

Vorkurs Mathematik (Mathematisches Denken)

Wintersemester 2019/2020

Schriftliche Hausaufgabe

Abgabe am Montag, den 9.9 in der Übungsgruppe

Aufgabe 1. Seien A , B und C drei Mengen. Beweisen Sie:

- a) $\overline{(A \cup B)} \cup B = B$
- b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Aufgabe 2. Seien p , q und r drei Aussagen. Beweisen Sie:

- a) $(\neg p \wedge (q \vee p)) \wedge r = (q \wedge r) \wedge \neg p$
- b) Die Aussage $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ ist eine Tautologie.

Aufgabe 3. Negieren Sie folgende Aussagen:

- a) $x > 7$ und $x \leq 14$
- b) Im Kühlschrank liegen drei oder vier Eier.
- c) Wenn es schneit, dann sind die Dächer weiß.
- d) Wenn es nicht kalt ist, dann kann man im See baden.
- e) $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists b \in \mathbb{Z} : a + b = 0$
- f) $\exists a \in \mathbb{R} : \forall b \in \mathbb{R} : ab = b$

Geben Sie für die Aussagen in c) und d) auch die Kontraposition an.

Aufgabe 4. a) Beweisen Sie direkt: Für alle $a, b \geq 0$ gilt: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

- b) Beweisen Sie durch Kontraposition: Wenn die Summe dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gerade ist, dann ist die kleinste der drei Zahlen ungerade.

Aufgabe 5. Beweisen Sie folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$