

Ein Transportmodell mit Farbconfinement

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 13 – Physik

vorgelegt von

Stefan Loh

aus Bad Endbach

Gießen, 1997

D 26

Dekan: Prof. Dr. Herbert Schramm

I. Berichterstatter: Prof. Dr. Ulrich Mosel

II. Berichterstatter: Prof. Dr. Werner Scheid

Tag der mündlichen Prüfung: 27.03.1997

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Modellbeschreibung	4
1.3	Gliederung der Arbeit	5
2	Eigenschaften der QCD	7
2.1	Die QCD als Quantenfeldtheorie	7
2.2	Die QCD als klassische Feldtheorie	11
2.3	Nichtabelsche Effekte	12
3	Das Friedberg-Lee Modell	19
3.1	Phänomenologie des Farbconfinements	19
3.2	Die Lagrangedichte	22
3.3	Der Gluonenpropagator im Medium	24
3.4	Statische Gluonenfelder	26
4	Das Friedberg-Lee Transportmodell	31
4.1	Kinetische Theorie klassischer Farbladungen	32
4.2	Kinetische Theorie der Quarks	34
4.3	Das Friedberg-Lee Transportmodell	38
5	Ergebnisse	43
5.1	Hadronische Grundzustände	43
5.1.1	Das J/ψ - und D/\bar{D} -Meson	50
5.2	Eigenschaften von Flux-Tubes	56
5.3	Das String-String Wechselwirkungspotential	62
5.4	Farbanregungen des Mesons	67
5.5	Die Hadronisierung von Strings	70
5.5.1	Paarproduktion in starken Farbfeldern	70
5.5.2	Die Dissoziierung des J/ψ	73
5.5.3	Das Lund-Modell	79
5.5.4	Die Transportdynamik	82
5.5.5	Die Molekulardynamik	89

6	Zusammenfassung und Ausblick	97
A	Notationen und Konventionen	101
B	Numerische Methoden	103
B.1	Verfahren zur Zeitintegration	103
B.2	Die Methode der Finiten Elemente	105

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Suche nach den fundamentalen Strukturen der Materie und ihren Eigenschaften gehört zu den Hauptaufgaben der modernen Physik. Die heute allgemein akzeptierte Theorie der elementaren Bausteine der Materie ist die Quantenchromodynamik (QCD). Sie besagt, daß alle stark wechselwirkenden Teilchen, wie zum Beispiel Neutronen und Protonen, aus *Quarks* und *Gluonen* zusammengesetzt sind. Die QCD ist eine lokale Eichfeldtheorie, ähnlich der Quantenelektrodynamik (QED), die die Wechselwirkung zwischen elektrisch geladenen Teilchen (Elektronen, Atomkerne) beschreibt. Die Rolle der elektrischen Ladung spielt in der QCD die *Farbe*, die man den Quarks zuordnet; ein Quark kann rot, grün oder blau sein, ein Antiquark ist antirot, antigrün oder antiblau. Die Rolle des Photons als Wechselwirkungsboson der QED übernimmt in der QCD das *Gluon*, das in acht verschiedenen Ladungszuständen vorliegen kann.

Der entscheidende Unterschied zwischen der QED und der QCD ist, daß man bis heute keine freien Farbladungen gefunden hat, sondern alle physikalisch beobachtbaren Teilchen eine Kombination aus mehreren Quarks sind, die gemeinsam einen *farbneutralen* Zustand bilden. Man klassifiziert diese zusammengesetzten Teilchen, die sogenannten *Hadronen*, in *Baryonen*, die aus drei Quarks verschiedener Farbe bestehen und in *Mesonen*, die aus einem Quark und Antiquark der entgegengesetzten Farbladung gebildet werden. Diese Eigenschaft der QCD, die Quarks in Hadronen einzuschließen nennt man *Confinement*. Der genaue Mechanismus des Confinements und der Beweis, daß die QCD genau diese Eigenschaft hat, ist noch ungeklärt und wird sicher noch einige Zeit Gegenstand der Forschung sein.

Die theoretischen Möglichkeiten zur Untersuchung des Confinements sind zur Zeit sehr begrenzt. Der exakte Weg, die sogenannte Gitter-QCD, ist numerisch extrem aufwendig und die Ergebnisse sind mit den zur Zeit zur

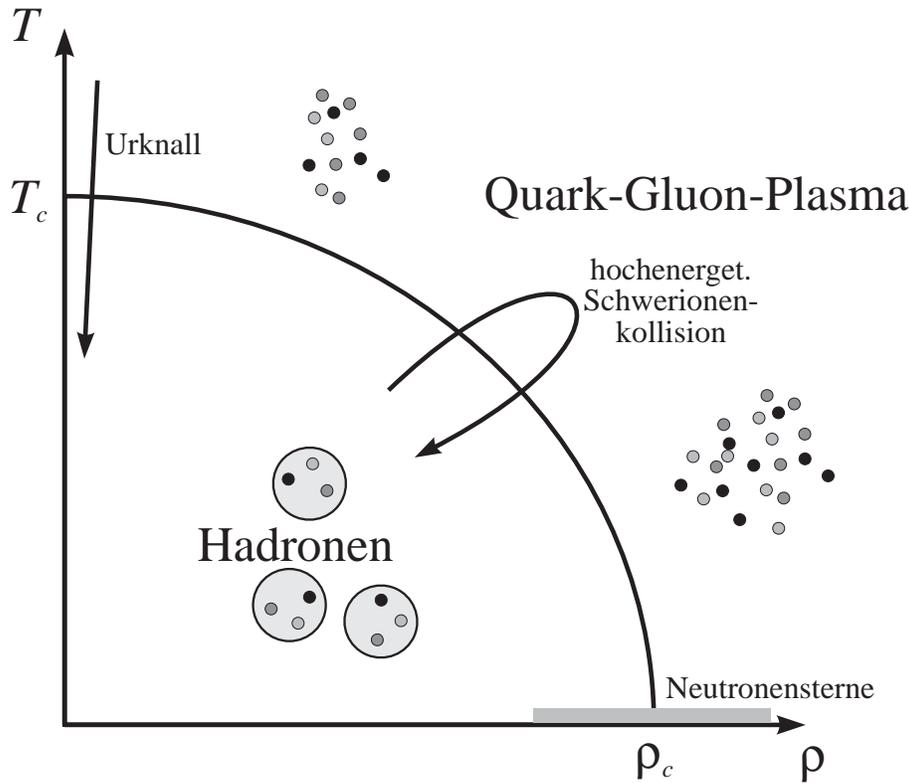


Abb. 1.1: Phasendiagramm hadronischer Materie.

Verfügung stehenden Rechnern noch mit großen statistischen Fehlern versehen. Trotzdem vermutet man aufgrund solcher Rechnungen [1, 2], in denen das Verhalten von Farbfeldern bei hoher Temperatur untersucht wurde, daß bei Überschreitung einer kritischen Temperatur oder einer kritischen Materiedichte ein Phasenübergang stattfinden könnte: Die Hadronen verdampfen gewissermaßen und geben ihre Bestandteile, die Quarks und Gluonen, frei. Das dadurch entstehende “Gas” aus Quarks und Gluonen nennt man das *Quark-Gluon-Plasma*, den Phasenübergang nennt man *Deconfinement*. Vorhersagen für die kritische Temperatur liegen bei $150 \text{ MeV} - 200 \text{ MeV}$, die kritische Dichte wird bei etwa $1 - 3 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ vermutet. In Abbildung 1.1 sieht man drei mögliche Szenarien, in denen ein Quark-Gluon-Plasma vorkam oder erzeugt werden kann. Beim Urknall lag die Materie bei sehr hoher Temperatur, aber bei geringer Netto Baryondichte vor. Durch den thermischen Gasdruck expandierte das Quark-Gluon-Plasma und kondensierte zu Hadronen, als die kritische Temperatur unterschritten wurde. Einen weiteren möglichen Weg zum Quark-Gluon-Plasma bieten die sogenannten Neutronensterne. Diese erfahren nach Beendigung der nuklearen Fusion einen Gravitationskollaps, was zur Formierung eines Quarksterns mit sehr hoher Dichte führt.

