Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07
Mathematisches Institut

Vorkurs Mathematik
(Allgemein)

Übungsaufgaben mit Lösungen

PD Dr. Elena Berdysheva

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Aufgabe 1. a) Schreiben Sie die folgenden periodischen Dezimalzahlen als Brüche:

(i) $0{,}\overline{3}$ (ii) $0{,}\overline{9}$ (iii) $0{,}\overline{36}$ (iv) $0{,}\overline{142857}$ (v) $0{,}2\overline{57}$

b) Schreiben Sie die folgenden Brüche als Dezimalzahlen:

(i) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{1}{14}$

Lösung:

a) Schreiben Sie die folgenden periodischen Dezimalzahlen als Brüche:

(i) $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$

Rechnung:
$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{3} \\ 10x &= 3{,}\overline{3} \\ 9x &= 3 \\ x &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $0{,}\overline{9} = 1$

Rechnung:
$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{9} \\ 10x &= 9{,}\overline{9} \\ 9x &= 9 \\ x &= \frac{9}{9} = 1 \end{aligned}$$

(iii) $0{,}\overline{36} = \frac{4}{11}$

Rechnung:
$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{36} \\ 100x &= 36{,}\overline{36} \\ 99x &= 36 \\ x &= \frac{36}{99} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

(iv) $0{,}\overline{142857} = \frac{1}{7}$

Rechnung:
$$\begin{aligned} x &= 0{,}\overline{142857} \\ 1000000x &= 142857{,}\overline{142857} \\ 999999x &= 142857 \\ x &= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

(v) $0,2\overline{57} = \frac{17}{66}$

Rechnung:
$$\begin{aligned} x &= 0{,}2\overline{57} \\ 100x &= 25{,}7\overline{57} \\ 99x &= 25{,}5 \\ x &= \frac{255}{990} = \frac{17}{66} \end{aligned}$$

b) Schreiben Sie die folgenden Brüche als Dezimalzahlen:

(i) $\frac{2}{7} = 0{,}\overline{285714}$

Rechnung:
$$
\begin{array}{l}
2{,}000000 : 7 = 0{,}\overline{285714} \\
\underline{14} \\
\ \ 60 \\
\ \ \underline{56} \\
\ \ \ \ 40 \\
\ \ \ \ \underline{35} \\
\ \ \ \ \ \ 50 \\
\ \ \ \ \ \ \underline{49} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 10 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{\ \ 7} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{28} \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 \ \rightarrow \text{Beginn der Periode}
\end{array}
$$

$\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$

Rechnung:
$$
\begin{array}{l}
3{,}000000 : 7 = 0{,}\overline{428571} \\
\underline{28} \\
\ \ 20 \\
\ \ \underline{14} \\
\ \ \ldots
\end{array}
$$

Man erkennt die gleiche Reihenfolge, angefangen mit der Ziffer 4.

Analog gilt $\frac{4}{7} = 0{,}\overline{571428}$, $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$, $\frac{6}{7} = 0{,}\overline{857142}$.

(ii) $\frac{1}{14} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{14} = 0{,}1 \cdot \frac{5}{7} = 0{,}1 \cdot 0{,}\overline{714285} = 0{,}0\overline{714285}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

a) $2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$

b) $(-4) \cdot (-3 - (-2a)) + 2a - 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{36}{45} - \frac{11}{6} : \frac{11}{3}$

d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{45}{9} : \frac{9}{45} - \frac{1}{4}$

e) $\frac{5}{7} + \left(\frac{2}{6} - \frac{6}{2}\right) \cdot \frac{14}{24}$

f) $\left(\frac{25ax}{12by} + \frac{16bx}{3ay}\right) : \frac{8x}{21y} \quad$ für $a, b, x, y \neq 0$

Lösung:

a) $2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7) = -10 + 21 = 11$

b) $(-4) \cdot (-3 - (-2a)) + 2a - 3 = -4 \cdot (-3 + 2a) + 2a - 3 = 12 - 8a + 2a - 3 = 9 - 6a$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{36}{45} - \frac{11}{6} : \frac{11}{3} = \frac{3 \cdot 36}{4 \cdot 45} - \frac{11 \cdot 3}{6 \cdot 11} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6-5}{10} = \frac{1}{10}$

d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{45}{9} : \frac{9}{45} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{45}{9} \cdot \frac{45}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} \cdot 5 \cdot 5 - \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 25 - 2}{8} = \frac{173}{8}$

e) $\frac{5}{7} + \left(\frac{2}{6} - \frac{6}{2}\right) \cdot \frac{14}{24} = \frac{5}{7} + \frac{2-18}{6} \cdot \frac{7}{12} = \frac{5}{7} + \frac{(-16) \cdot 7}{6 \cdot 12} = \frac{5}{7} - \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{5}{7} - \frac{14}{9}$
$= \frac{45-98}{63} = -\frac{53}{63}$

f) $\left(\frac{25ax}{12by} + \frac{16bx}{3ay}\right) : \frac{8x}{21y} = \frac{25a^2x + 64b^2x}{12aby} \cdot \frac{21y}{8x} = \frac{(25a^2 + 64b^2) \cdot x \cdot 21 \cdot y}{12aby \cdot 8x}$
$= \frac{7 \cdot (25a^2 + 64b^2)}{32ab}$

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob für die folgenden Brüche Gleichheit vorliegt:

a) $\frac{7}{4}, \frac{175}{10}$

b) $\frac{9}{32}, \frac{51}{114}$

c) $\frac{13}{8}, \frac{143}{88}$

Lösung:

a) $\frac{7}{4} \neq \frac{175}{10}$, denn $7 \cdot 10 = 70 \neq 700 = 175 \cdot 4$

b) $\frac{9}{32} \neq \frac{51}{114}$, denn $9 \cdot 144 = 1026 \neq 1632 = 51 \cdot 32$

c) $\frac{13}{8} = \frac{143}{88}$, denn $13 \cdot 88 = 1144 = 143 \cdot 8$

Aufgabe 4. Kürzen Sie soweit wie möglich:

a) $\dfrac{144}{168}$

b) $\dfrac{42ab^2c}{22a^2bc}$ für $a, b, c \neq 0$

c) $\dfrac{-x+2y}{-2y+x}$ für $x \neq 2y$

d) $\dfrac{3xu-4xv+6yu-8yv}{xv-3xu+2yv-6yu}$ für $x \neq -2y$, $v \neq 3u$

Lösung:

a) $\dfrac{144}{168} = \dfrac{36}{42} = \dfrac{6}{7}$

b) $\dfrac{42ab^2c}{22a^2bc} = \dfrac{21b}{11a}$

c) $\dfrac{-x+2y}{-2y+x} = \dfrac{-x+2y}{-(-x+2y)} = -1$

d) $\dfrac{3xu-4xv+6yu-8yv}{xv-3xu+2yv-6yu} = \dfrac{x(3u-4v)+2y(3u-4v)}{x(v-3u)+2y(v-3u)} = \dfrac{(x+2y)(3u-4v)}{(x+2y)(v-3u)}$
$= \dfrac{3u-4v}{v-3u}$

