $y \in A^g$, also $y^{g^{-1}} \in A$:

$$\chi^G(y^{g^{-1}}) = \chi^G(y) = \chi(y^{g^{-1}}), \theta^G(y) = \theta(g^{g^{-1}}).$$

Nun gibt es genau $|G : N|$ Konjugierte von $A^\# = A\backslash\{1\}$ und jeweils zwei haben kein Element gemeinsam. Da $\chi^G(1) = 0$ reduziert sich (+) zu

$$\begin{aligned}
(\chi^G, \theta^G)_G &= \frac{1}{|G|}|G : N| \sum_{y \in A^\#} \chi(y)\theta(y) = \frac{1}{|N|} \sum_{y \in N} \chi(g)\theta(y) \\
&= (\chi, \theta)_N,
\end{aligned}$$

da $\chi(y) = 0$ für $y \in N\backslash A$. □

(9.3) Definition.
Eine endliche Gruppe G die transitiv auf einer Menge Ω operiert, sodaß für alle $\alpha \neq \beta \in \Omega$ gilt:

$$G_{\alpha,\beta} = \{1\}$$

heißt Frobeniusgruppe. Ist G eine solche Frobeniusgruppe, so ist offensichtlich die Menge

$$G\backslash \bigcup_{\delta \in \Omega} G_\delta = G\backslash \bigcup_{g \in G} G_\alpha^g$$

invariant unter Konjugierten. Daher ist auch

$$(*) \quad N = (G \backslash \bigcup_{\delta\in\Omega} G_\delta) \cup \{1\}$$

invariant unter Konjugierten. Man nennt N den Frobeniuskern der Frobeniusgruppe G. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß N Normalteiler von G ist. Offensichtlich gilt

$$|\bigcup_{\delta\in\Omega} G_\delta| = |\Omega||G_\alpha| - |\Omega| + 1 = |\Omega|(|G_\alpha| - 1) + 1,$$

da für $\beta \neq \delta$ gilt $G_\beta \cap G_\delta = \{1\}$ und da $G_\delta = G_\alpha^g$ für $\alpha^g = \delta$. Wegen $|\Omega||G_\alpha| = |G|$ nach dem Bahnenlemma folgt:

$$|N| = |G| - (|G| - |\Omega| + 1) + 1 = |\Omega|.$$

Somit erhalten wir:

(9.4) Hilfssatz.
Sei G Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern N. Ist N Untergruppe von G so gilt:

(1) N ist Normalteiler.

(2) $G = N \cdot G_\alpha$ und $N \cap G_\alpha = 1$.

(3) N ist regulär auf Ω (i.e. transitiv und fixpunktfrei)

Beweis. (1) folgt aus (9.3) $(*)$. Nach Definition von N ist offensichtlich $N \cap G_\alpha = \{1\}$. Daher

$$|NG_\alpha| = |N||G_\alpha| = |\Omega||G_\alpha| = |G : G_\alpha||G_\alpha| = |G|,$$

also $NG_\alpha = G$. Nach dem Frattiniargument folgt nun, daß N transitiv auf Ω ist. Also gilt (3). □

(9.5) Hilfssatz.
Für eine endliche Gruppe G sind äquivalent:

(1) G ist Frobeniusgruppe.

(2) G besitzt eine Untergruppe U, sodaß $U \cap U^g = \{1\}$ für alle $g \in G\backslash U$.

Beweis. Ist G Frobeniusgruppe so setze $U = G_\alpha$. Dann gilt für $g \in G\backslash U : \alpha \neq \alpha^g$. Daher

$$U \cap U^g = G_\alpha \cap G_{\alpha^g} = \{1\}.$$

Besitzt G nun eine Untergruppe U die (2) genügt, so setze $\Omega = \{Ug \mid g \in G\}$. Dann ist für $\beta = Ug$:

$$G_\beta = U^g.$$

Es folgt für $\alpha = Uh \neq \beta = Ug$:

$$G_\alpha \cap G_\beta = U^h \cap U^g = (U^{hg^{-1}} \cap U)^g = \{1\}^g = \{1\},$$

da $hg^{-1} \notin U$, da ja $Uh \neq Ug$. Somit $G_{\alpha\beta} = \{1\}$ und G ist Frobeniusgruppe.
Wir zeigen nun:

(9.6) Satz. (Frobenius)
Sei G Frobeniusgruppe mit Frobeniuskern N. Dann ist N Normalteiler von G.

