JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Justus-Liebig-Universität Gießen
Institut für Theoretische Physik
Heinrich Buff Ring 16
35390 Gießen

Vakuum Fluktuationen und der chirale Phasenübergang

Vacuum fluctuations and the chiral phase transition

Bachelorthesis

vorgelegt von

Julian Mathias Metzger

November 2013

Betreuer: PD Dr. Bernd-Jochen Schaefer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eines der heutigen großen Forschungsgebiete beschäftigt sich mit der starken Wechselwirkung der Materie unter extremen Bedingungen. Die dem zugrunde liegende Quantenfeldtheorie ist die Quantenchromodynamik (QCD). Diese beschreibt die Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen als Elementarteilchen.
Bei geringen Dichten und niedrigen Temperaturen liegen Quarks und Gluonen in Form von Hadronen vor. Mehrere Quarks bilden zusammen eine stabile Überstruktur, die als Hadron bezeichnet wird. Bei steigender Temperatur werden die Bindungen der Quarks untereinander zunehmend schwächer. Bei hohen Temperaturen und Dichten bildet sich schließlich ein Quark-Gluon-Plasma, sodass den Quarks keine feste Bindung mehr zugeordnet werden kann.
Es stellt sich demzufolge die Frage, wie dieser Vorgang abläuft und ab welchen äußeren Einflüssen er eintritt. Dies ist eine der Grundfragen der QCD. Die Fragen, die sich hier stellen, sind thermodynamischer Natur; es wird vor allem das QCD-Phasendiagramm gesucht, um die Struktur des Phasenübergangs tiefer zu verstehen. Sofern diese Übergänge bekannt sind, lässt dies Rückschlüsse auf die tatsächliche Wechselwirkung der Quarks zu.
Das Konzept der chiralen Symmetrie, welches später genauer erläutert wird, erlaubt es, den Phasenübergang theoretisch zu beschreiben, ohne den vollen Formalismus der QCD benutzen zu müssen. In dem hier verwendeten Modell werden die gluonischen Freiheitsgrade nicht explizit berücksichtigt, sondern nur näherungsweise betrachtet. Die chirale Symmetrie gibt den Phasenübergang in der Form wieder, dass sie im hadronischen Bereich gebrochen ist, aber im Quark-Gluon Plasma wiederhergestellt wird.
Im Laufe der Herleitung des Potentials der Thermodynamik stößt man dabei auf einen divergenten Vakuumfluktuationsterm. Eine der beiden Näherungen, die in dieser Thesis verwendet wird, berücksichtigt diesen Term in einer regularisierten Form, die andere Näherung nicht. Im direkten Vergleich beider Approximationen ergibt sich die Möglichkeit, den Einfluß der Vakuumfluktuationen festzustellen.
Im Rahmen dieser Arbeit soll das Phasendiagramm der beiden Näherungen für den Fall von realistischen Massen der Hadronen, in unserem Fall der Pionen als leichteste Hadronen und für masselose Hadronen untersucht werden. Dies ermöglicht auch die Betrachtung von thermodynamischen Observablen, wie z.B dem Druck, sowie das Verhalten der Massen der einzelnen beteiligten Hadronen.

1.1 Quantenchromodynamik-Lösungsmethoden

Die Lösung der Quantenchromodynamik benötigt spezielle Ansätze. Im Folgenden wird kurz erläutert, wieso die Störungstheorie als Methode nicht in Frage kommt.
In der Störungstheorie wird meistens die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung als Entwicklungsparameter benutzt. Diese ist allerdings nicht konstant, sondern abhängig von der Energie. Bei niedrigen Energien ist die Kopplungskonstante sehr groß, sodass

die Störungstheorie dort nicht verwendet werden kann. Als Grenzwert für eine störungstheoretische Betrachtung werden Energien über 1GeV angesetzt [4]. Die Temperaturen, die in dieser Thesis auftreten, reichen also nicht aus, um diesen Vorgang mithilfe der Störungstheorie zu beschreiben, denn die Temperaturen liegen für den Phasenübergang unter $T = 200\text{MeV}$.
Es ist also ein nicht störungstheoretisches Verfahren erforderlich. Eine andere Möglichkeit besteht darin, Modelle aufzustellen, die bestimmte Einschränkungen und Näherungen beinhalten. Diese Modelle müssen dann auf ihre Tauglichkeit überfprüft werden. Das in dieser Thesis verwendete Modell ist das chirale Quark-Meson-Modell, welches im nächsten Kapitel erläutert wird.

1.2 Chirale Symmetrie

Ein grundlegende Symmetrie, auf dem diese Thesis aufbaut, ist die chirale Symmetrie und deren spontane sowie explizite Brechung. Dazu wird der fermionische zwei Flavour Lagrangian der QCD betrachtet:

$$\mathcal{L} = \bar{u} i \not{D} u + \bar{d} i \not{D} d - m_u \bar{u} u - m_d \bar{u} u \tag{1.1}$$

Die Massen der Up- und Down-Quarks sind sehr leicht und können deshalb vernachlässigt werden. Dieser Lagrangian weist dann eine Flavour-Symmetrie bzw. die chirale Symmetrie auf. Der Lagragian ist invariant unter unitären Transformationen mit 2 Parametern für rechts- und linkshändige Quarks:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \to U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \to U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \tag{1.2}$$

Es ergibt sich die chirale Symmetrie als $SU(2)_L \times SU(2)_R$ in der Näherung vernachlässigbarer Quarkmassen. Allerdings stellt sich heraus, dass diese Symmetrie für den zwei Flavour Lagragian im Vakuum spontan gebrochen ist. Dies bedeutet, dass im Vakuum der Grundzustand unter den Symmetrietransformationen nicht invariant ist. Es gilt demnach:

$$U|0\rangle \neq |0\rangle \tag{1.3}$$

Dadurch lassen sich auch die weiteren Zustände nicht mehr durch unitäre Transformationen untereinander abbilden. Für zwei Zustände A und B gilt dann [2]:

$$U|A\rangle \neq |B\rangle \Rightarrow E_a \neq E_b \tag{1.4}$$

Als Konsequenz sind die Eigenfunktionen nicht mehr entartet, sondern besitzen unterschiedliche Eigenwerte. Dies hat zur Folge, dass es nicht etwa einen Grundzustand bzw. Singulett-Term gibt, sondern den vollen Satz an Singulett- und Triplett-Termen der Flavour-Kopplung mit jeweils unterschiedlichen Eigenwerten.
Im Falle einer spontanen Brechung der Symmetrie sind masselose Goldstone-Bosonen zu erwarten [1, 2]; sie treten nur in Systemen mit spontaner Symmetriebrechung auf. Diese Bosonen entsprechen den drei Kombinationen des Tripplett-Zustandes.
Zur theoretischen Beschreibung dieser Tatsache wird im Folgenden ein Modell dargestellt, welches die Symmetrie im Grundzustand bricht. Am Ende der Thesis wird schließlich ersichtlich, dass die chirale Symmetrie sich bei hohen Temeraturen und/oder Dichten wieder herstellen kann.

2 Chirales Quark-Meson Modell

In dieser Thesis wird das chirale Quark-Meson-Modell verwendet. Zuerst werden einige einschränkende Annahmen vorgenommen, mit denen dieses Modell arbeitet. Zur Betrachtung stehen hierbei die Thermodynamik und das Phasendiagramm der QCD bei niedrigen Temperaturen und Dichten, wobei die Dichten in engem Zusammenhang mit dem chemischem Potential stehen. Demzufolge treten Quarks und Gluonen zu Beginn nicht als freie Teilchen auf, sondern befinden sich in Hadronen gebunden. Erst bei steigender Temperatur lösen sich die Bindungen auf und es entsteht ein Quark-Gluon-Plasma. Da allerdings das Hauptaugenmerk auf diesem Übergang liegt, sind die Gluonen-Felder nicht die ausschlaggebenden Freiheitsgrade.
Es wird folgerichtig ein Modell benötigt, das dies berücksichtigt: das Quark-Meson-Modell. Bei diesem Modell sind die Quarks und Mesonen die effektiven Freiheitsgrade. Das QM-Modell ist eine Variation des linearen Sigma Modells [7], welches ursprünglich von Gell-Mann und Lévy zur Beschreibung der Wechselwirkung von Nukleonen und Mesonen benutzt wurde. Im QM-Modell werden die Nukleonen durch die Quarks ersetzt.

Die niedrige Temperatur führt weiterhin dazu, dass schwere Quarks keine große Rolle spielen, da die Näherung verschwindender Quark-Massen nicht mehr zutreffend ist. Folglich liegt hier keine chirale Symmetrie vor. Dies gilt vor allem für die Charm-, Bottom- und Top-Quarks, deren Massen um mehr als 3 Größenordnungen größer als die der Up- und Down-Quarks sind. In dieser Thesis wird auch das Strange-Quark ignoriert; dessen Masse ist allerdings nur um 2 Größenordnungen größer und wird deswegen auch in manchen QM-Modellen berücksichtigt [9]. Es würde dann eine chirale Symmetrie mit drei Parametern existieren, die $SU(3)_L \times SU(3)_R$-Symmetrie.
Das Quark-Meson-Modell ignoriert die gluonischen Wechselwirkungen. Allerdings wird die Wechselwirkung zwischen den Quark- und Mesonenfeldern über eine sogenannte Yukawa-Kopplung berücksichtigt. Diese Kopplung führt dazu, dass es einen Term gibt, den man als Masse der Fermionen bzw. im vorliegenden Fall als Masse der Quarks interpretieren kann. Der Lagragian für das chirale Quark-Meson Modell der Up- und Down-Quarks ergibt sich zu:

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - h(\sigma + i\vec{r} \cdot \vec{\pi}\gamma_5))\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi^2) \tag{2.1}$$

Hierbei steht ψ für das Quark-Feld. Der erste Term beschreibt die kinetische Energie der Quarks, der zweite Term ist die Yukawa-Kopplung zwischen dem Quarkfeld und den skalaren Sigma-Mesonen und den pseudoskalaren Pionen. Dieser Term stellt also die Quarkmasse dar. Die Sigma-Mesonen werden als skalare Teilchen interpretiert, da der Lagragian direkt proportional zu $h\bar{\psi}\sigma\psi$ ist. Damit besitzen sie positive Parität. Die Pionen hingegen werden als pseudoskalare Teilchen bezeichnet, weil der Lagrangian proportional zu $ih\bar{\psi}\vec{\tau}\vec{\pi}\psi$ist. Somit besitzen diese Teilchen eine ungerade Parität. Der dritte Term steht für die kinetische Energie der Mesonen und der letzte Term ist das mesonische Potential.

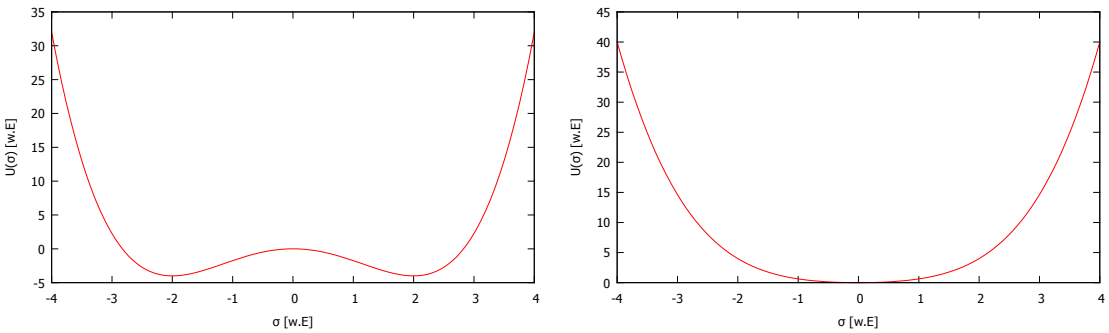
Aufgrund des Quark-Flavours $N_f = 2$ ergeben sich in diesem Modell $N_f^2 = 4$ mesonische Freiheitsgrade. Diese werden durch das Meson-Feld $\phi := (\sigma, \vec{\pi})$ dargestellt. Hierbei wird der Triplett-Term durch die drei verschiedenen Pionen $\vec{\pi} = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$ dargestellt, während der Singulett-Term das skalare Sigma-Meson ist.
Der Lagragian ist in dieser Form unter den chiralen Symmetrietransformationen invariant. Das mesonische Potential wird dementsprechend so konstruiert, dass explizite und spontane Symmetriebrechung im Grundzustand vorliegt. Dies führt zu folgendem Potential:

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \phi_0^2)^2 - c\sigma \tag{2.2}$$

Zur besseren Nachvollziehbarkeit des Vorliegens einer spontanen Brechung der Symmetrie wird das Potential in eine Form gebracht, bei der die Parameter σ und $\vec{\pi}$ nach Potenzen geordnet sind:

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - \frac{\lambda\phi_0^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \phi_0^4 - c\sigma \tag{2.3}$$

Der konstante Term kann durch Verschiebung des Potentials eliminiert werden bzw. ist unerheblich. Zu betrachten ist, wie die Wahl der Parameter die Symmetrie beeinflusst. Das Potential wird betrachtet für $\vec{\pi} = 0$. Diese Wahl wird im nächsten Kapitel genauer erläutert.