Aufgabe 5. Geben Sie an, für welche Werte von x bzw. $z \in \mathbb{R}$ der Bruchterm definiert ist:

a) $\dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

c) $\dfrac{3-x}{9-3x}$

d) $\dfrac{14}{z^2+1}$

Lösung:

a) $\dfrac{1}{x-1}$, $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$, $\quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) $\dfrac{3-x}{9-3x}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Rechnung: $9 - 3x = 0$
$x = 3$

d) $\dfrac{14}{z^2+1}, \quad D = \mathbb{R}$

Aufgabe 6. Vereinfachen Sie die folgenden Mengen:

a) $\{3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,8\}$

b) $\{1,2\} \cap \{3,4\}$

c) $\{x : x \in \mathbb{N},\ x \leq 5\} \cap \{y : y \in \mathbb{N},\ y > 2\}$

d) $\{a : a \in \mathbb{N},\ a < 25\} \cap \{b : b \text{ ist Primzahl}\}$

Lösung:

a) $\{3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,8\} = \{4,6\}$

b) $\{1,2\} \cap \{3,4\} = \emptyset$

c) $\{x : x \in \mathbb{N},\ x \leq 5\} \cap \{y : y \in \mathbb{N},\ y > 2\} = \{1,2,3,4,5\} \cap \{3,4,5,6,\ldots\} = \{3,4,5\}$

d) $\{a : a \in \mathbb{N},\ a < 25\} \cap \{b : b \text{ ist Primzahl}\} = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$

Aufgabe 7. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \text{ und } x < 7\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ oder } x \leq 1\}$

Lösung:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\} = (-\infty, 5)$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\} = [-4, \infty)$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \text{ und } x < 7\} = [-2, 7)$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ oder } x \leq 1\} = (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

Aufgabe 8. Gegeben seien die Intervalle

$$A = [-4, -1], \quad B = (-2, 1), \quad C = [0, 5).$$

a) Geben Sie jedes Intervall als eine Menge in beschreibender Form an.

b) Stellen Sie zu jedem Intervall die Komplementärmenge als Vereinigung von Intervallen dar.

c) Bestimmen Sie folgende Mengen: $A \cup B \cup C$, $B \setminus (A \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(C \setminus A) \cup B$, $A \setminus (B \setminus C)$.

Lösung:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq -1\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 1\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 5\}$

b) $\overline{A} = (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$

$\overline{B} = (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

$\overline{C} = (-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

c) $A \cup B \cup C = [-4, 5)$

$B \setminus (A \cup C) = (-2, 1) \setminus ([-4, -1] \cup [0, 5)) = (-1, 0)$

$(A \cap B) \cup C = (-2, -1] \cup [0, 5)$

$(C \setminus A) \cup B = [0, 5) \cup (-2, 1) = (-2, 5)$

$A \setminus (B \setminus C) = [-4, -1] \setminus (-2, 0) = [-4, -2]$

Aufgabe 9. a) Schreiben Sie ohne Betrag:

(i) $|11 - 23|$ (ii) $|34a - 2 \cdot (345a - 12)|,\ a < 0$

(iii) $|34a - 2 \cdot (345a + 12)|,\ a > 0$

b) Schreiben Sie unter Verwendung des Betrags:

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 16\}$ (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : -7 < x < 23\}$

Lösung:

a) Schreiben Sie ohne Betrag:

(ii) $|34a - 2 \cdot (345a - 12)| = |34a - 690a + 24| = |24 \underbrace{-656a}_{>0}| = 24 - 656a,\ a < 0$

(iii) $|34a - 2 \cdot (345a + 12)| = |34a - 690a - 24| = |-24 \underbrace{-656a}_{<0}| = 24 + 656a,\ a > 0$

b) Schreiben Sie unter Verwendung des Betrags:

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 16\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - 10| \leq 6\}$

Mittelpukt: $\dfrac{16+4}{2} = 10.$

Abstand der Randpunkte zum Mittelpunkt: $16 - 10 = 6$.

(ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : -7 < x < 23\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - 8| < 15\}$

Mittelpukt: $\dfrac{23 + (-7)}{2} = 8.$

Abstand der Randpunkte zum Mittelpunkt: $23 - 8 = 15$.

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $|x + 5| \leq 12$

b) $|y - 4| < 3$

c) $|x - 3| < -2$

d) $|x + 2| > 3$

e) $2 \leq |z - 1| \leq 5$

Lösung:

a) $|x + 5| = |x - (-5)| \leq 12$

$L = [-5 - 12, -5 + 12] = [-17, 7]$

b) $|y - 4| < 3$

$L = (4 - 3, 4 + 3) = (1, 7)$

c) $|x - 3| < -2$

$L = \emptyset$

d) $|x + 2| = |x - (-2)| > 3$

$L = (-\infty, -2 - 3) \cup (-2 + 3, \infty) = (-\infty, -5) \cup (1, \infty)$

e) $2 \leq |z - 1| \leq 5$

$L = [1 - 5, 1 - 2] \cup [1 + 2, 1 + 5] = [-4, -1] \cup [3, 6]$

Aufgabe 11. a) Schreiben Sie die Summanden ausführlich auf:

(i) $\displaystyle\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=22}^{25} k(k+2)$ (iii) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{4} (-1)^{\ell} \cdot \ell$ (iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} 4$

b) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(i) $6+8+10+12+14$ (ii) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$

(iii) $2+2+2+2$ (iv) $c_1+c_3+c_5+c_7+c_9$

Lösung:

a) Schreiben Sie die Summanden ausführlich auf:

(i) $\sum_{j=1}^{6}\frac{1}{j}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

(ii) $\sum_{k=22}^{25}k(k+2)=22\cdot 24+23\cdot 25+24\cdot 26+25\cdot 27$

(iii) $\sum_{\ell=0}^{4}(-1)^{\ell}\cdot\ell=0-1+2-3+4$

(iv) $\sum_{n=1}^{5}4=4+4+4+4+4$

b) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(i) $6+8+10+12+14=\sum_{k=0}^{4}(6+2k)$

(ii) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}=\sum_{n=1}^{5}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

(iii) $2+2+2+2=\sum_{k=1}^{4}2$

(iv) $c_1+c_3+c_5+c_7+c_9=\sum_{i=0}^{4}c_{2i+1}$

Bemerkung: Die Lösung in Teilaufgabe b) ist nicht eindeutig.

Aufgabe 12. Berechnen Sie folgende Summen:

a) $\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{k}\ell(\ell+1)$

b) $\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=i+2}^{4}(i+j)$

Lösung:

a) $\sum_{k=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{k}\ell(\ell+1)=\sum_{\ell=1}^{1}\ell\,(\ell+1)+\sum_{\ell=1}^{2}\ell\,(\ell+1)+\sum_{\ell=1}^{3}\ell\,(\ell+1)$

$=1\cdot 2+(1\cdot 2+2\cdot 3)+(1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4)$

$=2+2+6+2+6+12=30$

b) $\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=i+2}^{4}(i+j) = \sum_{j=1}^{4}(-1+j) + \sum_{j=2}^{4}(0+j) + \sum_{j=3}^{4}(1+j)$

$= (-1+1)+(-1+2)+(-1+3)+(-1+4)+2+3+4+(1+3)+(1+4) = 24$

Aufgabe 13. Es ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Leiten Sie daraus folgende Formeln her:

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

b) $\sum_{i=0}^{n}(i+\alpha) = \frac{(n+2\alpha)(n+1)}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Lösung:

a) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$

b) $\sum_{i=0}^{n}(i+\alpha) = \sum_{i=0}^{n} i + \sum_{i=0}^{n} \alpha = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\cdot\alpha = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\cdot\alpha$