Beweis. Sei $H = G_\alpha$. Dann ist O.B.d.A $\quad H \neq \{1\}$, da sonst $N = G$. Desweiteren ist $H = N_G(H)$, denn für $g \in N_G(H)$ gilt $G_\alpha = G_{\alpha^g}$, also $\alpha = \alpha^g$ da sonst $G_\alpha \cap G_{\alpha^g} = \{1\}$ wäre. Wir können also (9.1) anwenden, mit H in der Rolle von A und $N_G(A)$.

Seien $\theta_1, \cdots, \theta_t$ die irreduziblen Charaktere von H, wobei θ_1 der triviale Charakter ist. Wegen $H \neq \{1\}$ ist $t \geq 2$. Sei $d_i = \theta_i(1)$. Setze

(1) $\Psi_i = d_i\theta_1 - \theta_i \qquad 2 \leq i \leq t.$
Dann ist Ψ_i ein verallgemeinerter Charakter von H mit $\Psi_i(1) = 0$. Daher erhalten wir nach (9.1)

(2)
$$\begin{aligned}(\Psi_i^G, \Psi_i^G) &= (\Psi_i, \Psi_i)_H = (d_i\theta_1 - \theta_i, d_i\theta_1 - \theta_i)_N \\ &= d_i^2(\theta_1, \theta_1)_H + (\theta_i, \theta_i)_H = d_i^2 + 1\end{aligned}$$

für $2 \leq i \leq t$.

Desweiteren gilt nach dem Frobeniusreziprozitätssatz für den trivialen Charakter χ_1 von G.

(3) $(\Psi_i^G, \chi_1)_G = (\Psi_i, \chi_{1H})_H = (\Psi_i, \theta_1)_H = d_i$ nach (1).
Dies bedeutet nach den Orthogonalitätsrelationen, daß in Ψ_i^G der triviale Charakter χ_1 von G genau d_i mal vorkommt. Nach (8.5)(1) ist $\Psi_i^G(1) = |G : H|\Psi_i(1) = 0$. Es folgt

(4) $\Psi_i^G = d_i\chi_1 - \chi_i, \qquad \chi_i(1) = d_i; \qquad 2 \leq i \leq t$ wobei χ_i irreduzibler Charakter von G ist.
Setze nun

(5) $\chi = \sum_{i=1}^t d_i\chi_i \qquad (d_1 = 1)$. Dann gilt nach (4)

$$\chi(1) = \sum_{i=1}^t d_i^2 = \sum_{i=1}^t \theta_i(1)^2 = |H|.$$

Desweiteren, falls $1 \neq y \in N$, so ist y in keinem Konjugierten von H. Daher $\Psi_i^G(y) = 0$ nach (8.5)(2). Es folgt

$$\begin{aligned}\chi_i(y) &= d_i\chi_1(y) - \Psi_i^G(y) = d_i, \text{ also} \\ \chi(y) &= \sum_{i=1}^t d_i^2 = |H|.\end{aligned}$$

Somit folgt nach (5.8) (bzw. Übungsaufgabe) $y \in K = \operatorname{Kern}\chi$. Wir erhalten $N \subseteq K$.

Angenommen $N \neq K$. Dann $K \cap G_\beta \neq \{1\}$ für ein $\beta \in \Omega$, also auch $K \cap H \neq \{1\}$. Für $1 \neq y \in H$ gilt jedoch nach (9.1) $\Psi_i^G(y) = \Psi_i(y)$ und daher nach (1) und (4):

$$\chi_i(y) = d_i - \Psi_i(y) = \theta_i(y).$$

Es folgt

$$\chi(y) = \sum_{i=1}^t d_i\theta_i(y) = \sum_{i=1}^t \theta_i(1)\theta_i(y) = 0$$

nach (4.10). Dies bedeutet $H \cap K = \{1\}$ und $K = N$. Daher ist N als Kern einer Darstellung ein Normalteiler von G. $\square$

(9.7) Satz.
Sei G Frobeniusgruppe mit Kern N und $H = G_\alpha$. Dann gilt

(1) $C_N(h) = \{1\}$ für alle $1 \neq h \in H$.

(2) $|H| \mid (|N| - 1)$.

Beweis.

(1) Sei $1 \neq n \in C_N(h), 1 \neq h \in H$. Dann folgt $h = h^u \in G_\alpha \cap G_{\alpha^n}$, im Widerspruch zu $\alpha \neq \alpha^n$.

