Bachelor-Thesis Physik

Der Chirale Phasenübergang in einem endlichen Volumen

Chiral Phase Transition in a finite Volume

Violetta Winkler
Matrikelnummer: 6020585

15. August 2016

Betreuung: PD. Dr. Bernd-Jochen Schaefer

Fachbereich 07 Physik

Justus-Liebig-Universität Gießen

Zusammenfassung

Der chirale Phasenübergang eines Quark-Meson-Modells wird in Abhängigkeit des Volumens genauer untersucht. Hierfür wird anhand des thermodynamischen Potentials der Ordnungsparameter σ_0 für variierende Volumina, sowohl mit als auch ohne chiralen Limes, bestimmt. Die auftretenden Unterschiede aufgrund der Volumenänderung werden umfassend analysiert und interpretiert.

Abstract

The correlation between the chiral phase transition and the volume-effects of a quark-meson-model gets analyzed. Therefore the order paramerter σ_0 is determined on basis of the thermodynamics potential for several volumina. This will be done in chiral limes and at spontaneous broken symmetry phase. The upcoming differences because of the varying volumina are getting dissected and interpreted.

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Gießen, den 15. August 2016

_____

Violetta Winkler

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Niederenergienäherung der QCD **6**
2.1 Quark-Meson-Modell . . . 6
2.2 Chirale Symmetrie . . . 6
2.3 Spontane Brechung der Symmetrie . . . 7

3 Großkanonisches Potential **8**
3.1 Unendliches Volumen . . . 8
3.2 Endliches Volumen . . . 9
3.2.1 Randbedingungen . . . 9
3.2.2 Vereinfachen der dreifachen Summe . . . 10
3.3 Vakuum Grundzustand . . . 12
3.4 Massen . . . 12
3.4.1 Tree-level Masse . . . 12
3.4.2 Screening Masse . . . 13

4 Numerik **14**
4.1 Standard mean field approach . . . 14
4.1.1 Berechnung der Parameter . . . 14
4.1.2 Unendliches Volumen . . . 15
4.1.3 Endliches Volumen . . . 16
4.1.4 Vergleich . . . 18
4.2 Extended mean field approach . . . 21
4.2.1 Parameter . . . 21

5 Schlusswort **23**

A Anhang **24**
A.1 Mathematische Konventionen . . . 24
A.1.1 Einheiten . . . 24
A.1.2 Notationen . . . 24
A.2 Chirale Symmmetrie . . . 25
A.3 Großkanonisches Potential . . . 27

Kapitel 1

Einleitung

Nach dem aktuellen Stand der Forschung gibt es vier verschiedene Wechselwirkungen: Die Gravitation, die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung und die starke Wechselwirkung.
Mit letzterer befasst sich die Quantenchromodynamik. Sie untersucht die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen.
Bei Quarks handelt es sich um Teilchen mit dem Spin 1/2, einer bruchzahligen elektrischen Ladung und einer Farbladung (rot, grün oder blau). Die Farbladungen benötigt man, um die Hadronenspektren zu erklären. Hadronen nennt man die Teilchen, die aus Quarks bestehen. Bisher nachgewiesen wurden zum einem Baryonen, die aus drei Quarks bestehen und somit einen halbzahligen Spin (Fermionen) haben, und zum anderem Mesonen. Mesonen sind aus einem Quark-Antiquark-Paar aufgebaut und sind Bosonen (ganzzahliger Spin).
Gluonen gelten als Austauschteilchen der starken Wechselwirkung. Sie sind genau wie Photonen masselose Spin-1 Bosonen. Der Unterschied zu Photonen liegt aber darin, dass Gluonen auch direkt mit sich selber wechselwirken können und somit auch eine Farbladung besitzen.
Die Eigenschaften hadronischer Materie ist von der Temperatur bzw. dem Druck abhängig. Bei hohen Temperaturen (hohem Druck) überlappen sich die Teilchen und die Quarks und Gluonen wandern frei umher. Ein System bei tiefen Temperaturen (bzw. ein verdünntes System) hingegen kann in Termen von Pionen, Nukleonen und anderen Hadronen beschrieben werden. Um die Symmetrien der starken Wechselwirkung im Niederenergiebereich zu beschreiben, werden verschiedene Modelle verwendet. [1]
Thema dieser Abreit ist der chirale Phasenübergang im endlichen Volumen. Dazu untersucht man ein im chiralen Limes $\mathrm{SU}_V(2)\otimes\mathrm{SU}_A(2)$ symmetriches 2-Flavour Quark-Meson-Modell mit einem masselosen Quark-Spinor. Bei spontaner Symmetriebrechung tritt ein Masseterm des Quark-Spinors auf. Das Quark-Meson Modell ist nur noch SU(2)-symmmetrisch. Vergleicht man die Phasendiagramme im unendlichen Volumen bei spontan gebrochener Symmetrie mit denen im chiralen Limes, so unterscheiden sie sich.
Ziel dieser Arbeit ist es die Wirkungen endlicher Volumeneffekte auf die chiralen Phasenübergänge zu untersuchen.

Kapitel 2

Niederenergienäherung der QCD

2.1 Quark-Meson-Modell

Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, kann bei niedrigen Temperaturen ein System in Termen von Pionen, Nukleonen und anderen Hadronen dargestellt werden.
In dieser Arbeit wird ein Quark-Meson-Modell betrachtet, welches durch folgenden Lagrangian beschrieben wird [2]

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{\Psi} i \partial\!\!\!/ \Psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial \mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) - \bar{\Psi} g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\Psi - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 \tag{2.1}$$

Dieser besteht aus verschiedenen Termen.
Den kinetischen Energieterm für die Nukleonen und Mesonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{kin} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) \\ \mathcal{L}_N^{kin} &= \bar{\Psi} i \partial\!\!\!/ \Psi \end{aligned} \tag{2.2}$$

Den Pionen-Nukleonen Wechselwirkungsterm:

$$\mathcal{L}_{WW} = -\bar{\Psi} g(\sigma + i\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi})\Psi \tag{2.3}$$

Und dem des Pionen-Sigma Potentials:

$$U(\sigma, \vec{\pi}) = -\frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 \tag{2.4}$$

Es handelt sich dabei bei Ψ um ein $4\mathrm{N}_f\mathrm{N}_c$-dimensionalen Quark-Spinor,
bei σ um ein real-skalares Feld des Sigma-Mesons und
bei $\vec{\pi}$ um ein real-pseudo-skalares Feld des Pionen-Triplets.

2.2 Chirale Symmetrie

Das Noether's Theorem besagt, dass ein System, welches durch den Lagrangian

$$\begin{gathered} L = \int d^3x \mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_i(x)) \\ \text{mit der Bewegungsgleichung}: \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu \Phi_i} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_i} = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

beschrieben wird und das bei einer durchgehenden Symmetrietransformation $\mathrm{S} = \int L dt$ invariant lässt, eine Erhaltungsgröße $\partial^\mu \mathrm{J}_\mu(x) = 0$ besitzt.

Dabei ist $Q(t) = \int d^3x \mathrm{J}_0(x)$ zeitunabhängig. Also: $\frac{dQ}{dt} = 0$. [3]
Der Lagrangian des hier betrachteten Quark-Meson-Modells besteht aus zwei Flavorfreiheitsgraden.
Anhand der Rechnungen im Anhang [4] kann man nachvollziehen, dass es sich um die chirale Symmetriegruppe:

$$\mathrm{SU_L}(2) \otimes \mathrm{SU_R}(2) = \mathrm{SU_V}(2) \otimes \mathrm{SU_A}(2) \qquad \text{handelt.} \tag{2.6}$$

Die zur $\mathrm{SU_V}(2)$ Symmetrie-Gruppe gehörende Vektortransformation lautet:

$$\begin{aligned} \Lambda_V : \Psi &\to e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}}\Psi \\ \bar{\Psi} &\to \bar{\Psi} e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\theta} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die zur $\mathrm{SU_A}(2)$ Symmetrie-Gruppe gehörende Axialtransformation lautet:

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \Psi &\to e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}}\Psi \\ \bar{\Psi} &\to \bar{\Psi} e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\theta} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Des Weiteren ist der Lagrangian auch $\mathrm{U}_V(1)$ symmetrisch, wodurch zusätzlich die Baryonenzahl erhalten bleibt.
Für die gesamte Symmetrie des Quark-Meson-Lagrangian gilt also:

$$\mathrm{SU}_V(2) \otimes \mathrm{SU}_A(2) \otimes U_V(1) \tag{2.9}$$

unter Berücksichtigung der Erhaltungsgrößen:

$$\begin{aligned} V^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\Psi + \epsilon^{abc}\pi^b\pi^c \qquad Q^a &= \int V^a_0(x) d^3x \\ A^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\Psi + (\partial_\mu\sigma)\pi^a - (\partial_\mu\pi^a)\sigma \qquad Q^{5a} &= \int A^a_0(x) d^3x \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.3 Spontane Brechung der Symmetrie