$= \frac{n(n+1)+2(n+1)\alpha}{2} = \frac{(n+1)(n+2\alpha)}{2}$

Aufgabe 14. Geben Sie an, für welche Werte von a, x, $z \in \mathbb{R}$ die Wurzel definiert ist:

(i) $\sqrt{4+a}$ (ii) $\sqrt{-3-3z}$ (iii) $\sqrt{-x^2-1}$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}$

Lösung:

(i) $\sqrt{4+a}, \quad D = [-4, \infty)$

Rechnung: $4 + a \geq 0$

$a \geq -4$

(ii) $\sqrt{-3-3z}, \quad D = (-\infty, -1]$

Rechnung: $-3 - 3z \geq 0$

$-3z \geq 3$

$z \leq -1$

(iii) $\sqrt{-x^2-1}, \quad D = \emptyset$

Rechnung: $-x^2 - 1 \geq 0$

$-x^2 \geq 1$

$x^2 \leq -1$ (nicht möglich)

(iv) $\dfrac{2}{\sqrt{4-a^2}}$, $\quad D = (-2, 2)$

Rechnung: $$\begin{aligned} 4 - a^2 &> 0 \\ a^2 &< 4 \\ |a| &< 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Vereinfachen Sie ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y}$

b) $\sqrt{1-x^2} : \sqrt{1-x}$

c) $(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{a}+\sqrt{2})^2$

d) $\sqrt{9b^2-6b+1}$

Lösung:

a) $\dfrac{(\sqrt{x}-2\sqrt{y})(\sqrt{x}+2\sqrt{y})}{5x-20y} = \dfrac{(\sqrt{x})^2-(2\sqrt{y})^2}{5(x-4y)} = \dfrac{x-4y}{5(x-4y)} = \dfrac{1}{5}$

b) $\sqrt{1-x^2} : \sqrt{1-x} = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-x}} = \sqrt{\dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x}} = \sqrt{1+x}$

c) $(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{a}+\sqrt{2})^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt{2} + 2 + a + 2\sqrt{a}\sqrt{2} + 2 = 2a + 4$

d) $\sqrt{9b^2-6b+1} = \sqrt{(3b-1)^2} = |3b-1|$

Aufgabe 16. Der Durchmesser eines H_2O-Moleküls ist ungefähr $2{,}5 \times 10^{-10}$ m. In einem Mol (= 18 g) Wasser sind ca. $6{,}022 \times 10^{23}$ Moleküle enthalten. Wie lang wäre eine "Kette" dieser Moleküle? Vergleichen Sie dies mit dem Abstand der Erde zur Sonne, der ungefähr $1{,}496 \times 10^8$ km beträgt.

Lösung:

Länge der Kette $= 2{,}5 \times 10^{-10} \cdot 6{,}022 \times 10^{23}$ m $\approx 15 \times 10^{13}$ m $= 1{,}5 \times 10^{14}$ m.
Abstand der Erde zur Sonne $\approx 1{,}5 \times 10^8$ km $= 1{,}5 \times 10^8 \times 10^3$ m $= 1{,}5 \times 10^{11}$ m.
Die Kette der Moleküle ist ca. 1000-mal länger.

Aufgabe 17. Vereinfachen Sie ($x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

a) $(-2^2)^3$ und $((-2)^2)^3$

b) $\sqrt[4]{9} \cdot (\sqrt[4]{3})^2$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$

d) $\dfrac{2}{x^{-1}} + 3x - x^{-2} + \dfrac{3}{x^2}$

e) $(2y)^{1-q} \cdot (2y)^{q-2}$

Lösung:

a) $(-2^2)^3 = (-4)^3 = -64$ und $((-2)^2)^3 = 4^3 = 64$

b) $\sqrt[4]{9} \cdot (\sqrt[4]{3})^2 = \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}} = (x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{20}} = \sqrt[20]{x}$

d) $\dfrac{2}{x^{-1}} + 3x - x^{-2} + \dfrac{3}{x^2} = 2x + 3x - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^2} = 5x + \dfrac{2}{x^2}$

e) $(2y)^{1-q} \cdot (2y)^{q-2} = (2y)^{1-q+q-2} = (2y)^{-1} = \dfrac{1}{2y}$

Aufgabe 18. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(i) $\lg 0{,}0001$ (ii) $\log_{17} 1$ (iii) $\log_2 (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3})$ (iv) $\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}$

Lösung:

(i) $\lg 0{,}0001 = \lg 10^{-4} = -4$

(ii) $\log_{17} 1 = 0$

(iii) $\log_2 (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3}) = \log_2 (2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{5}}) = \log_2 (2^{\frac{1}{3}}) + \log_2 (2^{\frac{3}{5}}) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{5+9}{15} = \dfrac{14}{15}$

(iv) $\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}} = \log_8 (8^{-\frac{1}{2}}) = -\dfrac{1}{2}$

Aufgabe 19. a) Schreiben Sie als Summen/Differenzen von Logarithmen ($x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\log_3 3x$ (ii) $\ln \dfrac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{x \cdot \sqrt{y}}}$

b) Schreiben Sie mit einem Logarithmus ($x, u, v, a \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\lg (u+v) + \lg (u+v)^2 - \frac{1}{2} \lg u + 1$

(ii) $\lg (a^2 - 1) - \lg (a-1) - \lg (a+1)^2$

(iii) $(\log_2 x^2) : (\log_2 x) - 2$ (iv) $2 \ln x - \ln \frac{x}{x^2+1} - \ln x^3$

Lösung:

a) Schreiben Sie als Summen/Differenzen von Logarithmen ($x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$

(ii) $\ln \dfrac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{x \cdot \sqrt{y}}} = \ln \dfrac{x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{3}{6}}}{(xy^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} = \ln \dfrac{x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}}$

$= \ln (x^{\frac{2}{5}-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}) = \ln (x^{-\frac{1}{10}} \cdot y^{\frac{1}{4}})$

$= \ln (x^{-\frac{1}{10}}) + \ln (y^{\frac{1}{4}}) = -\dfrac{1}{10} \ln x + \dfrac{1}{4} \ln y$

b) Schreiben Sie mit einem Logarithmus ($x, u, v, a \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\lg (u+v) + \lg (u+v)^2 - \frac{1}{2} \lg u + 1$

$= \lg ((u+v) \cdot (u+v)^2) - \lg u^{\frac{1}{2}} + \lg 10$

$= \lg \dfrac{(u+v)^3 \cdot 10}{u^{\frac{1}{2}}} = \lg \dfrac{10(u+v)^3}{\sqrt{u}}$

(ii) $\lg (a^2 - 1) - \lg (a-1) - \lg (a+1)^2$

$= \lg \dfrac{a^2 - 1}{(a-1)(a+1)^2} = \lg \dfrac{(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)^2}$

$= \lg \dfrac{1}{1+a} = -\lg (1+a)$

(iii) $(\log_2 x^2) : (\log_2 x) - 2 = \dfrac{2 \log_2 x}{\log_2 x} - 2 = 2 - 2 = 0$

(iv) $2 \ln x - \ln \dfrac{x}{x^2+1} - \ln x^3 = \ln \dfrac{x^2}{\left(\frac{x}{x^2+1}\right) \cdot x^3} = \ln \dfrac{x^2(x^2+1)}{x^4} = \ln \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

