

(0) Einleitung

(0.1) Vollständige Induktion

Da wir später Formeln zu beweisen haben, und die Beweise meist mit vollständiger Induktion geführt werden, wollen wir hier noch einmal diese Beweismethode durchdiskutieren.

(0.1.1) Definition. Die folgende Beweismethode wird "**Beweis durch vollständige Induktion**" genannt. Gegeben sind Aussagen $A(n)$, $n \geq n_0$ natürliche Zahlen (zu jeder natürlichen Zahl $n \geq n_0$ eine).

- (1) Man zeigt die Aussage $A(n_0)$ durch einen konkreten (einzelnen) Beweis (das nennt man die **Induktionsverankerung**).
- (2) Dann zeigt man, dass für jedes $n \geq n_0$ aus der Annahme, dass $A(n)$ richtig ist, auch folgt, dass $A(n+1)$ richtig ist (das ist der **Induktionsschritt** von n nach $n+1$).

Damit ist gezeigt, dass für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ gilt.

Ein Induktionsbeweis besteht also stets aus zwei Teilen:

- einem (meist kurzen, einfachen) Beweis der Aussage für den kleinsten in Frage kommenden Fall (der Induktionsverankerung)
- einem (meist schwierigeren) Beweis (dem Induktionsschritt).

Jeder der beiden Teile ist ein kleiner Beweis.

Dabei hat man bei der **Induktionsverankerung** keine zusätzlichen Voraussetzungen, aber dafür ist die Aussage konkret, die zu zeigen ist. Das n_0 ist ja vorgegeben, eine bestimmte Zahl wie 0, 1 oder 5. Da kann man rechnen oder zeichnen oder abschätzen das ist meist **leicht**.

Beim **Induktionsschritt** hat man die **Induktionsbehauptung** zu zeigen (dass die Aussage $A(n+1)$ gilt), das ist **schwer**, weil $n+1$ ja eine nicht näher bekannte (beliebige) natürliche Zahl ist, wir wissen von ihr nur, dass sie um 1 größer ist als die ebenfalls nicht näher bekannte (beliebige) natürliche Zahl n .

Aber: wir haben bei dem Induktionsschritt einen Wahnsinnshelfer, eine zusätzliche Voraussetzung, die wir benutzen dürfen (die sogenannte **Induktionsannahme**).

Wir dürfen nämlich benutzen, dass die Aussage $A(n)$ für dieses n richtig (schon gezeigt) ist. Das hilft natürlich wahnsinnig.

Allerdings hilft es nur, wenn es uns gelingt, die Aussage $A(n+1)$ so geschickt "umzuformen", dass irgendwie die Aussage $A(n)$ "in $A(n+1)$ vorkommt". Dann können wir die Induktionsannahme benutzen (dass $A(n)$ richtig ist) und kommen meist schnell zum Erfolg. Wenn es uns nicht gelingt, die Aussage $A(n)$ ins Spiel zu bringen, dann können wir die Induktionsannahme nicht benutzen und müssen die Richtigkeit der Aussage $A(n+1)$ stehend freihändig beweisen, ohne Wahnsinnshelfer, und hätten uns die ganze Induktion sparen können.

Einige Bemerkungen.

(1) Die Berechtigung dafür, diese Beweismethode anzuwenden, kommt aus dem zweiten Semester (WGMS II). Da wurde bewiesen, dass tatsächlich die Aussagen $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr sind, wenn

- die Aussage $A(n_0)$ wahr ist, und
- für jedes $n \geq n_0$ aus der Aussage $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt.

Man muss sich nur von n_0 nach n_0+1 und nach n_0+2 , ... und immer weiter hangeln (mit jeweils demselben Beweis wie im Induktionsschritt, der funktioniert ja immer, weil er so allgemein ist) bis man bei dem n gelandet ist. Dass man von n_0 zu jedem $n \geq n_0$ durch eine endliche Anzahl von Schritten kommt, ist klar (bzw. ist ein Axiom für die natürlichen Zahlen).

(2) Man könnte die Variable n auch k nennen oder m oder j - das ist egal. Also kann man den Induktionsschritt auch von k nach $k+1$ machen, oder von m nach $m+1$, oder auch von $n-1$ nach n . Es muss bloß von einer (beliebigen) natürlichen Zahl $\geq n_0$ zur nächsten geschritten werden. Ich mache den Schritt meist von n nach $n+1$, weil man sich da die wenigsten Gedanken machen muss, wie die Induktionsannahme hinzuschreiben ist. Es ist in diesem Fall einfach die Behauptung des Satzes (nämlich $A(n)$).

(3) Manche Leute nennen die Induktionsverankerung auch Induktionsanfang, und den Induktionsschritt nennen sie Induktionsschluss. Das soll uns nicht stören: wichtig ist nicht, wie die beiden Überschriften heißen, sondern dass die beiden Teile des Induktionsbeweises durchgeführt werden.

Aber es gibt eine Variante dieser Beweismethode, die wir manchmal brauchen. Da schafft man den Induktionsschritt nach $n+1$ allein mit der Hilfe von $A(n)$ nicht. Man braucht alle Aussagen $A(n_0), A(n_0+1), A(n_0+2), \dots, A(n)$, um daraus $A(n+1)$ schließen zu können. Dass diese Variante des Induktionsbeweises zulässig ist, ist klar. Beim oben angesprochenen "Sich-Hangeln" von n_0 bis n hat man bei jedem Schritt ja alle "vorherigen" Aussagen bereits bewiesen.

(0.1.2) Bemerkung. Leichte Modifikation des Induktionsbeweises.

Gegeben sind Aussagen $A(n)$, $n \geq n_0$ natürliche Zahlen (zu jedem $n \geq n_0$ eine).

Man zeigt die Aussage $A(n_0)$ durch einen konkreten (einzelnen) Beweis (das nennt man die **Induktionsverankerung**).

Dann zeigt man, dass für jedes $n \geq n_0$ aus der Annahme, dass $A(m)$ für alle $n_0 \leq m \leq n$ richtig ist, auch folgt, dass $A(n+1)$ richtig ist (das ist der **Induktionsschritt** nach $n+1$).

Damit ist gezeigt, dass für alle $n \geq n_0$ die Aussage $A(n)$ gilt.

Diese Variante unterscheidet sich von der "normalen" Induktion nicht in der Verankerung (die ist die gleiche) – sondern im Schritt: man schreitet von " $\leq n$ " nach $n+1$ (die Induktionsannahme hat sich geändert).

(0.1.3) Beispiel. Jede natürliche Zahl $n > 1$ hat mindestens einen Primteiler.

Beweis. Bringen wir den Satz (es ist der Satz von der Existenz von Primteilern) in die Form, die wir gerade behandeln.

$A(n)$: = "Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt: n hat einen Teiler, der eine Primzahl ist."

Induktionsverankerung: $n = 2$. Die Zahl 2 ist Primzahl und teilt sich selbst. Also hat $n = 2$ einen Primteiler.

Induktionsschluss von " $\leq n$ " nach $n+1$. Sei $n \geq 2$ beliebig. Wir dürfen annehmen, dass alle natürlichen Zahlen x mit $2 \leq x \leq n$ mindestens einen Primteiler haben. Wir haben zu zeigen, dass die Zahl $n+1$ mindestens einen Primteiler hat.

