Herleitung des 2. Gossen'schen Gesetzes aus der Nutzenmaximierung des Konsumenten

Daniel Herold, M.Sc.

Ziel dieser Übersicht ist es, das 2. Gossen'sche Gesetz formal aus dem Nutzenmaximierungsproblem eines Konsumenten herzuleiten. Für "Mikroökonomie I" ist lediglich die graphische bzw. ökonomische Herleitung relevant (siehe Kapitel 10 der Vorlesung und Übungsblatt 9). Um Ihnen ein umfassenderes Bild zu liefern, soll hier auch die formale Herleitung folgen. Ferner können Sie dies als einen kleinen Ausblick auf die Veranstaltung "Mikroökonomie II" bei Prof. Albert ansehen. Ausführlichere Erläuterungen zu diesem Thema finden Sie z.B. bei Perloff, J.M. (2013), '*Microeconomics with Calculus*', Third edition, Pearson, Chapter 3 oder bei McAfee, R.P. (2007), '*Introduction to Economic Analysis*', Chapter 5 (http://www.mcafee.cc/Introecon/IEA2007.pdf).

Es seien q_1 und q_2 Gütermengen von Gut 1 und Gut 2, deren Preise p_1 und p_2 sind. Der Konsument verfügt über ein Einkommen Y. Er kann weder andere Güter konsumieren, noch kann er sich verschulden (also mehr ausgeben als sein Einkommen). Seine Budgetbedingung ist also:

$$Y \geq p_1 q_1 + p_2 q_2 \tag{1}$$

Es existiere nun eine Nutzenfunktion, die die Präferenzen des Konsumenten darstellt. Diese wird mit $U(q_1,q_2)$ bezeichnet. Der Konsument möchte nun seinen Nutzen maximieren unter der Nebenbedingung, dass er nur ein bestimmtes Einkommen zur Verfügung hat. Wegen (strikter) Monotonie der Präferenzen gilt, dass jegliche Ausgaben, die nicht das komplette Einkommen ausschöpfen, nicht optimal sind. Mehr von Gut 1 oder Gut 2 ist immer besser. Mathematisch ausgedrückt suchen wir das Maximum der Funktion $U(q_1,q_2)$ unter der Nebenbedingung $Y=p_1q_1+p_2q_2$. Das Maximierungsproblem lässt sich wie folgt formalisieren:

$$\max_{q_1,q_2} \left\{ U(q_{1,} q_2) : Y = p_1 q_1 + p_2 q_2 \right\} \tag{2}$$

Der einfachste Weg dieses Problem zu lösen ist der Lagrange-Ansatz. Diesen finden Sie weiter unten. Zunächst soll eine Erläuterung aufgrund graphischer und ökonomischer Überlegungen folgen. Für den Konsumenten sind die Preise p_1 und p_2 gegeben. Der Konsument wird, wie oben beschrieben, einen Konsumpunkt wählen, der sich auf der Budgetgeraden befindet. Gesucht ist folglich der Tangentialpunkt der Indifferenzkurve mit der Budgetgeraden. Das bedeutet, dass die Steigung der Indifferenzkurve im Optimum der Steigung der Budgetgeraden entsprechen muss. Die Zeichnungen hierzu entnehmen Sie bitte Ihren Übungsunterlagen. Für den optimalen Konsumpunkt ist also die Steigung der Budgetgeraden zu ermitteln:

$$\text{Budgetgerade:} \quad q_1 = \frac{Y}{p_1} - \frac{p_2}{p_1} q_2 \tag{3}$$

$$\text{Steigung:} \quad \frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{p_2}{p_1} \tag{4}$$

Wie bereits bekannt, handelt es sich hierbei um das Markttauschverhältnis gemäß der relativen Preise. Indifferenzkurven zeichnen sich dadurch aus, dass der Nutzen für jedes Güterbündel, das auf ein und derselben Indifferenzkurve liegt, konstant ist:

$$dU = \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_2} dq_2 = 0 \tag{5}$$

Hierbei handelt es sich um das totale Differential der Nutzenfunktion. Um die Steigung einer Indifferenzkurve zu ermitteln, kann (5) folgendermaßen umgestellt werden:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_2}}{\frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1}} \tag{6}$$

Die (partielle) Ableitung der Nutzenfunktion nach q_1 gibt beispielsweise an, wie sich der Nutzen ändert, wenn sich der Konsum des Gutes 1 um eine infinitesimal kleine Menge ändert. Daher ist die Steigung einer Indifferenzkurve $\mathrm{d}q_1/\mathrm{d}q_2$ gemäß (6) der Quotient aus dem Grenznutzen des Gutes 2 und dem Grenznutzen des Gutes 1. Für das Nutzenmaximum ist genau diese Indifferenzkurve gesucht, die dieselbe Steigung aufweist wie die Budgetgerade. Es muss also (6) = (4) gelten:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1}{MU_2} \tag{7}$$

Damit ist die Herleitung des 2. Gossen'schen Gesetzes (Grenznutzenausgleichsregel) vollständig.
Die alternative Herleitung ist die Lösung von (2) über den Lagrange-Ansatz. Hierfür wird die Nebenbedingung nach 0 umgestellt, mit dem sog. Lagrange-Multiplikator λ multipliziert und von der Zielfunktion abgezogen:

$$Z(q_1, q_2, \lambda) = U(q_1, q_2) - \lambda(p_1 q_1 + p_2 q_2 - Y) \tag{8}$$

Für das Aufstellen des 2. Gossen'schen Gesetzes reicht es aus, Z(·) nach q_1 und q_2 abzuleiten, gleich Null zu setzen und das resultierende Gleichungssystem zu lösen:

$$\frac{\partial Z(q_1, q_2, \lambda)}{\partial q_1} = \frac{\partial U(q_1, q_2)}{\partial q_1} - \lambda p_1 = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial Z(q_{1,}q_{2,}\lambda)}{\partial q_2}=\frac{\partial U(q_{1,}q_2)}{\partial q_2}-\lambda\, p_2=0 \qquad (10)$$

Nach Umstellen von (9) und (10) nach λ resultiert durch Gleichsetzen die Grenznutzenausgleichsregel (7) als Lösung der Nutzenmaximierung des Konsumenten unter der Nebenbedingung, dass das optimale Konsumbündel auf der Budgetgeraden liegt.