Aufgabe 20. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $14x + 3 = 2x + 7$

b) $-7(4x + 0{,}5) = 0{,}25(-112x) - 3{,}5$

c) $2x(x-1) = 4(x+1) - 6$

d) $11x = 3 + 30x^2$

e) $-9x^2 = 1 + 6x$

f) $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$

Lösung:

a) $14x + 3 = 2x + 7 \qquad \mid -2x - 3$

$12x = 4 \qquad \mid \cdot \frac{1}{12}$

$x = \frac{1}{3}$

$L = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) $-7(4x + 0{,}5) = 0{,}25(-112x) - 3{,}5$

$-28x - 3{,}5 = -28x - 3{,}5$

$0 = 0$

$L = \mathbb{R}$

c) $2x(x-1) = 4(x+1) - 6$

$2x^2 - 2x = 4x + 4 - 6$

$2x^2 - 2x - 4x + 2 = 0$

$2x^2 - 6x + 2 = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$L = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$

d) $11x = 3 + 30x^2$

$30x^2 - 11x + 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 30 \cdot 3}}{60}, \qquad d < 0$

$L = \emptyset$

e) $-9x^2 = 1 + 6x$

$9x^2 + 6x + 1 = 0$

$(3x+1)^2 = 0$

$3x + 1 = 0$

$x = -\frac{1}{3}$

$L = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

f) $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$

$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}$

$x^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$x_{1,2} = \pm 1, \qquad x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$L = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Aufgabe 21. Lösen Sie die Gleichung

$$4xy + 7x - 3y = 0$$

einmal nach x und einmal nach y auf. Hinweis: Die Lösungenmenge hängt vom Wert der anderen Variable ab.

Lösung:

Nach x:

$(4y + 7)x = 3y$

1. Fall: $4y + 7 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -\frac{7}{4}$

$x = \frac{3y}{4y + 7}$

$L = \left\{ \frac{3y}{4y + 7} \right\}$

2. Fall: $y = -\frac{7}{4}$

$0 \cdot x = -\frac{21}{4}$

$L = \emptyset$

Nach y:

$(4x - 3)y = -7x$

1. Fall: $4x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{4}$

$y = -\frac{7x}{4x - 3}$

$L = \left\{ -\frac{7x}{4x - 3} \right\}$

2. Fall: $x = \frac{3}{4}$

$0 \cdot y = -\frac{21}{4}$

$L = \emptyset$

Aufgabe 22. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzen folgende Gleichungen genau eine, zwei oder keine Lösung?

a) $x^2 - 6x + a = 0$

b) $x^2 + ax + 1 = 0$

Lösung:

a) $x^2 - 6x + a = 0$

$d = 3^2 - a = 9 - a$

Für $d > 0 \Leftrightarrow 9 - a > 0 \Leftrightarrow a < 9$: genau zwei Lösungen.

Für $d = 0 \Leftrightarrow 9 - a = 0 \Leftrightarrow a = 9$: genau eine Lösung.

Für $d < 0 \Leftrightarrow 9 - a < 0 \Leftrightarrow a > 9$: keine Lösung.

b) $x^2 + ax + 1 = 0$

$d = a^2 - 4$

Für $d > 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$: genau zwei Lösungen.

Für $d = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$: genau eine Lösung.

Für $d < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a \in (-2, 2)$: keine Lösung.

Aufgabe 23. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ sind.

Lösung:

<ins>1. Lösungsweg:</ins>

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$, also

$(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) = (x - 1)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 2x + 1 - 3 = x^2 - 2x - 2 = 0$

<ins>2. Lösungsweg:</ins>

Wir suchen die Gleichung in der Form $x^2 + px + q = 0$.

Nach dem Satz von Vieta gilt:

$q = x_1 \cdot x_2 = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$

$-p = x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$

Also: $x^2 - 2x - 2 = 0$

Aufgabe 24. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\dfrac{x - 2}{2x + 2} + \dfrac{x}{x + 1} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

b) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 1} + \dfrac{x^2}{x + 1} = \dfrac{x^2}{x - 1}$

c) $\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} + 2 = \dfrac{10x - 13}{x - 2}$

Lösung:

a) $\dfrac{x-2}{2x+2} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2-x-1}{x+1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{x-2}{2(x+1)} + \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-x-1}{x+1} \qquad \Big| \cdot (x+1)$$

$$\frac{x-2}{2} + x = x^2 - x - 1$$

$$\frac{1}{2}x - 1 + x - x^2 + x + 1 = 0$$

$$-x^2 + \frac{5}{2}x = 0$$

$$x\left(-x + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \in D, \quad x_2 = \frac{5}{2} \in D$$

$$L = \left\{0, \frac{5}{2}\right\}$$

b) $\dfrac{x-3}{x^2-1} + \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2}{x-1}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{x-3}{(x-1)(x+1)} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \qquad \Big| \cdot (x+1)(x-1)$$

$$x - 3 + x^2(x-1) = x^2(x+1)$$

$$x - 3 + x^3 - x^2 - x^3 - x^2 = 0$$

$$-2x^2 + x - 3 = 0$$

$$2x^2 - x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-24}}{4}$$

$$L = \emptyset$$

c) $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} + 2 = \dfrac{10x-13}{x-2}, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$x^2 + x + 1 + 2(x-2) = 10x - 13$$

$$x^2 + x + 1 + 2x - 4 - 10x + 13 = 0$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Nach dem Satz von Vieta gilt:

$$x_1 x_2 = 10, \quad x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 = 2 \notin D, \quad x_2 = 5 \in D$$

$$L = \{5\}$$

Bemerkung: Man kann $x_{1,2}$ natürlich auch mit der Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmen.

Aufgabe 25. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\sqrt{2x^2-2} = \sqrt{x^2+1}$

b) $x = \sqrt{3x+10}$

c) $\sqrt{x+\sqrt{x+6}} = 6$

d) $\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x-1}$

Lösung:

a) $\sqrt{2x^2-2} = \sqrt{x^2+1}$

Definitionsmenge:

$$\begin{aligned} 2x^2-2 &\geq 0 \quad \text{und} \quad & x^2+1 &\geq 0 \\ 2x^2 &\geq 2 \quad \text{und} \quad & x^2 &\geq -1 \text{ (immer wahr)} \\ x^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

$x \leq -1$ oder $x \geq 1$

$D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Lösungsmenge:

$\sqrt{2x^2-2} = \sqrt{x^2+1}$

$2x^2-2 = x^2+1$

$x^2 = 3$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Probe:

$$\begin{aligned} x_1 = \sqrt{3}: \quad && \sqrt{2\cdot(\sqrt{3})^2-2} &= \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} \\ && \sqrt{4} &= \sqrt{4} \\ x_2 = -\sqrt{3}: \quad && \sqrt{2\cdot(-\sqrt{3})^2-2} &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1} \\ && \sqrt{4} &= \sqrt{4} \end{aligned}$$

$L = \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$

b) $x = \sqrt{3x+10}$

Definitionsmenge:

$3x+10 \geq 0$

$3x \geq -10$

$x \geq -\frac{10}{3}$

$D = \left[-\frac{10}{3}, \infty\right)$

Lösungsmenge:

$$x = \sqrt{3x+10}$$
$$x^2 = 3x+10$$
$$x^2 - 3x + 10 = 0$$
$$x_1x_2 = -10, \quad x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2$$

Probe:

$$\begin{array}{lrcl} x_1 = 5: & 5 & = & \sqrt{3 \cdot 5 + 10} \\ & 5 & = & \sqrt{25} \\ x_2 = -2: & -2 & = & \sqrt{3 \cdot (-2) + 10} \\ & -2 & \neq & \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \text{ ist keine Lösung} \end{array}$$

$L = \{5\}$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x+6}} = 6$

Definitionsmenge:

$x + 6 \geq 0 \quad$ und $\quad x + \sqrt{x+6} \geq 0$

$x + 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -6$

$$x + \sqrt{x+6} = 0$$
$$\sqrt{x+6} = -x$$
$$x + 6 = x^2$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{25}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$
$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -2$$

Probe:

$x_1 = 3: \quad 3 + \sqrt{9} \neq 0$

$x_2 = -2: \quad -2 + \sqrt{-2+6} = -2 + \sqrt{4} = 0$

Der Term $x + \sqrt{x+6}$ ist für $x \geq -6$ definiert und wechselt das Vorzeichen bei -2.