Eine dritte Möglichkeit zur Erzeugung eines Quark-Gluon-Plasmas, die insbesondere auch experimentell untersucht werden kann, sind ultrarelativistische Schwerionenkollisionen. In solchen Experimenten sind sowohl hohe Temperaturen als auch hohe Materiedichten zu erreichen, allerdings nur auf sehr kleinem Raum und für sehr kurze Zeit. Das Quark-Gluon-Plasma ist daher nicht direkt, sondern nur indirekt durch die während der Kollision erzeugten Teilchen zu identifizieren. Wie unterscheidet man allerdings anhand der gemessenen Teilchenspektren, ob nun wirklich ein Quark-Gluon-Plasma vorlag, oder eine Mischphase aus Plasma und hadronischer Phase oder eine reine hadronische Phase?

Es gibt verschiedene Vorschläge für Signaturen des Quark-Gluon-Plasmas. Da sind zunächst die Spektren von elektromagnetisch wechselwirkenden Teilchen (Leptonen, Photonen) zu nennen. Da die mittlere Weglänge dieser Teilchen groß im Vergleich zur Ausdehnung des Plasmas ist, verlassen diese Teilchen die Reaktionszone unverändert. Dadurch sind sie gut geeignet, um beispielsweise die Temperatur der Reaktionszone zu bestimmen. Ein Nachteil bei diesen Teilchen ist der starke Untergrund, der von zerfallenden Hadronen stammt, die um Größenordnungen häufiger produziert werden. Reine Hadronenspektren hingegen, also Spektren stark wechselwirkender Teilchen, werden wesentlich mitbestimmt durch die späte Reaktionsphase, wenn die Quarks wieder kondensieren, und Endzustandswechselwirkungen. Dadurch sind Hadronenspektren erheblich schwieriger zu berechnen und modellabhängig. Trotz dieser bekannten Probleme erhofft man durch Messung hadronischer Spektren weitere Aufschlüsse über die Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas zu erlangen:

- Während des Deconfinements erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade des Systems erheblich. Dadurch ändern sich thermodynamische Größen, wie beispielsweise die Energiedichte, der Druck und die Entropiedichte als Funktion der Temperatur. Observablen, die auf diese Änderungen sensitiv sind, sind die Rapiditätsverteilung der Hadronen, sowie transversale Impuls- und Energiespektren.
- Es wird eine Unterdrückung der J/Ψ -Teilchen im Vergleich zu Teilchen mit offenem *charm* [3] erwartet. Rechnungen mit Hilfe der Gittereichtheorie [4, 5] sagen voraus, daß dieser Effekt bereits wenig überhalb der Deconfinement-Temperatur einsetzen soll.
- Die Produktion von Teilchen mit *strange* Quark Anteil werden in hadronischen Reaktionen ebenfalls unterdrückt. Im Falle eines Quark-Gluon Plasmas mit einer Temperatur von ca. 200 MeV ändert sich dieser Effekt, da *strange* Quarks mit einer Masse von 150 MeV sehr schnell über Gluonfusion in $s\bar{s}$ -Produktion entstehen und sich thermisch äquilibrieren. Das Plasma dient daher als Katalysator zur erhöhten Produktion

von Teilchen mit strange Quark Anteil. Insbesondere exotische strange Quark Teilchen, wie z. B. *Antihyperonen* werden verstärkt durch diesen Mechanismus erzeugt.

1.2 Modellbeschreibung

Die vollständige dynamische Beschreibung einer Schwerionenkollision im Rahmen der QCD ist aufgrund der Komplexität der Gleichungen mit zur Zeit bekannten Methoden und Computern nicht möglich. Die Aufgabe des theoretischen Physikers besteht nun darin, anhand relativ einfacher Modelle, die die wichtigsten Eigenschaften der QCD beinhalten, Vorhersagen zu erstellen, um im Vergleich mit den experimentellen Daten ein konsistentes Bild über die Dynamik einer Schwerionenreaktion zu erhalten. Den Ablauf der Reaktion kann man demzufolge in drei Abschnitte unterteilen:

In der Anfangsphase finden verstärkt hochenergetische Zweiteilchenkollisionen statt, die dafür sorgen, daß die Nukleonen durch Austausch von Gluonen eine effektive Farbladung erhalten. Da diese durch die Kürze der eigentlichen Reaktionszeit nicht mehr neutralisiert werden können, kommt es zur Formierung eines hochangeregten Vakuums, den *Flux-tubes* (oder auch Strings), die die Farbladungen verbinden. In der zweiten Phase zerfallen die Flux-tubes durch Produktion von Quark-Antiquark- und Gluonen-Paaren, wobei es bei einer hohen Dichte der Strings zur Entstehung des Quark-Gluon-Plasmas kommen kann. Durch die thermische Expansion des Plasmas kondensieren die Quarks und Gluonen schließlich wieder zu Hadronen (*Hadronisierung* oder *freeze-out*), die im Detektor nachgewiesen werden.

Die zur Zeit erfolgreichsten Modelle zur Beschreibung des obigen Reaktionsverlaufs basieren alle auf kinetischen Ansätzen. Diese sogenannten String- und Partonenkaskadenmodelle (Fritjof [8], Venus [9], RQMD [10], HIJING [11], parton cascade [12]) beruhen aber entweder auf der Annahme, daß man die Dynamik des QCD-Vakuums perturbativ behandeln kann, oder auf rein phänomenologischen Argumenten für den Stringzerfall und die Endzustandsdynamik. Eine konsistente Beschreibung der Schwerionenreaktion im Rahmen eines Modells ist daher nicht gewährleistet, da es sich dabei um einen Übergang der nichtperturbativen QCD (Confinement, hadronische Phase) zum Quark-Gluon-Plasma und zurück handelt. Insbesondere die Endphase der Reaktion, die Hadronisierung, wird im Rahmen der Partonenkaskaden mit Hilfsmodellen wie zum Beispiel dem Koaleszenzmodell [13, 14] beschrieben. Eine konsistente Modellierung der Reaktion erfordert zumindest eine effektive Behandlung der Dynamik des nichtperturbativen QCD-Vakuums. Leider ist zur Zeit unbekannt, welches die entscheidenden Freiheitsgrade sind, die die Vakuumdynamik steuern. Es gibt mehrere Vorschläge, wie zum Beispiel Gluonen Kondensate, Quark Kondensate oder Kondensate magnetischer

Monopole [15].

In dieser Arbeit werden die nichtperturbativen Effekte der QCD durch ein skalares Feld modelliert, wie es im Friedberg-Lee Solitonen Modell vorgeschlagen wurde [16]. Sie basiert auf den Vorarbeiten meiner Kollegen Ulf Kalmbach [17] und Thomas Vetter [18], in denen eine Quark Transporttheorie im Rahmen des Friedberg-Lee Modells entwickelt wurde, allerdings unter Vernachlässigung expliziter Farbfreiheitsgrade. Es wurden Nukleon-Nukleon Kollisionen präsentiert und gezeigt, wie durch die Vakuumdynamik das Confinement der Quarks in diesen Reaktionen beibehalten wird. Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung der Formierung und des Zerfalls von Flux-tubes im Rahmen des vollständigen Friedberg-Lee Solitonen Modells mit Farbconfinement, um weitere Aufschlüsse über den Mechanismus des Quarkeinschlusses zu erhalten, die insbesondere zur späteren Beschreibung von relativistischen Schwerionenkollisionen dienen können.

1.3 Gliederung der Arbeit

Im zweiten Kapitel werden wir auf die wichtigsten Eigenschaften der QCD eingehen. Es wird plausibel gemacht, wie das QCD-Vakuum eine Abschirmung von Farbladungen hervorruft und somit für den Quarkeinschluß in Farbsingletts verantwortlich ist. Anschließend untersuchen wir das Verhalten von klassischen Farbladungen und Farbfeldern und werden feststellen, daß unter dieser Näherung, also der Vernachlässigung quantenmechanischer Fluktuationen, der Quarkeinschluß nicht erklärt werden kann, da die Mittelfeldnäherung zu einer Abschirmung der Farbladungen führt.

Durch diese Erkenntnis motiviert, wird in Kapitel 3 das Friedberg-Lee Solitonenmodell vorgestellt, in dem das Farbconfinement und alle weiteren nichtperturbativen Effekte der QCD phänomenologisch mit Hilfe eines skalaren Feldes modelliert werden. Es wird im wesentlichen auf Arbeiten im Gluonen-sektor des Modells eingegangen, da der (farbneutrale) Quarksektor bereits sehr ausführlich in [19, 20] behandelt wurde.