Beweis dafür: Hat $n+1$ nur die Teiler 1 und $n+1$, so ist $n+1$ selbst eine Primzahl, und wieder folgt, dass $n+1$ einen Primteiler hat. Hat $n+1$ einen weiteren Teiler x , so gilt $2 \leq x \leq n$. Nach Induktionsannahme hat daher x mindestens einen Primteiler p . Wegen der Transitivität der Teilerbeziehung ist p auch ein Teiler von $n+1$. Deswegen ist p ein Primteiler der Zahl $n+1$, und wir haben gezeigt, dass die Zahl $n+1$ mindestens einen Primteiler hat.

Es folgen weitere Beispiele für Induktionsbeweise.

(0.1.4) Lemma. Die Potenzmenge der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ hat genau 2^n Elemente.

Beweis. Zuerst zur Erinnerung die Definition: die **Potenzmenge einer Menge M** ist die **Menge aller Teilmengen von M** . Sie wird meist mit dem **Symbol $P(M)$** bezeichnet. Ihre Elemente sind definitionsgemäß also Mengen, die sämtlichen Teilmengen der Menge M .

Unsere Aufgabe ist daher herauszufinden, wie viele Teilmengen die Menge $M = \{1, 2, \dots, n\}$ besitzt. Zum Eingewöhnen als Beispiel: $n = 3$ und $n = 4$.

\emptyset
$\{1\}$
$\{2\}$
$\{3\}$
$\{1, 2\}$
$\{1, 3\}$
$\{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$

\emptyset	$\{4\} = \{4\} \cup \emptyset$
$\{1\}$	$\{1, 4\} = \{4\} \cup \{1\}$
$\{2\}$	$\{2, 4\} = \{4\} \cup \{2\}$
$\{3\}$	$\{3, 4\} = \{4\} \cup \{3\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 4\} = \{4\} \cup \{1, 2\}$
$\{1, 3\}$	$\{1, 3, 4\} = \{4\} \cup \{1, 3\}$
$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\} = \{4\} \cup \{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\} = \{4\} \cup \{1, 2, 3\}$

Wie man nachzählt, sind die Anzahlen 8 bzw. 16, was der behaupteten Formel entspricht. Und jeder kann natürlich auch die noch kleineren Fälle ($n = 0, 1, 2$) hinschreiben und sehen, dass die Potenzmengen genau $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, und $4 = 2^2$ Elemente haben. Die Formel scheint also zu stimmen.

Aber wir sehen noch mehr aus den beiden Beispielen: beim Übergang von 3 nach 4 (und eventuell auch von n nach $n+1$) verdoppelt sich die Anzahl der Teilmengen:

Zum einen haben wir natürlich in der um die Zahl $n+1$ vergrößerten Menge noch immer die Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$ drin: das sind die Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+1\}$, die die Zahl $n+1$ nicht enthalten.

Außerdem bekommen wir zu jeder Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$ durch Hinzufügen des "letzten Elements" $n+1$ (in unserem Beispiel ist das die Zahl 4) jeweils eine weitere Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n+1\}$, nämlich diejenigen Teilmengen, die die Zahl $n+1$ enthalten.

Und es sind noch einmal genauso viele Teilmengen hinzugekommen, wie "vorher" da waren.

Wir sehen also, wie sich die Anzahl der Teilmengen verändert, (dass sie sich verdoppelt), wenn die Zahl n aus der Formulierung des Satzes um 1 größer wird – wir sehen eine Rekursionsformel für die Anzahl der Teilmengen.

Der Beweis dafür, dass die Anzahl genau 2^n ist, sieht so aus:

Beweis durch Induktion.

Induktionsverankerung: $n = 1$.

$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, und offenbar hat $P(\{1\})$ genau $2 = 2^1$ Elemente.

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

Gelte die Aussage für n , habe $\{1, 2, \dots, n\}$ also genau 2^n Elemente.

Zu zeigen: $\{1, 2, \dots, n+1\}$ hat genau 2^{n+1} Elemente.

Beweis. Die Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+1\}$ fallen in zwei Gruppen.

Zum einen gibt es diejenigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+1\}$, die die Zahl $n+1$ nicht enthalten. Das sind genau die Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n\}$, davon gibt es nach

Induktionsannahme also genau 2^n Stück.

Zum anderen gibt es diejenigen Teilmengen von $\{1, 2, \dots, n+1\}$, die die Zahl $n+1$ enthalten.

Eine derartige Teilmenge A von $\{1, 2, \dots, n+1\}$ lässt sich schreiben als $A = \{n+1\} \cup A'$ mit einer Teilmenge A' von $\{1, 2, \dots, n\}$, die die Zahl $n+1$ nicht enthält, also einer Teilmenge A' von $\{1, 2, \dots, n\}$.

Wie man der Tabelle (am Beispiel $n = 3$) entnimmt, entsprechen sich die Mengen A und A' eineindeutig, insbesondere sind es jeweils gleich viele. In dieser zweiten Gruppe gibt es also noch einmal genau 2^n Stück.

Zusammen besitzt $P(\{1, 2, \dots, n+1\})$ also $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Elemente.

Formal sieht der Beweis für das "entsprechen sich eineindeutig" so aus:

- Zu einem solchen A ist das A' natürlich **eindeutig bestimmt** (als übrig bleibender Rest, wenn man die Zahl $n+1$ entfernt).
- Außerdem **sind zwei solche Mengen A und B , die die Zahl $n+1$ enthalten, gleich, wenn die Restmengen A' und B' gleich sind.**
- Und **jede Teilmenge C von $\{1, 2, \dots, n\}$ erhält man** als einen solchen "Rest" A' . Man braucht nur $A := C \cup \{n+1\}$ zu nehmen.

Die **Zuordnung** $A \rightarrow A'$ ist

- wohldefiniert
- injektiv
- surjektiv

also eine **bijektive Abbildung von $\{A \in P(\{1, 2, \dots, n+1\}) : n+1 \in A\}$ auf $P(\{1, 2, \dots, n\})$.**

Und Mengen, die bijektiv aufeinander abbildbar sind, sind gleichmächtig.

Daraus folgt: $\{A \in P(\{1, 2, \dots, n+1\}) : n+1 \in A\}$ hat ebenfalls genau 2^n Elemente.

(0.1.5) Weitere Beispiele.

- (i) Seien $k \leq m$ ganze Zahlen.
Dann liegen in dem Intervall $[k, m]$ genau $m - k + 1$ ganze Zahlen.
- (ii) Die n -te natürliche Zahl, die beim Teilen durch 7 den Rest 2 lässt, ist $7 \cdot (n-1) + 2$.
- (iii) Die n -te ungerade natürliche Zahl ist $2 \cdot (n-1) + 1 = 2n - 1$.

Beweis. Zu (i). Sei die ganze Zahl k beliebig. Es ist zu zeigen, dass für alle $m \geq k$ in dem Intervall $[k, m]$ genau $m - k + 1$ ganze Zahlen liegen.