In einem System im Grundzustand, kann es passieren, dass dieses dort weniger Symmetrien besitzt. Nach dem Goldstone Theorem treten bei einer spontanten Symmetriebrechung masselose Skalarteilchen, die sogenannten Goldstone-Bosonen, auf.
Das hier untersuchte Pion-Sigma Potential $\mathrm{U}(\sigma, \vec{\pi}) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2$ hat für $\nu^2 > 0$ an der Stelle $\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = \nu^2$ ein Minimum. Wählt man im Grundzustand:

$$\begin{aligned} \langle 0 \mid \pi \mid 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 \mid \sigma \mid 0 \rangle &= \langle \sigma \rangle \end{aligned} \tag{2.11}$$

entsteht ein verschobenes Feld mit $\sigma' = \sigma - \nu$ in $\mathrm{U}(\sigma, \vec{\pi})$.
Da $[Q^{5a}, \pi^b] = -i\sigma\delta^{ab} \neq 0$, folgt daraus, dass auch $\langle 0 \mid A^a_\mu(0) \mid \pi^a \rangle \neq 0$.
Im Grundzustand kommt es also zu einer spontanen Brechung der $\mathrm{SU}(2)_V \otimes \mathrm{SU}(2)_A$-Symmetrie in eine einfache SU(2)-Symmetrie, welche durch Q^a hervorgerufen wird, da $Q^a \mid 0\rangle = 0$.
Durch das spontane Symmetriebrechen entsteht beim Pionen-Wechselwirkungsterm ein zusätzlicher Masseterm für das Quark-Spinor [3].

$$\bar{\Psi} g(\sigma + i\gamma_5\tau \cdot \vec{\pi})\Psi \to \bar{\Psi} g(\sigma' + i\gamma_5\tau \cdot \vec{\pi})\Psi + g\langle\sigma\rangle\bar{\Psi}\Psi \tag{2.12}$$

Deshalb erweitert sich der Lagrangian durch die spontane Symmetriebrechung zu:

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{\Psi} i\partial\!\!\!/\Psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}) - \bar{\Psi} g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi})\Psi - \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 - g\langle\sigma\rangle\bar{\Psi}\Psi \tag{2.13}$$

Das System ist weiterhin unter einer Vektortransformation invariant. Auch bleibt die Baryonenzahl erhalten. Jedoch gilt nach der PACA (partially conserved axial-vector current) Relation:

$$\partial^\mu A^a_\mu = f_\pi m^2_\pi \Phi^a. \tag{2.14}$$

Kapitel 3

Großkanonisches Potential

Das großkanonische Potential Ω ist definiert durch die Formel:

$$\begin{aligned}\Omega(T,\mu) &= -\frac{T}{V}\ln\big(Z(T,\mu)\big) \\ &= -\frac{T}{V}\ln\Big[\int \mathfrak{D}\Psi\mathfrak{D}\bar{\Psi}\mathfrak{D}\sigma\mathfrak{D}\vec{\pi}\,\exp\Big(\int_0^\beta d\tau\int d^3x(\mathcal{L}_{QM}+\mu\bar{\Psi}\gamma^0\Psi)\Big)\Big]\end{aligned} \tag{3.1}$$

Nach mehreren Umformungen, welche im Anhang dokumentiert wurden, ergibt sich für das großkanonische Potential:

$$\Omega = -\frac{2N_fN_c}{V}\sum_{\vec{p}}\left[\omega + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma,\vec{\pi}) \tag{3.2}$$

Wobei $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + g^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}$.

Durch den zusätzlichen Masseterm im Falle einer spontanen Symmetriebrechung folgt für den Lagrangian [3]:

$$\Omega^{sSb} = -\frac{2N_fN_c}{V}\sum_{\vec{p}}\left[\omega + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma,\vec{\pi}) - c\sigma \tag{3.3}$$

3.1 Unendliches Volumen

Im unendlichen Volumen können alle Impulse auftreten. Deshalb kann deren Summe in ein Volumenintegral über den Impuls umschrieben werden.
Somit ergibt sich für das großkanonische Potential:

$$\Omega = -2N_fN_c\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}[\omega + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega-\mu)})] + U(\sigma,\vec{\pi}) \tag{3.4}$$

Dieses lässt sich mit Hilfe von Kugelkoordinaten zu einem eindimensionalen Integral vereinfachen, da $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + g^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}$ von p, nicht aber von den Raumwinkeln ϕ und θ, abhängig ist. Es ergibt sich im chiralen Limes:

$$\Omega = -N_fN_c\int\frac{dp}{\pi^2}p^2[\omega + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega-\mu)})] + U(\sigma,\vec{\pi}) \tag{3.5}$$

bzw. bei spontaner Symmetriebrechung:

$$\Omega^{sSb} = -N_fN_c\int\frac{dp}{\pi^2}p^2[\omega + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\cdot\ln(1+e^{-\beta(\omega-\mu)})] + U(\sigma,\vec{\pi}) - c\sigma \tag{3.6}$$

3.2 Endliches Volumen

Im endlichen Volumen (Würfel mit Seitenlänge L), kann man nicht mehr über den gesamten Impuls integrieren, da dieser nur diskrete Werte annehmen kann. Durch das Betrachten der Randbedingungen für Ψ lassen sich die möglichen Werte bestimmen.

3.2.1 Randbedingungen

Geht man von periodischen Randbedingungen aus, so muss für Ψ gelten:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\stackrel{!}{=} \Psi(x+L) \\ \Psi(y) &\stackrel{!}{=} \Psi(y+L) \\ \Psi(z) &\stackrel{!}{=} \Psi(z+L) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Transformiert man Ψ Fourier, so gilt:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{p}\vec{r})\bar{\Psi}(\vec{p};t)d\vec{p} \tag{3.8}$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}+\vec{e}_x L) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{p}(\vec{r}+\vec{e}_x L)\bar{\Psi}(\vec{p};t)d\vec{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{p}\vec{r}) \cdot \exp(ip_x L)\bar{\Psi}(\vec{p};t)d\vec{p} \\ &\stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{p}\vec{r})\bar{\Psi}(\vec{p};t)d\vec{p} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} & & \exp(ip_x L) &\stackrel{!}{=} 1 \\ & \Rightarrow & p_x &= \frac{2\pi n_x}{L} \\ \text{Analog folgt :} & & p_y &= \frac{2\pi n_y}{L} \\ & & p_z &= \frac{2\pi n_z}{L}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Wobei $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$.

Antiperiodische Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\stackrel{!}{=} -\Psi(x+L) \\ \Psi(y) &\stackrel{!}{=} -\Psi(y+L) \\ \Psi(z) &\stackrel{!}{=} -\Psi(z+L) \end{aligned} \tag{3.11}$$

$\Rightarrow \exp(ip_x L) \stackrel{!}{=} -1$

Damit muss bei antiperiodischen Randbedingungen für die Impulse gelten:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{(2n_x+1)\pi}{L} \\ p_y &= \frac{(2n_y+1)\pi}{L} \\ p_z &= \frac{(2n_z+1)\pi}{L} \qquad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

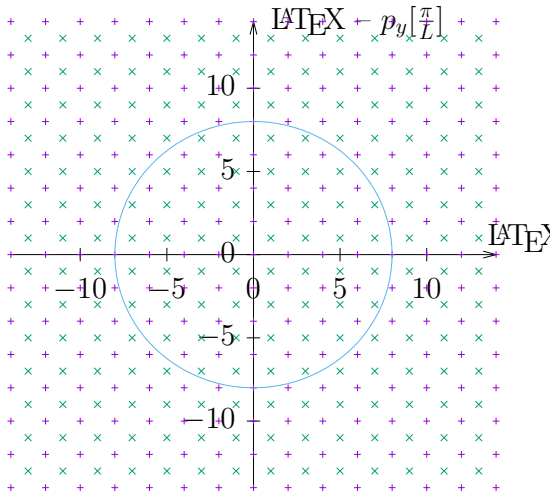

Abbildung 3.1: Mögliche Impulse bei periodischen (rot) bzw. antiperiodischen (grün) Randbedingungen

3.2.2 Vereinfachen der dreifachen Summe

Im Folgenden betrachtet man ein System mit periodischen Randbedingungen.
Für den Impulsbetrag p gilt:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{2\pi}{L}\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \tag{3.13}$$

Dieser ist nur von $n = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ (n $\in \mathbb{N}$) abhängig und nicht einzeln von n_x, n_y und n_z.
Hat man also bei einer Funktion, die nur von p abhängig ist, eine dreifache Summe über n_x, n_y und n_z, kann man diese in eine einfache Summe über n umschreiben, wenn man die Funktion mit dem jeweiligen Entartungsgrad multipliziert.