(2) Nach (1) operiert H fixpunktfrei auf $N^\# = N \backslash \{1\}$. Daher hat nach dem Bahnenlemma jede Bahn von H auf $N^\#$ die Länge $|H|$. Es folgt $|N^\#| = k \cdot |H|$, $k =$ Anzahl der Bahnen.

□

Zum Schluß geben wir noch ohne Beweis an:

(9.8) Satz.
Sei G Frobeniusgruppe mit Kern N und $H = G_\alpha$. Dann gelten:

(1) N ist nilpotent (Thompson).

(2) Für $p \neq 2$ sind die p-Sylowgruppen von H zyklisch und für $p = 2$ zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppen.

Wesentlich einfacher ist die Situation wenn $H = G_\alpha$ gerade Ordnung hat. In diesem Fall gilt:

(9.9) Satz.
Sei G Frobeniusgruppe mit Kern N und $H = G_\alpha$. Ist $|H|$ gerade so gilt:

(1) N ist abelsch.

(2) H besitzt genau eine Involution z. Diese invertiert N.

Zum Beweis benötigen wir folgenden Hilfssatz über fixpunktfreie Automorphismen.

(9.10) Hilfssatz.
Sei α fixpunktfreier Automorphismus der endlichen Gruppe G mit $o(\alpha) = n$. Dann gilt:

(1) Die Abbildung $\mu : g \to g^{-1}g^\alpha$ ist Bijektion.

(2) Sind g und g^α konjugiert in G, so ist $g = 1$.

(3) Für alle $g \in G$ gilt $gg^\alpha g^{\alpha^2} \cdots g^{\alpha^{n-1}} = 1$.

Beweis.

(1) Seien $g_1, g_2 \in G$ mit

$$g_1^{-1} g_1^{\alpha} = g_2^{-1} g_2^{\alpha}.$$

Dann gilt $g_1 g_2^{-1} = g_1^{\alpha}(g_2^{\alpha})^{-1} = (g_1 g_2^{-1})^{\alpha}$. Wegen der Fixpunktfreiheit von α folgt $g_1 = g_2$. Dies zeigt, daß μ injektiv ist und daher wegen der Endlichkeit von $|G|$ auch bijektiv ist.

(2) Sei $g^{\alpha} = x^{-1} g x$. Nach (1) existiert ein $y \in G$ mit $x = y^{-1} y^{\alpha}$. Es folgt

$$g^{\alpha} = y^{-\alpha} y g y^{-1} y^{\alpha}, \text{ also } y g y^{-1} = y^{\alpha} g^{\alpha} y^{-\alpha} = (y g y^{-1})^{\alpha}.$$

Daher $y g y^{-1} = 1$ und somit $g = 1$.

(3) Setze $h = g g^{\alpha} \cdots g^{\alpha^{n-1}}$. Wegen $g^{\alpha^n} = g$ folgt

$$h^{\alpha} = g^{\alpha} g^{\alpha^2} \cdots g^{\alpha^{n-1}} g = g^{-1} h g = h^g.$$

Hieraus folgt nach (2) $h = 1$. □

Beweis von (9.9). Da $|H|$ gerade existiert eine Involution z in H. Nach (9.7) ist z fixpunktfrei auf N. Daher folgt nach (9.10)(3) $n n^z = 1$ für alle $n \in N$, also $n^z = n^{-1}$. Dies bedeutet z invertiert N. Hieraus folgt bekanntlich, daß N abelsch ist.

Ist nun $t \in H$ eine weitere Involution, so invertiert t auch H. Es folgt $tz \in C_H(N)$ und daher $tz = 1$ nach (9.7). □

Wir wollen zum Schluß noch die irreduziblen Charaktere einer Frobeniusgruppe beschreiben. Hierzu benötigen wir einige Vorbereitung:

(9.11) Bezeichnung. Sei G eine endliche Gruppe und $A = \mathrm{Aut}(G)$. Für einen irreduziblen Charakter χ von G und $\alpha \in A$ sei $\chi^{\alpha} : g \to \chi(g^{\alpha}))$. Ist ρ die zu χ gehörige Darstellung, so ist χ^{α} Charakter von ρ^{α}. Das heißt χ^{α} ist irreduzibel. Dies zeigt, daß α eine Permutation π_{α} der irreduziblen Charaktere von G und daher die Zeilen der Charaktertafel bewirkt. Sei $\pi : \alpha \to \pi_{\alpha}$. Dann ist π eine Permutationsdarstellung von A auf den Zeilen der Charaktertafel von G.