(a) $\lambda\phi_0^2 > 0$ (b) $\lambda\phi_0^2 < 0$

Abbildung 2.1: Mesonisches Potential in Abhängigkeit von $\lambda\phi_0^2$ und $c = 0$

Von Bedeutung ist in diesem Fall die Lage des Minimums. Für den Grundzustand $|0\rangle$ lässt sich der Erwartungswert des σ-Feldes beschreiben durch:

$$\langle 0|\sigma|0\rangle = \nu \tag{2.4}$$

In der Abbildung 2.1 ist ersichtlich, dass es für den Fall (a) zwei Minima gibt, in denen sich das System im Grundzustand befinden kann. Der Erwartungswert von Sigma im Grundzustand ist also $\nu = \pm\phi_0$. Damit ergibt sich für beide Wahlen als Grundzustand eine Brechung der Spiegelsymmetrie für $\sigma \to -\sigma$. Folglich ist der Grundzustand nicht invariant unter der unitären Transformation, sodass der Fall (a) der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie entspricht.
Im Fall (b) liegt das Minimum bei $\nu = 0$. In dieser Konstellation ist der Grundzustand bzw. die Lage des Minimums folglich invariant unter unitären Transformationen. Da auch

der Lagragian invariant ist, ergibt sich in diesem Fall die Erhaltung der chiralen Symmetrie.
Das Auftreten der spontanen Brechung der Symmetrie ist demnach von dem Parameter $\lambda\phi_0^2$ abhängig.
Die Betrachtung des Potentials in σ-Richtung und einer der drei Pion-Richtungen erlaubt weitere Erkenntnisse. Im Falle der spontanen Symmetriebrechung besitzt das Potential für alle Kombinationen von Parametern aus σ und $\vec{\pi}$ mit dem radialen Abstand von $r^2 = \sigma^2 + \vec{\pi}^2$ den gleichen Funktionswert. Das Minimum sei wieder durch den Wert $\nu = \phi_0$ festgelegt.
Allerdings liegen nun alle Minima auf einem Kreis mit Radius $r = \sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2} = \nu = \phi_0$ (Abb. 2.2).

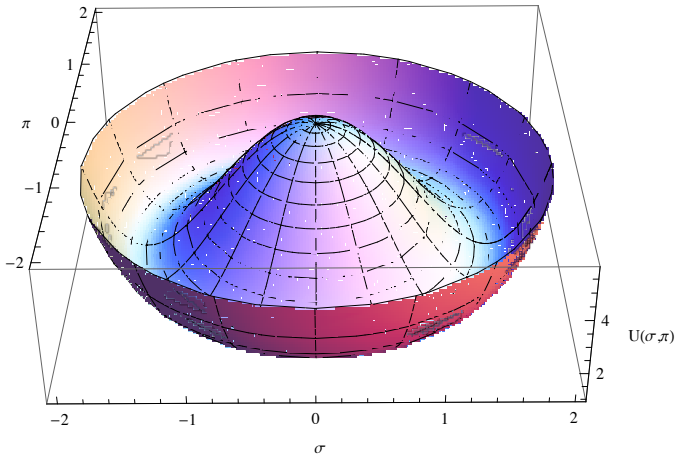


Abbildung 2.2: Darstellung des Potentials für die σ-Richtung und eine der 3 Pion-Richtungen

Wählt man nun wieder das Minimum an der Stelle $\sigma = \nu$, so folgt daraus $\vec{\pi} = 0$. In diesem Punkt entspricht nun also eine infinitesimale Änderung von Sigma einer Änderung des Potentials, da die Änderung in radialer Richtung erfolgt. Im Gegensatz dazu gilt für eine infinitesimale Änderung in Richtung der Pionen-Felder keine Änderung des Potentials, da diese Änderungen senkrecht zur radialen Richtung erfolgen. Die Pionen besitzen in diesem Fall also keine Masse, da eine Bewegung in dieser Richtung keine Energie erfordert. Demzufolge handelt es sich hier um masselose Goldstone-Bosonen.

Verdeutlicht wird dies durch die Betrachtung kleiner Oszillationen um das Minimum mit $\sigma' = \sigma - \nu$. Es ergibt sich dann für das verschobene σ-Feld das mesonische Potential:

$$U(\sigma') = \lambda\phi_0^2\sigma'^2 - \lambda\nu\sigma'(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4}(\sigma'^2 + \vec{\pi}^2)^2 \tag{2.5}$$

Analog zu dem quantenmechanischen, harmonischen Osziallator kann nun der Term vor dem quadratischen Feld als Masse interpretiert werden, sodass die Sigma-Mesonen die Masse $m_\sigma = (2\lambda\phi_0^2)^{\frac{1}{2}}$ besitzen. Für die Pionen führt die Oszillation um die Ruhelage Null allerdings zu einem unveränderten Potential, sodass die Masse hier als Null interpretiert

werden kann (masselose Goldstone-Bosonen).
Der zweite Fall der chiralen Symmetriebrechung wird durch den Parameter c verursacht. Ist dieser größer als Null, ist die chirale Symmetrie explizit gebrochen. Denn es gilt dann für axiale infinitesimale SU(2) Transformationen um $\vec{\beta}$:

$$\sigma \to \sigma' = \sigma + \vec{\beta}\vec{\pi};\ \vec{\pi} \to \vec{\pi}' = \vec{\pi} - \vec{\beta}\sigma \tag{2.6}$$

Angewendet auf das Mesonische Potential folgt $U(\sigma, \vec{\pi}) \neq U(\sigma', \vec{\pi}')$, denn der lineare Term liefert ein $\vec{\beta}\vec{\pi}c$ im transformierten System, der im ursprünglichen System nicht existiert.

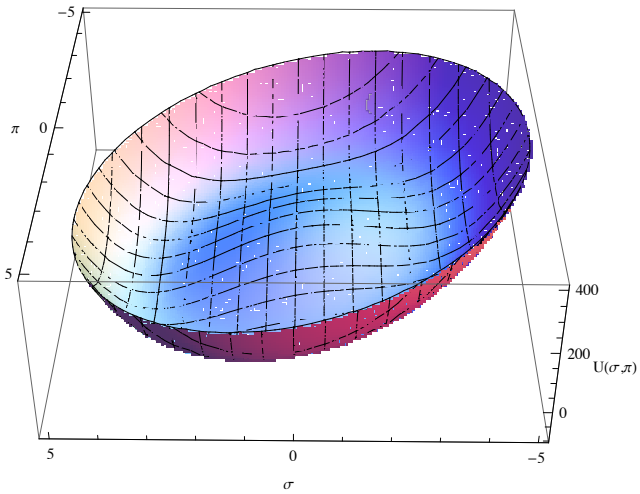


Abbildung 2.3: Mesonisches Potential für explizite Symmetriebrechung ($c > 0$) in Sigma-Richtung und eine der drei Pion-Richtungen

Betrachtet man nun wieder das Minimum bei $\sigma = \nu$ und $\vec{\pi} = 0$, so sieht man anhand der Abbildung 2.3, dass sowohl Oszillationen in der Pion-Richtung als auch Oszillationen in der Sigma-Richtung gegen das Potential gerichtet sind und somit Arbeit verursachen. Hier ist das Potential in beiden Richtungen in erster Näherung dem eines harmonischen Oszillators äquivalent. Dies ist gut zu erkennen an den Linien der Ebene, die jetzt auch in Richtung der Pion-Felder eine Krümmung aufweisen.
Betrachtet man hier wieder kleine Osziallationen um die Ruhelage, so ist festzustellen, dass in beiden Richtungen das Potential einen Term proportional zum Quadrat des Feldes mit einem positiven Vorzeichen bekommt. Diese Terme werden wieder als die Massen interpretiert.
Als Ergebnis bleibt festzuhalten, dass bei expliziter Brechung der chiralen Symmetrie keine Goldstone-Bosonen mehr vorliegen, sondern die Pionen zu Teilchen mit realer Masse werden. Dieser Fall ist also am realistischsten für weitere Berechnungen, da die Masse der drei Pionen bei ca. 138MeV liegt (Mittelwert).

3 Mean-Field Approximationen

In dem vorherigen Kapitel wurde das Quark-Meson-Modell eingeführt. In diesem Kapitel wird das Großkanonische Potential für das QM-Modell abgeleitet. Diese Vorgehensweie wird zu den beiden Näherungen führen, die im weiteren Verlauf miteinander verglichen und auf ihre jeweilige Plausibilität geprüft werden. Ausgangspunkt ist der Lagragian des QM-Modells. Dabei ist $U(\phi^2) = U(\sigma^2, \vec{\pi}^2)$:

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - h(\sigma + i\vec{r} \cdot \vec{\pi}\gamma_5))\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi^2) \tag{3.1}$$

Eine Vereinfachungsmöglichkeit, die für einige physikalische Probleme ausreichend ist, besteht darin, die mesonischen Fluktuationen um den Erwartungswert zu vernachlässigen. Durch diese Näherungen gehen die mesonischen Felder in die Erwartungswerte des jeweiligen Feldes über. Diese Näherung wird als Mean-Field-Näherung bezeichnet. Man wählt also für die mesonischen Felder:

$$\vec{\pi} \to \langle \vec{\pi} \rangle, \sigma \to \langle \sigma \rangle \tag{3.2}$$

Die Sigma-Mesonen sind skalare Teilchen mit positiver Parität ($J^P = 0^+$), deshalb ist der Erwartungswert ungleich Null. Die Pionen als pseudoskalare Teilchen besitzen negative Parität ($J^P = 0^-$), weshalb der Erwartungswert verschwindet. Es gilt also $\langle \vec{\pi} \rangle = 0$.
Aufgrund dieses Übergangs vereinfacht sich der Lagragian, weil die kinetischen Terme $\partial_\mu \phi$ verschwinden. Denn die Felder sind konstant, sodass die Ableitungen nach den Komponenten der Felder verschwinden. Im Folgenden werden die Erwartungswertklammern zugunsten der Übersichtlichkeit weggelassen und für den Erwartungswert nur noch σ geschrieben.
Es handelt sich bei dem System um ein nicht abgeschlossenes System; Energieaustausch ist also möglich. In der QCD können zudem Teilchen vernichtet und erzeugt werden; es ist Teilchenaustausch möglich. Für solche thermodynamischen Systeme wird das Großkanonische Potential verwendet. Der Lagragian muss also modifiziert werden, um die Wirkung des chemischen Potentials μ zu berücksichtigen. Dies führt zu:

$$\mathcal{L}_{MF} = \mathcal{L}_{QM} + \mu n \tag{3.3}$$

Hierbei steht n für die Teilchendichte. In der Quantenfeldtheorie ist die Teilchendichte als $\psi^+\psi$ definiert.

$$\mu n = \mu \psi^+ \psi = \mu \bar{\psi} \gamma_0 \psi \tag{3.4}$$

Damit ergibt sich mit der Kurzschreibweise $D\!\!\!/ := \partial\!\!\!/ + \mu\gamma_0$:

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\psi}(D\!\!\!/ - ih\sigma)\psi + U(\sigma) \tag{3.5}$$

Aus dem Lagrangian ergibt sich nun die Großkanonische Zustandssumme, wobei $S_0^{-1} := \not{D} + ih\sigma$ gesetzt wird:

$$Z_{MF} = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \left\{ -\int_0^\beta d\tau \int_V dx^3((\bar{\psi}S_0^{-1}\psi) + U(\sigma)) \right\} \tag{3.6}$$

Das Mesonische Potential ist nicht von den Integrationsparametern abhängig und kann deshalb trivial ausgeführt werden, sodass dieser Term vor das Integral gezogen werden kann.

$$Z_{MF} = \exp\left(-\beta V U(\sigma)\right) \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\tilde{\psi} \left\{ -\int_0^\beta d\tau \int_V dx^3(\bar{\psi}S_0^{-1}\psi) \right\} \tag{3.7}$$

Dies lässt sich weiter vereinfachen, indem die Identität $\tilde{\mathrm{Tr}}(\ln(S_0^{-1}) = \ln(\det(S_0^{-1}))$ benutzt wird:

$$Z_{MF} = \exp(-\beta V U(\sigma)) \det(S_0^{-1}) = \exp\left(\tilde{\mathrm{Tr}}(\ln S_0^{-1}) - \beta V U(\sigma)\right) \tag{3.8}$$

Das Großkanonische Potential lässt sich aus der Zustandssumme herleiten. Zudem wird im Folgenden eine Potentialdichte betrachtet; das Potential wird also durch das Gesamtvolumen dividiert.

$$\Omega_{MF} = -\frac{\ln Z_{MF}}{\beta V} = -\frac{\mathrm{Tr}(\ln S_0^{-1})}{\beta V} + U(\sigma) \tag{3.9}$$

Durch eine Transformation in den Impulsraum erhält man:

$$\frac{1}{\beta V_3}\tilde{\mathrm{Tr}}(\ln(S_0^{-1}) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}(\ln(S_0^{-1})) \tag{3.10}$$

Nun wird durch den Formalismus der Matsubara Summen die Integration über p^4 durch eine Summation ersetzt; dies wird in Appendix B beschrieben. Dadurch ergibt sich:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Tr}(\ln(S_0^{-1}) \to T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\mathrm{Tr}\ln(S_0^{-1}) \tag{3.11}$$

Die Bildung der Spur über Flavour und Color ist wegen der Entartung diagonal, daraus folgt:

$$\mathrm{Tr}\ln(S_0^{-1}) = N_c N_f\,\mathrm{Tr}_D\ln(S_0^{-1}) \tag{3.12}$$

Die Berechnung der Summation über die Matsubara Frequenzen kann über das Umschreiben zu einem Kontourintegral und mithilfe des Residuensatzes gelöst werden. Dazu wird auf [5, 8] verwiesen. Damit lässt sich der Wechselwirkungsterm des Großkanonischen Potentials aufschreiben:

$$\Omega_{q\bar{q}} = -2TN_fN_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\ln\left(1+e^{-\beta(E_q+\mu)}\right) + \ln\left(1+e^{-\beta(E_q-\mu)}\right)\right] \tag{3.13}$$

Allerdings taucht bei der Summation ein weiterer Term auf, der als fermionischer Vakuum-Term bezeichnet wird [3, 6]:

$$\Omega_{vac} = -2N_f N_c \int d^3p E_q = -2N_f N_c \int d^3p \sqrt{p^2 + h^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)} \tag{3.14}$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht befindet sich das Ensemble in einem stabilen Zustand; es liegt ein globales Minimum vor. Aufgrund dieser Beziehung lässt sich der Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ definieren:

$$\left.\frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\langle\sigma\rangle} = 0 \tag{3.15}$$

Über diese Beziehung kann somit aus dem Großkanonischen Potential der Erwartungswert von σ berechnet werden.