Versuchen wir einen Induktionsbeweis. Wo ist die natürliche Zahl n , die über die natürlichen Zahlen läuft, und "über die" wir Induktion machen wollen?

Nun, die Intervall-Länge $n := m - k$ wäre ein Kandidat. Dann ist $m = k + n$.

Dann ist zu zeigen:

Für alle $n \geq 0$ gilt: $A(n) =$ "in dem Intervall $[k, k + n]$ liegen genau $(k + n) - k + 1 = n + 1$ ganze Zahlen."

Induktionsverankerung: $n = 0$.

Dann ist $m = k$ und $[k, m] = \{k\}$ und enthält genau $1 = 0 + 1$ ganze Zahl, nämlich k .

Induktionsschritt: Gelte $A(n)$. Zu zeigen: es gilt $A(n+1)$.

In $[k, k + n + 1] = [k, k + n] \cup (k + n, k + n + 1]$ liegen

- die ganze Zahl $k + n + 1$, sowie
- weitere ganze Zahlen, die kleiner als $k + n + 1$ sind, also solche aus $[k, k + n]$.

Von der zweiten Sorte gibt es nach Induktionsannahme $A(n)$ genau $n + 1$ Stück.

Insgesamt sind es daher $n + 2 = (n + 1) + 1$ Stück. Das war zu zeigen.

OK, das war schon mal ein Beweis. Nicht sehr erhellend, aber nachzuvollziehen.

Wir hatten zuerst das k beliebig gewählt, und dann etwas für alle $m \geq k$ gezeigt.

Wir hätten auch einfach Induktion über $n := m - k$ machen können. Dann wäre es noch unanschaulicher geworden. Für alle $n \geq 0$ gilt:

$A(n) =$ "In jedem Intervall $[k, m]$ mit $m - k = n$ liegen genau $n + 1$ ganze Zahlen."

Hier geht die **Verankerung** $n = 0$ noch: die Intervalle $[k, k] = \{k\}$ haben noch immer genau eine ganze Zahl. Aber der **Induktionsschritt** sieht, obwohl er im wesentlichen derselbe ist wie oben, doch verwirrend aus.

Sei $[k, m]$ ein beliebiges Intervall mit ganzzahligen Rändern k und m , so dass $m - k = n + 1$.

Wie viele ganze Zahlen liegen darin?

Nun, der rechte Rand m , das ist mal eine, und dann die kleineren. Die liegen in dem Intervall $[k, m']$ mit $m' = m - 1$.

Dieses Intervall erfüllt $m' - k = (m - 1) - k = (m - k) - 1 = (n + 1) - 1 = n$.

Wir können daher die Induktionsannahme anwenden und wissen daher, dass es darin $n + 1$ ganze Zahlen sind.

Insgesamt sind es also $n + 2 = (n + 1) + 1$ Stück.

Mit diesem Beispiel möchte ich zwei Erfahrungen demonstrieren.

(1) Induktionsbeweise sind oft leicht. Die Verankerung ist meist eine Selbstverständlichkeit.

Und der Induktionsschritt ist meist leicht, weil einem die Induktionsannahme so viel hilft.

Aber: nachher weiß man immer noch nicht, *w a r u m* eigentlich der Satz richtig ist.

Er ist richtig, weil er nicht falsch ist, könnte man sagen – und die "Falschheit" hätte sich irgendwo zwischen einem n und dem folgenden $n+1$ gezeigt (dass sie das nicht getan hat, sichert uns der Induktionsschritt). Aber Einsicht oder Verständnis hat man nicht gewonnen.

Also: Induktionsbeweise sind zur Sicherung des Satzes gut, aber nicht zum Verständnis.

(2) Wenn in der Aussage des Satzes nur eine einzige natürliche Zahl vorkommt, weiß man, worüber man Induktion machen muss (klar: über diese natürliche Zahl). Wenn es aber zwei sind, etwa ein k und ein m , oder ein k und ein n , dann empfiehlt es sich so vorzugehen:

Man zeigt, dass für alle k gilt: "Die Aussage gilt für alle m ."

Man nimmt erst das k beliebig (denkt sich aber, ohne es auszusprechen, es wäre eine bestimmte Zahl, etwa 5 oder 318 oder so, um sich zu merken, dass dieses k jetzt fest ist), **und macht einen normalen Induktionsbeweis über das m .**

Und – wie sähe ein Beweis von (i) aus, der zum Verständnis beiträgt?

Na zum Beispiel so. Ohne Induktion.

Man könnte versuchen die Schwierigkeit zu isolieren, das heißt die ganze Situation so zu gestalten, dass man sich auf das wesentliche konzentrieren kann. Oder Spezialfälle zu betrachten, die man "versteh", und nachher schrittweise allgemeiner zu werden.

In unserem Beispiel:

Betrachte zuerst Intervalle $[1, m]$ (also $k = 1$).

Darin liegen die natürlichen Zahlen 1 bis m , das sind natürlich m Stück, und $m = (m - 1) + 1$.

Oder die Intervalle $[0, m]$ (also $k = 0$).

Darin liegen die natürlichen Zahlen 0 bis m , das sind natürlich $m + 1$ Stück, nämlich die von 1 bis m und die 0; und $m + 1 = (m - 0) + 1$.

Oder die Intervalle $[k, m]$ mit $k > 0$.

Darin liegen genau diejenigen natürlichen Zahlen aus $[1, m]$, die nicht schon in $[1, k-1]$ liegen. Es sind also $m - (k - 1) = m - k + 1$ Stück.

Oder wir bemerken, dass sich an der Anzahl nichts ändert, wenn man das ganze Intervall einfach um einen bestimmten ganzzahligen Betrag verschiebt.

Durch die Subtraktion von $k-1$ wird aus dem Intervall $[k, m]$ das Intervall $[1, m - (k-1)]$, und wieder erhalten wir dieselbe Anzahl.

Und hier spielt es tatsächlich keine Rolle, ob die Zahlen k und m natürliche Zahlen sind oder eventuell negativ.

Zu (ii). Nachweis der Formel durch Induktion.

Induktionsverankerung. Die erste (kleinste) natürliche Zahl $k \equiv 2 \pmod{7}$, die beim Teilen durch 7 also den Rest 2 lässt, ist sicher die 2.

Und die Formel sagt ebenfalls: $7 \cdot (1 - 1) + 2 = 2$. OK.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$.

Sei gezeigt, dass die n -te natürliche Zahl, die beim Teilen durch 7 also den Rest 2 lässt, die Zahl $7 \cdot (n - 1) + 2$ ist. Die $(n + 1)$ -te solche Zahl ist sicher genau um 7 größer, denn erst dann wird der Rest beim Teilen durch 7 wieder 2.

Die $(n + 1)$ -te solche Zahl ist also nach Induktionsannahme gleich

$$[7 \cdot (n - 1) + 2] + 7 = 7 \cdot n + 2 = 7 \cdot ([n + 1] - 1) + 2.$$

Das war zu zeigen.

Nochmal die These von vorhin. Versteht man die Aussage nun? (Nein.)