Ist $\mathcal{C} = \{x^g \mid g \in G\}$ eine Konjugiertenklasse von G, so ist $\mathcal{C}^{\alpha} = \{(x^g)^{\alpha} = x^{\alpha g^{\alpha}} \mid g \in G\} = \{(x^{\alpha})^h \mid h \in G\}$ auch eine Konjugiertenklasse von G. Das heißt α bewirkt eine Permutation φ_{α} der Spalten der Charaktertafel von G. Sei $\varphi : \alpha \to \varphi_{\alpha}$ die zugehörige Permutationsdarstellung von A.

Wir wollen untersuchen wie φ und π zusammenhängen. Hierzu benötigen wir zuerst eine leichte Verschärfung von (7.4).

(9.12) Hilfssatz. Sei $\rho : G \to GL(V(\Omega))$ Permutationsdarstellung der endlichen Gruppe G mit Charakter χ. Sei χ_1 der triviale Charakter von G. Dann gilt: $(\chi, \chi_1) =$ Anzahl der Bahnen von G auf Ω.

Beweis. Seien $\Omega_1, \cdots, \Omega_k$ die Bahnen von G auf Ω. Dann $\Omega = \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$, $V(\Omega) = V(\Omega_1) \oplus \cdots \oplus V(\Omega_k)$ und $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ wobei $\rho_i : G_i \to GL(V(\Omega_i))$. Ist Ψ_i der Charakter von ρ_i, so folgt $\chi = \Psi_1 + \cdots + \Psi_k$. Nun gilt nach (7.4) $(\Psi_i, \chi_1) = 1$. Es folgt $(\chi, \chi_1) = k$. □

(9.13) Satz. Sei A Gruppe vom Automorphismus der endlichen Gruppe G. Dann sind die Anzahl der Bahnen von A auf den Zeilen und auf den Spalten der Charaktertafel von G gleich.

Beweis. Da die irreduziblen Charaktere von G eine Basis des Raumes der Klassenfunktionen bilden, ist die Charaktertafel X von G eine reguläre Matrix. Wegen $\chi^\alpha(g) = \chi(g^\alpha)$ für $g \in G, \alpha \in A$ und Charakter χ von G, sind die Matrizen X^{π_α} und X^{φ_α} gleich. Wir setzen $X^\alpha := X^{\pi_\alpha} = X^{\varphi_\alpha}$. Da X und X^α regulär sind, existieren eindeutig bestimmte Permutationsmatrizen $P(\alpha)$ und $Q(\alpha)$ mit

$$(*) \qquad P(\alpha)X = X^\alpha = XQ(\alpha).$$

Hierbei sind die Abbildungen $\widetilde{\pi} : \alpha \to P(\alpha)$ und $\widetilde{\varphi} : \alpha \to Q(\alpha)$ Matrixdarstellungen von A. Desweiteren gilt: Anzahl Bahnen von $\widetilde{\pi(A)}$ auf dem Zeilen von X
$=$ Anzahl Bahnen von $\pi(A)$ auf den Zeilen von X und die analoge Gleichheit für $\widetilde{\varphi}(A)$ und $\varphi(A)$. Seien nun θ_1 der Charakter von $\widetilde{\pi}$ und θ_2 der Charakter von $\widetilde{\varphi}$. Wegen $X^{-1}P(\alpha)X = Q(\alpha)$ haben $P(\alpha)$ und $Q(\alpha)$ dieselbe Spur, also $\theta_1 = \theta_2$. Ist X_1 der triviale Charakter von A, so folgt aus (9.12)

$$\begin{gathered}\text{Anzahl der Bahnen von } \pi(A) \text{ auf den Zeilen von } X \\ = (\theta_1, \chi_1) = (\theta_2, \chi_1) = \text{Anzahl der Bahnen von } \varphi(A) \text{ auf den Spalten von } X.\end{gathered}$$

□

Wir können nun folgenden Satz zeigen:

(9.14) Satz.
Sei G Frobeniusgruppe mit Kern N und Komplement H. Dann gelten:

(1) Ist Ψ ein nichttrivialer irreduzibler Charakter von N, so ist Ψ^G ein irreduzibler Charakter von G.

(2) Jeder irreduzible Charakter χ von G mit $N \nsubseteq \operatorname{Kern}\chi$ ist von der Form $\chi = \Psi^G$, Ψ wie in (1).