In Kapitel 4 wird schließlich eine Ableitung der Transportgleichungen für Quarks im Rahmen des Wignerfunktionsformalismus dargestellt. Diese beruht auf den Arbeiten von Elze und Heinz [21], die ebenfalls die Konsistenz der semiklassischen Entwicklung der Transportgleichungen gezeigt haben. Es wird eine Erweiterung der Gleichungen auf das Friedberg-Lee Modell dargelegt.

Im Ergebniskapitel werden zunächst die Grundzustandseigenschaften des Modells untersucht. Es werden baryonische sowie mesonische Grundzustandslösungen (Solitonlösungen) der Gleichungen konstruiert, wobei die Konstituenten sowohl leichte Quarks (*up/down*), als auch schwere Quarks (*charm*) sind. Weiterhin wird die Farbkopplungskonstante der QCD anhand

der Stringspannung festgelegt durch dynamische Separation der Quarks des Mesons. Die auf diese Weise dynamisch formierten Flux-tubes werden wir verwenden, um die Wechselwirkung zweier Strings zu untersuchen und ein String-String-Potential zu berechnen. Es werden Anregungszustände des Mesons (Isovektorielle Moden) dargestellt, sowie der Einfluß des Farbconfinements auf die Bewegung der Quarks. Abschließend beschreiben wir den Kernpunkt dieser Arbeit, nämlich die dynamische Formierung und den Aufbruch eines Strings durch Produktion von leichten, als auch von schweren Quark-Antiquark Paaren. Nach der Zusammenfassung und dem Ausblick auf weitere Vorhaben folgt schließlich der Anhang, in dem auf verwendete mathematische und numerische Techniken genauer eingegangen wird.

Kapitel 2

Eigenschaften der QCD

In diesem Kapitel wird auf die grundlegenden Eigenschaften der Quarks und Gluonen eingegangen, sowie auf die Theorie zu ihrer Beschreibung: die Quantenchromodynamik (QCD). Es wird eine kurze Motivation der QCD als Quantenfeldtheorie gegeben. Da allerdings eine exakte Beschreibung in diesem Rahmen zur Zeit nicht möglich ist, handelt der wesentliche Teil dieses Kapitels von der Frage, ob die QCD als Feldtheorie von *klassischen Farbladungen und Farbfeldern* bereits die wichtigste Eigenschaft der Theorie, das Farbconfinement, beinhaltet.

2.1 Die QCD als Quantenfeldtheorie

Der historische Beginn der QCD ist das sogenannte Δ^{++} -Rätsel. Um dieses Teilchen im statischen Quarkbild beschreiben zu können, mußte eine neue Quantenzahl, genannt *Farbe*, eingeführt werden, da sich die drei Quarks des Δ^{++} -Teilchens ohne eine Farbklassifizierung in einem total symmetrischen Zustand bezüglich des Austauschs ihrer Spin-, Flavor- und Ortskoordinaten befinden würden. Um eine Verletzung des Pauliprinzips zu vermeiden, ordnet man jedem Quark eine bestimmte Farbladung (rot, grün, blau) zu und verlangt, daß die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch in dieser neuen Quantenzahl Farbe ist. Die zugrundeliegende Symmetrie der Wechselwirkung, die zur Erhaltung dieser Farbladung führt, ist die lokale Farb-SU(3)-Symmetrie. Im Gegensatz zur elektrischen Ladung, die aus einer lokalen U(1)-Symmetrie folgt, ist die Farbladung aber nicht einfach additiv, sondern ergibt sich aus der Algebra der zugehörigen Symmetriegruppe.

Die Lagrangedichte der QCD kann man durch die Forderung der lokalen Eichinvarianz gegenüber Rotationen im 3-dimensionalen Farbraum motivieren. Die Quarks werden dabei durch einen dreikomponentigen Farbvektor beschrieben, der sich unter einer Farbrotaion transformiert wie

$$\Psi = (\Psi_r \Psi_g \Psi_b) \longrightarrow \hat{U}(x)\Psi , \quad (2.1)$$

wobei $\hat{U} = \exp(-i\hat{L})$ ist, mit $\hat{L} = \hat{L}^\dagger$. Matrizen, die diese Forderung erfüllen, lassen sich durch die acht Gell-Mann-Matrizen darstellen

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \Theta^a \hat{\lambda}_a , \quad (2.2)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten Θ^a . Die Kommutatorrelationen

$$[\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b] = 2i f_{abc} \hat{\lambda}_c \quad (2.3)$$

$$\text{und } \{\hat{\lambda}_a, \hat{\lambda}_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} + 2d_{abc} \hat{\lambda}_c \quad (2.4)$$

definieren die Strukturkonstanten f_{abc} und d_{abc} der Lie-Gruppe $SU(3)$. Die lokale Farbrotaion $\hat{U}(x)$ läßt sich damit als

$$\hat{U}(x) = \exp\left(-i \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \Theta^i(x) \hat{\lambda}_i\right) \quad (2.5)$$

schreiben. Damit ergibt sich die Änderung der partiellen Ableitung von Ψ in der zu konstruierenden Lagrangedichte:

$$\partial_\mu \Psi \longrightarrow \partial_\mu (\hat{U}\Psi) = \hat{U} \partial_\mu \Psi + (\partial_\mu \hat{U})\Psi = \hat{U} \left[\partial_\mu \Psi + \hat{U}^\dagger (\partial_\mu \hat{U}) \Psi \right] \quad (2.6)$$

Um die Invarianz zu garantieren, muß man ein hermitesches Farbpotential

$$\hat{A}_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 A_\mu^a(x) \hat{\lambda}_a \quad (2.7)$$

eingeführen, das minimal an die Quarks gekoppelt wird. Transformiert sich das Farbpotential unter $\hat{U}(x)$ gemäß

$$\hat{A}_\mu \longrightarrow \hat{U}^\dagger \hat{A}_\mu \hat{U} - ig_v^{-1} \hat{U}^\dagger (\partial_\mu \hat{U}) , \quad (2.8)$$

so bleibt der Term der Lagrangedichte, der die Dynamik der Quarks beschreibt

$$\bar{\Psi} \hat{D}_\mu \Psi = \bar{\Psi} (\partial_\mu - ig_v \hat{A}_\mu) \Psi , \quad (2.9)$$

invariant unter Eichtransformationen. Der Feldstärketensor für das Farbfeld

$$\hat{F}_{\mu\nu} = [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu] , \quad (2.10)$$

hat dann in Komponentenschreibweise die Form

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_v f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (2.11)$$

Damit gilt: $\hat{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{U}^\dagger \hat{F}_{\mu\nu} \hat{U}$. Die gesamte Lagrangedichte der QCD ergibt sich als:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} . \quad (2.12)$$

Die Forderung der lokalen Eichinvarianz führt daher nicht nur zur Existenz zusätzlicher Felder \hat{A}_μ , die man Gluonen nennt, sondern bestimmt auch die Kopplung der Quarks mit den Gluonen sowie die Kopplung der Gluonen untereinander mit einer universellen Kopplungskonstante g_v . Der nichtabelsche Charakter der Theorie ist dafür verantwortlich, daß die Eichbosonen der QCD, die Gluonen, selbst eine Farbladung tragen, was man anhand der zu den Maxwellgleichungen analogen *Yang-Mills*-Gleichungen leicht einsieht:

$$\partial_\nu F_a^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g_v \bar{\Psi} \gamma^\mu \lambda_a \Psi - g_v f_{abc} A_\nu^b F_c^{\mu\nu} . \quad (2.13)$$

In diesen Gleichungen treten sowohl die Quarks als auch die Gluonen selbst als Quellen des Farbfeldes auf. Aus dieser Tatsache ergeben sich zwei völlig neue, scheinbar widersprüchliche Eigenschaften der Theorie, die man am einfachsten durch Betrachtung des Vakuumzustands einsehen kann.