Durch Einsetzen prüfen wir, ob der Term in den Intervallen $[-6, -2)$ und $(-2, \infty)$ positiv ist.

Z.B. $x = -6: \quad -6 + \sqrt{-6+6} = -6 < 0$

Z.B. $x = 0: \quad 0 + \sqrt{0+6} = \sqrt{6} > 0$

Also ist der Term $x + \sqrt{x+6}$ im Intervall $(-2, \infty)$ positiv.

$D = [-2, \infty)$

Lösungsmenge:

$$\sqrt{x + \sqrt{x+6}} = 6$$
$$x + \sqrt{x+6} = 36$$
$$\sqrt{x+6} = 36 - x$$
$$x + 6 = (36-x)^2$$
$$x + 6 = 1296 - 72x + x^2$$
$$x^2 - 73x + 1290 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{73 \pm \sqrt{5329 - 5160}}{2} = \frac{73 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{73 \pm 13}{2}$$
$$x_1 = 43, \qquad x_2 = 30$$

Probe:

$x_1 = 43: \quad \sqrt{43 + \sqrt{43+6}} = \sqrt{43 + \sqrt{49}} = \sqrt{50} \neq 6$

$\Rightarrow \quad x_1 = 43$ ist keine Lösung

$x_2 = 30: \quad \sqrt{30 + \sqrt{30+6}} = \sqrt{30 + \sqrt{36}} = \sqrt{36} = 6$

$L = \{30\}$

d) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x-1}$

Definitionsmenge:

$x \geq 0$ und $1 + \sqrt{x} \geq 0$ und $x - 1 \geq 0$

$1 + \sqrt{x} \geq 0$ ist immer erfüllt

$x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$

$D = [1, \infty)$

Lösungsmenge:

$$\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x-1}$$
$$1 + \sqrt{x} = x - 1$$
$$\sqrt{x} = x - 2$$
$$x = (x-2)^2$$
$$x = x^2 - 4x + 4$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_1 \cdot x_2 = 4, \quad x_1 + x_2 = 5$$
$$x_1 = 4, \quad x_2 = 1$$

Probe:

$$\begin{aligned}
x_1 = 4: \quad \sqrt{1+\sqrt{4}} &= \sqrt{4-1} \\
\sqrt{3} &= \sqrt{3} \\
x_2 = 1: \quad \sqrt{1+\sqrt{1}} &= \sqrt{1-1} \\
\sqrt{2} &\neq \sqrt{0} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 \text{ ist keine Lösung}
\end{aligned}$$

$L = \{4\}$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

b) $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$

Lösung:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

Raten: $x_1 = -1: \quad -1 + 6 - 11 + 6 = 0$

Polynomdivision: $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x + 1) = x^2 + 5x + 6$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 + \ \ x^2} \\
\qquad 5x^2 + 11x \\
\qquad \underline{5x^2 + \ \ 5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x_2 = -2, \quad x_3 = -3$

$L = \{-1, -2, -3\}$

b) $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$

Raten: $x_1 = 2: \quad 32 - 80 + 66 - 18 = 0$

Polynomdivision: $(4x^3 - 20x^2 + 33x - 18) : (x - 2) = 4x^2 - 12x + 9$

$$\begin{array}{l}
\underline{4x^3 - \ \ 8x^2} \\
\quad - 12x^2 + 33x \\
\quad - \underline{12x^2 + 24x} \\
\qquad\qquad\quad 9x - 18 \\
\qquad\qquad\quad \underline{9x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$x_{2,3} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$L = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$$

Aufgabe 27. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $0{,}1^x - 10^x = 10^{x+2} - 0{,}1^{x+2}$

b) $\ln(x^2 - 8) - \ln x = \ln 2$

Lösung:

a) $0{,}1^x - 10^x = 10^{x+2} - 0{,}1^{x+2}, \qquad D = \mathbb{R}$

$$0{,}1^x + 0{,}1^2 \cdot 0{,}1^x = 10^2 \cdot 10^x + 10^x$$
$$1{,}01 \cdot 0{,}1^x = 101 \cdot 10^x$$
$$1{,}01 \cdot 10^{-x} = 101 \cdot 10^x$$
$$10^x \cdot 10^x = \frac{1{,}01}{101}$$
$$10^{2x} = 10^{-2}$$
$$2x = -2$$
$$x = -1$$
$$L = \{-1\}$$

b) $\ln(x^2 - 8) - \ln x = \ln 2$

<u>Definitionsmenge:</u>

$x > 0$ und $x^2 - 8 > 0$

$x > 0$ und $|x| > \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad D = \left(2\sqrt{2}, \infty\right)$

<u>Lösungsmenge:</u>

$$\ln\left(\frac{x^2 - 8}{x}\right) = \ln 2$$
$$\frac{x^2 - 8}{x} = 2$$
$$x^2 - 8 = 2x$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8} = 1 \pm 3$$
$$x_1 = -2 \notin D, \quad x_2 = 4 \in D$$
$$L = \{4\}$$

Aufgabe 28. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $x^2 + 2x - 2 \leq 0$

b) $4x^2 + 40 \leq 28x - 9$

c) $3x^2 - 2x^2 - 5x + 4 \geq 0$

d) $\dfrac{2x^2 - 7x + 2}{x - 5} \geq x$

Lösung:

a) $x^2 + 2x - 2 \leq 0$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$

$L = \left[-1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\right]$

b) $4x^2 + 40 \leq 28x - 9$

$4x^2 - 28x + 49 \leq 0$

$x_{1,2} = \dfrac{28 \pm \sqrt{784 - 784}}{8} = \dfrac{28}{8} = \dfrac{7}{2}$

$L = \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$

c) $3x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \geq 0$

Nullstellen:

Raten: $x_1 = 1 : \quad 3 - 2 - 5 + 4 = 0$

Polynomdivision: $(3x^3 - 2x^2 - 5x + 4) : (x - 1) = 3x^2 + x - 4$

$$
\begin{array}{l}
\underline{3x^3 - 3x^2} \\
\qquad\; x^2 - 5x \\
\qquad\; \underline{x^2 - \;\; x} \\
\qquad\qquad -4x + 4 \\
\qquad\qquad -\underline{4x + 4} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

$3x^2 + x - 4 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \dfrac{-1 \pm 7}{6}$

$x_2 = 1, \quad x_3 = -\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow 3(x-1)^2 \left(x + \dfrac{4}{3}\right) \geq 0$

$L = \left[-\dfrac{4}{3}, \infty\right)$

d) $\dfrac{2x^2-7x+2}{x-5} \geq x, \quad D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

$\dfrac{2x^2-7x+2}{x-5} - x \geq 0$

$\dfrac{2x^2-7x+2-x(x-5)}{x-5} \geq 0$

$\dfrac{2x^2-7x+2-x^2+5x}{x-5} \geq 0$

$\dfrac{x^2-2x+2}{x-5} \geq 0$

$x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Der Term hat also das gleiche Vorzeichen wie $x-5$ und ist für $x=5$ nicht definiert.