3.1 Parameter des Mesonischen Potentials

Die Parameter des Mesonischen Potentials werden bei $T = 0$ und $\mu = 0$ bestimmt; es verschwindet der Term $\Omega_{q\bar{q}}$. Der Erwartungswert des Sigma-Mesons wird im Grundzustand gleich der Zerfallkonstanten der Pionen gesetzt $\langle\sigma\rangle = f_\pi$. Damit gilt $\langle\vec{\pi}\rangle = 0$.
Die Yukawa Kopplungskonstante wird über die Quarkmasse im Vakuum festgelegt $h = m_q/f_\pi$.
Die weiteren Parameter ergeben sich über die Festlegung der Ruhemassen der Mesonen und Quarks. In diesem Modellsystem werden die Quarkmassen $m_q = 300\text{MeV}$, die Masse des Pions $m_\pi = 138\text{MeV}$ und im chiralen Limes $m_\pi = 0\text{MeV}$ sowie die Masse des skalaren Sigma Mesons $m_\sigma = 650\text{MeV}$ verwendet. Außerdem soll sich das Minimum bei $\sigma = f_\pi$ befinden.
Die letzte Forderung lässt sich durch Gleichung 3.15 realisieren. Es gilt also:

$$\left.\frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = 0 \tag{3.16}$$

Zur Festlegung dieser Massen werden die 2ten Ableitungen des Potentials nach den Feldern betrachtet. Diese Ableitungen, ausgewertet am globalen Minimum des Potentials, ergeben die Massen der Teilchen zum jeweiligen zugehörigen Feld. Zudem ist durch eine positive zweite Ableitung nach σ gewährleistet, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt. Dies wird plausibel unter Betrachtung des mesonischen Potentials. Wie in Kapitel 2 aufgezeigt, entspricht der Term vor den quadratischen Termen der Felder analog zum quantenmechanischen Oszillator einer Masse. Bildet man nun die zweite Ableitung, bleibt als konstanter Term die Masse übrig. Es gilt also:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{MF}}{\partial \sigma^2} = m_\sigma^2 \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_{MF}}{\partial \pi_i^2} = m_\pi^2 \tag{3.18}$$

Mit den Gleichungen (3.16-3.18) sind die Paramter λ, ϕ_0 und c eindeutig bestimmt. Zudem lässt sich nun auch die Yukawa Kopplungskonstante über die Kopplung der Quarkmasse mit $m_q = h \cdot f_\pi$ bestimmen.

3.2 Standard Mean-Field Approximation

In der standard Mean-Field Näherung wird der Vakuumterm ignoriert. Es ergibt sich also für das Großkanonische Potential folgender Ausdruck:

$$\Omega_{sMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + U(\sigma) \tag{3.19}$$

Diese Approximation wird auch als No-Sea-Näherung bezeichnet [3, 6]. Denn in dieser Näherung wird die Wechselwirkung mit den Grundzuständen negativer Energie des Dirac-Sees ignoriert. Es ist also eine Näherung, die den Grundzustand und dessen Wechselwirkungen nicht explizit berücksichtigt.

3.3 Extended Mean-Field Approximation

Die extended Mean-Field-Näherung berücksichtigt den Vakuum Term, damit ergibt sich:

$$\Omega_{eMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + \Omega_{vac} + U(\sigma) \tag{3.20}$$

Dabei handelt es sich bei $\Omega_{q\bar{q}}$ und $U(\sigma)$ um die gleichen Terme wie in der sMFA. Erweitert wird die sMFA um den divergenten Vakuum-Term Ω_{vac}. Dieser Term stellt die Vakuumfluktuation dar. Da der Vakuum-Term divergent ist, muss eine Regularisierung des Terms stattfinden. Diese wird im nächsten Kapitel erläutert.

4 Diskussion des Großkanonischen Potentials

In dem vorigen Kapitel wurde das Großkanonische Potential berechnet. Dieses Integral kann numerisch gut approximiert werden. Die Approximation erfolgt durch eine Gauß-Quadratur (siehe Appendix C). Aus dem Potential lässt sich dann der Erwartungswert von $\langle\sigma\rangle$ über (3.15) bestimmen.
Für die Potentiale der sMFA und auch im relevanten Bereich der eMFA gilt ebenso wie für das mesonische Potential, dass entweder 1 oder 3 Extrema existieren. Grund dafür ist die Symmetrie des von μ und T abhängigen Termes $\Omega_{q\bar{q}}$ und des Vakuum-Terms Ω_{vac}. Diese Terme sind symmetrisch um $\sigma = 0$ und weisen ein Extremum bei $\sigma = 0$ auf:

$$\Omega_{q\bar{q}}(\sigma) = \Omega_{q\bar{q}}(-\sigma),\ \Omega_{vac}(\sigma) = \Omega_{q\bar{q}}(-\sigma) \tag{4.1}$$

Die Funktion $\Omega_{q\bar{q}}$ hat ein globales Minimum bei $\sigma = 0$. Dieses globale Minimum rückt für steigende T- und μ-Werte immer weiter ins Negative, sodass die Superposition mit dem Mesonischen Potential, welches nicht von T und μ abhängt, zu einer Verschiebung hin zu dem Minimum des $\Omega_{q\bar{q}}$-Terms führt.
Das Verhalten des Potentials in der eMFA ist ähnlich, denn auch hier dominiert ab ausreichend hohen Temperaturen der einzige temperaturabhängige Term $\Omega_{q\bar{q}}$, sodass der Übergang zu $\sigma = 0$ auch hier stattfindet.
Allerdings spielt in der eMFA der Vakuum-Term Ω_{vac} eine entscheidende Rolle. Dieser besitzt ein Maximum bei $\sigma = 0$ und steigt mit dem Ultraviolett Cutoff Λ. Dies führt dazu, dass ab einem bestimmten Λ-Wert die Superposition aus $\Omega_{q\bar{q}}$ und dem mesonischen Potential nur noch für neagtive Kopplungen λ des Potentials die Bedingungen aus Kapitel 3.1 erfüllen. Das Potential beschreibt dann für große σ keinen bindenden Zustand mehr. Allerdings liegen diese σ-Werte ausserhalb des relevanten Bereichs, sodass die eMFA trotzdem brauchbare Ergebnisse liefert.

4.1 Ordnungsparameter für den chiralen Phasenübergang

Bei hohen Temperaturen und/oder großen μ-Werten befindet sich das Minimum nahe bei $\sigma = 0$. In diesem Zustand wird die chirale Symmetrie wiederhergestellt, sowohl bei vorheriger expliziter als auch bei spontaner Symmetriebrechung. Ist $\sigma = 0$ und $\vec{\pi} = 0$, beeinflusst das mesonische Potential das System nicht mehr. Der Lagragian befindet sich dann wieder in der Form:

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\psi} \not{D} \psi \tag{4.2}$$

Damit ist der Lagragian invariant unter den chiralen Transformationen; die chirale Symmetrie ist wieder hergestellt. Dies lässt es zu, den Parameter Sigma als Ordnungsparameter zu interpretieren. Im Zustand der Hadronen befindet sich der Ordnungsparameter in der

Nähe von $\sigma = f_\pi$. Steigt die Temperatur, geht der Ordnungsparameter immer weiter gegen Null und kommt in den Bereich, in dem die chirale Symmetrie wieder hergestellt ist. Dieser Zustand entspricht dann dem Quark-Gluon-Plasma.
Auch physikalisch macht diese Interpretation Sinn. Im hadronischen Bereich besitzen die Quarks als lokalisierte Teilchen eine hohe Masse, festgelegt über die Yukawa-Kopplung. Im Vakuum führt dies zu der Quarkmasse von $m_q = h\sigma = 300MeV$. Diese Quarkmasse nimmt bei steigender Temperatur immer weiter ab, da die Teilchen zunehmend ihre Trägheit verlieren. Nach dem Phasenübergang verschwindet dann die Quarkmasse im Modell, da $\sigma \to 0$.

4.2 Bedeutung des ultraviolett Impulscutoffs

Für die eMFA muss ein Cutoff für den divergenten Term Ω_{vac} verwendet werden. Die Fragestellung ist nun, bei welchen Werten des Cutoffs das Modell die richtige Physik wiedergibt. Entscheidend ist dabei die Zustandsdichte bei einer gegebenen Temperatur. Deshalb wird im Folgenden der Einfluss eines Cutoffs auf die sMFA untersucht, um beurteilen zu können, ab welchem Cutoff über den Großteil aller Zustände summiert wird. Als Ergebnis wird eine Funktion des Cutoffs erwartet in der Form $\Lambda = \Lambda(T)$.

Die Zustandsdichte des Impulses mit dem Wert $|\vec{p}| = p$ ist bis auf Vorfaktoren (Entartung etc.) durch den Integranden in (3.13) gegeben. Man erhält also mit $\xi^{(\pm)} = \exp(\pm\beta\mu)$:

$$g^{\pm}(p) = p^2 \log\left(1 + e^{-\beta(E_q \pm \mu)}\right) = p^2 \log\left(1 + \xi^{(\pm)} e^{-\beta E_q}\right) \tag{4.3}$$

Es gilt zudem für jeden Wert von T, dass aus $E_q^1 > E_q^2$ folgt $g_1^{\pm} < g_2^{\pm}$. Daraus ergibt sich: die Zustandsdichte geht für $\sigma > 0$ schneller gegen Null als für $\sigma = 0$. Es genügt also eine Betrachtung für $\sigma = 0$.

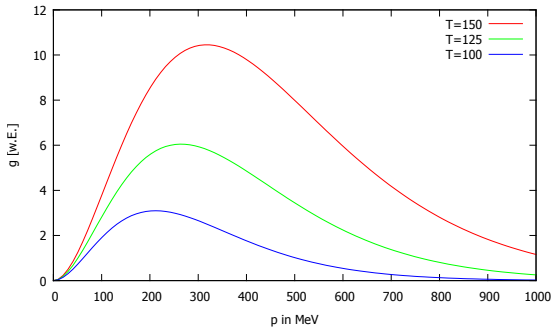


Abbildung 4.1: Zustandsdichte $g^{\pm}(p)$ in Abhängigkeit von der Temperatur T

Es ist in Abbildung 4.1 erkennbar, dass der Cutoff eindeutig temperaturabhängig gewählt werden muss, da sich die Verteilung der Zustände bei höheren Temperaturen auch auf Zustände mit größeren Impulsen verteilt. Zudem ist, wie schon vorher erwähnt, zu sehen, dass der $\Omega_{q\bar{q}}$-Term das gesamte Potential mit steigender Temperatur zunehmend beeinflusst.