Bestimmung des Entartungsgrads
Der Entartungsgrad E(n) entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, ein bestimmtes n aus den verschiedenen n_x, n_y und n_z zu bilden.
$n = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$ beschreibt eine Kugel durch den Ursprung mit den Radius $\sqrt{n}$.
Der Entartungsgrad E(n) entspricht also der Anzahl der Gitterpunkte, die auf einer Kugelschale des Radiusses $\sqrt{n}$ liegen.
Der Einfachheit halber betrachtet man anfangs den zweidimensionalen Fall.
In Abbildung 3.1 sind die möglichen n_x und n_y bei periodischen Randbedingungen sowie ein Kreis eingezeichnet. Um die Gesamtzahl der Gitterpunkte innerhalb des Kreises zu bestimmen, reicht es aus, wenn man die Anzahl in einem Quadranten mit vier multipliziert und einen für den Punkt im Ursprung dazu addiert.
Aufgrund des gleichmäßigen Verlaufs des Gitternetzes weiß man, dass in einem Viertelkreis des Radiusses $\sqrt{n}$, $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ Linien mit Gitterpunkten liegen. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann man die Anzahl der Gitterpunkte auf einer Linie bestimmen.
Insgesamt sind in einem Kreis mit dem Radius $\sqrt{n}$:

$$N(r) = \sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor + 1 \qquad \text{Gitterpunkte zufinden.} \tag{3.14}$$

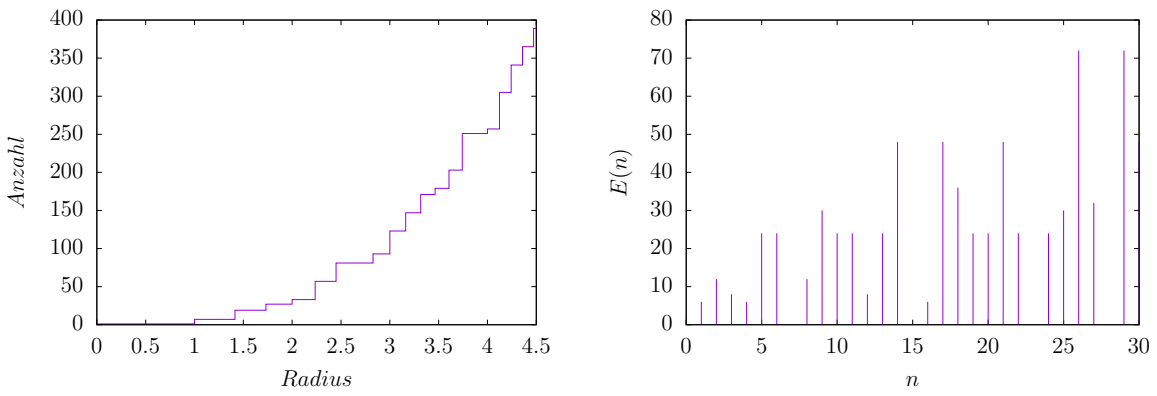

Abbildung 3.2: links: Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugel mit dem Radius $\sqrt{n}$
rechts: Entartungsgrad E(n) in Abhängigkeit von n

Erweitert man das Modell auf den dreidimensionalen Raum, betrachtet man, da auch in der dritten Dimension nur diskrete n_i auftreten, $2n_i + 1$ Kreisscheiben verschiedener Radien.
Von diesen hat die Mittlere als größte Kreisscheibe den Radius der Kugel $\sqrt{n}$. Bei den restlichen $2n_i$ Kreisscheiben haben jeweils die zwei, die von der Mittleren gleich weit entfernt sind, den selben Radius. Diesen kann man erneut durch den Satz des Pythagoras bestimmen.
Somit erhält man für die gesamte Anzahl der Gitterpunkte in einer Kugel mit dem Radius $\sqrt{n}$:

$$N(n) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left(1 + 4 \cdot \sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor} \lfloor\sqrt{n - l^2 - k^2}\rfloor\right) + 4 \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \lfloor\sqrt{n - m^2}\rfloor + 1 \tag{3.15}$$

Um auf die Anzahl der Punkte zu kommen, die nur auf der Kugelschale mit dem Radius $\sqrt{n}$ liegen, subtrahiert man von der Gesamtanzahl der Punkte in der Kugel die Gesamtanzahl der Punkte in der Kugel mit dem Radius $\sqrt{n-1}$.
Der Entartungsgrad ergibt sich also anhand der Formel:

$$\begin{aligned} E(n) &= N(n) - N(n-1) \\ \text{wobei}: \quad N(n) &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left(1 + 4 \cdot \sum_{l=0}^{\lfloor\sqrt{n-k^2}\rfloor} \lfloor\sqrt{n - l^2 - k^2}\rfloor\right) + \sum_{m=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \lfloor\sqrt{n - m^2}\rfloor + 1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Somit ergibt sich für das großkanonische Potential im endlichen Volumen:

$$\begin{aligned} \Omega &= -\frac{2N_f N_c}{V} \sum_{\vec{p}} \left[\omega + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma, \vec{\pi}) \\ &= -\frac{2N_f N_c}{V} \sum_{n_x, n_y, n_z} \left[\omega + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma, \vec{\pi}) \\ &= -\frac{2N_f N_c}{V} \sum_{n} E(n) \left[\omega + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma, \vec{\pi}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Analog ergibt sich im Falle einer spontanen Symmetriebrechung:

$$\Omega_{sSb} = -\frac{2N_f N_c}{V} \sum_{n} E(n) \left[\omega + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right] + U(\sigma, \vec{\pi}) - c\sigma \tag{3.18}$$

3.3 Vakuum Grundzustand

Um den Vakuumzustand bei spontaner Symmetrie-Brechung zu betrachten, untersucht man den T=μ=0-Limes.
Für das Potential im Vakuumzustand erhält man:

$$\Omega^{sSb}_{\text{Vakuum}} \underset{T,\mu\to 0}{=} -\frac{2N_f N_c}{V}\sum_{\vec{p}}\sqrt{\vec{p}^2+g^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}+\frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\vec{\pi}^2-\nu^2)^2-c\sigma \tag{3.19}$$

Das Minimum des Potentials bestimmt man, indem man die Ableitungen gleich null setzt:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Omega^{sSb}_{\text{Vakuum}}}{\partial\pi^a}\right|_{\sigma=<\sigma>,\vec{\pi}=0} &= -\frac{2N_f N_c}{V}\sum_{\vec{p}}\frac{g^2\pi^a}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}}+\lambda\pi^a(\sigma^2+\vec{\pi}^2-\nu^2)\Big|_{\sigma=\langle\sigma\rangle,\vec{\pi}=0}\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\Omega^{sSb}_{\text{Vakuum}}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=<\sigma>,\vec{\pi}=0} &= -\frac{2N_f N_c}{V}\sum_{\vec{p}}\frac{g^2\sigma}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2(\sigma^2+\vec{\pi}^2)}}+\lambda\sigma(\sigma^2+\vec{\pi}^2-\nu^2)-c\Big|_{\sigma=\langle\sigma\rangle,\vec{\pi}=0}\\ &= -\frac{2N_f N_c g^2\langle\sigma\rangle}{V}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\langle\sigma\rangle^2}}+\lambda\langle\sigma\rangle(\langle\sigma\rangle^2-\nu^2)-c\\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

Daraus erhält man folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}\langle\sigma\rangle\lambda(\langle\sigma\rangle^2-\nu^2) &= \frac{2N_f N_c g^2\langle\sigma\rangle}{V}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\langle\sigma\rangle^2}}+c\\ \to \nu^2 &= \langle\sigma\rangle^2-\frac{2N_f N_c g^2}{V\lambda}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\langle\sigma\rangle^2}}-\frac{c}{\lambda\langle\sigma\rangle}\end{aligned} \tag{3.22}$$

3.4 Massen

3.4.1 Tree-level Masse

Die Tree-level Masse eines Mesons ist durch die zweite Ableitung des Pionen-Sigma Potentials im thermodynamischen Minimum gegeben:

$$m^2_{j,t} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial\Phi_j^2}\right|_{\sigma=\langle\sigma\rangle,\vec{\pi}=0} \tag{3.23}$$

Somit erhält man für die Masse des Pions bzw. Sigmamesons:

$$\begin{aligned}m^2_{\sigma,t} &= 3\lambda\langle\sigma\rangle^2-\lambda\langle\nu\rangle^2\\ m^2_{\pi,t} &= \lambda\langle\sigma\rangle^2-\lambda\langle\nu\rangle^2\end{aligned} \tag{3.24}$$

Das Pion hat eine Masse von $m_\pi = \sqrt{\lambda\langle\sigma\rangle^2-\lambda\nu^2}$, das Sigmameson eine Masse von $m_\sigma = \sqrt{3\lambda\langle\sigma\rangle^2-\lambda\nu^2}$ und das Quark-Spinor eine Masse von $m_\Psi = \langle\sigma\rangle g$, durch welche die Axial-Symmetrie gebrochen wird.

3.4.2 Screening Masse

Die Screening Masse ist ähnlich wie die Tree-Level Masse durch die zweite Ableitung des großkanonischem Potentials im thermodynamischen Minimum gegeben [2]:

$$m_{j,t}^2 = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \Phi_j^2}\bigg|_{\sigma=\langle\sigma\rangle,\vec{\pi}=0} \tag{3.25}$$

Somit erhählt man für die Masse des Pions bzw. Sigmamesons:

$$\begin{aligned} m_{\sigma,t}^2 &= 3\lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{2N_f N_c g^2}{V}\sum_{\vec{p}}\left(\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\sigma^2}} + \frac{g^2\sigma^2}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\sigma^2}}\right) \\ m_{\pi,t}^2 &= \lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{2N_f N_c g^2}{V}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2+g^2\sigma^2}} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Kapitel 4

Numerik

Der erste Term zur Berechnung des großkanonischen Potentials divergiert. Im unendlichen Volumen handelt es sich dabei um das Integral: $\left(- N_f N_c \int \frac{dp}{\pi^2} p^2 \omega \right)$ und im endlichen Volumen um die Summe: $\left(- \frac{2N_f N_c}{V} \sum E(n)\omega \right)$. Um trotzdem Aussagen zu bekommen, führt man verschiedene Näherungen durch.

4.1 Standard mean field approach

Bei der standard MFA lässt man die divergierenden Teile weg.