Um sie zu verstehen, schreibe ich die ersten paar solcher Zahlen mal auf. Ich nenne sie hier Z_n , um auf sie zugreifen zu können.

$$Z_1 = 2$$

$$Z_2 = 2 + 7$$

$$Z_3 = 2 + 7 + 7$$

$$Z_4 = 2 + 7 + 7 + 7$$

...

$$Z_n = 2 + 7 + 7 + 7 + \dots + 7$$

Wie man sieht, handelt es sich bei Z_n um einen Ausdruck (eine Summe) der folgenden Art: erst kommt eine 2, dann einige Summanden 7, und zwar umso mehr Summanden 7, je größer das n ist.

Wenn es uns noch gelingt festzustellen, wie die Anzahl Summanden 7 von dem n abhängt, haben wir die Formel verstanden. (Und wenn die Formel nicht vorgegeben gewesen wäre, hätten wir auf diese Weise die Formel gefunden!)

Man sieht, dass es stets ein Summand 7 weniger ist, als der Index angibt, daher hat man in Z_n also genau $(n - 1)$ Summanden 7, die Formel muss also lauten:

$$Z_n = 7 \cdot (n - 1) + 2.$$

Nun hat man die Formel verstanden.

Zu (iii). Analog. Selber machen.

Ein weiteres Anwendungsgebiet von Induktionsbeweisen sind Zahlenfolgen. Diese sind mitunter rekursiv gegeben und man möchte eine explizite Formel für sie nachweisen.

(0.1.6) Zahlenfolgen. Üblicherweise gibt man Zahlenfolgen auf eine von drei Weisen an:

- (i) Angedeutet, mit Pünktchen,
- (ii) rekursiv, d.h. durch eine Rekursionsformel.

Das ist eine Gleichung, in der das $(n + 1)$ -te Folgenglied und das n -te Folgenglied vorkommen, und die man (wenn das n -te Folgenglied bekannt ist) benutzen kann, um das nächste, also das $(n + 1)$ -te Folgenglied auszurechnen. Hier braucht man den Startwert, also den Wert des ersten Folgengliedes.

- (iii) explizit, d.h. durch eine explizite Formel.

Das ein Term für das n -te Folgenglied, in dem als einzige Variable das n vorkommt, so dass man durch Einsetzen des Index n in den Term das n -te Folgenglied berechnen kann.

Hier braucht man keinen Startwert.

(0.1.7) Beispiele. Wir deuten durch ein paar Folgenglieder und Pünktchen an, wie die jeweilige Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ aussieht, erraten eine mögliche Rekursionsformel, erraten daraus eine mögliche explizite Formel und weisen mit Induktion nach, dass eine Folge, die den gegebenen Startwert und die gegebene Rekursionsformel hat, auch die gegebene explizite Formel (Darstellung) besitzt.

- (i) 2, 3, 4, 5, ...
 $x_1 = 2, x_2 = x_1 + 1, x_3 = x_2 + 1, x_4 = x_3 + 1, \dots$
 Rekursionsformel: $x_{n+1} = x_n + 1$
 $x_1 = 2, x_2 = 2 + 1, x_3 = 2 + 2, x_4 = 2 + 3, \dots$
 explizite Formel: $x_n = 2 + (n - 1)$
- (ii) 1, 4, 9, 16, ...
 $x_1 = 1, x_2 = x_1 + 3, x_3 = x_2 + 5, x_4 = x_3 + 7, \dots$

Rekursionsformel: $x_{n+1} = x_n + [2n - 1]$

$x_1 = 1^2, x_2 = 2^2, x_3 = 3^2, x_4 = 4^2, \dots$

explizite Formel: $x_n = n^2$

(iii) 1, 3, 6, 10, ...

$x_1 = 1, x_2 = x_1 + 1, x_3 = x_2 + 2, x_4 = x_3 + 3, \dots$

Rekursionsformel: $x_{n+1} = x_n + (n - 1)$

$x_1 = 1, x_2 = 1 + 2, x_3 = 1 + 2 + 3, x_4 = 1 + 2 + 3 + 4, \dots x_n = 1 + 2 + \dots + n, \dots$

explizite Formel: $x_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Die Beweise kommen sämtlich ausführlich im nächsten Paragraphen.

Bemerkungen.

(a) Die behandelten Zahlenfolgen haben wir mit einem ersten Folgenglied beginnen lassen. Das erschien uns selbstverständlich. Aber wie gesagt: nach DIN-Norm fangen die natürlichen Zahlen mit der 0 an: eine Zahlenfolge (als Abbildung von \mathbb{N} in die Menge der reellen Zahlen, oder auch als Folge von Zahlen, die jede als Index eine natürliche Zahl hat) müsste demnach mit einem 0-ten Folgenglied beginnen. Manchmal werden wir das auch tun, manchmal nicht – das nehmen wir nicht so genau. Man muss nur aufpassen, wenn man explizite Formeln hinschreibt!

Die Formeln für die Beispiele aus (0.1.7) würden für Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ so aussehen:

(i) $x_n = n + 2$

(ii) $x_n = (n+1)^2$

(iii) $x_n = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

(b) Manche Rekursionsformeln beinhalten zum Berechnen des nächsten Folgengliedes mehr als nur das letzte Folgenglied. Da braucht man zum Nachweis der expliziten Formel dann die Variante (0.1.2) der vollständigen Induktion.

(0.1.8) Die Folge $(F_n)_{n \geq 0}$ der Fibonacci-Zahlen.

Es geht um folgende Zahlenfolge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

(i) Die Geschichte von den Kaninchen.

Die Fibonacci-Zahlen gehen zurück auf den italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa (etwa 1200) genannt Fibonacci. In dessen Rechenbuch "liber abaci" (1202) liefern sie die Lösung folgender Aufgabe:

"Das Weibchen eines jeden Kaninchenpaares gebiert von Vollendung des zweiten Lebensmonats an allmonatlich ein neues Kaninchenpaar. Man berechne die Anzahl der Kaninchenpaare nach 12 Monaten, wenn zu Anfang ein neugeborenes Kaninchenpaar vorhanden ist."

Und zwar nennt man F_n die Anzahl der vorhandenen Kaninchenpaare nach genau n Monaten. Dann sagt der Aufgabentext $F_0 = 1$, und $F_1 = 1$ ergibt sich, weil das Pärchen ja erst am Ende des zweiten Monats mit der Produktion beginnt.

Wie sieht die Rekursionsformel aus?

Nun, von Sterben war ja nirgends die Rede, also hat man nach $n+1$ Monaten sicher die Paare immernoch, die man schon nach n Monaten hatte, also $F_{n+1} = F_n + \dots$

Aber wie viele sind neu dazugekommen?

Von jedem Paar, das nach $n+1$ Monaten schon 2 Monate alt ist, genau ein neues Paar.

Und die Paare, die nach $n+1$ Monaten schon 2 Monate alt sind, sind genau diejenigen, die nach $n-1$ Monaten schon da sind, das sind also F_{n-1} Stück.

Die **Rekursionsformel** lautet also:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

mit den Startwerten $F_0 = F_1 = 1$.