Wie aus der QED bekannt, ist der Vakuumzustand nicht teilchenlos, sondern gefüllt mit virtuellen Photonen, die insbesondere auch als virtuelle Elektron-Positron-Paare vorliegen können, was zu einer Polarisierbarkeit des Vakuums führt. Dadurch wird die Wechselwirkung zweier Teilchen, dargestellt in Abbildung 2.1 (linke Seite) insofern verändert, daß zum gesamten Wirkungsquerschnitt auch die Vakuumpolarisationsdiagramme (Abbildung 2.1, rechte Seite) beitragen. Der Effekt der Vakuumpolarisation ist daher, daß die virtuellen Elektron-Positron-Paare die eigentliche 'nackte' Ladung abschirmen. Das Maß der Abschirmung hängt nun vom Abstand der beiden Ladungen ab, das heißt von ihrem Impulsübertrag Q^2 , und man erhält eine impulsabhängige *renormierte Kopplungskonstante* α , die mit zunehmendem Impulsübertrag ansteigt. Bildlich gesprochen kann man sagen, daß reelle Ladungen von einer virtuellen Elektron-Positron-Wolke umgeben sind, so daß die vollständige Ladung erst bei sehr kleinen Abständen sichtbar wird.

Stellt man eine analoge Überlegung für die QCD an, so findet man, daß

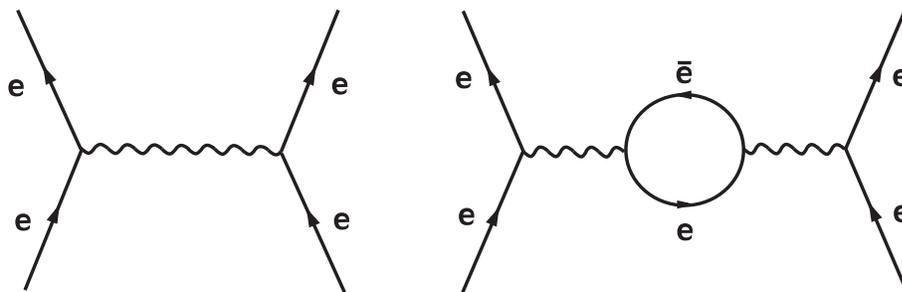


Abb. 2.1: Wechselwirkung zweier Elektronen durch Austausch eines Photons (links), sowie durch ein intermediäres Elektron-Positron-Paar (rechts).

zur Wechselwirkung zweier Quarks zusätzliche Vakuumpolarisationsdiagramme beitragen, die durch die Selbstwechselwirkung der Gluonen verursacht

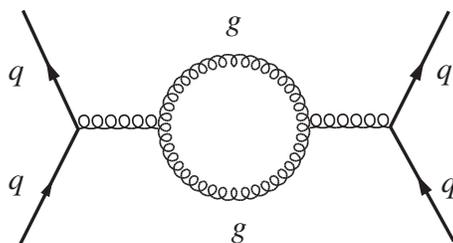


Abb. 2.2: Wechselwirkung zweier Quarks durch Gluon-Austausch mit intermediärer Gluon Selbstwechselwirkung.

werden, also durch die Tatsache, daß die Gluonen selbst eine Farbladung tragen. Der Vakuumzustand der QCD besteht daher nicht nur aus virtuellen Quark-Antiquark-Paaren, sondern auch aus sogenannten *Gluonenpaaren* (Abbildung 2.2). Die renormierte Kopplungskonstante der QCD hat dann ein zur QED gegensätzliches Verhalten. Bei sehr hohen Impulsüberträgen, also bei geringen Abständen, wird α_s sehr klein, so daß die Quarks praktisch nicht miteinander wechselwirken. Dieses Verhalten wird als *asymptotische Freiheit* bezeichnet. Bei geringen Impulsüberträgen bzw. großen Abständen steigt die Kopplungskonstante mit dem Quadrat des Abstandes an, was einem linear ansteigenden Potential entspricht. Eine Farbladung im Vakuum der QCD wird daher nicht abgeschirmt wie in der QED, sondern es findet eine Antiabschirmung statt, die man bildlich dadurch erklären kann, daß die Quarks ihre Farbladung auf die virtuelle Gluonenwolke verteilen können, da diese selbst eine Ladung trägt.

Man glaubt, daß diese Erscheinung für den Einschluß (*Confinement*) der Quarks in farbneutrale Objekte verantwortlich ist und daß sie damit die experimentelle Evidenz bisher nicht beobachteter freier Farbladungen widerspiegelt. In statischen Gitterrechnungen [1] konnte unter großem numerischen Aufwand das Confinement-Potential bestimmt werden. Da der Ursprung des Confinements aber ein dynamischer ist, steht ein absoluter Beweis, daß die QCD dieses beinhaltet, noch aus.

Um weitere Einsichten in den Mechanismus des Confinements zu erhalten, stehen uns momentan zwei Möglichkeiten zur Wahl. Zunächst kann man die QCD im Limes sehr großer Quantenzahlen (Feldstärken) betrachten, wobei die Theorie in eine Beschreibung klassischer Farb-Ladungen und -Felder übergeht. Die Eigenschaften dieses Grenzfalles der Theorie wird im Rest dieses Kapitels erläutert. Wir werden zu der erstaunlichen Erkenntnis gelangen, daß die nichtabelsche Theorie klassischer Farbladungen eine stärkere Abschirmung dieser hervorruft, als beispielsweise von der QED bekannt ist. Weiterhin werden wir zeigen, daß nichtabelsche Effekte in diesem Grenzfall weitgehend vernachlässigt werden können, womit sich die klassische Farbdynamik auf die klassische Elektrodynamik reduziert. Das Confinement ist daher eine rei-

ner Quanteneffekt, und es bleibt nur der zweite Weg der Modellbildung der QCD, wobei wir ab Kapitel 3 das Friedberg-Lee Modell [22] verwenden werden, das auf den phänomenologischen Eigenschaften des QCD Vakuums als Dielektrikum beruht.

2.2 Die QCD als klassische Feldtheorie

In diesem Kapitel wird die QCD als Feldtheorie klassischer Farbladungen in Analogie zur klassischen Elektrodynamik behandelt. Diese Näherung ist dann gerechtfertigt, wenn man Prozesse betrachtet, in denen große Feldstärken auftreten, das heißt eine große Anzahl von Eichbosonen (Gluonen) vorhanden ist. In diesem Fall reduzieren sich die Beiträge von quantenmechanischen Fluktuationen, die $\sim 1/\sqrt{N_G}$ sind. Ein mögliches Szenario, in dem diese Bedingung gut erfüllt ist, ist das Quark-Gluon-Plasma (QGP), wobei die hohe Energiedichte des Plasmas zur zahlreichen Produktion von Gluonen verwendet werden kann. Im weiteren werden wir aber ohne zusätzliche Rechtfertigung die Theorie in dieser Näherung untersuchen. Für Notationen und Konventionen wird auf den Anhang A verwiesen.

Betrachtet man die Eichpotentiale als klassische Felder und die Quellen als klassische Ladungsdichten und -ströme, so lassen sich die Bewegungsgleichungen der Farbfelder, die Yang-Mills Gleichungen, in Analogie zu den Maxwellgleichungen schreiben:

$$\partial_\mu F_a^{\mu\nu} = j_a^\nu - g_v f_{abc} A_\mu^b F_c^{\mu\nu} . \quad (2.14)$$

Setzt man die eichinvariante Definition des Feldstärketensors $F_a^{\mu\nu}$ aus (2.11) ein, so erhält man die Bewegungsgleichungen für die Eichpotentiale

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu A_a^\nu &\equiv j_a^\nu - J_a^\nu = \\ j_a^\nu - g_v f_{abc} [(\partial_\mu A_b^\mu) A_c^\nu + 2A_b^\mu (\partial_\mu A_c^\nu) - A_{b\mu} (\partial^\nu A_c^\mu) + g_v f_{cde} A_{b\mu} A_d^\mu A_e^\nu] , \end{aligned} \quad (2.15)$$

die durch die nichtabelsche Struktur der Theorie von zweiter bzw. dritter Ordnung in den Eichpotentialen sind. Die Quellen dieser Eichfelder spalten sich auf in äußere Quellen j_a^ν (Quarks) und Beiträge von den Gluonen J_a^ν , die in Gleichung (2.15) definiert werden. Dieses gekoppelte System von 12 Gleichungen ($4_{Raum} \times 3_{Farbe}$) wird vervollständigt durch die kovariante Form der Stromerhaltung

$$\hat{D}_\mu \hat{j}^\mu = \partial_\mu \hat{j}^\mu + g_v [\hat{A}_\mu, \hat{j}^\mu] = 0 , \quad (2.16)$$

die aus (2.14) durch Anwenden des Vierergradienten ∂_ν folgt.