4.1.1 Berechnung der Parameter

Bei der Bestimmung der Parameter λ, g, ν und c, geht man davon aus, dass die chirale Symmetrie spontan im Vakuumszustand gebrochen ist. Als Erwartungswert für σ wird die Zerfallskonstante des Pions: f_π=93MeV=$\langle\sigma\rangle$ eingesetzt sowie für die Quark-Spinormasse $m_\Psi = 300MeV$, für die Pionenmasse $m_\pi = 138MeV$ und für die Sigmamasse $m_\sigma = 600MeV$ verwendet. [5]
λ lässt sich bestimmen, indem man die beiden Formeln aus (3.24) voneinander subtrahiert.

$$\begin{aligned} m_\sigma^2 - m_\pi^2 &= 2\lambda\langle\sigma\rangle^2 \\ \rightarrow \lambda &= \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2\langle\sigma\rangle^2} = 19.7 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Die Kopplungskonstante g lässt sich anhand der Goldberger-Treiman Relation $m_\Psi = g_\pi f_\pi$ berechnen:

$$m_{\bar{\Psi}} = g_\pi f_\pi \quad \rightarrow g = \frac{m_\Psi}{f_\pi} = 3.2 \tag{4.2}$$

Um c zu ermitteln, benutzt man die PCAC (Gl. 2.14):

$$c = m_\pi^2 f_\pi = 1.77 \cdot 10^6 MeV^3 \tag{4.3}$$

In Formel 3.22 steht eine Bedingung für ν. Da man die standard MFA durchführt, kann man die Summe aus 3.22 weglassen und erhält somit für ν:

$$\nu^2 = \langle\sigma\rangle^2 - \frac{c}{\lambda\langle\sigma\rangle} \qquad \rightarrow \nu = 87.6MeV \tag{4.4}$$

Die berechneten Parameter können sowohl für die Auswertung im unendlichen Volumen, als auch im endlichen Volumen verwendet werden.

4.1.2 Unendliches Volumen

Im unendlichen Volumen vereinfacht sich das großkanonische Potential im chiralen Limes zu:

$$\Omega^{sMFA} = -N_f N_c \int \frac{dp}{\pi^2} p^2 \left[T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}) \right] + U(\sigma, \vec{\pi}) \tag{4.5}$$

bzw. bei spontaner Symmetriebrechung:

$$\Omega_{sSb}^{sMFA} = -N_f N_c \int \frac{dp}{\pi^2} p^2 \left[T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)}) \right] + U(\sigma, \vec{\pi}) - c\sigma \tag{4.6}$$

Abbildung 4.1 zeigt das großkanonische Potential als Funktion von σ bei einer Temperatur von 1MeV:

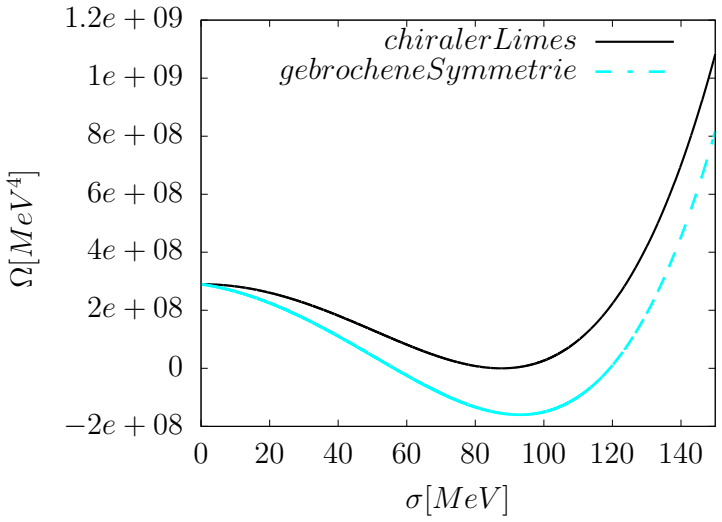

Abbildung 4.1: Großkanonisches Potential als Funktion von σ im unendlichem Volumen

4.1.3 Endliches Volumen

Bei der Summe im endlichen Volumen braucht man zudem einen Cutoff Parameter für n, weil die Summe eigentlich bis unendlich laufen würde. Als Cutoff Parameter für n legt man einen Wert Λ fest; ab diesem Wert ändert sich der Betrag der konvergierenden Terme von der Summe marginal.
Das heißt, man sucht einen Wert Λ, ab dem gilt:

$$\begin{aligned} T \cdot \ln(1 + e^{-\frac{(\sqrt{(\frac{2\pi}{L})^2\Lambda + g^2\sigma^2} \pm \mu)}{T}}) &\approx 0 \\ \rightarrow \quad e^{-\frac{(\sqrt{(\frac{2\pi}{L})^2\Lambda + g^2\sigma^2} \pm \mu)}{T}} &\approx 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Summe konvergiert je nach Temperatur, Würfellänge, σ und chemisches Potential unterschiedlich schnell.
Das chemische Potential wird bei der Auswertung gleich null gesetzt und wird folglich vernachlässigt.
Sind die Temperatur und die Würfellänge maximal und σ minimal, konvergieren die Terme am langsamsten.
Bestimmt man also einen Cutoff Parameter für den Fall $T_{\max}$, $L_{\max}$ und $\sigma_{\min}$, so kann man diesen auch für alle anderen Werte benutzen. Man untersucht also:

$$e^{-\frac{\sqrt{(\frac{2\pi}{L_{\max}})^2\Lambda + g^2\sigma_{\min}^2}}{T_{\max}}} \approx 0 \tag{4.8}$$

In der Auswertung wird σ zwischen 0 und 200MeV sowie die Temperatur zwischen 0 und 210MeV variiert. Somit ist $\sigma_{\min}$=0 und $T_{\max}$=210MeV. Das endliche Volumen wird bis zu einer Würfellänge von L=10fm$\equiv \frac{10}{197{,}326972\text{MeV}}$ untersucht.
Als Bedingung für Λ folgt:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\frac{2\pi}{L_{\max}}\sqrt{\Lambda}}{T_{\max}}} &\approx 0 \\ e^{-\frac{2\pi \cdot 197{,}326972}{10 \cdot 210}\sqrt{\Lambda}} &\approx 0 \\ e^{-0.59 \cdot \sqrt{\Lambda}} &\approx 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Beim Programmieren wurde Λ=1000 gesetzt.

Beim Weglassen der divergierenden Summe muss der Nullbeitrag (n=0) trotzdem dazu addiert werden.
Somit erhält man für das großkanonische Potential im chiralen Limes:

$$\Omega_{CL}^{sMFA} = -\frac{2N_f N_c}{V}\left(g\sigma + \sum_n^{\Lambda} E(n)\left[T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right]\right) + U(\sigma, \vec{\pi}) \tag{4.10}$$

bzw. bei spontaner Symmetriebrechung:

$$\Omega_{sSb}^{sMFA} = -\frac{2N_f N_c}{V}\left(g\sigma + \sum_n^{\Lambda} E(n)\left[T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T \cdot \ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\right]\right) + U(\sigma, \vec{\pi}) - c\sigma \tag{4.11}$$

Abbildung 4.2 und 4.3 zeigen für verschiedenen Längen L das großkanonische Potential in Abhängigkeit von σ (T=1MeV).

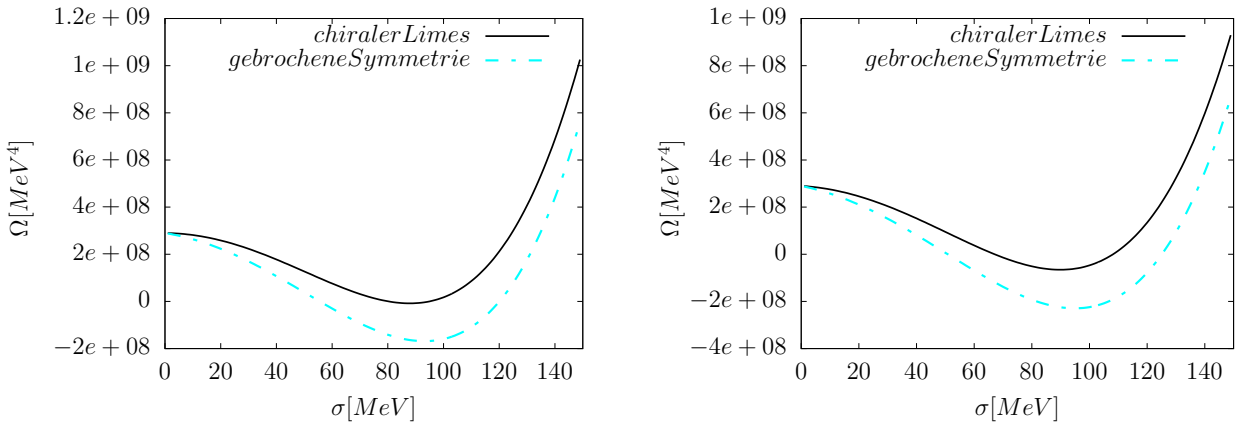

Abbildung 4.2: Großkanonisches Potential als Funktion von σ.
links: L=10 rechts: L=5