$L = (5, \infty)$

Aufgabe 29. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & (a^2-a+2)x_2 & = & a+6 \end{array}$$

Lösung:

(II)$-2\cdot$ (I): $\quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ (a^2-a)x_2 &= a \end{aligned}$

(II′): $\quad a(a-1)x_2 = a$

1. Fall: $\quad a(a-1) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \neq 0$ und $a \neq 1$

$x_2 = \dfrac{a}{a(a-1)} = \dfrac{1}{a-1}$

Einsetzen in (I): $\quad 2x_1 = 3 + x_2 = 3 + \dfrac{1}{a-1}$

$x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2(a-1)}$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2(a-1)} \\[2ex] \dfrac{1}{a-1} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Fall: $\quad a = 1$

(II): $\quad 0 \cdot x_2 = 1 \qquad L = \emptyset$

3. Fall: $\quad a = 0$

$0 \cdot x_2 = 0$

$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} : 2x_1 - x_2 = 3 \right\}$

Aufgabe 30. a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Lösung:

a) $\cos\varphi = \dfrac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$

$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$

$||\vec{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 7$

$\cos\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{2}} = 0{,}9191$

$\varphi = 23{,}2°$

b) $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ sind orthogonal $\quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{w}_1 | \vec{w}_2 \rangle = 0$

$\langle \vec{w}_1 | \vec{w}_2 \rangle = 2a^2 + 10a = 0$

$2a(a + 5) = 0$

$a = 0 \quad$ oder $\quad a = -5$

Aufgabe 31. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A + 2B, A^2 = A \cdot A, AB$ und BA.

b) Berechnen Sie $A^T \cdot \vec{v}$.

(c) Berechnen Sie $\det(A)$ und A^{-1}.

Lösung:

a) $A+2B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^T \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\det(A) = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 4$

$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}25 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 32. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2\,x_2 \\ x_2 - 10\,x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $T(\vec{x})$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie die Matrix der Abbildung T an.

Lösung:

(a) $T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \cdot (-1) \\ -1 - 10 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -21 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 33. Betrachten Sie folgende lineare Abbildungen:

- T_1: Drehung um 30°.
- T_2: Skalierung um den Faktor $\tan(30°)$ in die Richtung der x-Achse und um den Faktor $\frac{1}{\tan(30°)}$ in die Richtung der y-Achse.
- T_3: Drehung um $-60°$.

(a) Geben Sie die Matrizen der Abbildungen T_1, T_2 und T_3 an.

(b) Skizzieren Sie das Quadrat $[0,1]^2$ und sein Bild unter der Abbildungen T_1, $T_2 \circ T_2$ und $T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

(c) Berechnen Sie die Matrix der Abbildung $T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Welche lineare Abbildung ist $T_3 \circ T_2 \circ T_1$?

Lösung:

(a) Geben Sie die Matrizen der Abbildungen T_1, T_2 und T_3 an.

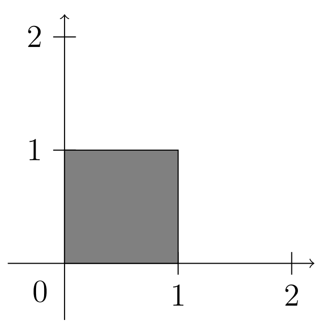
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \tan(30°) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan(30°)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

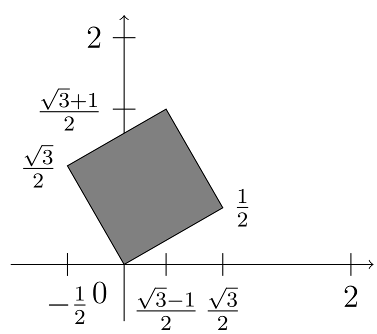
$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Skizzieren Sie das Quadrat $[0,1]^2$ und sein Bild unter der Abbildungen T_1, $T_2 \circ T_2$ und $T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

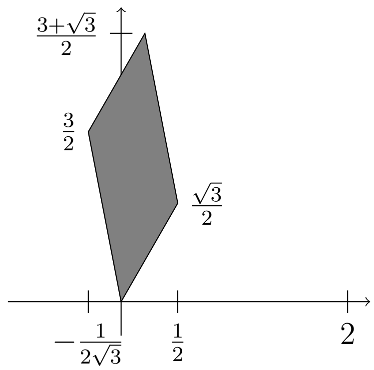
$[0,1]^2$:



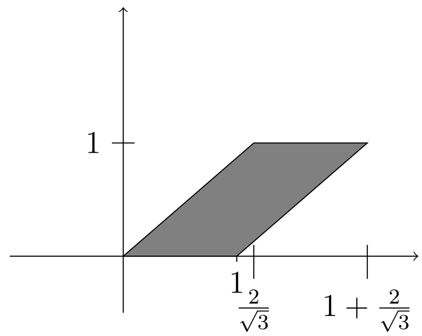
$T_1([0,1]^2)$:



$T_2 \circ T_1([0,1]^2)$:



$T_3 \circ T_2 \circ T_1([0,1]^2)$:



(c) Berechnen Sie die Matrix der Abbildung $T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Welche lineare Abbildung ist $T_3 \circ T_2 \circ T_1$?

$$A = A_3A_2A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Scherung.

Aufgabe 34. Bestimmen Sie den maximalen Definitionbereich für jede der folgenden Funktionen. Schränken Sie, wenn nötig, für jede der Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich so ein, dass die neu definierte Funktion bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $g(x) = x^2 + 1$

c) $h(x) = 8x^3$

d) $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$

e) $v(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 2^x$

Lösung:

a) $f(x) = 2x - 4$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion:

$y = 2x - 4$

$2x = y + 4$

$x = \frac{1}{2}y + 2$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$

b) $g(x) = x^2 + 1$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nicht bijektiv. Man muss den Definitions- und den Wertebereich einschränken. Z.B. $g : [0, \infty) \to [1, \infty)$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion:

$y = x^2 + 1$

$x^2 = y - 1$

$x = \sqrt{y - 1}$

$g^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty), \qquad g^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$

c) $h(x) = 8x^3$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion:

$y = 8x^3$

$x^3 = \frac{y}{8}$

$x = \sqrt[3]{\frac{y}{8}}, \quad y \geq 0$

$x = -\sqrt[3]{\frac{|y|}{8}}, \quad y < 0$

$$h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{8}}, & \text{falls } x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{\frac{|x|}{8}}, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

d) $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$u : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion:

$y = \dfrac{1}{x+1}$

$x + 1 = \dfrac{1}{y}$

$x = \dfrac{1}{y} - 1$

$u^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad u^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} - 1$

e) $v(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 2^x$

Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

$v : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv.

Umkehrfunktion:

$y = \dfrac{1}{3} \cdot 2^x$

$2^x = 3y$

$x = \log_2 (3y)$

$v^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad v^{-1}(x) = \log_2 (3x)$

Aufgabe 35. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

a) die durch die Punkte $P_1(1, 2)$ und $P_2(-2, 3)$ geht,

b) die durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ geht und die Steigung $m = \frac{1}{3}$ besitzt,

c) die durch den Ursprung geht und parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72, -60)$ und $Q(-24, -20)$ liegt.