(ii) Die Binet-Formel

Es gibt eine explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen, die sogenannte Binet-Formel. Sie ist nach dem Mathematiker Binet benannt, obwohl sicher auch die Bernoullis und andere sie schon kannten. Sie ist einerseits überraschend, weil in ihr mehrmals $\frac{1}{2}$ und $\sqrt{5}$ vorkommt, und noch zu potenzieren ist – und trotzdem kommen immer nur natürliche Zahlen heraus. Andererseits demonstriert sie, dass die Folge der Fibonacci-Zahlen etwas mit dem "Goldenen Schnitt" zu tun haben. Wir kommen im nächsten Semester darauf zurück.

Betrachten wir die quadratische Gleichung $X^2 - X - 1 = 0$.

Sie ist lösbar, mit den beiden Lösungen $a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $b = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$.

Notieren wir einige Gleichungen die für a und b gelten:

$$a^2 = a + 1, \quad b^2 = b + 1, \quad a + b = 1, \quad a - b = \sqrt{5}.$$

Setzen wir $B_n := \frac{a}{a-b} \cdot a^n - \frac{b}{a-b} \cdot b^n$, so ergibt sich:

$$B_0 = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1, \quad \text{und}$$

$$B_1 = \frac{a}{a-b} \cdot a - \frac{b}{a-b} \cdot b = \frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b} = \frac{a^2 - b^2}{a-b} = \frac{(a-b) \cdot (a+b)}{a-b} = a + b = 1.$$

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{a}{a-b} \cdot a^{n+1} - \frac{b}{a-b} \cdot b^{n+1} = \frac{a}{a-b} \cdot a^2 \cdot a^{n-1} - \frac{b}{a-b} \cdot b^2 \cdot b^{n-1} = \\ &= \frac{a}{a-b} \cdot (a+1) \cdot a^{n-1} - \frac{b}{a-b} \cdot (b+1) \cdot b^{n-1} = \\ &= \frac{a}{a-b} \cdot a^n + \frac{a}{a-b} \cdot a^{n-1} - \frac{b}{a-b} \cdot b^n - \frac{b}{a-b} \cdot b^{n-1} = \\ &= B_n + B_{n-1} \end{aligned}$$

Die Folge der B_n hat also dieselben Startwerte und dieselbe Rekursionsformel wie die Folge der F_n . Daraus folgt, dass die beiden Folgen überhaupt (für alle n) gleich sind):

Induktionsverankerung: $F_0 = B_0 = 1, \quad F_1 = B_1 = 1$.

Induktionsschritt nach $n+1$: Gelte $F_m = B_m$ für alle $m \leq n$. Dann folgt:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = B_n + B_{n-1} = B_{n+1}$$

Dabei sind das erste und das letzte Gleichheitszeichen die Rekursionsformeln der beiden Folgen, das mittlere gilt wegen der Induktionsannahme.

Es folgt die Binet-Formel für die Fibonacci-Zahlen (man bringt auf einen Bruchstrich):

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

(iii) Merkwürdige Identitäten (Formeln) für die Fibonacci-Zahlen.

$$(i) \sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1.$$

$$(ii) F_{n-1} \cdot F_{n+1} = (F_n)^2 + (-1)^{n-1}$$

$$(iii) F_n \cdot F_{n+1} = F_{n-1} \cdot F_{n+2} + (-1)^n$$

Wir deuten durch ein paar Folgenglieder und Pünktchen an, wie die jeweilige Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ aussieht, erraten eine mögliche Rekursionsformel, erraten daraus eine mögliche explizite Formel und weisen deren Richtigkeit mit Induktion nach.

Beweis.

Zu (i) Induktionsverankerung: $n = 1$.

Linke Seite: $F_0 = 1$.

Rechte Seite: $F_2 - 1 = 2 - 1 = 1$. OK

Induktionsschritt von n nach $n+1$: Gelte die Aussage für n , d.h. gelte $\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$.

$$\text{Dann gilt } \sum_{i=0}^n F_i = \sum_{i=0}^{n-1} F_i + F_n = F_{n+1} - 1 + F_n = (F_{n+1} + F_n) - 1 = F_{n+2} - 1.$$

Das war zu zeigen.

Zu (ii) und (iii) siehe Musterlösungen zu Blatt 1.

Weitere interessante, lehrreiche und auch unterhaltsame Beispiele kann man in dem Buch "**Luftschlösser und Hirngespinnste**" von **Prof. A. Beutelspacher** finden.

Zum Beispiel die sogenannten "Türme von Hanoi".

Und zum Thema Fibonacci-Zahlen auch sein Buch "**Der Goldene Schnitt**".

Außerdem sei erwähnt, dass eine ganze Fachzeitschrift gibt, das "**Fibonacci Quarterly**", dass seit langen Jahren viermal jährlich erscheint, und nur Ergebnisse (Sätze, Formeln) über die Fibonacci-Zahlen veröffentlicht.

(0.2) Summenformeln

Da wir Formeln zu beweisen haben, und die Beweise meist mit vollständiger Induktion geführt werden, haben wir diese Beweisform geübt.

In diesem Kapitel 0 führen wir die Induktionen noch haarklein durch.

Die Induktionsbeweise werden später dann aber knapper aufgeschrieben.

(0.2.1) Lemma. (Geometrische Summenformel). Sei $q \neq 1$.

Dann gilt für alle $n \geq 1$:
$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Beweis. Induktion über n .

Induktionsverankerung: $n = 0$. Linke Seite: $q^0 = 1$. Rechte Seite: $\frac{q^{0+1} - 1}{q - 1} = 1$. OK

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Gelte die Aussage für n . Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \sum_{i=0}^n q^i + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{(q^{n+1} - 1) + (q - 1) \cdot q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Das war zu zeigen.

(0.2.2) Lemma. (Formel von Gauß) Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Es gilt für alle $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Beweis. Induktion über n .

Induktionsverankerung: $n = 1$. Linke Seite: 1. Rechte Seite: $\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$. OK

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Gelte die Aussage für n . Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Das war zu zeigen.

(0.2.3) Lemma. Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2 .

Es gilt für alle $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

Beweis. Induktion über n .

Induktionsverankerung: $n = 1$. Linke Seite: 1. Rechte Seite: $1^2 = 1$. OK

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Gelte die Aussage für n . Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1) + [2(n+1)-1] = n^2 + [2(n+1)-1] = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Das war zu zeigen.

Bemerkung. Man kann mit den kompliziert aussehenden Summen nach Regeln rechnen - Sie sehen gleich, welche Regeln ich verwende. Sie gelten, weil man ja Assoziativ- und Kommutativgesetze hat, und auch Distributivgesetze.

Für (0.2.3) sieht ein Beweis ohne Induktion (aber unter Verwendung von (0.2.2)) so aus.

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \sum_{i=1}^n 2i + \sum_{i=1}^n (-1) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n i - n = 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n = (n^2 + n) - n = n^2.$$

Dieses Rechnen mit Summen und die Anwendung von (0.2.2) werden wir auch im nächsten Lemma benutzen. Induktion machen wir jetzt nur noch, wenn es sein muss.

(0.2.4) Beispiel. Nun geht es um das Teilen mit Rest. Es geht um natürliche Zahlen k , die beim Teilen durch 7 den Rest 2 lassen, also um Zahlen $k \equiv 2 \pmod{7}$.