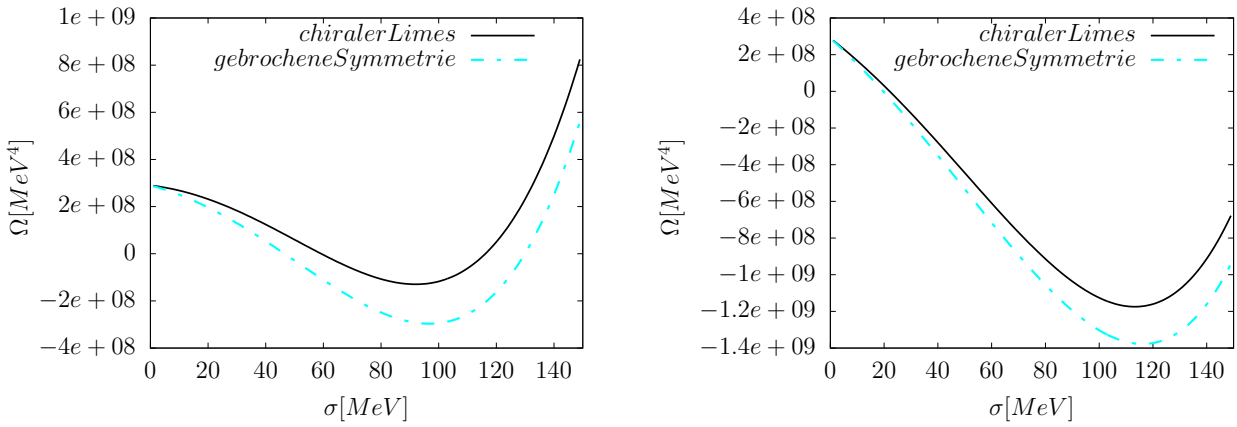

Abbildung 4.3: Großkanonisches Potential als Funktion von σ.
links: L=4 rechts: L=2

4.1.4 Vergleich

Die nachfolgende Abbildung 4.4 zeigt bei einer festgelegten Temperatur von 1MeV den Zusammenhang zwischen dem großkanonischem Potential und σ bei variierender Würfellänge L im Falle einer spontanen Symmetriebrechung.

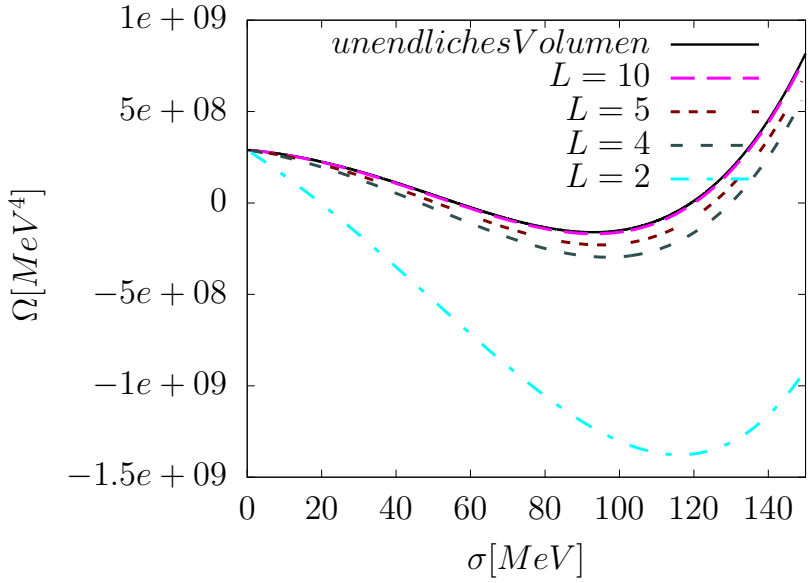

Abbildung 4.4: Großkanonischen Potential in Abhängigkeit von σ verschiedenen Volumina (schwarz: unendliches Volumen, rot: L=10fm, grün: L=5fm, pink: L=4fm und blau: L=2fm)

Je kleiner L ist, desto weiter rechts und desto tiefer liegt das Minimum von σ.
Der Ordnungsparameter σ_0 ist also umso größer, je kleiner das Volumen des Würfels ist.

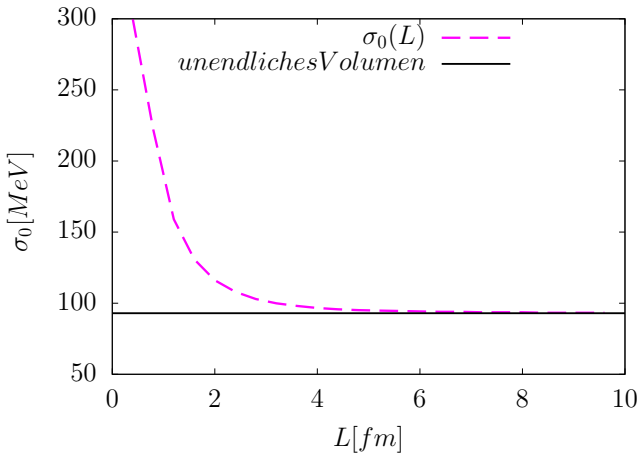

Abbildung 4.5: σ_0 in Abhängigkeit der Würfellänge L

Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 4.5 nochmals verdeutlicht. Falls L→0, dann $\sigma_0 \to \infty$. Ab einer Würfellänge von L≥ 5fm nähert sich der Ordnungsparameter σ_0 nahezu dem des unendlichen Volumens (schwarze Linie) an.

Des Weiteren untersucht man bei steigender Temperatur das Verhalten von σ_0.
In Abbildung 4.6 ist σ_0, rechts im chiralen Limes und links bei spontaner Symmetriebrechung, als Funktion der Temperatur dargestellt.

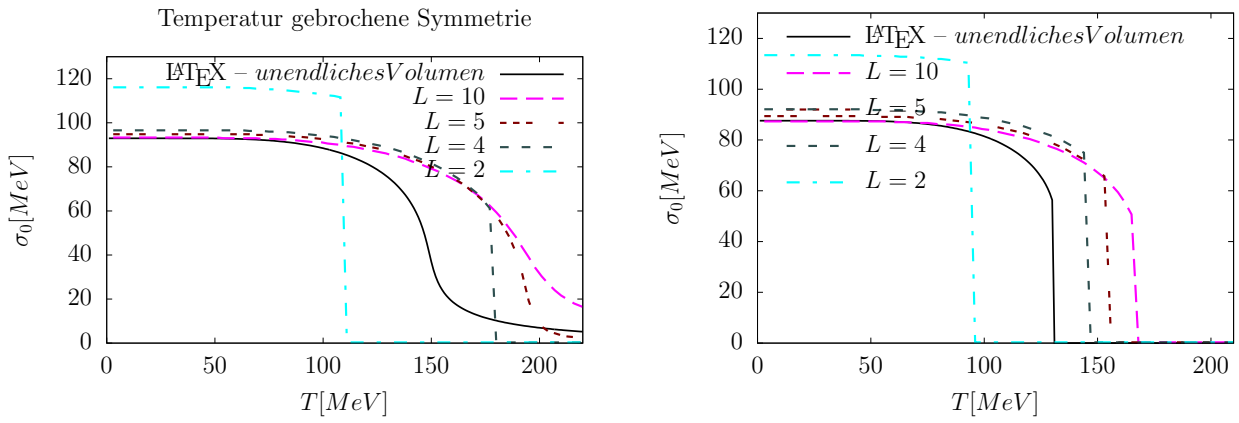

Abbildung 4.6: σ_0 in Abhängigkeit der Temperatur bei spontaner Symmetriebrechung (links) und im chiralen Limes (rechts) für verschiedene Volumina (schwarz: unendliches Volumen, rot: L=10fm, grün: L=5fm, pink: L=4fm und blau: L=2fm)

Vergleicht man die beiden Graphen miteinander, erkennt man, dass die Unterschiede der beiden Graphen umso deutlicher ausfallen, je größer das Volumen ist.
Bis zu einer Länge von ca. 4fm kommt es im Ordnungsparameter $\sigma_0(T)$ sowohl im chiralen Limes, als auch bei spontaner Symmetriebrechung zu Sprüngen. Ein kontinuierlicher Verlauf des Ordnungsparameters σ_0 entsteht hingegen durch die spontane Symmetriebrechung bei größeren Würfellängen.

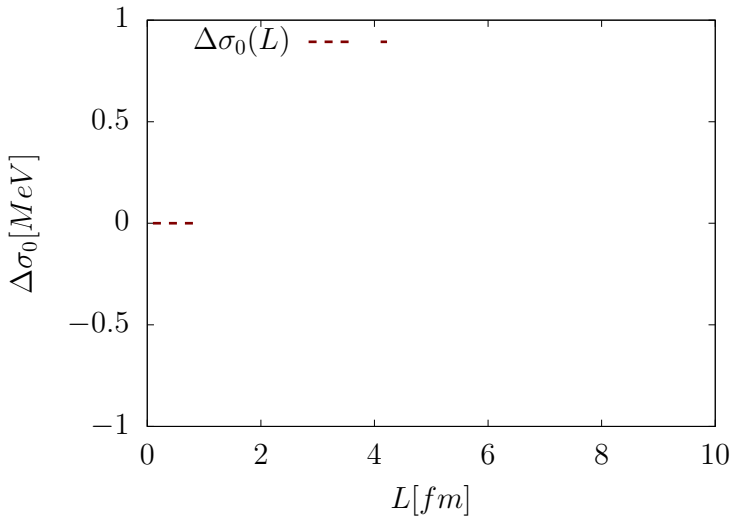

Abbildung 4.7: Differenz zwischen den Ordnungsparametern σ_0 mit und ohne chiralen Limes in Abhängigkeit der Würfellänge L

Abbildung 4.7 zeigt die Differenz zwischen dem Ordnungsparameter im chialen Limes und dem Ordnungsparameter bei spontaner Symmetriebrechung. Bei einer Würfellänge bis zu 5fm steigt die Differenz recht stark an und nähert sich dann immer mehr der des unendlichen Volumens.