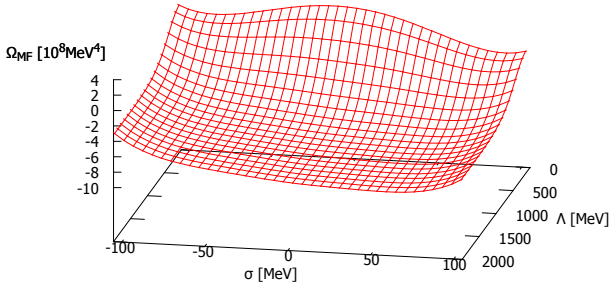


Abbildung 4.2: Das Großkanonische Potential bei $T = 150\text{MeV}$ in Abhängigkeit des Cutoffs Λ

In der Abbildnung 4.2 ist ersichtlich, dass bei geringem Cutoff nur der Verlauf des mesonischen Potentials sichtbar ist. Bei höherem Cutoff steigt die Beeinflussung durch den Term $\Omega_{q\bar{q}}$. Ab einem Cutoff von ungefähr $\Lambda = 1000MeV$ ändert sich das Potential kaum noch. Nachfolgend soll eine Möglichkeit gefunden werden, abzuschätzen, ab wann der Cutoff groß genug ist. Ausgangspunkt ist die Zustandsdichte:

$$g^{\pm}(p) = p^2 \log\left(1 + \xi^{\pm} e^{-\beta\sqrt{p^2+(h\sigma)^2}}\right) \tag{4.4}$$

Wie schon erwähnt, ist es ausreichend, den Fall $\sigma = 0$ zur Abschätzung zu betrachten. Zudem verschwindet der Exponentialterm erst dann, wenn $\Lambda >> T$, ansonsten geht $g^{\pm}(p)$ nicht gegen Null. In diesem Fall kann also der Logarithmus genähert werden mit $\log(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$

$$g^{\pm}(p) = p^2 \xi^{\pm} e^{-\frac{p}{T}} \tag{4.5}$$

Zur Abschätzung des Unterschieds zwischen der Integration bis Unendlich und der Integration bis Λ wird der Quotient gebildet:

$$\frac{\int_0^{\Lambda} g^{\pm}(p)}{\int_0^{\infty} g^{\pm}(p)} = 1 - \frac{e^{-\frac{\Lambda}{T}}(\Lambda^2 + 2\Lambda T + 2T^2)}{2T^2} \tag{4.6}$$

Der negative Term beschreibt hier die Abweichung zwischen den beiden Termen. Verschwindet dieser Term, sind die beiden Integrale gleich; deshalb wird dieser Term gleich 0,01 gesetzt. Als Ergebnis erhält man eine Bedingung für Λ:

$$\Lambda > 8.406 \cdot T \tag{4.7}$$

Dies ist demzufolge die Näherung für die Wahl des Cutoffs für die eMFA. Die Beeinflussung des Potentials sollte sogar noch etwas später einsetzen, da $\sigma \neq 0$. Mit dieser Abschätzung sind nun alle Parameter für die sMFA und die eMFA festgelegt. Da die Untersuchungen im Bereich von T bis ca. 200 MeV erfolgen, wird für alle weiteren Rechnungen $\Lambda = 2500MeV$

gesetzt. Zur Veranschaulichung des Einflusses eines Cutoffs betrachten wir hier den Druck in Abhängigkeit des Cutoffs bei verschiedenen Temperaturen (Abb. 4.3). Es ist erkennbar, dass die Abweichung von der Kurve mit $\Lambda = \infty$ erst nach der Bedingung sichtbar auftritt.

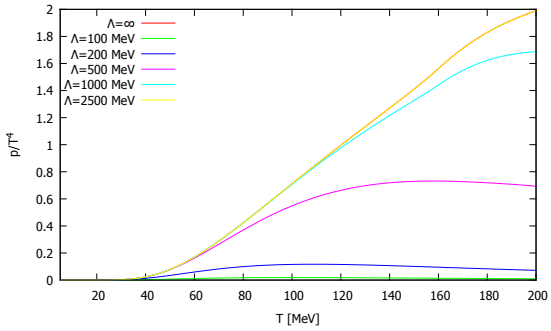


Abbildung 4.3: Der Druck in Abhängigkeit des Cutoffs Λ bei $T = 150$MeV

4.3 Phasenübergang

4.3.1 Verschwindende Dichten

Zur Veranschaulichung und Erläuterung der Aussagen, die zu Anfang des Kapitels gemacht wurden, wird jetzt das Potential für $\mu = 0$ betrachtet; dies entspricht verschwindenden Dichten. Das Großkanonische Potential verändert seine Form bei steigendem T, sodass von den anfänglichen drei Extrema am Ende nur noch, wie erwähnt, jenes in der Nähe von $\sigma = 0$ übrig bleibt.

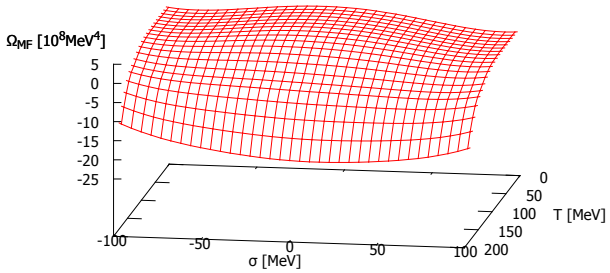


Abbildung 4.4: Das Großkanonische Potential für $\mu = 0$ und in Abhängigkeit von T

Bei niedrigen Temperaturen liegen also im Negativen zwei Extrema und im Positiven 1 Extremum in der Nähe von $\sigma = f_\pi$ vor (Abb. 4.4). Bei steigender Temperatur ist der steigende Einfluss des Quark-Antiquark Terms zu erkennen, der das Potential immer weiter ins Negative rücken lässt. Ab ca. $T = 120MeV$ verschwinden die Extrema im negativen Bereich, während nur noch ein Extremum im positiven Bereich existiert. Dieses wandert nun immer weiter in Richtung $\sigma = 0$. Es ist schon hier ersichtlich, dass die chirale Symmetrie

im Grenzfall hoher Temperaturen wieder hergestellt wird, da die Quarkmasse verschwindet wegen $m_q = h\sigma$.
In dem hier vorliegenden Fall erfolgt ein Phasenübergang, der als Crossover bezeichnet wird, da der Ordnungsparameter ohne Sprung von einem Zustand in den nächsten übergeht. Dies ist, wie in Kapitel 4.4 erläutert wird, jedoch nicht immer der Fall.

4.3.2 Verschwindende Temperaturen

Für niedrige Temperaturen ist das Integral im Großkanonischen Potential analytisch lösbar. Zur Übersichtlichkeit werden die Substitutionen $E_q^{(\pm)} = E_q \pm \mu$ und $A = 2N_f N_c$ eingeführt. Das Potential im Limes $T \to 0$ ergibt sich dann wie folgt:

$$\lim_{T\to 0} \Omega_{q\bar{q}} = -A \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{k_B\beta} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\log\left(1 + e^{-\beta E_q^{(+)}}\right) + \log\left(1 + e^{-\beta E_q^{(-)}}\right)\right) \tag{4.8}$$

Integration und Limes-Bildung sind in diesem Fall vertauschbar, da das Integral nicht divergiert für endliche T. Der Integrand ist nur ungleich Null wenn $e^{-\beta E_q^{\pm}} \neq 0$. Im Limes ist dies nur der Fall, wenn $E_q^{\pm} < 0$, ansonsten ist die Exponentialfunktion im Limes Null. Dieser Fall kann also durch Theta-Funktionen herausgenommen werden. Man erhält:

$$-A \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{k_B\beta} \left(\Theta\left(-E_q^{(+)}\right) \log\left(1 + e^{-\beta E_q^{(+)}}\right) + \Theta\left(-E_q^{(-)}\right) \log\left(1 + e^{-\beta E_q^{(-)}}\right)\right) \tag{4.9}$$

Zu betrachten bleibt noch der Limes im Integranden. Dieser lässt sich mit dem Satz von L'Hospital berechnen ($E_q^{\pm} < 0$):

$$\lim_{\beta\to\infty} \left(\frac{1}{\beta} \log\left(1 + e^{-\beta(E_q^{\pm})}\right)\right) = \lim_{\beta\to\infty} \frac{\log\left(1 + e^{-\beta(E_q^{\pm})}\right)}{\beta} \tag{4.10}$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \frac{E_q^{\pm}}{1 + e^{+\beta(E_q^{\pm})}} \tag{4.11}$$

$$= E_q^{\pm} \tag{4.12}$$

Unter Verwendung dieses Resultats, ergibt sich als Lösung für das Potential mit $T \to 0$:

$$\Omega_{q\bar{q}}(T = 0) = A \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{k_B} \left(\Theta(-E_q - \mu)(E_q + \mu) + \Theta(-E_q + \mu)(E_q - \mu)\right) \tag{4.13}$$

Das Minimum des Großkanonischen Potentials befindet sich für $T = 0$ und $\mu = 0$ bei $\sigma = f_\pi$. Damit ergibt sich für $m_q = h \cdot \sigma = h \cdot f_\pi$ und somit $E_q = \sqrt{p^2 + m_q^2}$. Aufgrund dessen ist der Beitrag des Quark-Antiquark-Terms für positive chemische Potentiale solange Null bis $\mu > E_q$. Erst ab diesem Wert des chemischen Potentials wird das Großkanonische Potential von dem Quark-Antiquark-Term beeinflusst. Da die Integration über p den Term E_q nur vergrößert, kann der Einfluss also erst starten, wenn $\mu > m_q$. Ergo folgt für $m_q = 300$MeV, dass sich der Erwartungswert von σ erst für $\mu > 300$ MeV ändert.

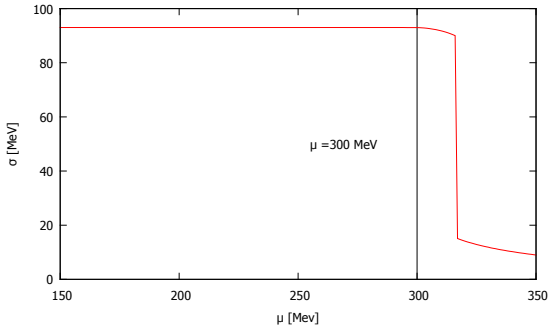
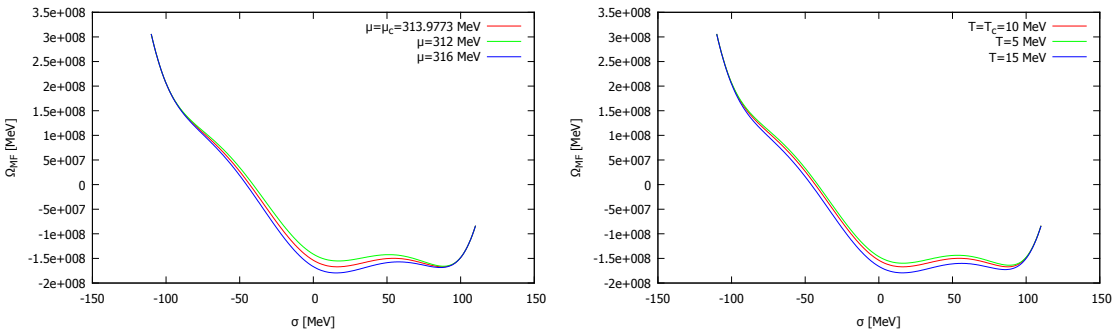


Abbildung 4.5: Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ in Abhängigkeit von μ bei $T = 1\text{MeV}$

In vorstehender Abbildung 4.5 ist entsprechend der Prognose gut zu sehen, dass die Beeinflussung des Potentials durch den Quark-Antiquark-Term erst bei genügend großem μ eintritt.
Dies hat zur Folge, dass auch der Druck im Bereich $\mu < m_q \approx 300\text{MeV}$ nicht von μ abhängig ist. Erst wenn die Bedingung erfüllt ist, ändert sich der Druck.

4.4 Phasenübergänge erster Ordnung

In der sMFA sowie in der eMFA besteht die Möglichkeit, dass für bestimmte Werte von T und μ der Ordnungsparameter σ einen Sprung macht. In diesem Fall liegt ein Phasenübergang erster Ordnung vor. Das Verhalten des Potentials an den beiden Potentialstellen ist unterschiedlich. Das Auftreten soll in diesem Kapitel behandelt werden, die Auswirkung und Werte der Parameter dann in Kapitel 5.



(a) $T = T_c = 10\text{MeV}$ (b) $\mu = \mu_c = 313,98\text{MeV}$

Abbildung 4.6: Großkanonisches Potential in der Nähe einer Sprungstelle

Das Potential (Abb. 4.6) besitzt in der Nähe der Entartung des globalen Minimums drei Extrema im positiven σ-Bereich. Das globale Minimum befindet sich für niedrige μ oder niedrige T nahe dem Anfangswert bei $\sigma = f_\pi$. Ein zweites Minimum, das zu Beginn einen größeren Potentialwert besitzt, befindet sich nahe $\sigma = 0$. Steigt nun die Temperatur oder das chemische Potential, so verschiebt sich das linke Minmum solange nach unten, bis der Potentialwert an dieser Stelle gleich dem Potentialwert des rechten Minimums ist. An

dieser Stelle existieren zwei globale Minima mit exakt dem gleichen Potentialwert. Die Minima sind entartet, da sich das System in beiden Zuständen mit gleichem Potentialwert befinden kann. Steigt nun die Temperatur bzw. das chemische Potential weiter, wird das linke Minimum zum globalen Minimum, da aber die Minima nicht direkt nebeneinander liegen, macht nun der Ordnungsparamter σ einen Sprung. An diesem Punkt findet der Phasenübergang erster Ordnung statt. Danach geht σ langsam gegen 0.
Demzufolge tritt dieser Vorgang dann auf, wenn es 3 Extrema im positiven σ-Bereich gibt. Im folgenden Kapitel wird nun untersucht, wann genau der Phasenübergang erster Ordnung erfolgt und wieso es sich hierbei um einen Phasenübergang erster Ordnung handelt.

5 Thermodynamik

In diesem Kapitel werden die in den vorherigen Kapiteln behandelten Eigenschaften des Potentials auf messbare Observablen angewendet. Von Bedeutung ist hierbei wieder der Ordnungsparameter σ. Das Verhalten dieses Parameters wird nun in Abhängigkeit von der Temperatur und dem chemischen Potential untersucht.