Wir betrachten zunächst nur statische Quellen. Die Wechselwirkung zwischen diesen beschränkt sich dann auf physikalische (*on-shell*) Effekte. Weiterhin

bleibt die volle Nichtlinearität der Gleichungen erhalten, sowie eine Farbdynamik, dargestellt durch Eichtransformationen (Rotationen im Farbraum). Verwendet man eine Vielzahl von statischen Quellen, so werden dadurch infrarote Singularitäten reguliert [23]. Wegen der lokalen Eichinvarianz existiert für jede solche statische äußere Quelle $\hat{j}^0 = \rho^a \hat{T}^a$ eine eindeutige Eichtransformation so, daß die eichtransformierte Ladung

$$\rho^a = (U(x)\rho)^a = j_0^a - (U(x)J_0)^a = \delta^{a3}Q(x) \quad (2.17)$$

im Farbraum in eine Richtung ausgerichtet ist [23]. Der Ansatz

$$A_\mu^a = \delta^{a3}C_\mu \quad (2.18)$$

für das Eichpotential führt auf die Maxwellgleichungen für C_μ . C_μ heißt Coulomblösung zur Quelle j^0 . Es besteht die Frage, ob diese Coulomblösung stabil bleibt unter der Änderung von äußeren Parametern. Mandula [23] und auch Magg [24] haben den Einfluß schwacher zeitlicher Fluktuationen des Coulomb-Potentials untersucht und fanden heraus, daß diese stabil sind, solange die starke Kopplungskonstante $\alpha_s < 1/2$ bzw. $\alpha_s < 3/2$ ist, mit $\alpha_s = g_v^2/4\pi$. Diese Tatsache liefert eine Bestätigung dafür, daß die niederenergetische QCD durch nichtabelsche Effekte bestimmt wird, während die hochenergetische QCD rein abelscher Natur ist. Um die Eigenschaften der nichtabelschen Lösungen zu bestimmen gelang es zunächst Cahill [25] und Arodź [26] und später auch Freedman et al. [27] für einige spezielle Ladungskonfigurationen, diese zu bestimmen. Das generelle Verhalten der Eichpotentiale deutet darauf hin, daß ab einem bestimmten kritischen Wert von α_s die nichtabelsche Konfiguration bevorzugt wird, und daß diese die Eigenschaft hat, die äußeren Ladungen abzuschirmen, statt wie erwartet zu einer Antiabschirmung zu führen.

2.3 Nichtabelsche Effekte

Wir wollen nun mit numerischen Methoden untersuchen, ob der unerwartete Abschirmungseffekt der klassischen Chromodynamik für (im Prinzip) beliebige Ladungskonfigurationen und Stärke der Kopplung α_s bestätigt werden kann. Insbesondere werden wir Ladungsverteilungen mit verschwindender Gesamtladung betrachten, die den physikalisch beobachtbaren Hadronen am nächsten kommen.

Die 8 Ladungen berechnen sich aus den SU(3)-Quarkspinoren zu

$$q^a = \int d^3x \Psi^\dagger \hat{T}^a \Psi = \int d^3x \rho^a. \quad (2.19)$$

Ein ein farbneutraler Zustand unterliegt der Bedingung, daß alle diese Ladungen verschwinden, $q^a = 0$, da diese unabhängig voneinander sind. Wir

wählen als Ansatz für die Komponenten der Farbdichtematrix

$$\rho_a(\vec{r}) = N \exp(-(r/r_0)^2) \frac{x_a}{r} \quad a = 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

$$\rho_a(\vec{r}) = 0 \quad a = 4, \dots, 8, \quad (2.21)$$

$$j_a^i(\vec{r}) = 0 \quad a = 1, \dots, 8 \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.22)$$

der die obige Bedingung offensichtlich erfüllt. Die Ausdehnung der Ladung ist durch r_0 bestimmt und N ist ein (beliebig) wählbarer Normierungsfaktor. In diesem Ansatz werden die Farbfreiheitsgrade der Ladungsdichte ρ_a mit den Raumfreiheitsgraden x_a verknüpft, was zu nichtabelschen Feldkonfigurationen führt, wie wir im folgenden zeigen werden.

Zur Lösung der Yang-Mills Gleichungen

$$\partial_k \hat{F}^{k0} + g_v [\hat{A}_k, \hat{F}^{k0}] = g_v \hat{\rho}, \quad (2.23)$$

$$\partial_k \hat{F}^{ki} + g_v [\hat{A}_0, \hat{F}^{0i}] + g_v [\hat{A}_k, \hat{F}^{ki}] = -g_v \hat{j}^i \quad (2.24)$$

mit

$$\hat{F}^{k0} = -\partial^k \hat{A}^0 - g_v [\hat{A}^k, \hat{A}^0] = \hat{E}^k, \quad (2.25)$$

$$\hat{F}^{ki} = \partial^k \hat{A}^i - \partial^i \hat{A}^k + g_v [\hat{A}^k, \hat{A}^i], \quad (2.26)$$

$$\hat{B}^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \hat{F}^{ij} \quad (2.27)$$

machen wir einen perturbativen Ansatz für \hat{A}_0 und \hat{A}_i . Wir entwickeln diese Größen in eine Potenzreihe nach der starken Kopplungskonstante g_v

$$\hat{A}_0 = g_v \hat{A}_0^{(1)} + g_v^3 \hat{A}_0^{(3)} + g_v^5 \hat{A}_0^{(5)} + \dots, \quad (2.28)$$

$$\hat{A}_i = g_v^2 \hat{A}_i^{(2)} + g_v^4 \hat{A}_i^{(4)} + \dots. \quad (2.29)$$

Durch die spezielle Wahl der Quelle (2.20) - (2.22) mit verschwindenden Vektorkomponenten tragen nur ungerade Potenzen von g_v zu \hat{A}_0 und nur gerade Potenzen zu \hat{A}_i bei [26]. Setzt man diesen Ansatz in die Yang-Mills Gleichungen (2.23) ein und ordnet die Terme nach gleichen Potenzen von g_v , so ergibt sich

$$\nabla^2 \hat{A}_0^{(1)} = -\hat{\rho}, \quad (2.30)$$

$$\nabla^2 \hat{A}_0^{(3)} = -2[\hat{A}_k^{(2)}, \partial_k \hat{A}_0^{(1)}], \quad (2.31)$$

$$\nabla^2 \hat{A}_0^{(5)} = -2[\hat{A}_k^{(2)}, \partial_k \hat{A}_0^{(3)}] - 2[\hat{A}_k^{(4)}, \partial_k \hat{A}_0^{(1)}] - [\hat{A}_k^{(2)}, [\hat{A}_k^{(2)}, \hat{A}_0^{(1)}]], \quad (2.32)$$

⋮

für die nullte Komponente des Farbfeldes und

$$\nabla^2 \hat{A}_i^{(2)} = -[\hat{A}_0^{(1)}, \partial_i \hat{A}_0^{(1)}], \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{A}_i^{(4)} = & [\hat{A}_0^{(1)}, [\hat{A}_i^{(2)}, \hat{A}_0^{(1)}]] - [\hat{A}_0^{(3)}, \partial_i \hat{A}_0^{(1)}] - [\hat{A}_0^{(1)}, \partial_i \hat{A}_0^{(3)}] \\ & + [\hat{A}_k^{(2)}, \partial_i \hat{A}_k^{(2)}] - 2[\hat{A}_k^{(2)}, \partial_k \hat{A}_i^{(2)}], \end{aligned} \quad (2.34)$$

⋮

für die drei Vektorkomponenten. Diese Methode sollte schnell zur exakten Lösung der Yang-Mills Gleichungen konvergieren, wenn die Kopplungskonstante g_v einen 'kleinen' Wert hat, so daß die Terme zu hohen Potenzen von g_v vernachlässigbar sind.

Hat man die Coulomblösung gemäß (2.30) bestimmt, so berechnet man die rechte Seite von Gleichung (2.33) und erhält einen vom Gluonfeld induzierten Farbstrom als Quelle des Vektorfeldes, sofern der Kommutator in (2.33) nicht verschwindet. Ist die Lösung von (2.33) $\hat{A}_i^{(2)}$ bekannt, so kann man die rechte Seite von (2.31) berechnen, also den gluonischen Korrekturterm zur Farbdichte in zweiter Ordnung. Die Lösung $\hat{A}_0^{(3)}$ verwendet man schließlich für (2.34) u.s.w. . Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis die jeweiligen Korrekturterme vernachlässigbar sind.