(i) Die Anzahl der durch 7 teilbaren Zahlen k im Intervall $[120, 230]$ ist genau 15.

(ii) Die Anzahl der Zahlen $k \equiv 2 \pmod{7}$ im Intervall $[120, 230]$ ist genau 16.

(iii) Die Summe der Zahlen $k \equiv 2 \pmod{7}$ im Intervall $[120, 230]$ ist genau 2776.

Beweis. Zu (i). Die größte, durch 7 teilbare Zahl < 120 ist $7 \cdot 17 = 119$, denn $120 : 7 = 17,1\dots$

Die größte, durch 7 teilbare Zahl < 230 ist $7 \cdot 32 = 224$, denn $230 : 7 = 32,8\dots$

Die im Intervall $[120, 230]$ liegenden Vielfachen von 7 sind demnach $7 \cdot 18, 7 \cdot 19, \dots, 7 \cdot 32$.

Ihre Anzahl ist dieselbe wie die Anzahl der natürlichen Zahlen im Intervall $[18, 32]$, sie ist also $32 - 18 + 1 = 15$.

Zu (ii). Wir benutzen die Rechnungen aus (i).

Die kleinste Zahl $k \equiv 2 \pmod{7}$ mit $k \geq 120$ ist $7 \cdot 17 + 2 = 121$.

Die größte Zahl $k \equiv 2 \pmod{7}$ mit $k \leq 230$ ist $7 \cdot 32 + 2 = 226$.

Die im Intervall $[120, 230]$ liegenden Zahlen $k \equiv 2 \pmod{7}$ sind demnach $7 \cdot 17 + 2, 7 \cdot 18 + 2, \dots, 7 \cdot 32 + 2$. Ihre Anzahl ist dieselbe wie die Anzahl der natürlichen Zahlen im Intervall $[17, 32]$, sie ist also $32 - 17 + 1 = 16$.

Zu (iii). Wir benutzen die Information aus (i).

$$\begin{aligned} \sum_{i=17}^{32} (7i+2) &= \sum_{i=17}^{32} (7i) + \sum_{i=17}^{32} 2 = 7 \cdot \sum_{i=17}^{32} i + 2 \cdot 16 = 7 \cdot \left[\sum_{i=1}^{32} i - \sum_{i=1}^{16} i \right] + 32 = \\ &= 7 \cdot \left[\frac{32 \cdot 33}{2} - \frac{16 \cdot 17}{2} \right] + 32 = 2776. \end{aligned}$$

(0.2.5) Lemma. Die Summe der ersten n Quadratzahlen ist $\frac{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot n}{6}$.

Es gilt für alle $n \geq 1$:
$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot n}{6}.$$

Beweis. Induktion über n .

Induktionsverankerung: $n = 1$. Linke Seite: $1^2 = 1$. Rechte Seite: $\frac{(2+1) \cdot (1+1) \cdot 1}{6} = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Gelte die Aussage für n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \frac{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot n}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1) \cdot [(2n+1) \cdot n + 6(n+1)]}{6} = \\ &= \frac{(n+1) \cdot [2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1) \cdot [2n+3] \cdot [n+2]}{6}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

(0.2.6) Lemma. Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist $(\frac{(n+1) \cdot n}{2})^2$. Es gilt für alle $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2}\right)^2.$$

Beweis. Induktion über n .

Induktionsverankerung: $n = 1$. Linke Seite: $1^3 = 1$. Rechte Seite: $(\frac{(1+1) \cdot 1}{2})^2 = 1$.

Induktionsschritt von n nach $n+1$. Gelte die Aussage für n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^3 &= \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4(n+1)]}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4n + 4]}{4} = \left(\frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

(0.2.7) Einige Fragen.

**(a) Sind die letzten Summenformel Zufall, merkwürdig, oder "selbstverständlich"?
Stimmt zumindest die Größenordnung?**

Fassen wir die Summe auf der linken Seite der Formeln jeweils als den Gesamtflächeninhalt der Fläche auf, die wir durch Aneinanderlegen von Rechtecken der Breite 1 und der entsprechenden Längen i (bzw. i^2 bzw. i^3 etc.) erhalten. Das sieht dann jeweils wie eine

Untersumme oder Obersumme des Integrals $\int_0^n x dx$ (bzw. $\int_0^n x^2 dx$ bzw. $\int_0^n x^3 dx$) aus.

Es sollte also gelten:

$$\sum_{i=1}^n i \approx \int_0^n x dx = \frac{1}{2} \cdot n^2 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n i^2 \approx \int_0^n x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot n^3 \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^n i^3 \approx \int_0^n x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot n^4.$$

Und das kommt ja ungefähr hin, wenn man die Lemmas anschaut.

Es gibt sogar folgenden Satz, der aussagt, dass es zu jeder Art von Potenzen eine Summenformel gibt.

Satz: Zu jedem Exponenten $k \geq 0$ gibt es ein Polynom $f_k(X) = (1/[k+1]) \cdot X^{k+1} + \dots$ vom Grad $k + 1$, für das gilt:

$$\sum_{i=1}^n i^k = f_k(n) = (1/[k+1]) \cdot n^{k+1} + \dots$$

(b) Und wie kommt man zu der genauen Formel, also zu den Koeffizienten des Polynoms, wenn man schon weiß (oder auch nur überzeugt ist), dass sie im Prinzip so aussieht?

Man setzt unbestimmt an und löst das entstehende lineare Gleichungssystem.

(0.2.8) Beispiel.

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n.$$

Ansatz: $\sum_{i=1}^n i = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ gelte für alle $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt:} \quad 1 &= a + b + c \\ 3 &= 4a + 2b + c \\ 6 &= 9a + 3b + c \end{aligned}$$

Und die eindeutige Lösung ist $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$.

Dass die Formel tatsächlich für alle n stimmt, ist ein Induktionsbeweis – haben wir schon gemacht.

$$(b) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n$$

Ansatz: $\sum_{i=1}^n i^2 = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$ gelte für alle $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt:} \quad 1 &= a + b + c + d \\ 5 &= 8a + 4b + 2c + d \\ 14 &= 27a + 9b + 3c + d \\ 30 &= 64a + 16b + 4c + d \end{aligned}$$

Und die eindeutige Lösung ist $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$, $d = 0$.

Dass die Formel tatsächlich für alle n stimmt, ist ein Induktionsbeweis – den haben wir schon gemacht.

Aber wie sieht es mit dem "Verstehen" der Formeln aus?

Hier einige "Beweise mit Bildern" - und mit angefügter Mathematik (zur Sicherheit).

Diese Beispiele brauchen Sie nicht "zu können". Aber versuchen Sie ruhig, sie zu durchdenken!

(0.2.9) Beispiele.

$$(a) \quad \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Erstens können wir die Formel auf der rechten Seite so interpretieren: wenn n eine gerade Zahl ist, so soll man die Zahl $n+1$ genau $n/2$ mal addieren.

Zeichnung

Zweitens können wir die Formel auf der rechten Seite so interpretieren: wenn n eine ungerade Zahl ist, also $n-1$ und $n+1$ gerade Zahlen sind, soll man die Zahl n genau $(n+1)/2$ mal addieren.