Die Sprünge bei $\sigma_0(T)$ lassen auf Phasenübergänge 1. Ordnung schließen. Der kontinuierliche Verlauf bei L$\geq$ 5fm bei gebrochener Symmetrie hingegen deutet auf einen Phasenübergang 2. Ordnung hin.
In der Abbildung 4.8 wird links das Verhalten des großkanonischen Potentials beim Phasenübergang 1. Ordnung und rechts beim Phasenübergang 2. Ordnung genauer untersucht.
Für den Phasenübergang 1. Ordnung ist das großkanonische Potential in Abhängigkeit von σ für eine Würfellänge von 2fm bei spontaner Symmetriebrechung für eine Temperatur von $T_1 = 90MeV$ (blau), $T_2 = 108MeV$ (schwarz) und $T_3 = 120MeV$ (pink) dargestellt. Bei der Temperatur $T_2 = 108MeV$ kommt es zu dem Sprung in Abbildung 4.6 (links).
Der Phasenübergang 2. Ordnung wird durch das großkanonische Potential als Funktion von σ bei einer Würfellänge von L=10fm, im Falle von spontaner Symmetriebrechung und für Temperaturen von $T_1 = 90MeV, T_2 = 140MeV$ und $T_3 = 190MeV$ veranschaulicht.

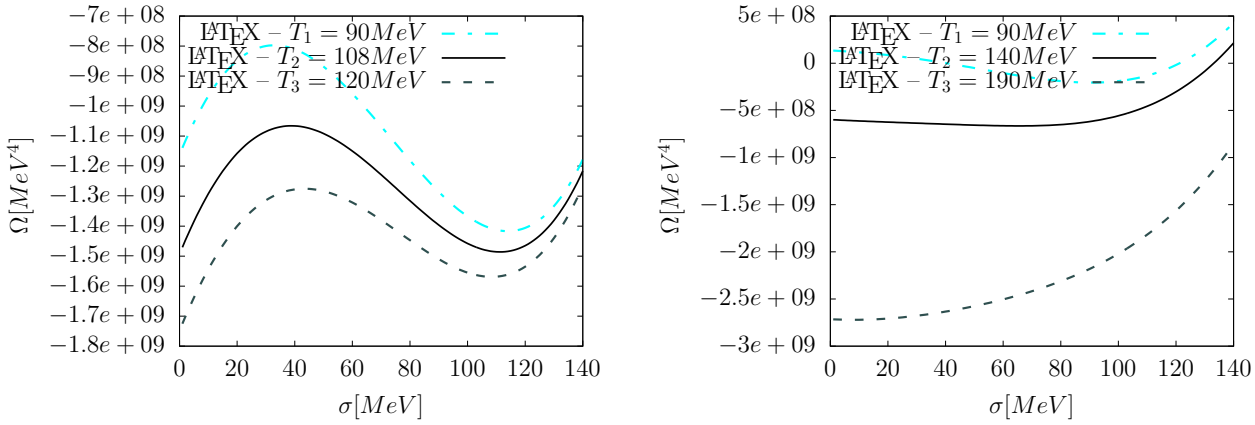

Abbildung 4.8: σ_0 in Abhängigkeit der Temperatur bei spontaner Symmetriebrechung (links) und im chiralen Limes (rechts) für verschiedene Volumina (schwarz: unendliches Volumen, rot: L=10fm, grün: L=5fm, pink: L=4fm und blau: L=2fm)

Beim Phasenübergang 1. Ordnung wird das lokale Minimum bei σ_0=0 ab der Temperatur von 108MeV zu einem globalen Minimum. Beim Phasenübergang 2. Ordnung hingegen verschiebt sich das globale Minimum kontinuierlich. Bei 0 angekommen, ist das System wieder chiral symmetrisch.

Bei kleinen Volumina hat die spontane Brechung der Symmetrie also insgesamt sehr viel weniger Auswirkungen auf den Verlauf von σ_0 als Funktion der Temperatur. Erst ab einer Größe von ca. 5fm führt die spontane Symmetriebrechung zu einem nicht verschwindenden Quarkkondensat und einer effektiven Quarkmasse.

4.2 Extended mean field approach

Eine genauere Möglichkeit die endlichen Volumeneffekte im chiralen Phasenübergang zu untersuchen, ist die extended MFA. Bei der extended MFA ändert man die Grenze des divergierenden Terms von unendlich auf einen Cutoff Parameter $\Lambda < \infty$, sodass der Term dennoch lösbar wird. Dadurch könnte man die zusätzlich auftretenden Quanten-Fluktuationen berücksichtigen, die bei der sMFA vernachlässigt werden. In unserem Fall, müsste man, um aufschlussreiche Ergebnisse zu bekommen, den Cutoff Parameter auf die Größenordnung von wenigen GeV setzen.

4.2.1 Parameter

Die in der standard MFA berechneten Parameter, c, ν, λ und g, können im Allgemeinen bei der extended MFA nicht mehr verwendet werden.
Zum Berechnen der neuen Parameter geht man wieder davon aus, dass der Erwartungswert von σ den Wert der Zerfallskonstante des Pions f_π=93MeV hat und verwendet auch, genau wie bei der sMFA, für die Pionenmasse m_π=138MeV sowie für die Quark-Spinormasse m_Ψ=300MeV.
m_σ hingegen ist von der Wahl des Cutoff Parameters abhängig.
Die Kopplungskonstante g hat, wie bei der sMFA, da m_Ψ und f_π weiterhin konstant bleiben, den Wert 3.2.
Die restlichen Parameter ν, λ und c sind alle vom Cutoff Parameter abhängig.

Bestimmt werden diese anhand der Bedingung für ν^2 aus Formel 3.22 sowie den Screening-Massen m_π^2 und m_σ^2 (Formel 3.26). Die Summe über $\vec{p}$ wird nicht mehr vernachlässigt, sondern es wird über alle möglichen Impulse bis zu dem Cutoff-Parameter summiert.
Somit ergibt sich im unendlichen Volumen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{p}}^{\Lambda} &\rightarrow \int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^2} \rightarrow \int_0^\Lambda \frac{dp}{2\pi^2} p^2 \\
\nu^2 &= \lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{N_f N_c g^2}{\pi^2\lambda}\int_0^\Lambda \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + g^2\langle\sigma\rangle^2}} - \frac{c}{\lambda\langle\sigma\rangle} \\
m_{\sigma,t}^2 &= 3\lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{N_f N_c g^2}{\pi^2}\int_0^\Lambda \left(\frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + g^2\sigma^2}} + \frac{g^2\sigma^2 p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + g^2\sigma^2}}\right) \\
m_{\pi,t}^2 &= \lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{N_f N_c g^2}{\pi^2}\int_0^\Lambda \frac{p^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + g^2\langle\sigma\rangle^2}}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Im endlichen Volumen:

$$\begin{aligned}
\sum_{\vec{p}}^{\Lambda} &\rightarrow \sum_n^N E(n) \\
\nu^2 &= \lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{2N_f N_c g^2}{V\lambda}\sum_n^N \frac{E(n)}{\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{L^2}n + g^2\langle\sigma\rangle^2}} - \frac{c}{\lambda\langle\sigma\rangle} \\
m_{\sigma,t}^2 &= 3\lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{2N_f N_c g^2}{V}\sum_n^N \left(\frac{E(n)}{\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{L^2}n + g^2\sigma^2}} + \frac{E(n) g^2\langle\sigma\rangle^2}{\sqrt{\vec{p}^2 + g^2\langle\sigma\rangle^2}}\right) \\
m_{\pi,t}^2 &= \lambda\langle\sigma\rangle^2 - \lambda\langle\nu\rangle^2 - \frac{2N_f N_c g^2}{V}\sum_n^N \frac{E(n)}{\sqrt{\frac{(2\pi)^2}{L^2}n + g^2\langle\sigma\rangle^2}}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei für N gilt:

$$\Lambda \geq \frac{2\pi}{L}\sqrt{n} \quad \rightarrow N = \lfloor \Lambda^2 \frac{L^2}{(2\pi)^2} \rfloor \tag{4.14}$$

Mit den bei der extended MFA berechneten Parametern, könnte man in einer umfangreicheren Arbeit, ähnlich wie bei der standard MFA, verschiedene Plots für variierende Volumina erstellen und damit genauer untersuchen, in wie fern die zusätzlich betrachteten Quantenfluktuationen in Abhängigkeit des Volumens Auswirkungen auf die Phasenübergänge haben.