Lösung:

a) Die Gerade durch die Punkte $P_1(1, 2)$ und $P_2(-2, 3)$.

$y = mx + c$

Die Punkte einsetzten:

$m + c = 2$

$-2m + c = 3$

$(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{3}$

$c = 2 - m = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

b) Die Gerade durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ mit der Steigung $m = \frac{1}{3}$.

$y = mx + c = \frac{1}{3}x + c$

Den Punkt einsetzen: $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + c = \frac{7}{11}$

$c = \frac{7}{11} + \frac{2}{9} = \frac{85}{99}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{85}{99}$

c) Die Gerade, die durch den Ursprung geht und parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72, -60)$ und $Q(-24, -20)$ liegt.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-20 + 60}{-24 + 72} = \frac{40}{48} = \frac{5}{6}$

$y = \frac{5}{6}x$

Aufgabe 36. Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der Geraden mit den Gleichungen

a) $y = -2x + 8$ und $y = 3x - 7$,

b) $y = \frac{3}{2}x + 5$ und $y = \frac{3}{2}x + 10$,

c) $y = \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{10}$.

Wie erkennt man am Funktionsterm, dass zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen?

Lösung:

a) $y = -2x + 8$ und $y = 3x - 7$

$-2x + 8 = 3x - 7$

$5x = 15$

$x = 3$

$y = 3 \cdot 3 - 7 = 2$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $(3, 2)$.

b) $y = \frac{3}{2}x + 5$ und $y = \frac{3}{2}x + 10$

$\frac{3}{2}x + 5 = \frac{3}{2}x + 10$

$0 = 5$

Keine Schnittpunkte.

Man erkennt das an den Termen: Die Steigungen der Geraden sind gleich, aber die y-Achsenabschnitte sind verschieden.

c) $y = \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{10} = \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$

Die Geraden stimmen überein. Alle Punkte (x, y) mit $y = \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ sind Lösungen.

Aufgabe 37. Welchen Wert kann der Ausdruck $-\frac{1}{3}x^2 + x + 2$ höchstens annehmen? Gibt es auch einen minimalen Wert?

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x + 2 = -\frac{1}{3}(x^2 - 3x) + 2 = -\frac{1}{3}\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + 2$$
$$= -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2 = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$$

Der maximale Wert ist $\frac{11}{4}$. Es gibt keinen minimalen Wert.

Aufgabe 38. Bestimmen Sie jeweils die Scheitelform der folgenden quadratischen Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

Lösung:

a) $f(x) = x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 = (x + 2)^2 - 4$

b) $f(x) = 3x^2 - x + 1 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 1 = 3\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36}\right) + 1$
$= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{12} + 1 = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12}$

Aufgabe 39. Untersuchen Sie folgende Funktionen hinsichtlich Nullstellen, Polstellen, hebbaren Definitionslücken und Verhalten für $x \to \pm\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$

Lösung:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

Nullstellen des Nenners:

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x_1 = -3, \qquad x_2 = -2$

Der Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$.

Nullstellen des Zählers:

$x^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 3x - 4) = 0$

$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = -1$

Die Nullstellen liegen alle in D und sind somit die Nullstellen von f. Es gibt keine hebbaren Definitionslücken.

$x_1 = -3$ und $x_2 = -2$ sind die Polstellen.

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Polynomdivision: } & (x^4 - 3x^3 - \ \ 4x^2) : (x^2 + 5x + 6) = x^2 - 8x + 30 \\
 & \underline{x^4 + 5x^3 + \ \ 6x^2} \\
 & \quad - 8x^3 - 10x^2 \\
 & \quad - \underline{8x^3 - 40x^2 - \ \ 48x} \\
 & \qquad\qquad 30x^2 + \ \ 48x \\
 & \qquad\qquad \underline{30x^2 + 150x + 180} \\
 & \qquad\qquad\qquad - 102x - 180
\end{array}
$$

Es gilt also: $f(x) = x^2 - 8x + 30 + \dfrac{-102x - 180}{x^2 + 5x + 6}$.

$f(x)$ verhält sich für $x \to \pm\infty$ wie die Parabel $y = x^2 - 8x + 30$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

Nullstellen des Nenners:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 1 : \qquad 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

Polynomdivision: $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad - \; x^2 - 5x \\
\quad - \; \underline{x^2 + x} \\
\qquad\qquad - 6x + 6 \\
\qquad\qquad - \underline{6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^2 - x - 6 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_2 = -2, \qquad x_3 = 3$

Der Definitionsbereich: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\}$.

Nullstellen des Zählers:

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1.$

Nullstelle von f: $x = 0$.

Polstellen von f: $x = -2, x = 3$.

Untersuchung der Stelle $x = 1$:

$f(x) = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x^2-x-6)} = \dfrac{x}{x^2-x-6}$

und der Nenner ist nicht Null für $x = 1$, also ist es eine hebbare Definitionslücke.

Stetige Fortsetzung: $f(1) = \dfrac{1}{1-1-6} = -\dfrac{1}{6}$.

Verhalten für $x \to \pm\infty : f(x) \to 0$.

$y = 0$ ist eine waagerechte Asymptote.

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$

$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$.

Es gibt keine Polstellen und keine hebbaren Definitionslücken.

Nullstellen:

$x^3 - 4x = 0$

$x(x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x_2 = 2, \qquad x_3 = -2$

Verhalten für $x \to \pm\infty$:

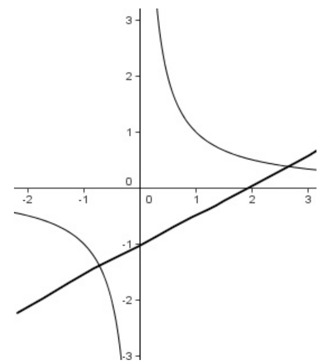
$$\begin{array}{l} \text{Polynomdivision: } (x^3 + 0x^2 - 4x + 0) : (x^2 + 0x + 1) = x \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{x^3 + 0x^2 + \ \ x} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 5x \end{array}$$

Es gilt also: $f(x) = x - \dfrac{5x}{x^2+1}$.

$y = x$ ist eine schiefe Asymptote.

Aufgabe 40. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{x}$ und der Geraden mit der Gleichung $y = \dfrac{1}{2}x - 1$. Skizzieren Sie zuerst die Schaubilder.

Lösung:



$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x - 1 \qquad \Big| \cdot 2x \neq 0$$

$2 = x^2 - 2x$

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \qquad y_1 = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}) - 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2 = 1 - \sqrt{3}, \qquad y_2 = \dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}) - 1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Die Schnittpunkte sind $\left(1+\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $\left(1-\sqrt{3}, -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Aufgabe 41. Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$, kann in der Form $f(x) = e^{kx}$ dargestellt werden. Geben Sie die Formel für k an.

Lösung:

$f(x) = a^x, \qquad a > 0$

$a = e^{\ln a} \quad \Rightarrow \quad f(x) = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$

$\Rightarrow k = \ln a$

Aufgabe 42. Das Abkühlen eines Glühweins auf dem Weinachtsmarkt kann durch eine Funktion der Form

$$f(t) = c \cdot a^t$$

beschrieben werden, wobei t die Zeit und $f(t)$ die Temperatur zur Zeit t darstellt. Der frisch ausgeschenkte Glühwein hat eine Temperatur von 80°C. Nach 3 Minuten ist die Temperatur des Glühweins 40°C.

a) Berechnen Sie die Konstanten a und c für diesen Vorgang.

b) Welche Temperatur hat der Glühwein nach 9 Minuten?

c) Nach wie vielen Minuten hat der Glühwein die Temperatur von 25°C?

d) Welche Temperatur herrschte an diesem Wintertag?