Man sieht anhand der Komplexität der Gleichungen, daß man hier mit numerischen Methoden arbeiten muß, da man mit analytischen Verfahren selbst für Punktladungen maximal den ersten Korrekturterm berechnen kann. Weiterhin erkennt man an der Summation über verschiedene Raumindices in den Kommutatoren von (2.31) - (2.34), daß statische Quellen in der Chromodynamik Farbströme induzieren und daß diese zu einer Mischung von Farb- und Raumfreiheitsgraden führen [30].

Als erste Anwendung untersuchen wir nun die Eigenschaften der Lösung der Yang-Mills Gleichungen mit der statischen Quelle (2.20)-(2.22) in verschiedenen Näherungsordnungen in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten. Wir berechnen die Poissongleichungen, die in jeder Näherungsordnung zu lösen sind (siehe (2.30) - (2.34)), mit einem numerischen Verfahren von Feldmeier und Danielewicz [29].

In Abbildung 2.3 ist die Gesamtenergie der Farbfelder

$$E_{tot} = \int d^3r \epsilon(\vec{r}) = \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{E}^a \vec{E}^a + \vec{B}^a \vec{B}^a) \quad (2.35)$$

in den verschiedenen Iterationsschritten aufgetragen. Man erkennt, daß für $g_v = 0.32$ bereits mit der ersten Korrektur die exakte Lösung bestimmt ist, während man für $g_v = 2.0$ bereits bis zur vierten Ordnung gehen muß, damit sich die Gesamtenergie nicht mehr ändert. Bei $g_v = 5.1$ ist bereits keine Konvergenz mehr zu erreichen, sondern das System pendelt zwischen zwei verschiedenen Konfigurationen, die jedoch energetisch noch dicht nebeneinander liegen. Für $g_v = 11.45$ findet keine Konvergenz statt. Das eindeutige Kennzeichen der nichtabelschen Lösungen ist aber, daß sie die Energie des System verringern, also auch im Bereich schwacher Kopplung stets bevorzugt werden gegenüber der Coulomblösung.

Diese generelle Tendenz soll nun mit einem numerischen Verfahren, das es gestattet, die Kopplung 'zeitabhängig' zu erhöhen, weiter untersucht werden. Dabei dienen die perturbativ mit $g_v = g_p = 0.32$ berechneten Potentiale und Felder als Startkonfiguration für ein gekoppeltes 'staggered leapfrog'-

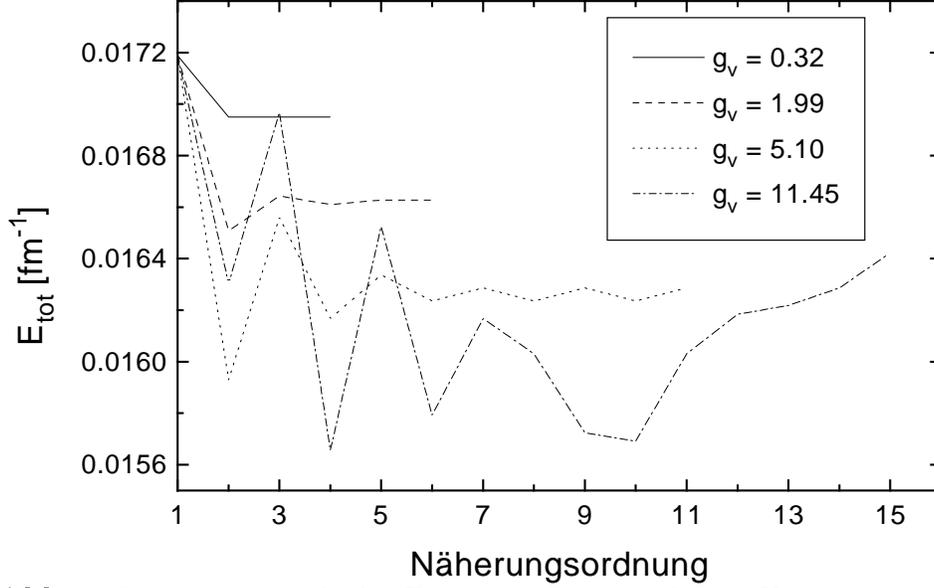


Abb. 2.3: Gesamtenergie der Farbfelder für verschiedene Näherungsordnungen des perturbativen Verfahrens.

Verfahren [20], mit dem die Kopplungskonstante

$$g_v(t) = g_p + \alpha t , \quad (2.36)$$

adiabatisch geändert wird. In Abbildung 2.4 ist das Verhalten des farbelektrischen Feldes $E_z^1(0, y, 0)$ entlang der y -Achse dargestellt. Die durchgezogene Linie kennzeichnet das mit dem perturbativen Verfahren berechnete Feld bei $g_v = 0.32$ und die unterbrochene Linie das Resultat des adiabatischen Verfahrens, also $g_v = 50.0$, was einer starken Kopplungskonstante von $\alpha_s \approx 200$ entspricht. Man erkennt, daß sich die Feldstärke über diesen sehr großen Bereich der Kopplungskonstante kaum geändert hat, sondern lediglich eine Abschwächung der Maximalwerte eingetreten ist, also eine weitere Abschirmung der Farbladungen. Ein anderes Verhalten weist allerdings das Magnetfeld $B_z^1(0, y, 0)$ auf (Abbildung 2.5), das unter Erhöhung von g_v auf mehr als den zweifachen Wert anwächst. Die Aussagekraft der Änderung des elektrischen und magnetischen Feldes ist in diesem Zusammenhang allerdings gering, da diese Größen eichabhängig sind. Als eigentliches Maß für den Einfluß der nichtabelschen Terme ist die Energiedichte $\epsilon(\vec{r}) = \frac{1}{2}(\vec{E}^a \vec{E}^a + \vec{B}^a \vec{B}^a)$ als eichunabhängige Größe besser geeignet. Sie ist in Abbildung 2.6 aufgetragen, weist aber eine weitaus geringere, vernachlässigbare Änderung auf. Die nichtabelschen Effekte lassen sich daher folgendermaßen klassifizieren:

- eichabhängige Größen
Diese sind in abelsche (ρ^a, \vec{E}^a) und nichtabelsche oder induzierte

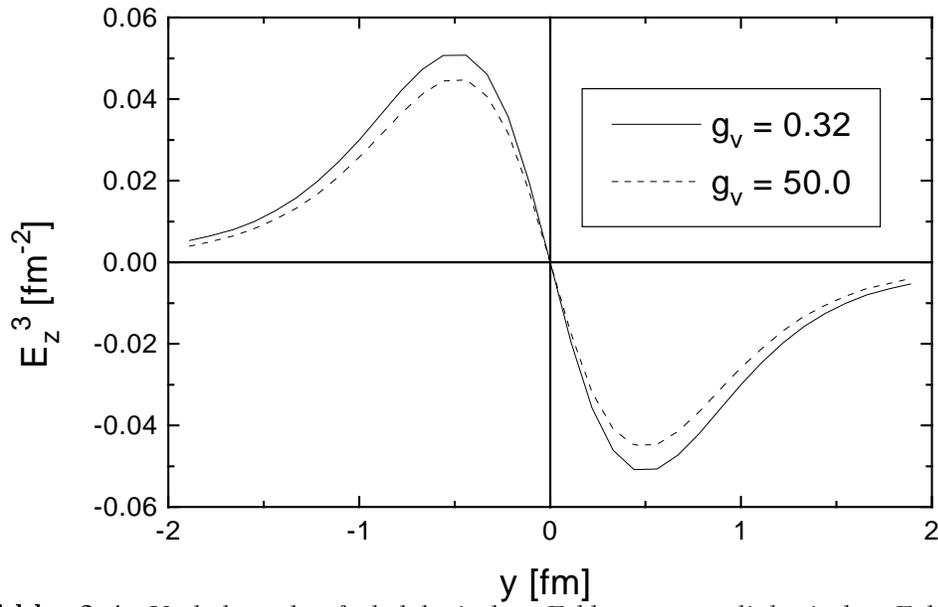


Abb. 2.4: Verhalten des farbelektrischen Feldes unter adiabatischer Erhöhung der Kopplungskonstante von $g_v = 0.32$ auf $g_v = 50.0$.