Kapitel 5

Schlusswort

In dieser Arbeit, wurde der chirale Phasenübergang im endlichen Volumen genauer untersucht. Dazu wurde anhand des thermodynamischen Potentials der Ordnungsparameter σ_0, sowohl im chiralen Limes, als auch bei spontan gebrochener Symmetrie, für variierende Volumina berechnet. Um im endlichen Volumen das großkanonische Potential zu ermitteln, wurden die bei periodischen Randbedingungen möglichen Impulse bestimmt und über diese summiert. Mit Hilfe der standard MFA wurden die Parameter λ, g, c und ν für eine Pionenzerfallskonstante f_π=93MeV, einer Qurak-Spinormasse m_Ψ=300MeV, einer Pionenmasse m_π=138MeV und einer Sigmamasse m_σ = 600MeV berechnet.
Anschließend wurde das großkanonische Potential als Funktion von σ und der Ordnungsparameter σ_0 als Funktion der Temperatur für das unendliche Volumen sowie für endliche Volumina geplottet. Bei unendlichem bzw "großem"Volumen (ab ca. $(5\mathrm{fm})^3$) unterscheiden sich die Phasendiagramme im chiralen Limes und in der spontan gebrochenen Phase voneinander. In der spontan gebrochen Symmetrie-Phase formen die Quarks ein nicht verschwindendes Quarkkondensat und bilden eine effektive Quarkmasse, die sogenannte constituent Quarkmasse.
Betrachtet man hingegen ein System mit einem Würfelvolumen bis zu ca. $(5\mathrm{fm})^3$, so hat die chirale Symmetriebrechung kaum Auswirkungen auf die Phasendiagramme.

Anhang A

Anhang

A.1 Mathematische Konventionen

A.1.1 Einheiten

In der gesamten Arbeit wird mit $\hbar = c = k_B = 1$ gerechnet.
Folglich werden alle physikalischen Größen in Einheiten der Energie ausgedrückt.
Längeneinheiten werden in

$$1\text{fm} \equiv \frac{1}{hc} = \frac{1}{197,326972\text{MeV}} \tag{A.1}$$

und Temperaturen werden in

$$1\text{K} \equiv k_B = 8,6174 \cdot 10^{-11}\text{MeV} \tag{A.2}$$

umgerechnet.

A.1.2 Notationen

Es wird die abkürzende Schreibweise $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, welche für einen beliebigen vier-komponentigen Vektor gilt, verwendet. Dabei handelt es sich bei γ^μ um die γ-Matrizen in der Dirac-Pauli Darstellung [6]. Diese lauten:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \text{und} \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Wobei es sich bei $\vec{\sigma}$ wiederum um die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

handelt.
Die γ-Matrizen erfüllen die algebraischen Bedingungen:

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \quad \text{sowie} \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{A.5}$$

Des Weiteren werden in der Arbeit die Isospin Versionen der Pauli-Matrizen $\vec{\tau}$ verwendet:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Wobei gilt:

$$[\tau_j, \tau_k] = i\epsilon_{jkl}\tau_l \quad \text{sowie} \quad \tau_j, \tau_k = 2\delta_{jk}1_{\text{Flavour}} \tag{A.7}$$

A.2 Chirale Symmmetrie

Betrachtet man eine infinitesimale Transformation um $\vec{\theta}$, so lassen sich die Exponentialfunktionen, da alle Terme mit $(\vec{\theta})^x$, wobei $x \geq 2$,vernachlässigbar sind, schreiben als:

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}} &\simeq (1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}) \\ e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}} &\simeq (1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}) \end{aligned} \tag{A.8}$$

Somit ergibt sich für die Vektortransformation:

$$\begin{aligned} \Lambda_V : \quad \Psi &\to e^{-i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}}\Psi \simeq (1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ \bar{\Psi} &\to \bar{\Psi}e^{i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}} \simeq \bar{\Psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}) \end{aligned} \tag{A.9}$$

und für die Axialtransformation:

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \quad \Psi &\to e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}}\Psi \simeq (1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ \bar{\Psi} &\to \bar{\Psi}e^{-i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}} \simeq \bar{\Psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta}) \end{aligned} \tag{A.10}$$

Um zu zeigen, dass es sich tatsächlich um die chirale Symmetriegruppe handelt, muss man zusätzlich die Transformationen folgender Terme untersuchen:

$$\begin{aligned} \Lambda_V : \quad i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi &\to i\bar{\Psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\not{\partial}(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - \vec{\theta}(\bar{\Psi}\frac{\vec{\tau}}{2}\not{\partial}\Psi - \bar{\Psi}\not{\partial}\frac{\vec{\tau}}{2}\Psi) + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi \end{aligned} \tag{A.11}$$

Daraus folgt die Erhaltungsgröße:$V1^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\frac{\tau^a}{2}\Psi$.

$$\begin{aligned} \Lambda_A : \quad i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi &\to i\bar{\Psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\not{\partial}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi + \vec{\theta}\bar{\Psi}(\partial_\mu\gamma^\mu\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2} + \gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\partial_\mu\gamma^\mu)\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi \end{aligned} \tag{A.12}$$

Daraus folgt die Erhaltungsgröße: $A1^a_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\Psi$

$$\begin{aligned} \Lambda_V : \quad \vec{\pi} = i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi &\to i\bar{\Psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\vec{\tau}\gamma_5(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ &= i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi - \theta_j\bar{\Psi}(\frac{\tau_j}{2}\tau_k\gamma_5 - \tau_k\gamma_5\frac{\tau_j}{2})\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi - \theta\frac{\bar{\Psi}}{2}[\tau_j, \tau_k]\gamma_5\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi - i\epsilon_{jkl}\theta_j\bar{\Psi}\tau_l\gamma_5\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi + \epsilon_{jkl}\theta_j i\bar{\Psi}\tau_k\gamma_5\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\ &= \vec{\pi} + \vec{\theta} \times \vec{\pi} \\ \sigma = \bar{\Psi}\Psi &\to \bar{\Psi}(1 + i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})(1 - i\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\ &= \bar{\Psi}\Psi = \sigma \end{aligned} \tag{A.13}$$

Daraus folgt die Erhaltungsgröße: $V2^a_\mu = \epsilon^{abc}\pi^b\pi^c$.

$$\begin{aligned}
\Lambda_A: \quad \vec{\pi} = i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi &\to i\bar{\Psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\vec{\tau}\gamma_5(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\
&= i\bar{\Psi}\vec{\tau}\gamma_5\Psi + \bar{\Psi}\theta_j(\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\tau_k\gamma_5 + \gamma_5\tau_k\frac{\tau_j}{2}\gamma_5)\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \vec{\pi} + \theta_j\bar{\Psi}(\gamma_5\frac{1}{2}\tau_j, \tau_k\gamma_5\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \vec{\pi} + \theta_j\bar{\Psi}\gamma_5\gamma_5\underbrace{\delta_{jk}}_{1}\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma \\
\sigma = \bar{\Psi}\Psi &\to \bar{\Psi}(1 - i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})(1 + i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\theta})\Psi \\
&= \bar{\Psi}\Psi - \vec{\theta}\bar{\Psi}i\gamma_5\frac{\vec{\tau}}{2}\Psi + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \sigma - \vec{\theta}\vec{\pi}
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Daraus folgt die Erhaltungsgröße: $A2^a_\mu = (\partial_\mu\sigma)\pi^a - (\partial_\mu\pi^a)\sigma$.
Des Weiteren werden folgende Terme auf ihre Transformation untersucht:

$$\begin{aligned}
\Lambda_V: \quad \vec{\pi}^2 &\to (\vec{\pi} + \vec{\theta}\times\vec{\pi})(\vec{\pi} + \vec{\theta}\times\vec{\pi}) \\
&= \vec{\pi}^2 + 2\vec{\pi}(\vec{\theta}\times\vec{\pi}) + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \vec{\pi}^2 \\
\sigma^2 &\to \sigma^2
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_A: \quad \vec{\pi}^2 &\to (\vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma)(\vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma) \\
&= \vec{\pi}^2 + 2\vec{\theta}\vec{\pi}\sigma + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \vec{\pi}^2 + 2\sigma\vec{\theta}\vec{\pi} \\
\sigma^2 &\to (\sigma - \vec{\theta}\vec{\pi})(\sigma - \vec{\theta}\vec{\pi}) \\
&= \sigma^2 - 2\sigma\vec{\theta}\vec{\pi} + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \sigma^2 - 2\sigma\vec{\theta}\vec{\pi}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\Rightarrow (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)\xrightarrow{\Lambda_V, \Lambda_A}(\vec{\pi}^2 + \sigma^2) \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_V: \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} &\to \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu(\vec{\pi} + \vec{\theta}\times\vec{\pi})\partial^\mu(\vec{\pi} + \vec{\theta}\times\vec{\pi}) \\
&= \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu(\vec{\theta}\times\vec{\pi}) + \partial_\mu(\vec{\theta}\times\vec{\pi})\partial^\mu\vec{\pi} + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&\overset{*}{=} \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_A: \quad \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} &\to \partial_\mu(\sigma - \vec{\theta}\vec{\pi})\partial^\mu(\sigma - \vec{\theta}\vec{\pi}) + \partial_\mu(\vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma)\partial^\mu(\vec{\pi} + \vec{\theta}\sigma) \\
&= \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \partial_\mu\vec{\theta}\vec{\pi}\partial^\mu\sigma - \partial_\mu\sigma\partial^\mu\vec{\theta}\vec{\pi} + \partial\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} + \partial_\mu\vec{\theta}\sigma\partial^\mu\vec{\pi} + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\theta}\sigma + \mathcal{O}(\vec{\theta}^2) \\
&= \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi}
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
* \ \text{da}: \partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu(\vec{\theta}\times\vec{\pi}) + \partial_\mu(\vec{\theta}\times\vec{\pi})\partial^\mu\vec{\pi} &= \\
\partial_\mu\vec{\pi}[\vec{\theta}\times(\partial^\mu\vec{\pi})] + (\vec{\theta}\times\partial_\mu\vec{\pi})\partial^\mu\vec{\pi} &= \\
\epsilon_{ijk}\theta_i(\partial^\mu\pi)_j(\partial_\mu\pi)_k + \epsilon_{ijk}\theta_i(\partial_\mu\pi)_j(\partial^\mu\pi)_k &= \\
\epsilon_{ijk}(\theta_i(\partial^\mu\pi)_j(\partial_\mu\pi)_k - \theta_i(\partial^\mu\pi)_j(\partial_\mu\pi)_k) &= 0
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Man hat also gezeigt, dass alle Terme des Lagrangian des Quark-Mesonen-Modells sowohl unter der Axial-, als auch unter der Vektortransformation invariant sind.
Dabei bleibt bei der Vektortransformation $V_\mu^a = \bar{\Psi}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}\Psi + \epsilon^{abc}\pi^b\pi^c$ und bei der Axialtransformation $A_\mu^a = \bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\Psi + (\partial_\mu\sigma)\pi^a - (\partial_\mu\pi^a)\sigma$ erhalten.
Bei den Umformungen wurden die Pion-artigen Zustände $\vec{\pi} = i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ und die Sigma-artigen Zustände $\sigma = \bar{\Psi}\Psi$ als Kombinationen der Quark-Felder betrachtet.
Außerdem wurde bei den Rechnungen von der Einsteinschen Summenkonvention Gebrauch gemacht.