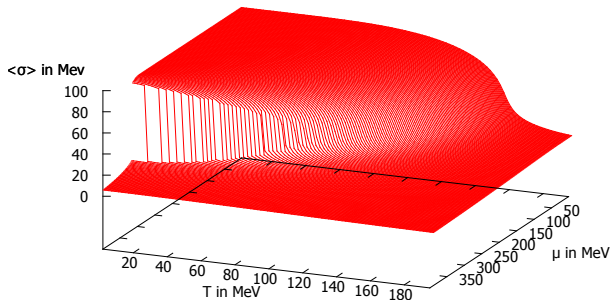
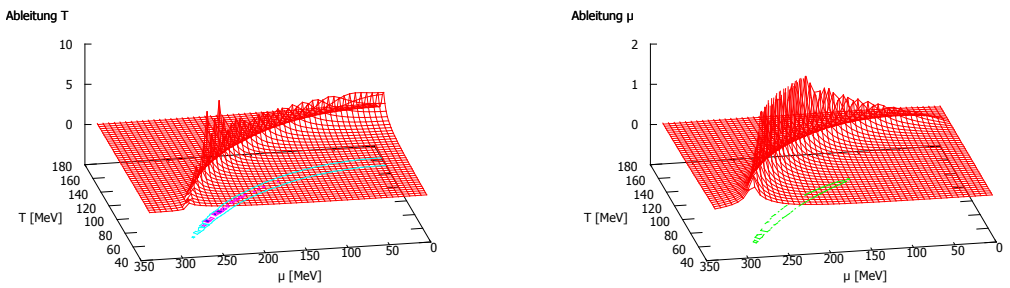


Abbildung 5.1: Erwartungswert $\langle\sigma\rangle$ in Abhängigkeit von μ und T

In der Abbildung 5.1 ist eindeutig zu erkennen, dass für hohe Werte des chemischen Potentials und für niedrige Temperaturen der Ordnungsparameter σ sich unstetig in Bezug auf die Temperatur oder das chemische Potential verhält. Diese Unstetigkeitsstelle findet für hohe chemische Potentiale bei zunehmend niedrigeren Temperaturen statt. Folglich existiert ein kritischer Punkt (T_c, μ_c), ab dem dieses Verhalten auftritt. Es existiert also ein kritischer Endpunkt (CEP) für den Phasenübergang erster Ordnung; dieser ist dann schon Teil des Crossover.

5.1 Phasendiagramm

In diesem Kapitel soll das Phasendiagramm für explizite chirale Symmetriebrechung bestimmt werden; dazu wird $m_\pi = 138$ gesetzt. Im vorhergehenden Kapitel wurde ein Verfahren aufgezeigt, mit dem Phasenübergänge erster Ordnung bestimmt werden können. Oberhalb des kritischen Endpunktes treten aber Phasenübergänge auf mit einer stetigen Änderung des Ordnungsparameters. Diese Crossover können durch verschiedene Verfahren festgelegt werden, zum einen über die Möglichkeit des Absinkens des Ordnungsparameters unter die Hälfte des Anfangswertes, zum anderen aber auch über die Änderung des Ordnungsparameters nach den beiden ausschlaggebenden Parametern T und μ. Diese Ableitung besitzt dann ein Maximum an der Stelle des Crossover.



(a) $\left|\frac{\partial\sigma}{\partial T}(T,\mu)\right|$ (b) $\left|\frac{\partial\sigma}{\partial \mu}(T,\mu)\right|$

Abbildung 5.2: Die beiden Ableitungen von σ in Abhängigkeit von μ und T

In Abbildung 5.2 ist erkennbar, dass die beiden Ableitungen jeweils ein Maximum annehmen. Dieses Maximum kann als Definition des Crossovers verwendet werden. Die Abbildungen in der T,μ-Ebene deuten den Verlauf des Crossovers an.
Für das Phasendiagramm können bestimmte Vorüberlegungen gemacht werden. Es kann eine Clausius-Claperyon-Gleichung für die Abhängigkeit von μ und T auf der Kurve des Phasenübergangs bzw. Crossovers hergeleitet werden. Dazu wird die freie Energie F herangezogen; für diese gilt unter Verwendung der Legendre Transformation und der Integraldarstellung der inneren Energie $U = TS - pV + \mu N$:

$$F(T,V,N) = U(S,N,V) - \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{N,V} S = U - TS = -pV + \mu N \tag{5.1}$$

Kombiniert man nun das totale Differential des obigen Ausdrucks mit dem totalen Differntial, welches sich aus der expliziten Abhängigkeit des Potentials ergibt, dann gilt:

$$dF = -SdT - pdV + \mu dN = d(-pV + \mu N) = -Vdp - pdV + \mu dN + Nd\mu \tag{5.2}$$

Bei dem Phasenübergang der Hadronischen Phase (H) zu einem Plasma (P) existiert eine Übergangskurve $\mu(T)$, da nach der Gibbs'schen Phasenregel auf dieser Kurve nur ein Freiheitsgrad existiert. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt auf der Übergangskurve $p_H(\mu,T) = p_P(\mu,T)$, deswegen verschwindet das Differential dp in der obigen Gleichung und man erhält:

$$0 = Vdp = S_H dT + N_H d\mu = S_P dT + N_P d\mu \tag{5.3}$$

Als Ergebnis ergibt sich die Clausius-Claperyon-Gleichung:

$$\frac{dT}{d\mu} = \frac{N_p - N_H}{S_H - S_p} \tag{5.4}$$

Diese ermöglicht eine Betrachtung für die beiden Grenzfälle verschwindender Dichten und Temperaturen. Für verschwindende Temperaturen ist die Entropie konstant, da das System dann nur durch einen Mikrozustand ohne Fluktuationen beschrieben ist (plus gegebenenfalls Entartung). Im Ergebnis geht die Ableitung gegen $-\infty$ und die Kurve endet in diesem Fall senkrecht auf der μ-Achse.

Ist hingegen $\mu = 0$, dann bleibt, weil es sich um ein System ohne Teilchenaustausch handelt, die Teilchenzahl erhalten ($\Delta N = 0$). Damit geht die Ableitung gegen Null und die Kurve $T(\mu)$ endet ebenso senkrecht auf der T-Achse.

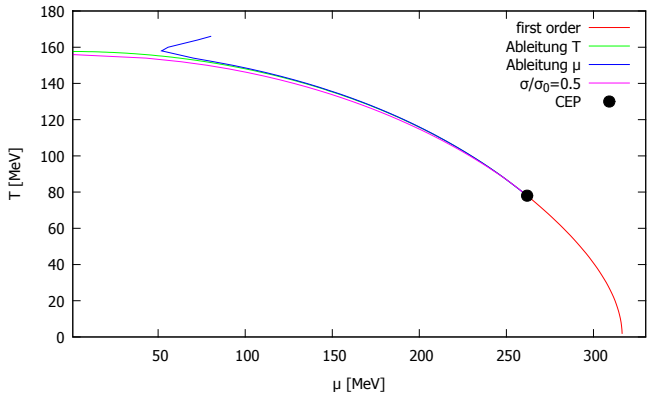


Abbildung 5.3: Phasendiagramm der sMFA für $m_\pi = 138$MeV

Die drei Crossover Indikatoren liefern ähnliche Ergebnisse (Abb. 5.3). Für niedrige chemische Potentiale gehen die Kurven leicht auseinander; allerdings treffen sich alle drei Kurven in der Nähe des kritischen Punktes. Die Abweichungen für die beiden Ableitungen oberhalb der eigentlichen Crossover-Kurve sind dadurch zu erklären, dass der Phasenübergang dort schon stattgefunden hat, allerdings σ sich weiter verändert, sodass dort weitere Extrema auftauchen, die durch den verwendeten Algorithmus gefunden werden.
Der kritische Punkt liegt ungefähr bei $\mu_c = 261.9MeV$ und $T_c = 78MeV$. Dies ist nur eine Näherung, da die Numerik mit diskreten Werten und so nur innerhalb einer vorgegebenen Genauigkeit arbeitet.
Dieses Ergebnis wird nun verglichen mit dem Ergebnis der eMFA. Zu erwarten ist, dass die Übergänge aufgrund der Fluktuationen später eintreten.

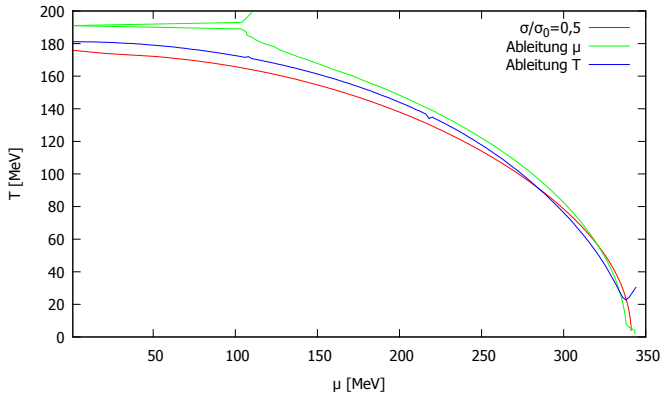
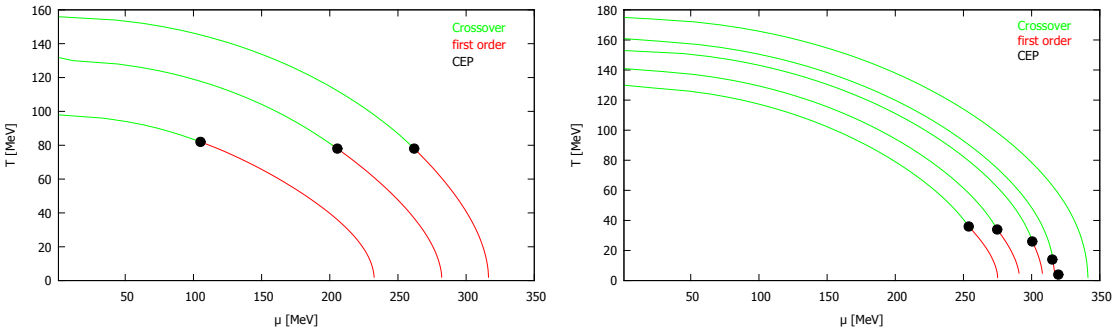


Abbildung 5.4: Phasendiagramm der eMFA für $m_\pi = 138$MeV

Die Fluktuationen verhindern das Auftreten eines Phasenübergangs erster Ordnung (Abb. 5.5). Es findet nur noch ein Crossover zwischen den beiden Phasen statt. Zudem tritt der Crossover bei höheren Temperaturen und höheren chemischen Potentialen ein. Zu sehen

ist dies an den Schnittpunkten mit der T- und μ- Achse, die in beiden Fällen ca. 20 MeV höher liegen als bei der sMFA.
Es ist auch hier ersichtlich, dass alle drei Crossover Kriterien verwendbar sind und vergleichbare Ergebnisse liefern. Die Abweichung der Kriterien ist in etwa dieselbe wie in der sMFA.
Weiterhin ist zu untersuchen, ob in der eMFA überhaupt Phasenübergänge erster Ordnung stattfinden können. Ein methodischer Ansatz dazu ist, die Masse des skalaren Sigma-Mesons zu variieren. Diese Methode ist durchaus nicht realitätsfremd, da die Masse dieses Mesons experimentell nicht genau bekannt ist. Zum Vergleich werden die Phasenübergänge der sMFA und der eMFA in Abhängigkeit von der Masse des skalaren Sigma Mesons m_σ betrachtet.



(a) sMFA (b) eMFA

Abbildung 5.5: Dargestellt ist die Abhängigkeit des CEP von der Masse m_σ. Die Werte der Massen entsprechen von oben nach unten. sMFA:$m_\sigma = 650, 500, 300$MeV; eMFA:$m_\sigma = 650, 564, 550, 500, 400, 300$MeV

In der sMFA sind die kritischen Endpunkte des Phasenübergangs (CEP) in der Temperatur wenig bis gar nicht von der Masse des Sigma-Mesons abhängig. Allerdings ändert sich die Lage des kritischen Punktes bezüglich des chemischen Potentials. Dieser wandert bei steigender Masse immer weiter in Richtung $\mu = 0$, sodass die Kurve des Phasenübergangs erster Ordnung immer länger wird. Zudem verschiebt sich die gesamte Kurve nach unten in T-Richtung , d.h. der Phasenübergang findet, bei gleichem chemischen Potential, insgesamt bei niedrigeren Temperaturen statt.
In der eMFA liegt der CEP bei allen Massen wesentlich tiefer. Der erste Wert der Sigma Masse, bei dem ein Phasenübergang erster Ordnung auftritt, ist $m_\sigma = 564MeV$. Dieser tritt bis ca. $T_c = 4$ auf. Allerdings ändert sich die Lage des CEP, sowohl in Richtung des chemischen Potentials als auch in Richtung der Temperatur.
Die Vakuumfluktuationen sorgen also dafür, dass der Phasenübergang zum einen bei höheren Temperaturen und auch höheren chemischen Potentialen auftritt, zum anderen aber der Phasenübergang erster Ordnung bei niedrigeren Temperaturen stattfindet. Der Phasenübergang erster Ordnung tritt zudem erst ab bestimmten Sigma-Massen auf.