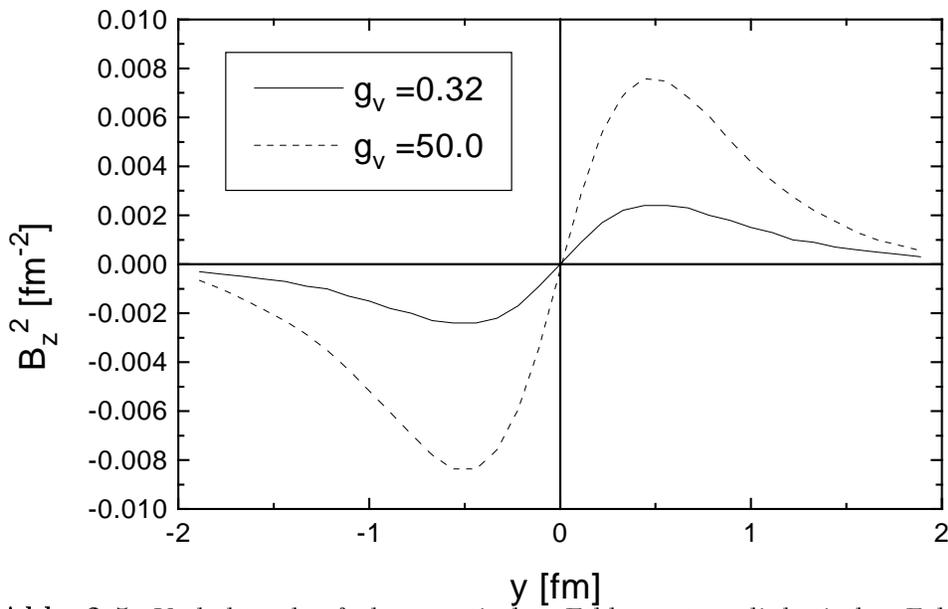


Abb. 2.5: Verhalten des farbmagnetischen Feldes unter adiabatischer Erhöhung der Kopplungskonstante von $g_v = 0.32$ auf $g_v = 50.0$.

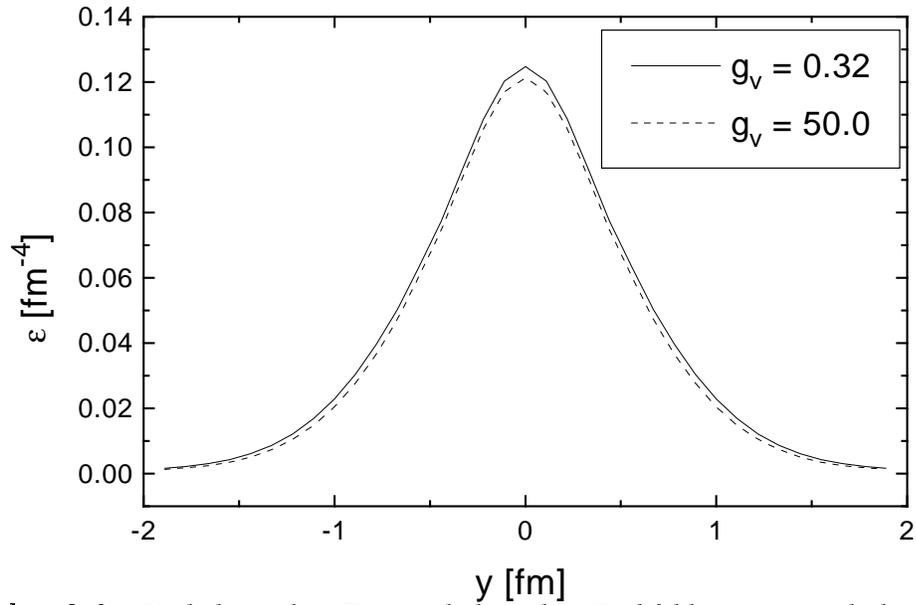


Abb. 2.6: Verhalten der Energiedichte der Farbfelder unter adiabatischer Erhöhung der Kopplungskonstante von $g_v = 0.32$ auf $g_v = 50.0$.

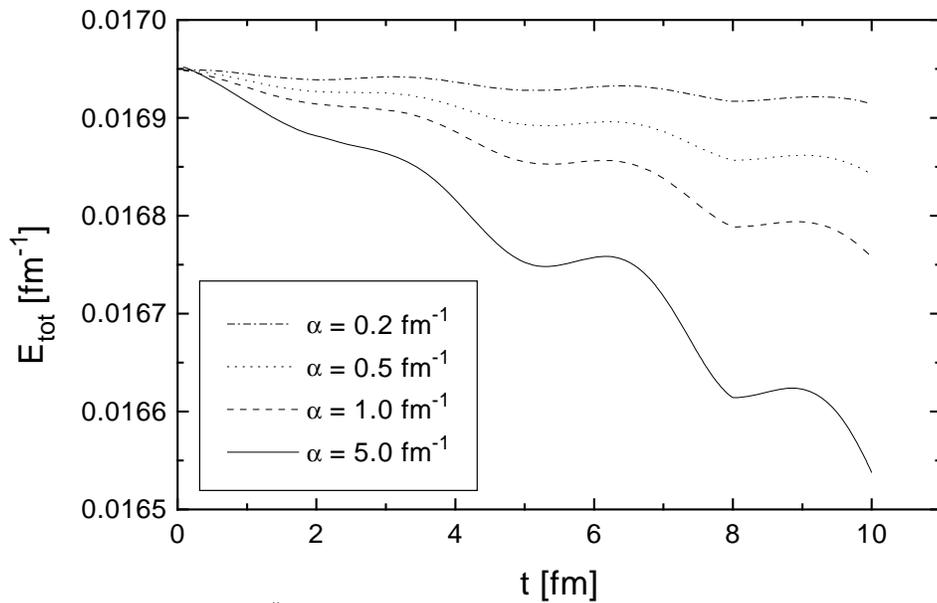


Abb. 2.7: Zeitliche Änderung der Gesamtenergie der Farbfelder für verschiedene Werte von α .

Größen (\vec{J}^a, \vec{B}^a) zu unterteilen. Die abelschen Größen erfahren eine geringe Änderung; der Abschirmeffekt wächst mit der Stärke der Kopplung. Die nichtabelschen Größen skalieren ebenfalls mit der Kopplung. Betrachtet man aber die absoluten Größen der Felder, so bleibt die Konfiguration abelsch dominiert.

- eichunabhängige Größen

Diese verringern sich ebenfalls nur geringfügig, wie man an der Energiedichte in Abbildung 2.6 und auch an dem entsprechenden zeitlichen Verhalten der Gesamtenergie der Felder in Abbildung 2.7 erkennt. Die stete Reduktion der Gesamtenergie weist darauf hin, daß nichtabelsche Konfigurationen bevorzugt werden und diese die Eigenschaft haben, die wahren Farbladungen abzuschirmen.

Weitere Untersuchungen von Gatoff et. al haben gezeigt, daß auch im Falle von sich (mit relativistischer Geschwindigkeit) bewegenden Ladungen die nichtabelschen Effekte stets gering sind, zu einer Abschirmung der Ladungen und Ströme führen und die Gesamtenergie des Systems verringern [31, 32]. Um daher Aussagen über das (dynamische) Verhalten des Quark Confinements zu erhalten ist die Chromodynamik als Theorie klassischer Felder und Ladungen vollkommen inadäquat, und man ist daher gezwungen auf Modelle mit effektivem Confinement zurückzugreifen. Ein Beispiel eines solchen Modells, das auf den Eigenschaften des QCD-Vakuums als ideales Farbdielektrikum beruht, wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

Kapitel 3

Das Friedberg-Lee Modell

In diesem Kapitel werden wir die in Abschnitt 2.1 erläuterten Eigenschaften der QCD phänomenologisch modellieren und zeigen, daß ein (hypothetisches) Medium mit verschwindender Dielektrizitätskonstanten den Einschluß von Farbladungen hervorruft. Es wird schließlich ein auf dieser Idee beruhendes Modell vorgestellt, das sogenannte Friedberg-Lee Modell, auf dem alle weiteren Rechnungen, sowohl statisch als auch dynamisch, basieren. Die bisher in der Literatur veröffentlichten Ergebnisse werden diskutiert und gezeigt, daß die dort verwendeten Techniken nicht ausreichen, um dynamische Prozesse zu beschreiben, wie beispielsweise Bag-Bag Kollisionen oder Stringformierung und Stringfragmentation.