Zeichnung

Drittens: Fassen wir die Summe auf der linken Seite der Formeln jeweils als den Gesamtflächeninhalt der Fläche auf, die wir durch Aneinanderlegen von Rechtecken der Breite 1 und der Länge i ($i = 1, 2, \dots, n$) erhalten.

Dann erhält man "die Hälfte" eines Rechtecks der Breite n und der Länge $n+1$.

Zeichnung

$$(b) \quad \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2.$$

Fassen wir die Summe auf der linken Seite der Formeln jeweils als den Gesamtflächeninhalt der Fläche auf, die wir durch Aneinanderlegen von bestimmten "Winkelflächen" erhalten. Dann ergibt sich ein Quadrat der Seitenlänge n .

Zeichnung

$$(c) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(2n+1) \cdot (n+1) \cdot n}{6}.$$

Fassen wir die Summe auf der linken Seite der Formeln jeweils als den Gesamtflächeninhalt der Fläche auf, die wir durch Aneinanderlegen von Quadraten der Seitenlänge i ($i = 1, 2, \dots,$

n) erhalten. Dann kann man die Fläche zu einem Rechteck der Breite n und der Länge $\sum_{i=1}^n i$

$= \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ ergänzen. Die Differenz-Fläche besteht aus $n-1$ Rechtecken der Breite 1 und

Länge $\sum_{i=1}^j i = \frac{j \cdot (j+1)}{2}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Zeichnung

Es ergibt sich die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j \cdot (j+1)}{2} = \frac{n^2 \cdot (n+1)}{2}$$

Umgeformt:

$$3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 - n^2 + \sum_{j=1}^{n-1} j = n^3 + n^2$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 = n^3 + 2n^2 - \frac{n^2 - n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

$$(d) \quad 4 \cdot \sum_{i=1}^n i^3 = (n^2 + n)^2$$

Fassen wir die Summe auf der linken Seite der Formeln jeweils als den Gesamtflächeninhalt der Fläche auf, die wir durch Aneinanderlegen von jeweils vier Rechtecken der Breite i und der Längen i^2 , $i = 1, 2, \dots, n$ erhalten. Das Aneinanderlegen wird "ringförmig" gemacht.

Da der i -te "Ring" innen quadratisch mit Seitenlänge $i^2 - i$ und außen quadratisch mit Seitenlänge $i^2 + i$ ist, passen diese "Ring-Flächen" genau aneinander. Es entsteht ein Quadrat mit Seitenlänge $n^2 + n$.

Zeichnung

(0.3) Das Pascal'sche Dreieck

Nun betrachten wir ein berühmtes Zahlenschema, das Pascal'sche Dreieck. Es wird auch arithmetisches Dreieck oder einfach nur Zahlendreieck genannt – und es stehen die sogenannten Binomialkoeffizienten darin.

(0.3.1) Definition. Pascal'sches Dreieck nennen wir das Zahlenschema, das auf folgende Weise gebildet wird:

- es ist aus Zeilen aufgebaut, wobei in der n -ten Zeile genau $n+1$ Zahlen stehen ($n = 0, 1, 2, \dots$)
- die Zahlen sind so „auf Lücke“ angeordnet, dass jede Zahl aus der n -ten Zeile zwei untere Nachbarn in der $(n + 1)$ -ten Zeile besitzt, und jede Zahl in der n -ten Zeile außer den beiden Randzahlen zwei obere Nachbarn in der $(n - 1)$ -ten Zeile hat.
- die Zahlen in der n -ten Zeile werden von 0 bis n durchnummeriert, so dass für jedes $k = 0, 1, 2, \dots$ die sämtlichen k -ten Zahlen aus dem Dreieck eine "Diagonale" bilden.
- die k -te Zahl in der n -ten Zeile wird abstrakt mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet.

Bildungsgesetz:

- (1) Die Ränder des Pascal'schen Dreiecks werden mit 1 besetzt: für alle $n \geq 0$ gilt somit:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- (2) Die Zahlen im Pascal'schen Dreieck, die nicht am Rand stehen, die also zwei obere Nachbarn haben, sind gleich der Summe dieser beiden Zahlen. Für $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Der zweite Teil des Bildungsgesetzes liefert eine rekursive Definition der Zahlen im Pascal'schen Dreieck, die Gleichung wird als Rekursionsformel des Pascal'schen Dreiecks bezeichnet. Sie könnte natürlich auch anders hingeschrieben werden. Z.B.:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Das ist Geschmackssache.

Das Pascal'sche Dreieck bis zur Zeile 12:

Zeichnung

Und in "abstrakter" Form:

Zeichnung

(0.3.2) Bemerkung.

Die Zahlen im Pascal'schen Dreieck nennen wir Binomialkoeffizienten, obwohl wir Binomialkoeffizienten erst im nächsten Kapitel wirklich definieren werden.

Für uns sind somit in dem Symbol $\binom{n}{k}$, das wir **Binomialkoeffizient "n über k"** nennen, die beiden Zahlen n (oben) und k (unten) nur "Koordinaten", die den Platz dieser Zahl im Pascal'schen Dreieck (kurz: P.D.) angeben. Es ist $\binom{n}{k}$ eben die k-te Zahl in der n-ten Zeile, bzw. die Zahl, die in der n-ten Zeile und in der k-ten Diagonale steht.

Schon diese einfache Sichtweise ermöglicht uns das Auffinden und Beweisen von wichtigen Formeln, die später (mit der "richtigen" Definition der Binomialkoeffizienten) große Bedeutung haben werden.

Also: alles, was wir zeigen, bleibt richtig für die Binomialkoeffizienten als "Anzahlen von Möglichkeiten usw.". Aber diese Begriffe wollen wir in Kapitel 0 noch gar nicht verwenden.

(0.3.3) Lemma. (explizite Formel, ungekürzte und gekürzte Version) Für alle $n \geq k \geq 0$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

Beweis. Wir zeigen die erste Gleichung durch Induktion über n . Gezeigt wird für jedes n , dass für alle k mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Induktionsverankerung. $n = 0$. Dann gibt es nur ein k mit $0 \leq k \leq n$, nämlich $k = 0$.

Und für $k = n = 0$ gilt:

linke Seite: $\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1$ nach Definition des P.D.

rechte Seite: $\frac{0!}{0!(0-0)!} = 1$ nach Definition von $0!$ ($0! = 1$).

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

Gelte die Aussage für n und alle $0 \leq k \leq n$. Zu zeigen: sie gilt für $n+1$ und alle $0 \leq k \leq n+1$.

Erledigen wir erst die beiden leichten Fälle $k = 0$ und $k = n+1$:

$$\binom{n+1}{0} = 1 \text{ nach Definition des P.D., und } \frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1,$$

$$\binom{n+1}{n+1} = 1 \text{ nach Definition des P.D., und } \frac{(n+1)!}{(n+1)!([n+1]-[n+1])!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1.$$

Sei jetzt $1 \leq k \leq n$. Dann können wir $\binom{n+1}{k}$ mit der Rekursionsformel umformen:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \cdot [(n-k+1) + k] = \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!([n+1]-k)!}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Das erste Gleichheitszeichen gilt nach der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten, das zweite nach Induktionsannahme, der Rest ist Bruchrechnung.