5.2 Thermodynamischer Druck

Eine wichtiges Ergebnis der sMFA und der eMFA ist die Möglichkeit der Berechnung des Druckes für gegebene Temperatur und chemisches Potential. Dieser Druck entspricht direkt dem negativen Großkanonischen Potential. Da eine Potentialdichte betrachtet wird und das Potential beliebig additiv verschoben werden kann, erhält man die Druckdichte p unter der Bedingung, dass $p(T = 0, \mu = 0) = 0$ ist:

$$p = -(\Omega_{MF}(T, \mu) - \Omega_{MF}(T = 0, \mu = 0)) \tag{5.5}$$

Diese Funktion kann nun für verschiedene Werte untersucht werden; allerdings wird erst der Steffan-Boltzmann-Limes betrachtet, um den Grenzfall untersuchen zu können.
Für T $\to \infty$ geht das globale Minimum $\sigma \to 0$. Deswegen verschwindet im Integral die Masse der Quarks und man kann ultrarelativistisch rechnen mit $E_q \to p$. Dadurch vereinfacht sich das Integral wesentlich und es kann analytisch gelöst werden durch:

$$\Omega_{q\bar{q}} = -2TN_fN_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \log(1 + e^{-\beta(p+\mu)}) + \log(1 + e^{-\beta(p-\mu)}) \right\} \tag{5.6}$$

Im Folgenden wird wieder $\xi^{\pm} = e^{\pm\beta\mu}$ gesetzt; zudem lässt sich der Logarithmus als Reihe darstellen.

$$\int dpp^2 \log(1 + \xi^{\pm} e^{-\beta p}) = \int dpp^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\beta pk}(-)^{k+1}(\xi^{(+)^k} + \xi^{(-)^k})}{k} \tag{5.7}$$

Aufgrund der Konvergenz lassen sich Summation und Integration vertauschen, damit ergibt sich für das Integral:

$$\int dpp^2 e^{-\beta pk} = \frac{1}{\beta^2} \frac{d^2}{dk^2} \int_0^{\infty} e^{-\beta pk} = \frac{2}{\beta^3 k^3} \tag{5.8}$$

Wird nun β durch T ersetzt und der Wert des Integrals eingesetzt, ergibt sich als Zwischenergebnis:

$$\Omega_{q\bar{q}} = \frac{2T^4 N_f N_c}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-)^k \left(\xi^{(-)^k} + \xi^{(+)^k} \right)}{(k)^4} \tag{5.9}$$

Die Summe lässt sich ebenfalls analytisch mit Mathematica berechnen. Es ergibt sich:

$$p = -\frac{2T^4 N_f N_c}{\pi^2} \left(-\frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2\mu^2}{12T^2} - \frac{\mu^4}{24T^4} \right) = N_f N_c \left(\frac{7\pi^2 T^4}{180} + \frac{\mu^2 T^2}{6} + \frac{\mu^4}{12\pi^2} \right) \tag{5.10}$$

Für $\mu = 0$ und für hohe Temperaturen, wenn $\frac{\mu}{T} \to 0$, geht der Druck demnach in den Steffan-Boltzmann-Limes über. In dem hier betrachteten System ist $N_f = 2$ und $N_f = 3$, sodass als Grenzwert entsteht:

$$p_{SB} = \frac{7}{4} \frac{\pi^2 T^4}{90} \cdot 2 \cdot 6 = \frac{7\pi^2 T^4}{30} \approx 2,3029 T^4 \tag{5.11}$$

Dieser Grenzwert tritt für große T auf. Aus diesem Grund wird überprüft, ob die sMFA diesen Zusammenhang für große T wiedergeben kann.

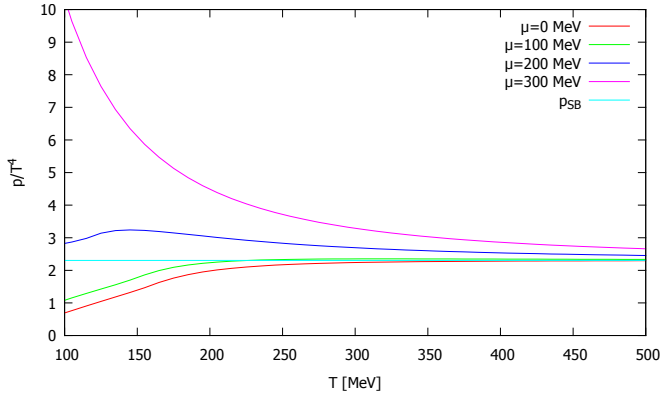
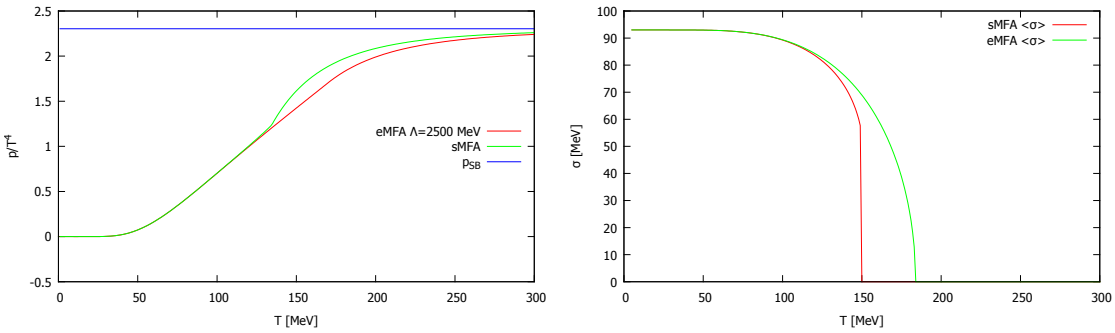


Abbildung 5.6: sMFA: Der Druck p in Abhängigkeit von der Temperatur T für verschiedene μ-Werte

Abbildung 5.6 zeigt, dass sich der Druck für steigende Temperaturen dem Stefan-Boltzmann-Limes beliebig annähert. Zudem konvergiert der Druck langsamer umso größer μ ist, was deutlich in der Gleichung (5.10) erkennbar ist. Solange der Quotient μ/T nicht klein ist, weicht der Druck stark von p_{SB} ab. Ebenso ist zu erkennen, dass für $\mu > 0$ der Druck immer von oben gegen p_{SB} konvergiert bzw. der Druck für $\mu > 0$ auch stets größer p_{SB} ist, da alle Korrekturterme positiv sind. Dies gilt allerdings nur im Gültigkeitsbereich der Näherung, also wenn $\sigma \to 0$ bzw. die Quarkmasse verschwindet.

5.2.1 Chiraler Limes

Zuerst werden die beiden Approximationen im chiralen Limes, also für $m_\pi = 0$ untersucht. In der Theorie sollten in diesem Fall die Goldstone-Bosonen einen Beitrag zum Potential liefern; dieser konnte aber nicht nachgewiesen werden. Grund dafür ist mit großer Wahrscheinlichkeit eine zu ungenau arbeitende Numerik. Betrachtet man den Druck und den Ordnungsparameter für $m_\pi = 0$ für die sMFA und eMFA, ergibt sich:



(a) $p(T, \mu = 0)$ (b) $\langle\sigma\rangle(T, \mu = 0)$

Abbildung 5.7: Vergleich der sMFA mit der eMFA im chiralen Limes ($m_\pi = 0$)

Zuerst ist hier anzumerken, dass der Erwartungswert von σ sowohl in der sMFA als auch

in der eMFA nach dem Phasenübergang tatsächlich auf Null absinkt; hier scheint also eine komplette Wiederherstellung der chiralen Symmetrie zu erfolgen.
Die sMFA besitzt im chiralen Limes demnach immer einen Phasenübergang erster Ordnung, während in der eMFA für $\mu = 0$ kein Phasenübergang erster Ordnung vorliegt. Der Knick in der Kurve der sMFA ist an der Stelle des Phasenübergangs. Das bedeutet, dass die Ableitung hier unstetig sein muss, deshalb ist (alle Größen sind Dichten)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{V,\mu} = -\left(\frac{\partial \Omega_{sMFA}}{\partial T}\right)_{V,\mu} = S \tag{5.12}$$

unstetig. Die Entropie besitzt also eine Unstetigkeitsstelle; es handelt sich demzufolge um einen Phasenübergang erster Ordnung.
Weiterhin kann an diesem Fall der konkrete Einfluss des Vakuumterms auf den Druck betrachtet werden. Dazu wird der Cutoff Lambda variiert und infolge dieser Veränderung werden Fluktuationen mit höheren Impulsen abgeschnitten.

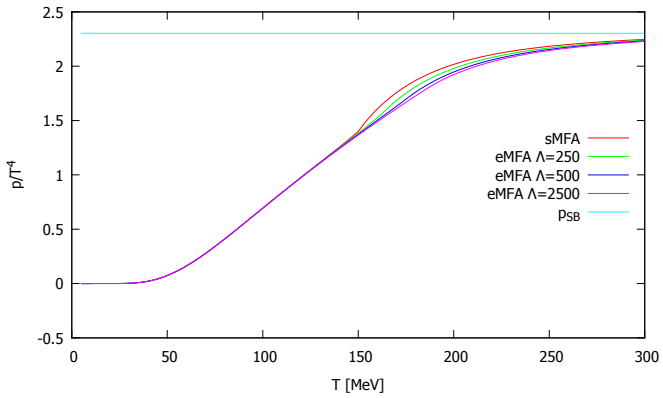
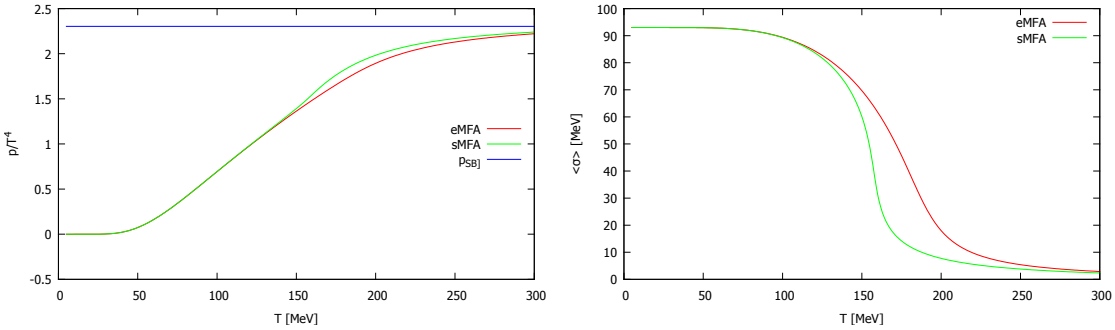


Abbildung 5.8: Abhängigkeit der eMFA von den Fluktuationen

Bei sinkendem Cutoff nähert sich die eMFA Kurve zunehmend der sMFA Kurve an, da immer weniger Fluktuationen berücksichtigt werden. Allerdings findet in der eMFA kein Phasenübergang erster Ordnung statt, weshalb auch die Kurven mit wenig Fluktuationen keinen Knick aufweisen. Aufgrund der Bedingung (4.7) gehen die Kurven für große Cutoffs in die gleiche Kurve über, denn man summiert dann über fast alle besetzten Zustände.

5.2.2 Explizite chirale Symmetriebrechung

Die explizite chirale Symmetriebrechung gibt den Pionen endliche Masse. Die Parameter werden so gesetzt, dass realistische Pion-Massen auftreten ($m_\pi = 138MeV$). In diesem Fall ist ein Phasenübergang, wie in Kapitel 5.1 aufgezeigt, zu erwarten. Hier soll die Auswirkung der Vakuumfluktuationen auf den Druck betrachtet werden. Zum direkten Vergleich zum chiralen Limes wird als erstes der Druck der sMFA und eMFA für $\mu = 0$ betrachtet. In diesem Fall ist kein Phasenübergang erster Ordnung mehr zu erwarten, wie es im chiralen Limes in der sMFA der Fall war. Dies ist an dem Phasendiagramm beider Approximationen zu erkennen (Abb. 5.9)



(a) $p(T, \mu = 0)$ (b) $\langle\sigma\rangle(T, \mu = 0)$

Abbildung 5.9: Vergleich der sMFA mit der eMFA bei expliziter chiraler Symmbetriebrechung ($m_\pi = 138MeV$)

Der Knick der sMFA ist tatsächlich verschwunden; in beiden Approximationen tritt somit der vorausgesagte Crossover ein.
Die Fluktuationen sorgen auch bei expliziter chiraler Symmetriebrechung für ein langsameres Ansteigen des Druckes. Ebenso wie im chiralen Limes ist zu erkennen, dass die Fluktuationen ab ca. $T = 120MeV$ ein verändertes Verhalten des Druckes und auch des Ordnungsparameters verursachen. Allerdings nähern sich die Kurven dann im weiteren Verlauf bzw. bei hohen Temperaturen wieder an.
Das Phasendiagramm sagt nun für höhere Werte des chemischen Potentials einen Phasenübergang erster Ordnung in sMFA für $\mu > 261,911MeV$ voraus. Es sollte also der Druck bis zu diesem kritischen chemischen Potential ohne Knick verlaufen und erst ab diesem Wert eine Stelle besitzen, an der die Ableitung unstetig wird.

