Tohoku Math. J., V. 6
1914, pp. 42–43

Zwei kleine Bemerkungen,

VON

JULIUS PÁL in Székelyudvarhely, Ungarn.

(Aus einem an T. Hayashi gerichteten Briefe)

. . . .

Vielleicht interessiren Sie zwei kleine Bemerkungen zu dem Gegenstand meiner Note.

I. Es sei $0<a<1$ und es sei für $|x| \leqq a$ eine stetige Funktion $f(x)$ gegeben, welche im Nullpunkt verschwindet: $f(0)=0$. Wird dann ε beliebig angegeben, so gibt es ein Polynom $P(x)$, für welches

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

ist *und dessen sämmtliche Koeffizienten ganze Zahlen sind.*

In der Tat: ich wähle ein n so, dass $a^{n+1}+\ldots+a^{n+k}+\ldots<\frac{\varepsilon}{2}$ sei; hierauf ein Polynom, das $f(x)$ mit der Genauigkeit $\frac{\varepsilon}{2}$ approximirt und deren Anfangskoeffizienten $=0$ sind bis zu x^{n+1}; also ist

$$\left| f(x)-(a_{n+1}x^{n+1}+\ldots+a_{n+k}x^{n+k}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jetzt ersetze ich a_{n+i} durch die in ihr enthaltene, grösste ganze Zahl und habe

$$P(x)=[a_{n+1}]x^{n+1}+\ldots+[a_{n+k}]x^{n+k}.$$

Der Satz ist für das Intervall $(-1, +1)$ *nicht* zu retten $\left(\text{z. B. } f(x)=\frac{x}{2}\right)$.

II. Herr Fekete-Budapest fand folgende hübsche Bemerkung: Es gibt eine Potenzreihe mit *numerischen, fixen* Koeffizienten

$$a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots, \qquad (\mu)$$

die im Intervall $(-1, +1)$ *sämtliche*, in Nullpunkt verschwindende Funktionen darstelle. D. h. wird $f(x)$ als stetige Funktion angegeben und ist $f(0)=0$, so gibt es Indices $n_1, n_2, \ldots, n_r, \ldots$ (die Folge dieser hängt freilich von $f(x)$ ab), so dass für die fixe Potenzreihe (μ)

$$\lim_{r\to\infty} S_{n_r}(x)=f(x)$$

ist und zwar gleichmässig.

Beweis: man nehme alle Polynome mit rationalen Koeffizienten; ihre Folge ist abzählbar; diese sei $A_1(x), A_2(x), \ldots$. Sei nun $P_1(x)=A_1(x)$; $P_2(x)$ werde so bestimmt, dass es $A_2(x)$ mit der Genauigkeit $\frac{1}{2}$ approximire und $P_2(x)$ *beginne* mit $P_1(x)$; $P_3(x)$ werde so bestimmt, dass es $A_3(x)$ mit $\frac{1}{3}$ approximire und es beginne mit $P_2(x)$. Dann sind $P_1(x), P_2(x), \ldots$ die Abschnitte einer Potenzreihe mit der gewünschten Eigenschaft.