Die zweite Gleichung entsteht durch das Kürzen des Bruchs:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{[n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)] \cdot [(n-k) \cdot \dots \cdot 1]}{[k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1] \cdot [(n-k) \cdot \dots \cdot 1]} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}.$$

(0.3.4) Bemerkung. Wie rechnet man die Binomialkoeffizienten aus?

- Entweder durch Addieren, indem man das P.D. ein Stück weit aufschreibt.
- Oder mit der expliziten Formel.

Natürlich in der gekürzten Form. Wieso eigentlich?

Wieso nicht erst die drei Fakultäten ausrechnen?

Wenn ich selbst mit der Hand den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ausrechnen muss,

- vergewissere ich mich erst einmal, dass k kleiner ist als $n - k$:
sonst gehe ich zu $\binom{n}{n-k}$ über (dank (0.3.5)),
- dann schreibe ich einen Bruchstrich, weil es insgesamt ein Bruch ist,
- im Zähler und im Nenner sind es gleich viele Faktoren (nämlich k Stück),
- im Zähler ist der erste Faktor gleich n , im Nenner ist der erste Faktor gleich k ,
- die Faktoren in Zähler und Nenner werden jeweils von Faktor zu Faktor um 1 kleiner,
- im Zähler ist der letzte Faktor gleich $n-k+1$, im Nenner ist der letzte Faktor gleich 1.

Dann versuche ich zu kürzen, was das Zeug hält: da am Ende eine natürliche Zahl herauskommt, muss sich der ganze Nenner wegkürzen lassen, und multipliziere am Ende die verbliebenen paar Faktoren aus.

Beispiel:

$$\binom{14}{6} = \frac{14!}{6!8!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 9}{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = 3003.$$

$$\binom{14}{11} = \frac{14!}{11!3!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot \dots \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = 364.$$

Wegen (0.3.3) haben wir zum Nachweis bestimmter Formeln für Binomialkoeffizienten nunmehr zwei Beweismethoden:

- Induktion über n und die Rekursionsformel für den Induktionsschritt
- die explizite Formel (ohne Induktion).

Daher wird es manchmal zwei Beweise geben. Sie können sich dann immer aussuchen, welcher Beweis Ihnen besser gefällt.

(0.3.5) Lemma. Für alle $n \geq k \geq 0$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Beweis. Beweis mit Induktion über n . Gezeigt wird für jedes n , dass für alle k mit $0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Induktionsverankerung. $n = 0$. Dann gibt es nur ein k mit $0 \leq k \leq n$, nämlich $k = 0$.
Und für $k = n = 0$ gilt:

linke Seite: $\binom{n}{k} = \binom{0}{0} = 1$ nach Definition des P.D.

rechte Seite: $\binom{n}{n-k} = \binom{0}{0} = 1$ nach Definition des P.D.

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

Gelte die Aussage für n und alle $0 \leq k \leq n$. Zu zeigen: sie gilt für $n+1$ und alle $0 \leq k \leq n+1$.
Erledigen wir erst die beiden leichten Fälle $k = 0$ und $k = n+1$ (in einer Gleichung):

$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ nach Definition des P.D.

Sei jetzt $1 \leq k \leq n$. Dann können wir $\binom{n+1}{k}$ mit der Rekursionsformel umformen:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \\ &= \binom{n}{n-k} + \binom{n}{n-k+1} = \\ &= \binom{n+1}{n-k+1} = \binom{n+1}{(n+1)-k}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Das erste und dritte Gleichheitszeichen gilt nach der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten, das zweite nach Induktionsannahme.

Der Beweis mit Hilfe der expliziten Formel ist bei diesem Lemma noch viel leichter:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}.$$

(0.3.6) Lemma. Für alle $n \geq 0$ gilt: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis. Hier nützt die explizite Formel meiner Meinung nach wenig. Im Kapitel I werden wir andere Beweise für (0.3.6) kennen lernen, hier nur einer.

Beweis mit Induktion über n. Gezeigt wird für jedes n, dass gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Induktionsverankerung. $n = 0$. Dann gilt:

linke Seite: $\binom{0}{0} = 1$ nach Definition des P.D.

rechte Seite: $2^0 = 1$. OK

Induktionsschritt von n nach n+1:

Gelte die Aussage für n und alle $0 \leq k \leq n$. Zu zeigen: sie gilt für n+1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] + 1 = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 1 = \\ &= \left[\binom{n}{n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} \right] + \left[\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{0} \right] = \\ &= \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} + \binom{n}{n} \right] + \left[\binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \\ &= 2^n + 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. Das zweite Gleichheitszeichen gilt nach der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten, das drittletzte nach Induktionsannahme.

(0.3.7) Lemma. Für alle $n \geq k \geq 0$ gilt: $k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}$.

Beweis. Siehe Blatt 1.

(0.3.8) Lemma. Für alle $n \geq k \geq 0$ gilt: $\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Beweis. Gezeigt wird für jedes $k \geq 0$, dass für alle n mit $k \leq n$ gilt:

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Sei also $k \geq 0$ beliebig. Wir zeigen für alle n mit $k \leq n$ (mit Induktion über n):

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Induktionsverankerung. $n = k$. Dann gilt:

linke Seite: $\binom{k}{k} = 1$ nach Definition des P.D.

rechte Seite: $\binom{k+1}{k+1} = 1$ nach Definition des P.D.

Induktionsschritt von n nach $n+1$:

Gelte die Aussage für n . Zu zeigen: sie gilt für $n+1$.

$$\sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1} = \binom{[n+1]+1}{k+1}.$$

Das war zu zeigen. Das dritte Gleichheitszeichen gilt nach der Rekursionsformel für Binomialkoeffizienten, das zweite nach Induktionsannahme.

(0.3.9) Lemma. Für alle $n \geq k \geq 0$ gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}$.

Beweis. Beweis mit Hilfe der expliziten Formel.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1)!} = \frac{n-k+1}{k} \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Schlussbemerkungen.

Wir wollen die Aussagen dieses Abschnitts locker und anschaulich formulieren. Es sind ja Aussagen über das anschauliche Pascal'sche Dreieck.

"Wenn man die Zahlen in der Zeile n addiert, ergibt das 2^n ." (0.3.6)

"Wenn man in der Diagonale k die Binomialkoeffizienten vom Rand bis zu $\binom{n}{k}$ addiert, so ergibt das $\binom{n+1}{k+1}$, also wieder einen Binomialkoeffizienten, und zwar den, der im P.D. schräg rechts unterhalb von $\binom{n}{k}$ (dem letzten Summanden) steht." (0.3.8)

"Das Pascal'sche Dreieck ist symmetrisch zur Mittel-Linie." (0.3.5)

"Die Binomialkoeffizienten in einer Zeile werden vom Rand her größer bis zur Mitte."

(0.3.9) - denn für $k \leq n/2$ ist $\frac{n-k+1}{k} > 1$, für $k-1 \geq n/2$ ist $\frac{n-k+1}{k} < 1$.