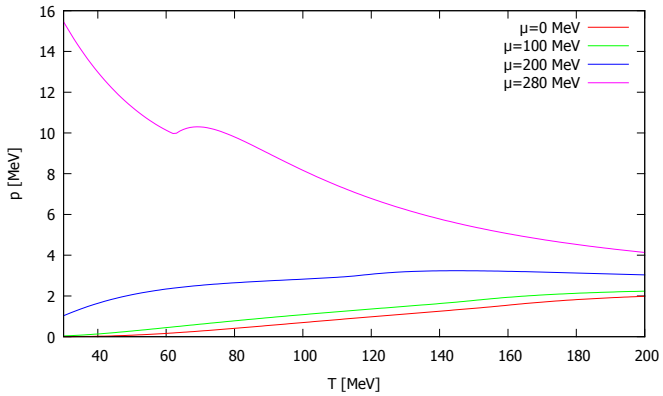


Abbildung 5.10: Der Druck in der sMFA in Abhängigkeit von dem chemischen Potential

Dieses Verhalten ist in der Abbildung 5.10 nachzuvollziehen. Die Druckkurve mit $\mu = 280MeV$ besitzt eine unstetige Ableitung. Zudem steigt der Druck für steigende μ im Bereich niedriger Temperaturen stark an, bis bei hohen Temperaturen wieder der Stefan-Boltzmann-Limes erreicht wird.

5.3 Meson-Massen

Die Massen der Mesonen sind über die 2ten Ableitungen des Potentials nach den Feldern gegeben. Die Massen des Sigma-Mesons und der Pionen sollten sich für hohe Werte von T annähern, da dort die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird.
Das Wiederherstellen der chiralen Symmetrie bedeutet für das Potential, dass die Erwartungswerte wieder bei $\sigma = 0, \vec{\pi} = 0$ liegen. Aus diesem Grund ist das mesonische Potential komplett symmetrisch; die 2ten Ableitungen nach allen vier Feldrichtungen sind dann gleich, demzufolge sind auch die Massen gleich. Dies erfolgt im chiralen Limes, da dort σ tatsächlich nach dem Phasenübergang auf 0 absinkt.
Liegt explizite Brechung vor, wird die chirale Symmetrie nur für $T \to \infty$ vollständig wiederhergestellt, denn nur für den Grenzwert gilt $\sigma = 0$. Die Konsequenz ist eine langsamere Annäherung der Massen, weil das Potential, außer im Grenzwert unendlicher Temperaturen, nicht vollständig symmetrisch ist und somit auch die Ableitungen nicht komplett übereinstimmen.
Dies und das generelle Verhalten der Massen soll im Folgenden untersucht werden.

5.3.1 Chiraler Limes

Im chiralen Limes wird nach dem Phasenübergang die chirale Symmetrie wieder hergestellt, wie im vorherigen Kapitel zu sehen war. Dies hat zur Folge, dass die Massen der Pionen und des Sigma-Mesons exakt gleich sein müssen, da die beiden Teilchen durch die Symmetrietransformation äquivalent sind. Die Massen des Triplett Zustandes der Pionen entsprechen dann der Masse des Singulett Zustandes des Sigma-Mesons, sodass die Eigenwerte der beiden bzw. der vier Eigenfunktionen übereinstimmen. Hier treten also degenerierte bzw. entartete Zustände auf.

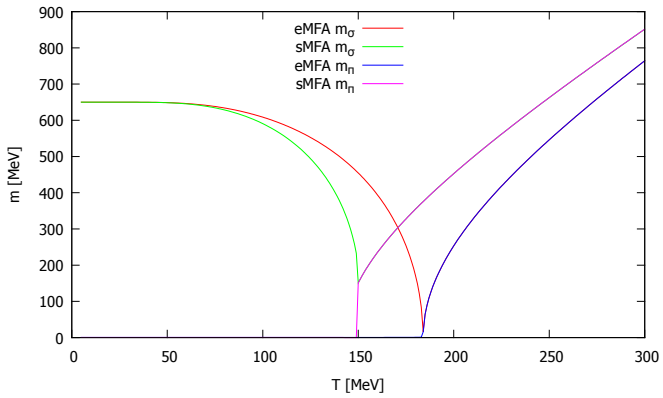


Abbildung 5.11: Massen der Teilchen in Abhängigkeit der Temperatur, Exakte Annäherung der Massen für die sMFA bei $T = 149$MeV und für die eMFa bei $T = 184$MeV

Die entarteten Zustände sind in der Abbildung 5.11 zu sehen, denn ab bestimmten Temperaturen stimmen die Kurven der Sigma-Masse und die der Pionen-Masse exakt überein. Anzumerken bleibt noch, dass der Übergang der Pion-Masse in der eMFA später stattfindet und zudem nicht sprunghaft wie in der sMFA.

Die Masse des skalaren Sigma Mesons sinkt bei steigender Temperatur und erreicht am Punkt des Phasenübergangs ihr Minimum sowohl in der sMFA als auch in der eMFA. Im weiteren Verlauf steigt sie dann wieder an.

5.3.2 Explizite chirale Symmetriebrechung

In der expliziten chiralen Symmetriebrechung soll das Verhalten von entarteten Zuständen erst im Limes von hohen Temperaturen auftreten. Zudem ist die Pion-Masse bei $T = 0$ nicht Null.

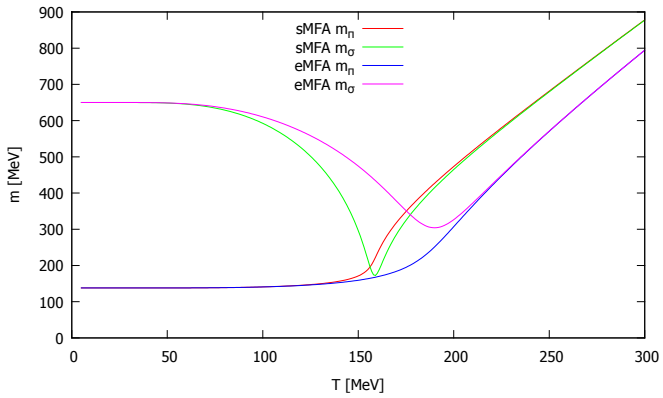
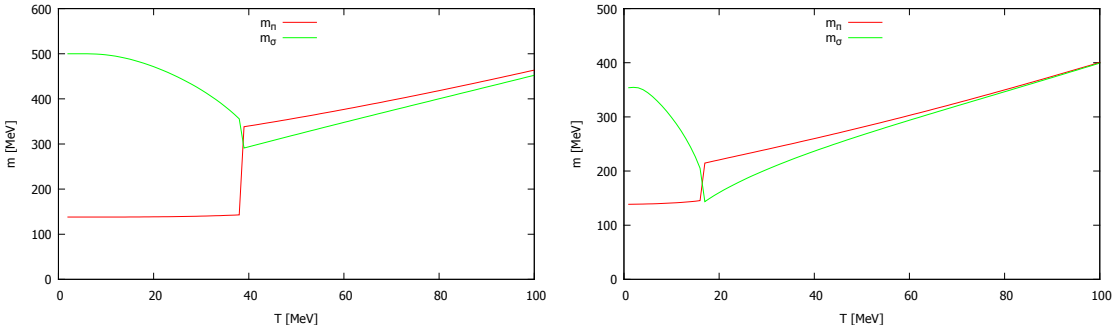


Abbildung 5.12: Massen der Teilchen in Abhängigkeit der Temperatur mit $m_\pi = 138$MeV

Das Verhalten der Massen (Abb. 5.12) ist ähnlich wie im Fall der spontanen Symmetriebrechung. Die Pion-Masse springt hier nicht, wie es in der sMFA mit $m_\pi = 0$ der Fall ist, sondern verläuft in dieser Konstellation ohne Knick.
In der eMFA findet die Veränderung der Massen erst später statt, also in der sMFA. Die chirale Symmetrie wird hier in der eMFA erst bei ca. $T = 220MeV$ wieder hergestellt, während dies in der sMFA schon bei ca. $T = 180MeV$ erfolgt. Die Vakuumfluktuationen verzögern also auch hier die durch den Phasenübergang auftretenden Effekte.
Von Interesse ist auch die Betrachtung des Verhaltens der Massen für einen Phasenübergang erster Ordnung. Dazu muss das chemische Potential erhöht werden. Damit die eMFA einen Phasenübergang erster Ordnung liefert, muss zudem die Masse des Sigma Mesons erniedrigt werden. Deshalb wird diese im Folgenden auf $m_\sigma = 500MeV$ gesetzt, um den Einfluss in beiden Approximationen vergleichen zu können.



(a) sMFA für $\mu = 260MeV$

(b) eMFA für $\mu = 305MeV$

Abbildung 5.13: Massen bei expliziter Symmetriebrechung in der Nähe des Phasenübergangs erster Ordnung

In Abbildung 5.13 ist erkennbar, dass in beiden Approximationen die Massen unstetig verlaufen, da hier ein Phasenübergang erster Ordnung vorliegt. Die Masse in der eMFA fängt hier nicht bei $m_\sigma = 500MeV$an, denn es findet eine Beeinflussung durch μ statt, da wie in Kapitel 4.3.2 gezeigt, Werte von $\mu > m_q$ zu einer Beeinflussung des Potentials bei $T = 0MeV$ führen. Bei hohen chemischen Potentialen wird also die chirale Symmetrie schon bei niedrigen Temperaturen wieder hergestellt.
Generell verursacht ein hohes chemisches Potential die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei niedrigeren Temperaturen. Die beiden Massen nähern sich also bei höheren chemischen Potentialen schon bei niedrigeren Temperaturen an. Dies geschieht stetig solange kein Phasenübergang erster Ordnung vorliegt, ansonsten ergibt sich ein ähnlicher Kurvenverlauf wie in Abbildung 21.

6 Zusammenfassung

In dieser Thesis wurde das Verhalten von Mesonen bei steigender Temperatur und steigender Dichte untersucht. Es wurde dazu ein Modell verwendet, das auf das Konzept der chiralen Symmetrie zurückgreift, eine Symmetrie der Quantenchromodynamik.
Die chirale Symmetrie ist in der hadronischen Phase bei realistischen Massen explizit gebrochen. Steigende Temperaturen führen zur Restaurierung der Symmetrie bei gleichzeitigem Verschwinden der Quarkmasse. Die Restaurierung der chiralen Symmetrie ist also gleichbedeutend mit dem Übergang zu einem Quark-Gluon-Plasma.
Zum einen wurde dies am Verschwinden der Quarkmassen festgestellt, zum anderen aber auch an der Entartung der Pion-und Sigma-Massen für hohe Temperaturen und/oder Dichten.

Dieser Phasenübergang wurde ausgiebig in Abhängigkeit verschiedener Parameter untersucht. Hierbei wurde festgestellt, dass ein Phasenübergang erster Ordnung ab einem kritischen Endpunkt (T_C, μ_C) möglich ist. Der Phasenübergang erster Ordnung führt dazu, dass die Massen der Pionen und des Sigma-Mesons eine Unstetigkeitsstelle am Punkt des Phasenübergangs aufweisen. Die Druck-Kurve weist einen Knick auf, da die Entropie an dieser Stelle unstetig ist.

Der zweite Teil der Thesis beschäftigt sich mit der Untersuchung des Einflusses der Vakuumfluktuationen auf den Phasenübergang. Im direkten Vergleich ist dabei generell aufgefallen, dass der Übergang zum Quark-Gluon-Plasma bei höheren Temperaturen und Dichten stattfindet. Die Vakuumfluktuationen sorgen also dafür, dass die Quarks in den Mesonen stärker gebunden sind, denn diese Bindungen lösen sich erst unter höheren Energiezufuhren auf.
Demzufolge ist der Druck unter Vakuumfluktuationen generell niedriger im Bereich des Phasenübergangs. Die Massen von Quarks, Pionen und Sigma-Mesonen verändern sich erst bei höheren Dichten und Temperaturen.

Weiterhin konnte festgestellt werden, dass der kritische Endpunkt unter Fluktuationen stark von der Masse des Sigma-Mesons abhängt. Bei hohen Massen tritt sogar kein Phasenübergang erster Ordnung mehr auf. Die Approximation ohne die Vakuumfluktuationen zeigte hingegen einen kritischen Endpunkt, der bei konstanter Temperatur liegt, wenn sich die Masse des Sigma-Mesons verändert.
Hier ist also eine starke Beeinflussung durch die Vakuumfluktuationen zu erkennen.
Die Vakuumfluktuationen haben also insgesamt einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Phasendiagramm.