Lösung:

a) $f(0) = c \cdot a^0 = c = 80 \;\Rightarrow\; c = 80$

$$f(3) = c \cdot a^3 = 80a^3 = 40 \;\Rightarrow\; a^3 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\Rightarrow f(t) = 80 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^t = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

b) $f(9) = 80 \cdot 2^{-\frac{9}{3}} = 80 \cdot 2^{-3} = \dfrac{80}{8} = 10°\mathrm{C}$

c) $f(t) = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} = 25$

$$2^{-\frac{t}{3}} = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$$

$$-\frac{t}{3} = \log_2\left(\frac{5}{16}\right)$$

$$t = -3 \cdot \log_2\left(\frac{5}{16}\right) \approx 5 \text{ min}$$

d) Außentemperatur: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 80 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} = 0°\mathrm{C}$.

Aufgabe 43. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich sowie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e$

b) $f(x) = \ln x\,(\ln x - 3)$

c) $f(x) = \ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3$

Lösung:

a) $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e$

<u>Definitionsbereich:</u>

$$\begin{array}{rcl} 1-x & > & 0 \\ x & < & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} \ln(1-x) & \geq & 0 \\ 1-x & \geq & 1 \\ -x & \geq & 0 \\ x & \leq & 0 \end{array}$$

$D = (-\infty, 0]$

<u>Nullstellen:</u>

$f(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e = 0$

$\sqrt{\ln(1-x)} = e$

$\ln(1-x) = e^2$

$1 - x = e^{e^2}$

$x = 1 - e^{e^2} \in D$

Die Nullstelle ist $x = 1 - e^{e^2}$.

b) $f(x) = \ln x\,(\ln x - 3)$

Definitionsbereich: $D = (0, +\infty)$.

<u>Nullstellen:</u>

$\ln x \cdot (\ln x - 3) = 0$

$$\begin{array}{l} \ln x = 0 \\ \text{keine Lösung} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \ln x - 3 & = & 0 \\ \ln x & = & 3 \\ x & = & e^3 \end{array}$$

Die Nullstelle ist $x = e^3$.

c) $f(x) = \ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3$

<u>Definitionsbereich:</u>

$5x^2 > 0$ und $\sqrt{x} > 0$ und $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad D = (0, +\infty)$

<u>Nullstellen:</u>

$\ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3 = 0$

$\ln(5x^2) - \ln(x^2) - 3 = 0$

$\ln\left(\frac{5x^2}{x^2}\right) = 3$

$\ln 5 = 3$

Die Gleichung hat keine Lösung. f hat also keine Nullstellen.

Aufgabe 44. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \tan(2x)$

Lösung:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$\frac{1}{2}x^2 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ es genügt, nur $k \geq 0$ zu betrachten.

$x^2 = 2\pi k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$x = \sqrt{2\pi k}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) = \tan(2x)$

$2x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{2}\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 45. Bestimmen Sie die Gleichung der allgemeinen Sinusfunktion

$$f(\varphi) = A\sin(B(\varphi - \varphi_0)) + C,$$

welche

a) die Periode $p = 2\pi$ hat, den maximalen Wert 3 bei $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ annimmt und für die gilt $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

b) die Periode $p = 1$ hat, den maximalen Wert 2 bei $\varphi = 0{,}45$ annimmt und fur die gilt $f(0{,}7) = -1$.

Lösung:

a) $p = 2\pi \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{2\pi}{p} = 1$

Der maximale Wert wird bei $\varphi - \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ angenommen.

$\Rightarrow \quad \dfrac{3\pi}{4} - \varphi_0 = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = \dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow f(\varphi) = A \sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) + C$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad A \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) + C = C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad A \sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4}\right) = A \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = 3$

Endergebnis: $f(\varphi) = 3 \sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) $p = 1 \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{2\pi}{p} = 2\pi$

$f(\varphi) = A \sin\left(2\pi(\varphi - \varphi_0)\right) + C$

Der maximale Wert wird bei $2\pi(\varphi - \varphi_0) = \dfrac{\pi}{2}$ angenommen.

$\Rightarrow \quad 2\pi(0{,}45 - \varphi_0) = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 0{,}45 - \varphi_0 = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = 0{,}2$

$f(0{,}45) = A \sin\left(2\pi(0{,}45 - 0{,}2)\right) + C = A \sin\left(0{,}5\pi\right) + C = A + C = 2$

$f(0{,}7) = A \sin\left(2\pi(0{,}7 - 0{,}2)\right) + C = A \sin \pi + C = C = -1$

$\Rightarrow \quad C = -1, \quad A = 3$

Endergebnis: $f(\varphi) = 3 \sin\left(2\pi(\varphi - 0{,}2)\right) - 1$.

Aufgabe 46. Bestimmen Sie die Achsenabschnittform folgender Geraden:

a) $3x - 5y + 15 = 0$

b) $-3x + y = -2$

Lösung:

a) $3x - 5y + 15 = 0$

$x = 0: \quad -5y + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0, 3)$.

$y = 0: \quad 3x + 15 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $(-5, 0)$.

Die Achsenabschnittsform lautet $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{3} = 1$.

b) $-3x + y = -2$

$x = 0: \quad y = -2$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $(0, -2)$.

$y = 0: \quad -3x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{2}{3}$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Die Achsenabschnittsform lautet $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{y}{2} = 1$.

Aufgabe 47. Bestimmen Sie den Typ folgender Quadriken:

a) $2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - \dfrac{105}{2} = 0$

b) $3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$

c) $16x^2 + y^2 - 96x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

e) $x^2 - 4 = 0$

Lösung:

a) $2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - \dfrac{105}{2} = 0$

$$2(x^2 + 8x) - 2(y^2 - 5y) - \frac{105}{2} = 0$$

$$2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16) - 2\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) - \frac{105}{2} = 0$$

$$2(x+4)^2 - 32 - 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} - \frac{105}{2} = 0$$

$$2(x+4)^2 - 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - 72 = 0$$

$$(x+4)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 36$$

$$\frac{(x+4)^2}{6^2} - \frac{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{6^2} = 1$$

Das ist eine Hyperbel.

b) $3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$

$$3(x^2 + 8x) + 15y + 138 = 0$$

$$3(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 16 - 16) + 15y + 138 = 0$$

$$3(x+4)^2 - 48 + 15y + 138 = 0$$

$3(x+4)^2 + 15y + 90 = 0$

$3(x+4)^2 + 15(y+6) = 0$

$y + 6 = -\frac{1}{5}(x+4)^2$

Das ist eine Parabel.

c) $16x^2 + y^2 - 96x = 0$

$16(x^2 - 6x) + y^2 = 0$

$16(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9) + y^2 = 0$

$16(x-3)^2 - 144 + y^2 = 0$

$16(x-3)^2 + y^2 = 12^2$

$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$

Das ist eine Ellipse um den Punkt $(3, 0)$ mit den Halbachsenlängen 3 und 12.

d) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 4 - 4 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 16 - 16 - 5 = 0$

$(x+2)^2 + (y-4)^2 - 25 = 0$

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5^2$

Das ist der Kreis mit dem Mittelpunkt $(-2, 4)$ und dem Radius 5.

e) $x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

Das sind zwei parallele Geraden $x = -2$ und $x = 2$.