(3) Sind Ψ_1, Ψ_2 nicht triviale irreduzible Charaktere von N, so gilt: $\Psi_1^G = \Psi_2^G \Leftrightarrow$ Es existiert ein $h \in H$ mit $\Psi_1^h = \Psi_2$.

Beweis. Seien $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_t$ die Konjugiertenklassen von $N\backslash\{1\}$ und seien $\Psi_1, \cdots, \Psi_t$ die irreduziblen Charaktere von N verschieden von dem trivialen Charakter. Wir zeigen zuerst:

$$(*) \quad \text{Ist } 1 \neq h \in H \text{ und } i \leq t, \text{ so ist } \mathcal{C}_i^h \neq \mathcal{C}_i.$$

Angenommen $\mathcal{C}_i^h = \mathcal{C}_i$. Sei $\mathcal{C}_i = \{x^N\}$. Dann gilt $x^h = x^n$ für ein $n \in N$, also $hn^{-1} \in C_G(x)$.

Nun ist nach (9.3)(*) $G\backslash N \subseteq \bigcup_{g\in G} H^g$ und nach (9.4)(2) $N \cap H = \{1\}$. Es folgt $1 \neq hn^{-1} \in H^g$ für ein $g \in G$, ein Widerspruch, da nach (9.7) $C_N(hn^{-1}) = 1$. Dies zeigt (*).

(*) zeigt, daß $\{\mathcal{C}, \cdots, \mathcal{C}_t\}$ unter H in $t/|H|$ Bahnen der Länge $|H|$ zerfällt. Daher folgt aus (9.13), daß $\{\Psi_1, \cdots, \Psi_t\}$ unter H in $t/|H|$ Bahnen zerfällt. Sei nun Ψ nichttrivialer irreduzibler Charakter von N. Nach (8.5) gilt:

$$\begin{aligned}(\Psi^G, \Psi^G)_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{y\in G} \Psi^G(y)\overline{\Psi^G(y)} = \frac{1}{|G|}\sum_{y\in N} \Psi^G(y)\overline{\Psi^G(y)} \\ &= \frac{|N|}{|G|}(\Psi^G\,|_N, \Psi^G\,|_N)_N\end{aligned}$$

Wir zeigen:

$$(+) \qquad \Psi^G |_N = \sum_{h\in H} \Psi^h \qquad (\Psi^G(g) = 0 \text{ für } g \in G\backslash N!)$$

Nun gilt nach (8.5)(1) für $y \in N$

$$\Psi^G(y) = \frac{1}{|N|}\sum_{u\in G}\Psi(uyu^{-1}).$$

Nun $u = n \cdot h$ mit eindeutig bestimmten $n \in N$, $h \in H$. Wegen $\Psi(uyu^{-1}) = \Psi(n(hyh^{-1})^{n^{-1}}) = \Psi(hyh^{-1}) = \Psi^{h^{-1}}(y)$ folgt

$$\Psi^G(g) = \frac{1}{|N|}|N|\sum_{h^{-1}\in H}\Psi^{h^{-1}}(y) = \sum_{h\in H}\Psi^h(y).$$

Es folgt: $\Psi^G |_N = \sum_{h\in H} \Psi^h \qquad (+)$.

Wegen $\Psi^h \neq \Psi^{\overline{h}}$ für $h \neq \overline{h} \in H$ nach $(*)$ erhalten wir

$$(\Psi^G |_N, \Psi^G |_N) = (\sum_{h\in H}\Psi^h, \sum_{h\in H}\Psi^h) = \sum_{h\in H}(\Psi^h, \Psi^h) = |H|.$$

Es folgt $(\Psi^G, \Psi^G)_G = \frac{|N|}{|G|} \cdot |H| = \frac{|G|}{|G|} = 1$. Dies zeigt, daß Ψ^G irreduzibel ist, also (1). (3) folgt unmittelbar aus (+). Es bleibt (2) zu zeigen:
Es ist $\Psi^G(1) = |G : N|\Psi(1) = |H|\Psi(1)$. Desweiteren ist N nicht im Kern von Ψ^G. Denn wäre N im Kern von Ψ^G, so wäre

$$\begin{aligned}(\Psi^G |_N, \chi_1)_N &= \frac{1}{|N|}\sum_{y\in N}\Psi^G |_N (y)\chi_1(y) = \frac{|H|}{|N|}\sum_{y\in N}\Psi(1) \\ &= |H|\varphi(1) \neq 0\end{aligned}$$

wobei χ_1 der triviale Charakter von N ist. Andererseits ist nach (+) $(\Psi^G |_N, \chi_1)_N = (\sum_{h\in H}\Psi^h, \chi_1)_N = 0$.