A Parameter des Mesonischen Potentials

Die Wahl der Parameter findet bei $T = 0$ und $\mu = 0$ statt. Dabei müssen vier Gleichungen erfüllt sein an der Stelle $\sigma = f_\pi$ und $\vec{\pi} = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{MF}}{\partial \sigma^2} = m_\sigma^2,\ \frac{\partial^2 \Omega_{MF}}{\partial \pi^2} = m_\pi^2,\ h\sigma = m_q,\ \frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \sigma} = 0\ . \tag{A.1}$$

A.1 Standard Mean-Field Approximation

In der sMFA lautet das Großkanonische Potential :

$$\Omega_{sMFA}(T, \mu, \sigma, \vec{\pi}) = \Omega_{q\bar{q}}(T, \mu, \sigma) + U(\sigma, \vec{\pi}) \tag{A.2}$$

Für $T = 0$ und $\sigma = 0$ liefert allerdings der Term $\Omega_{q\bar{q}}$ keinen Beitrag. Für die Parameter des Mesonischen Potentials und der Yukawa Kopplung ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\frac{\partial \Omega_{MF}}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = \lambda f_\pi (f_\pi^2 - \phi_0^2) - c = 0 \tag{A.3}$$

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial \sigma^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = 3\lambda f_\pi^2 - \lambda \phi_0^2 = m_\sigma^2 \tag{A.4}$$

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial \pi^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = \lambda (f_\pi^2 - \phi_0^2) = m_\pi^2 \tag{A.5}$$

$$h f_\pi = m_q \tag{A.6}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die Lösung:

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2 f_\pi^2} \tag{A.7}$$

$$\phi_0^2 = \frac{f_p i^2 (3m_\pi^3 - m_\sigma)}{m_\sigma^2 - m_\pi^2} = \frac{3m_\pi^2 - m_\sigma^2}{\lambda} \tag{A.8}$$

$$c = m_\pi^2 f_\pi \tag{A.9}$$

$$h = \frac{m_q}{f_\pi} \tag{A.10}$$

Somit sind alle drei Parameter bestimmt. Für $m_\sigma = 650 MeV$,$m_\pi = 138 MeV$ und $m_q = 300 MeV$ ergibt sich damit $\lambda = 23.3239$, $\phi_0 = 88.5014$MeV und die Yukawa Kopplungskonstante von $h = 3.2258$

A.2 Extended Mean-Field Approximation

In der eMFA besitzt das Potential zusätzlich den Vakuum-Term:

$$\Omega_{eMFA}(T,\mu,\sigma,\vec{\pi}) = \Omega_{q\bar{q}}(T,\mu,\sigma) + \Omega_{vac}(\sigma) + U(\sigma,\vec{\pi}) \tag{A.11}$$

Das Potential hat zusätzlich noch einen Term, der von σ und $\vec{\pi}$ abhängt. Im Folgenden wird zur Übersichtlichkeit $R = 8\pi N_f N_c$ gesetzt; damit erhält man den Vakuum-Term:

$$\Omega_{vac} = -2N_f N_c \int_0^\Lambda d^3p\sqrt{p^2 + h^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)} = -R\int_0^\Lambda dpp^2\sqrt{p^2 + h^2(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)} \tag{A.12}$$

Benötigt werden nun die folgenden Ableitungen dieses Terms:

$$\left.\frac{\partial\Omega_{vac}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = -R\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^2\sigma}{\sqrt{p^2+h^2\sigma^2}} = h^2\sigma L_1 \tag{A.13}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Omega_{vac}}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = -R\int_0^\Lambda dpp^2\left(\frac{h^2}{\sqrt{p^2+h^2\sigma^2}} - \frac{h^4\sigma^2}{(p^2+h^2\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \equiv h^2L_1 + h^4f_\pi^2L_2 \tag{A.14}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Omega_{vac}}{\partial\pi_i^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = -R\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^2}{\sqrt{p^2+h^2\sigma^2}} \equiv h^2L_1 \tag{A.15}$$

Damit ergibt sich wieder ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen, wobei die Terme des Vakuum-Anteils einfach dazu addiert werden.

$$\left.\frac{\partial\Omega_{MF}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = \lambda f_\pi(f_\pi^2 - \phi_0^2) - c + h^2f_\pi L_1 = 0 \tag{A.16}$$

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = 3\lambda f_\pi^2 - \lambda\phi_0^2 + h^2L_1 + h^4f_\pi^2L_2 = m_\sigma^2 \tag{A.17}$$

$$\left.\frac{\partial U^2}{\partial\pi_i^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = \lambda(f_\pi^2 - \phi_0^2) + h^2L_1 = m_\pi^2 \tag{A.18}$$

$$hf_\pi = m_q \tag{A.19}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt sich zu:

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - f_\pi^2h^4L_2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2} \tag{A.20}$$

$$\phi_0^2 = \frac{f_\pi^2\left(m_\sigma^2 + 2h^2L_1 - f_\pi^2h^4L_2 - 3m_\pi^2\right)}{m_\sigma^2 - f_\pi^2h^4L_2 - m_\pi^2} \tag{A.21}$$

$$c = f_\pi m_\pi^2 \tag{A.22}$$

$$h = \frac{m_q}{f_\pi} \tag{A.23}$$

Somit sind alle Parameter eindeutig festgelegt. Die Integrale sind abhängig von dem Cutoff Λ. Diese lassen sich analytisch lösen:

$$L_1 = \frac{1}{16} R \left(\frac{8\left(-h^2\sigma^2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}\log\left(\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+\Lambda\right)+h^2\Lambda\sigma^2+\Lambda^3\right)}{\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}} + 4h^2\sigma^2\log\left(h^2\sigma^2\right) \right) \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} L_2 = R\Bigg(& 2\Lambda\left(2\Lambda\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+h^2\sigma^2+2\Lambda^2\right) \\ & + \left(2\Lambda^2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+h^2\sigma^2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+2h^2\Lambda\sigma^2+2\Lambda^3\right)\log\left(h^2\sigma^2\right) \\ & - 2\left(2\Lambda^2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+h^2\sigma^2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+2h^2\Lambda\sigma^2+2\Lambda^3\right)\log\left(\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+\Lambda\right)\Bigg) \\ & \left(2\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}\left(\sqrt{h^2\sigma^2+\Lambda^2}+\Lambda\right)^2\right)^{-1} \end{aligned} \tag{A.25}$$

B Einführung endlicher Temperaturen

In der Quantenfeld-Theorie ist der Matsubara-Formalismus die Standard-Methode, um die Abhängigkeit der Zustandssumme von der Temperatur einzuführen. In Analogie zur Quantenmechanik entspricht dann die Zustandssumme für das Großkanonische Potential:

$$Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(H+\mu N)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle n|e^{-\beta(H+\mu N)}|n\rangle = \mathcal{N}\int_{RB} \mathcal{D}\psi e^{-S_E} \tag{B.1}$$

Hierbei steht S_E für die Euklidische Wirkung, die als Integral über den Lagragian gegeben ist, die Form:

$$S_E = \int_0^{\beta} d\tau \int d^3x \mathcal{L} \tag{B.2}$$

Dies wurde im Haupttiel der Thesis schon ausgeführt. Allerdings besteht nun die Möglichkeit, das Feld ψ durch eine Fouriertransformation aus dem Impulsraum darzustellen. Damit ergibt sich:

$$\psi(\vec{x},\tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \psi_n(\vec{p}) e^{i(\omega_n \tau + \vec{p}\vec{x})} \tag{B.3}$$

Für Fermionen muss diese Funktion nun die Randbedingung erfüllen, da Fermionen vollkommen antisymmetrische Teilchen sind:

$$\psi(\vec{x},\tau+\beta) = -\psi(\vec{x},\tau) \tag{B.4}$$

Diese Bedingung wird erfüllt durch die fermionischen Matsubara-Frequenzen. Diese haben die Form $\nu_n = (2n+1)\pi T$. Durch die Einführung dieser Frequenzen kann nun die Integration über p^4 durch die Summation über die fermionischen Matsubara Frequenzen ersetzt werden. Damit erhält man für eine Funktion $\phi(\vec{p}, p^4)$:

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(\vec{p}, p^4) \to T \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \phi(\vec{p}, \nu_n) \tag{B.5}$$

In der vorliegenden Rechnung ist dann $\phi = \mathrm{Tr}(\ln(S_0^{-1})$. Die Summation über Matsubara Summen ist nicht trivial, dazu wird auf [8] verwiesen.

C Numerische Integration

Es soll ein Programm zur numerischen Integration einer Funktion f(x) geschrieben werden, das möglichst genau mit analytischen Ergebnissen übereinstimmt.

C.1 Mathematische Grundlagen

Gegeben ist die Funktion f. Diese wird zunächst durch ein Interpolationspolynom angenähert (Lagrange-Darstellung). Es gilt also:

$$\int_a^b f dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \prod_{\substack{j=0,\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{C.1}$$

Die α_i entsprechen dann den Integralen über die Lagrangefunktion, sodass Polynome bis zum Grad n gut angenähert werden. Die Gauß-Legendre-Integration liefert nun über orthonormale Polynome ein effektives Verfahren um α_i zu bestimmen. Zudem werden bei diesem Verfahren auch die x_i als Nullstellen der Polynome gewählt. Durch diese doppelte Wahl können mit diesem Verfahren Polynome bis zum Grad $2n + 1$ angenähert werden. Es gilt für die orthogonalen Polynome p_{n+1} mit den Nullstellen $x_0, \ldots, x_n$ und $q, p \in \mathbb{P}^n$ für die Funktion$f = q(x)p_n(x) + r(x)$, $f \in \mathbb{P}^{2n+1}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b q(x)p_{n+1}(x) + r(x)dx = \int_a^b r(x) \tag{C.2}$$

wegen der Orthogonalität, sowie:

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i q(x_i)p_{n+1}(x_i) + \alpha_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(x_i) \tag{C.3}$$

weil x_i die Nullstellen von p sind. Mit entsprechender Wahl der Gewichte α_i gilt dann:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b r(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i r(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{C.4}$$

Die orthogonalen Polynome sind orthogonal bezüglich einer Gewichtungsfunktion, sodass sich insgesamt ergibt:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{C.5}$$

Da die hier verwendeten orthogonalen Polynome immer auf das Intervall [-1,1] bezogen sind, muss für die Grenzen [a,b] entsprechend substituiert werden: $x = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$ mit

$dx = \frac{b-a}{2}dy$. Zudem ist oft eine Funktion gegeben, in der die Gewichtungsfunktion schon gegeben ist, also $F(x) = f(x)w(x)$:

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} F\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right) dy \tag{C.6}$$

Wird nun$f(y) = \frac{F(\frac{b-a}{2}y+\frac{a+b}{2})}{w(y)}$ gesetzt, so folgt:

$$\int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} F\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right) dy = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{F\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right)}{w(x_i)} \tag{C.7}$$

C.2 Bestimmte Integrale mit Unendlich als Integrationsgrenze

Für das Großkanonische Potential ist es notwendig, bestimmte Integrale mit der Integrationsgrenze Unendlich zu lösen. Für eine Funktion $f(x)$ auf dem Integrationsgebiet $[0, \infty)$ ist es sinnvoll, die Substitution $t = \frac{1}{x}$ zu benutzen. Damit ergibt sich $x = \frac{1}{t}$ mit $dx = -\frac{dt}{t^2}$:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^0 \frac{f(\frac{1}{t})}{t^2}dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}dt \tag{C.8}$$

Im Fall einer Integration von Polarkoordinaten über den ganzen Raum ergibt sich dann als Ergebnis:

$$\int f(r)d^3r = 4\pi \int_0^1 \left\{ f(t) + \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} \right\} dt \tag{C.9}$$

C.3 Gauß-Legendre

Die Gauß-Legendre-Polynome haben $w(x) = 1$ als Gewichtungsfunktion. Es ergibt sich als Formel:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^n \alpha_i F\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) \tag{C.10}$$

Die allgemeine Rekursionsformel für die Legendre-Polynome lautet:

$$(j+1)P_{j+1} = (2j+1)xP_j - jP_{j-1} \tag{C.11}$$

Die Nullstellen der Polynome werden mithilfe des Newton-Verfahrens errechnet, wobei $x_i = cos(\pi\frac{4i-1}{4n+2})$ als erste Näherung verwendet werden kann. Die Ableitung der Legendre Polynome lässt sich über

$$P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) \tag{C.12}$$

berechnen. Die Gewichte α_i ergeben sich aus der Ableitung und der zugehörigen Nullstelle x_i:

$$\alpha_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P_n'(x_i))^2} \tag{C.13}$$

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] Michael E. Peskin und Daniel V. Schröder: Introduction to quantum field theory (1951). ISBN 0-201-50397-2

[2] Ta-Pei Cheng und Ling-Fong Li: Gauge theory of elementary particle physics. ISBN 0-19-851961-3.

[3] B.-J. Schaefer und J. Wambach, Phys. Rev. D75, 085015

[4] H. David Politzer: Reliable Perturbative Result for Strong Interactions? Phys. Rev. Lett. 30, 1346-1349 (1973) .

[5] Matthias Puhr: The QCD Phase Diagram with Higher Moments of Charge Fluctuations, Diplomarbeit 2012

[6] O. Scavenius, A. Mocsy, I. N. Mishutin, and D. H. Rischke, Phys. Rev. C64, 045202 (2001)

[7] M. Gell-Mann: A Schematic Model of Baryons and Mesons in Phys. Lett. 8: 214-215,1964.

[8] Agustin Nieto. Evaluating sums over the Matsubara frequencies. Comput. Phys. Commun., 92(1):54-64, 1995.

[9] B.-J. Schaefer und M.Wagner The three-flavor chiral phase structuer in hot and dense QCD matter, Phys.Rev.D79:014018,2009

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Bachelorthesis selbstständig geschrieben und deren Inhalt wissenschaftlich erarbeitet habe. Außer der angegebenen Literatur habe ich keine weiteren Hilfsmittel benutzt.

Hungen-Utphe, den 11. November 2013

Julian Mathias Metzger