A.3 Großkanonisches Potential

Zur Berechnung des großkanonischem Potentials wird die sogenannte Mean Field Näherung verwendet. Das heißt, man integriert nur über Ψ und lässt σ und $\vec{\pi}$ konstant ($\partial_\mu\sigma \to 0$ und $\partial_\mu\vec{\pi} \to 0$).
Da es sich bei dem Quark-Spinor um ein Fermion handelt, kann man $\Psi(\vec{x},\tau)$ durch Fourier-Entwicklung in den Impulsraum umschreiben:

$$\Psi(\vec{x},\tau) = \frac{1}{V}\sum_n\sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p}\vec{x}+\omega_n\tau)}\tilde{\Psi}_{\alpha,n}(\vec{p}) \tag{A.21}$$

mit ω_n=(2n+1) π T.
Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Omega(T,\mu) &= -\frac{T}{V}\cdot\ln\Bigg[\int \mathfrak{D}\Psi\mathfrak{D}\bar{\Psi}\,\exp\Bigg(\int_0^\beta d\tau\int d^3x\;\bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) + \mu\gamma^0)\Psi - U(\sigma,\vec{\pi})\Bigg)\Bigg] \\
&= -\frac{T}{V}\cdot\ln\Bigg[\int\prod_{n,m}\prod_{\vec{p}}\prod_\alpha \mathfrak{D}\tilde{\Psi}_{\alpha,m}\mathfrak{D}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}\,\exp\Bigg(\int_0^\beta d\tau\int d^3x\;\sum_{n,m}\sum_{\vec{p}}\frac{1}{V}e^{-i(\vec{p}\vec{x}+\omega_n\tau)}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}(\vec{p}) \\
&\qquad\cdot\big(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma}\vec{\nabla} - g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}) + \mu\gamma^0\big)e^{i(\vec{p}\vec{x}+\omega_m\tau)}\tilde{\Psi}_{\alpha,m}(\vec{p})\Bigg)\exp\Bigg(-\frac{V}{T}U(\sigma,\vec{\pi})\Bigg)\Bigg] \\
&= -\frac{T}{V}\cdot\ln\Bigg[\int\prod_{n}\prod_{\vec{p}}\prod_\alpha \mathfrak{D}\tilde{\Psi}_{\alpha,n}\mathfrak{D}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}\,\exp\Bigg(\beta\sum_n\sum_{\vec{p}}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}(\vec{p})(\gamma^0(-i\omega_n+\mu) - \vec{\gamma}\vec{p} \\
&\qquad - g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\pi}))\tilde{\Psi}_{\alpha,n}(\vec{p})\Bigg)\Bigg] + U(\sigma,\vec{\pi})
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Beim Umformen wurde $\beta = \frac{1}{T}$, $\tau = i\cdot t$ und $\bar{\Psi} = \gamma^0\cdot\Psi^\dagger$ verwendet.
Die Grassman Algebra besagt, dass [1]

$$P = \prod_n\prod_{\vec{p}}\prod_\alpha\int\mathfrak{D}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}(\vec{p})\mathfrak{D}\tilde{\Psi}_{\alpha,n}(\vec{p})\cdot e^S = \det\mathrm{D} \tag{A.23}$$

wobei:

$$S = \sum_n\sum_{\vec{p}}\tilde{\bar{\Psi}}_{\alpha,n}(\vec{p})D_{\alpha,\rho}\tilde{\Psi}_{\alpha,n}(\vec{p}) \tag{A.24}$$

und:

$$D = \beta\big(\gamma^0(-i\omega_n+\mu) - \vec{\gamma}\vec{p} - g(\sigma + i\gamma_5\vec{\tau}\vec{\pi})\big) = \beta\begin{pmatrix}(-i\omega_n+\mu) - g\sigma & \vec{\sigma}\vec{p} - ig\vec{\tau}\vec{\pi} \\ -\vec{\sigma}\vec{p} - ig\vec{\tau}\vec{\pi} & -(-i\omega_n+\mu) - g\sigma\end{pmatrix}. \tag{A.25}$$

Mit $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = p^2$ und $(g\vec{\tau}\vec{\pi})^2 = g\pi^2$ ergibt sich:

$$\det\mathrm{D} = \beta^2\big((\omega_n + i\mu)^2 + \underbrace{p^2 + g^2\sigma^2 + g^2\pi^2}_{\omega^2}\big) \tag{A.26}$$

Da Ψ nicht nur 4-dimensional sondern $4\mathrm{N}_f\mathrm{N}_c$-dimensional ist folgt:

$$\begin{aligned}
\ln\, P &= N_f N_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \ln\big[\beta^2\big((\omega_n + i\mu)^2 + \omega^2\big)\big] \\
&= N_f N_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \ln\big[\beta^2\big(\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2 + 2i\mu\omega_n\big)\big]
\end{aligned}$$

Aendert man die untere Grenze der Summe von $-\infty$ auf 0, so ergibt sich :

$$= N_f N_c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \ln\big[\beta^4\big((\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2) + 2i\mu\omega_n\big)\big((\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2) - 2i\mu\omega_n\big)\big]$$

Wendet man die dritte binomische Formel an, so erhaelt man :

$$\begin{aligned}
&= N_f N_c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \ln\big[\beta^4\big((\omega_n^2 + \omega^2 - \mu^2)^2 + 4\mu^2\omega_n^2\big)\big] \\
&= N_f N_c \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\vec{p}} \Big[\ln\big(\beta^2\big(\omega_n^2 + (\omega + \mu)^2\big) + \ln\big(\beta^2(\omega_n^2 + (\omega - \mu)^2\big)\Big]
\end{aligned} \tag{A.27}$$

mit:

$$\begin{aligned}
&\sum_n \sum_{\vec{p}} \ln\big(\beta^2(\omega_n^2 + (\omega \pm \mu)^2\big) = \\
&\sum_n \sum_{\vec{p}} \int_1^{\beta^2(\omega\pm\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n+1)^2\pi^2} + \underbrace{\sum_n \ln\big(1 + (2n+1)^2\pi^2\big)}_{\text{kann man weglassen, da kein } \theta} = \\
&2\sum_{\vec{p}} \int_1^{\beta(\omega\pm\mu)} \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1}\big) = \\
&2\sum_{\vec{p}} \left(\frac{\beta}{2}(\omega \pm \mu) - \frac{1}{2}\right) + \big[\ln(e^\theta + 1) - \theta\big]_1^{\beta(\omega\pm\mu)} = \\
&2\sum_{\vec{p}} \left(-\frac{\beta}{2}(\omega \pm \mu) + \ln\big(e^{\beta(\omega\pm\mu)}\big) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega\pm\mu)}) \underbrace{-\ln(e-1) + \frac{1}{2}}_{\text{kann man weglassen}} \right) = \\
&2\sum_{\vec{p}} \left(\frac{\beta}{2}(\omega \pm \mu) + \ln(1 + e^{-\beta(\omega\pm\mu)})\right)
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Somit kommt man auf das Endergebnis von:

$$\begin{aligned}
\Omega &= -\frac{T}{V}\ln\,\mathrm{P} + U(\sigma, \vec{\pi}) \\
&= -\frac{2N_f N_c}{V} \sum_{\vec{p}} \big[\omega + T\ln(1 + e^{-\beta(\omega+\mu)}) + T\ln(1 + e^{-\beta(\omega-\mu)})\big] + U(\sigma, \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{A.29}$$

Literaturverzeichnis

[1] Joseph I Kapusta and Charles Gale. *Finite-temperature field theory: Principles and applications.* Cambridge University Press, 2006.

[2] Wael Elkamhawy. The dependence of the quark-meson model phase diagram on parameter fixing. Master's thesis, 2014.

[3] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge theory of elementary particle physics.* Clarendon press Oxford, 1984.

[4] Paolo Finelli. Chiral symmetry. Nuclear Physics Course, 2011.

[5] Pawlowski Schaefer and Wambach. The phase structure of the polyakov–quark-meson model. *Phys.Rev. D*, Phys.Rev.D76:074023,2007.

[6] Halzen and Martin. *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* 1984.