Sei nun $m = t/|H|$ und wähle die Nummerierung so, daß $\Psi_1, \cdots, \Psi_m$ Vertreter der Bahnen von H auf $\{\Psi_1, \cdots, \Psi_t\}$ sind. Ist $d_i = \Psi_i(1)$, so ist auch $\Psi_i^h(1) = d_i$. Es folgt:

$$(**) \qquad |H|(\sum_{i=1}^m d_i^2) + 1 = |N| \text{ nach } (3.3)(3)\ .$$

Andererseits ist nach (3):
$\Psi_i^G \neq \Psi_j^G$ für $i \neq j \leq m$. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^m \Psi_i^G(1)^2 = \sum_{i=1}^m |H|^2 d_i^2 = |H|(|N|-1) = |G\backslash H|.$$

Sind nun $\rho_{m+1}, \cdots, \rho_k$ die irreduziblen Darstellungen von H mit Charakteren $\chi_{m+1}, \cdots, \chi_k$ so kann man diese Darstellungen zu irreduziblen Darstellungen $\widetilde{\rho}_i$ von G machen durch

$$\widetilde{\rho}_i(n \cdot h) := \rho_i(h).$$

Für die zugehörigen Charaktere $\widetilde{\chi}_i$ gilt $\widetilde{\chi}_i(nh) = \chi_i(h)$. Das heißt wir haben noch $k - m$ irreduzible Charaktere von G gefunden mit $N \leq \operatorname{Kern} \widetilde{\chi}_i$, $m+1 \leq i \leq k$. Für die Summe der Quadrate der Grade gilt:

$$\sum_{i=m+1}^{k} \widetilde{\chi}_i^{(}1)^2 = \sum_{i=m+1}^{k} \chi_{i(1)}^2 = |H|.$$

Zusammen erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{m} \Psi_i^G(1)^2 + \sum_{i=m+1}^{k} \widetilde{\chi}_i(1)^2 = |G \backslash H| + |H| = |G|.$$

Dies bedeutet nach (3.3), daß $\Psi_1^G, \cdots, \Psi_m^G, \widetilde{\chi}_{m+1}, \cdots, \widetilde{\chi}_k$ alle irreduziblen Charaktere von G sind. Insbesondere gilt (2). □

Als Folgerung schreiben wir noch auf:

(9.15) Folgerung.
Jeder irreduzible Charakter einer Frobeniusgruppe G mit Kern N und Komplement H ist von der Form

(a) Ψ^G, Ψ irreduzibler nicht trivialer Charakter von N.

(b) $\widetilde{\chi}$ mit $\widetilde{\chi}(nh) = \chi(h)$, wobei χ irreduzibler Charakter von H.

§10 Darstellungen kompakter Gruppen.

(10.1) Definition. Eine Untergruppe $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ bzw. $\subseteq GL_n(\mathbb{C})$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$ ist.

(10.2) Beispiel.

(1) Die klassischen Gruppen $O_n(\mathbb{R})$ und $U_n(\mathbb{C})$ sind kompakt.

   (a) Abgeschlossenheit.
   Identifiziere den $\mathbb{R}^{n^2}$ mit $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Dann ist $O_n(\mathbb{R})$ die Menge der Nullstellen der Abbildung

$$f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ mit } f(A) = AA^t - I_n.$$

   Dies ist eine stetige Abbildung. Die Menge der Nullstellen einer stetigen Abbildung ist abgeschlossen.

(b) Beschränktheit.
Sei $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Wegen $AA^t = I_n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1 \qquad \text{für } i = 1, \cdots, n.$$

Das heißt für die Einträge a_{ij} gilt $|a_{ij}| \leq 1$. Daher ist A enthalten im entsprechenden Einheitsquader des $\mathbb{R}^{n^2}$.

Der Beweis für $U_n(\mathbb{C})$ geht genauso.

(2) Die Gruppe der Lorentztransformationen ist nicht kompakt.
Die Gruppe der Lorentztransformationen ist die Untergruppe $G \subseteq GL_4(\mathbb{R})$ die die quadratische Form

$$x^2 + y^2 + 2^2 - t^2$$

respektieren. Die Fundamentalmatrix dieser Form ist $F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$. Das heißt G besteht aus allen Matrizen $A \in GL_4(\mathbb{R})$ mit

$$X^t FY = (AX)^t F(AY) = X^t A^t FAY.$$

Das heißt $A^t FA = F$. Dies bedeutet, daß für die Diagonaleinträge von $A^t FA$ gelten muß $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + a_{i3}^2 - a_{i4}^2 = 1, \quad i = 1, \cdots, 4$. Die Menge dieser Einträge ist jedoch nicht beschränkt.

(10.3) Satz.
Sei G eine kompakte Gruppe. Dann existiert auf G ein sogenanntes 'Haar'sches Maß μ mit:

(1) $\mu(G) = 1$.

(2) $\int_G f(t)dt = \int_G f(ts)dt$ für jede stetige Funktion f auf G und jedes $s \in G$.

(10.4) Beispiel.
Sei $G = S0_2(\mathbb{R})$ - Drehgruppe. Dann können wir G mit der Sphäre S^1 identifizieren.

B I L D

Dann ist $\mu(B) = \frac{1}{2\pi}\ell(B), \ell(B)$ Länge des Bogenstücks.

(10.5) Folgerung.
Sei $\rho : G \to GL_m(\mathbb{C})$ stetige Darstellung der kompakten Gruppe G. Dann gelten:

(1) ρ ist unitär. Das heißt es existiert eine G-invariante positive definite hermitische Form auf $\mathbb{C}^m$.

(2) $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ mit irreduziblen stetigen Darstellungen ρ_i von G.

Beweis. Der Beweis von (1) geht genauso wie der Beweis von (1.2) indem wir für $r, w \in \mathbb{C}^m$ definieren.

$$\langle v, w \rangle = \int_G (r^g, w^g) dg.$$

(2) folgt unmittelbar aus (1).

(10.6) Kommentar. ρ stetig bedeutet, daß ρ stetig als Abbildung von G in $GL_m(\mathbb{C})$ ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Einträge von $\rho(g)$ stetige Funktionen der Einträge von g sind.

In den meisten Anwendungen ist dies automatisch der Fall. So werden zum Beispiel in der Theorie der algebraischen Gruppen rationale Darstellungen betrachtet, dies sind Darstellungen bei denen die Koeffizienten der Darstellungsmatrix rationale Funktionen der Koeffizienten von g sind. Solche rationalen Darstellungen sind immer stetig, da rationale Funktionen in allen Punkten stetig sind, wo sie definiert sind.

(10.7) Definition.
Auf dem Raum der stetigen Klassenfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ definiert man durch

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_G f(g)\overline{\varphi(g)}dg$$

eine hermitische Form. Mit dieser Form gilt:

(10.8) Satz.

(1) Zwei stetige Darstellungen ρ und ρ' sind genau dann äquivalent, falls $\chi = \chi'$ für ihre Charaktere χ, χ'.

(2) Für irreduzible stetige Charaktere χ und χ' gilt

$$(\chi, \chi') = 0 \text{ falls } \chi \neq \chi' \text{ und } (\chi, \chi) = 1.$$

(3) Jeder stetige Charakter ist Summe von irreduziblen Charakteren.

(4) Ist G abelsch, so ist jede irreduzible stetige Darstellung von G 1-dimensional. Diese Darstellungen werden also gegeben durch stetige Homomorphismen

$$\rho : G \to \mathbb{C}^*.$$

Außerdem gilt für stetige irreduzible Darstellungen auch das Schur'sche Lemma. Die übrigen Teile der Orthogonalitätsrelationen machen keinen Sinn, da natürlich die Anzahl der irreduziblen stetigen Darstellungen ∞ ist.

Der §6 über Tensorprodukte gilt praktisch unverändert. Wir wollen dies in einem einzigen Satz zusammenfassen:

(10.9) Satz.
Seien G_1 und G_2 kompakte Gruppen. Dann gelten

(1) $G_1 \times G_2$ ist kompakt (als Teilmenge des $\mathbb{C}^{n^2} \times \mathbb{C}^{m^2} = C^{n^2+m^2}$). Das Haar'sche Maß auf $G_1 \times G_2$ ist das Produktmaß.

(2) Sind ρ_1, ρ_2 stetige Darstellungen von G_i in $GL(V_i)$, so ist $\rho_1 \otimes \rho_2$ stetige Darstellung von $G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$. $\rho_1 \otimes \rho_2$ ist genau dann irreduzibel wenn ρ_1 und ρ_2 irreduzibel sind.

(3) Jede stetige irreduzible Darstellung von $G_1 \times G_2$ erhält man in der Form (2).
Der Beweis von (3) muß anders als der Beweis von (6.10)(b) geführt werden, indem wir ja die Anzahl der Konjugiertenklassen von $G_1 \times G_2$ abgezählt haben. Die Behauptung bleibt jedoch richtig.

Wir wollen die irreduziblen stetigen Darstellungen der Gruppe $G = SO_2(\mathbb{R})$ bestimmen. Diese werden nach (10.8)(4) gegeben durch Homomorphismus $G \to \mathbb{C}^*$. Wir haben

(10.10) Satz.
Die stetigen irreduziblen Darstellungen von $SO_2(\mathbb{R})$ werden gegeben durch die Potenzabbildungen

$$\begin{array}{rcl} e^{i\alpha} & \to & e^{in\alpha}, n \in \mathbb{N} \\ \text{Drehung um } \alpha & \to & \text{Drehung um } n\alpha. \end{array}$$

Der Beweis von (10.10) geht über 2 Hilfssätze die analytischer Natur sind.

(10.11) Hilfssatz.
Die stetigen Homomorphismen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sind gegeben durch $\varphi(x) = cx, c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da φ Homomorphismus gilt für $n \in \mathbb{N} : \varphi(nx) = n\varphi(x)$ und $\varphi(-n) = -\varphi(n)$. Sei nun $x = \frac{m}{n}$. Dann

$$n\varphi(x) = \varphi(nx) = \varphi(m) = m\varphi(1).$$

Also $\varphi(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}\varphi(1)$ für alle $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

Ist nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig wähle Folge x_i von rationalen Zahlen die gegen x konvergieren. Wegen der Stetigkeit von φ folgt

$$\varphi(x) = \lim_{i\to\infty} \varphi(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_i\varphi(1) = x\varphi(1).$$

Setzt man $c = \varphi(1)$ so folgt (10.11).

(10.12) Hilfssatz.
Die stetigen Homomorphismen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to G$, $G = \{e^{it} \mid t \in \mathbb{R}\}$ sind von der Form $\varphi(t) = e^{ict}, c \in \mathbb{R}$ fest.

Beweis:
Wir wollen annehmen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to G$ ist differenzierbar. Da φ Homomorphismus ist und da $\varphi(0) = 1$ ist, gilt

$$\frac{\varphi(t + \Delta t)}{\Delta t} = \varphi(t)\frac{\varphi(\Delta t) - \varphi(0)}{\Delta t}.$$

Es folgt

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(0)\varphi(t) = (ic)\varphi(t)$$

mit $ic = \varphi'(0)$. ($\varphi'(0)$ ist Steigung der Tangente an dem Punkt $\varphi(0) = 1$ de Einheitskreises. Also $\varphi'(0)$ rein imaginär.)

Nun ist $\varphi(t) = e^{ict}$ Lösung dieser Differentialgleichung, die der 'Anfangsbedingung' $\varphi(0) = 1$ genügt. Daher ist $\varphi(t) = e^{ict}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. □

Beweis von (10.10) Sei $\varphi : G \to \mathbb{C}^*$ stetiger Homomorphismus. Nach (10.5)(1) ist $\varphi(g)$ unitär, also für $c = \varphi(g)$ gilt $c\overline{c} = 1$. Dies bedeutet $c \in S^1 = SO_2(\mathbb{R}) = G$. Somit gilt $\varphi : G \to G$.

Sei nun $\epsilon : \mathbb{R}^+ \to G$ mit $\epsilon(x) = e^{ix}$. Dann ist ϵ stetiger Homomorphismus von $\mathbb{R}^+$ in G. Somit ist $\rho = \varphi\epsilon : \mathbb{R}^+ \to G$ stetiger Homomorphismus.

Nach (10.12) gilt $\rho(x) = e^{icx}$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$. Desweiteren gilt $\rho(2\pi) = \varphi(\epsilon(2\pi)) = \varphi(1) = 1$. Wir erhalten

$$e^{i2\pi c} = \rho(2\pi) = 1.$$

Hieraus folgt $c = n \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$\varphi(e^{ix}) = \varphi(\epsilon(x)) = \rho(x) = e^{inx} = (e^{ix})^n.$$

$\square$