3.1 Phänomenologie des Farbconfinements

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, daß das Vakuum der QED die Eigenschaft hat, durch die Erzeugung von virtuellen Elektron-Positron Paaren, Ladungen abzuschirmen. Im Vakuum der QCD hingegen können analog nicht nur virtuelle Quark-Antiquark Paare existieren sondern auch Gluonenpaare (s. Abbildung 2.2), wodurch die wahren Ladungen antiabgeschirmt werden. Wir versuchen nun durch ein hypothetisches Modell aus der klassischen Elektrodynamik zu einer Beschreibung von (Anti-)Abschirmungsprozessen zu gelangen. Dazu betrachten wir eine Ladung in einer Kavität vom Radius R mit Dielektrizitätskonstante κ . Das Verschiebungsfeld \vec{D} beträgt

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \equiv \kappa\vec{E} , \quad (3.1)$$

wobei \vec{E} das elektrische Feld und \vec{P} die Polarisationsdichte darstellen. Da in gewöhnlichen Medien die Polarisation und das elektrische Feld gleichgerichtet ist, ist stets $\kappa \geq 1$. Die Annahme, die wir hier machen wollen, ist die, daß es ein (durch Quanteneffekte hervorgerufenen) Medium mit $\kappa \ll 1$ gibt.

Wie wir im weiteren zeigen werden, verursacht eine Ladung q in diesem Medium die Formierung einer Kavität mit dem Radius R und $\kappa = 1$ innerhalb und $\kappa = \kappa_{med} \ll 1$ außerhalb, da die erzeugten Polarisationsladungen an der Oberfläche der Kavität wegen (3.1) das gleiche Vorzeichen wie q haben (Abbildung 3.1). Somit stoßen sich die wahre Ladung q und die Polarisationsladungen ab, und durch den Druck des Vakuums auf diese Kavität entsteht bei einem bestimmten Radius ein Gleichgewichtszustand. Quantitativ kann

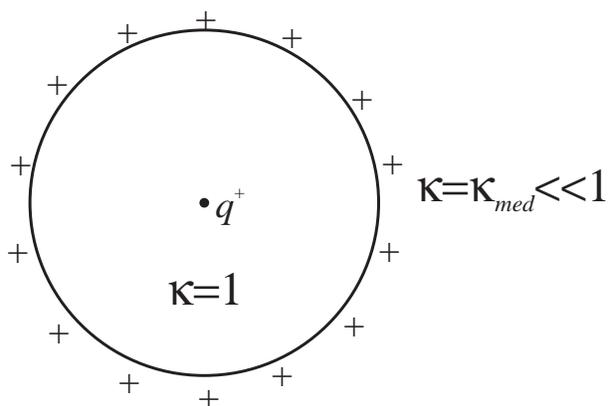


Abb. 3.1: Einfluß einer Ladung auf ein hypothetisches Dielektrikum in der klassischen Elektrodynamik.

man diesen Effekt durch Betrachtung der Energiebilanz einer solchen Kavität, $U = U_{el} + U_{kav}$ erklären [33]. Es tragen einerseits die elektrostatische Energie

$$U_{el} = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{D} \cdot \vec{E} \quad (3.2)$$

und die Volumenenergie der Kavität

$$U_{kav} \simeq \frac{4\pi}{3} R^3 p \quad (3.3)$$

bei, wobei p den Druck des Vakuums auf die Kavität darstellt. U_{el} berechnet sich aus den Feldstärken innerhalb und außerhalb der Kavität; $\vec{D}_{in} = \vec{E}_{in} = \vec{D}_{out} = q/R^2 \vec{e}_r$ und $\vec{E}_{out} = q/(R^2 \kappa_{med}) \vec{e}_r$, womit sich

$$U_{el} = \frac{1}{2} q^2 (\kappa_{med}^{-1} - 1) / R \quad (3.4)$$

ergibt. Bestimmt man das Minimum von U als Funktions des Radius und setzt diesen wieder in U ein, so erhält man

$$U_{min} = \frac{4}{3} \left(\frac{q^2}{2\kappa_{med}} \right)^{3/4} (4\pi p)^{1/4}. \quad (3.5)$$

Daraus folgern wir im Grenzfall $\kappa_{med} \rightarrow 0$, daß jede beliebige einzelne Ladung innerhalb dieses Mediums zu einer Konfiguration mit unendlicher Energie führt, diese also nicht existieren kann.

Essentiell für das obige Ergebnis ist die Tatsache, daß eine einzelne Ladung nach dem Gaußschen Gesetz nur ein radiales Feld erzeugen kann und somit die Feldlinien senkrecht auf der Oberfläche der Kavität stehen. Für eine Ladungskonfiguration mit verschwindender Gesamtladung ist es jedoch möglich, daß die Feldlinien stets parallel zur Oberfläche des Mediums liegen, womit $\vec{D}_{in} = \vec{E}_{in}$, $\vec{D}_{out} = 0$ und an der Oberfläche $\vec{E}_{out} = \vec{E}_{in}$ gilt. Die Gesamtenergie bleibt also endlich auch für $\kappa_{med} \rightarrow 0$. Diese Tatsache, daß Ladungen nur in neutralen Konfigurationen vorliegen können, liefert eine anschauliche Erklärung für die experimentelle Evidenz bisher nicht beobachteter einzelner Farbladungen in der QCD. Ein Medium mit verschwindender Dielektrizitätskonstante dient daher als Modell für das Vakuum der QCD und liefert eine natürliche Beschreibung für die Struktur der Hadronen als Farbsingletts, wie in Abbildung 3.2 gezeigt. Ein Meson besteht demnach aus einem Quark-Antiquark Paar, wobei jede Feldlinie, die von dem Quark ausgeht und bei dem Antiquark endet. An der Oberfläche verlaufen die Feldlinien parallel zum Medium. Eine ähnliche Situation ergibt sich für Baryonen, die aus drei Quarks bestehen (Abbildung 3.2 rechts).

Im nächsten Abschnitt werden wir ein Modell vorstellen, das die hier be-

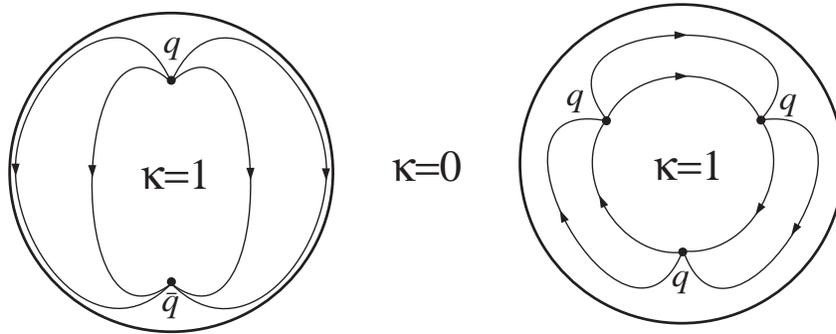


Abb. 3.2: Struktur von Meson (links) und Baryon (rechts), sowie der Verlauf der Feldlinien innerhalb der Kavität.

schriebenen physikalischen Eigenschaften beinhaltet und es gestattet, Hadronen als dynamische und selbstkonsistente Solitonen zu beschreiben. Es bildet die Grundlage für die weiteren Untersuchungen über das dynamische Verhalten des Farbconfinements in den weiteren Kapiteln.

3.2 Die Lagrangedichte

Das nicht-topologische Solitonen-Modell wurde erstmals 1977 von Friedberg und Lee [22, 34, 35] vorgeschlagen. Doch erst nach der Weiterentwicklung durch die Arbeitsgruppe um Willets in Seattle [16, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] erlangte es die heutige Popularität als effektives Modell zur Beschreibung von Nukleonen. Im Mittelpunkt des Modells steht das nicht-topologische Solitonen-, oder σ -Feld, welches eine phänomenologische Beschreibung für die komplexe nichtperturbative Struktur des QCD-Vakuums (Antiabschirmung, Farbconfinement, etc.) darstellt. Das Friedberg-Lee Modell erlaubt die dynamische Beschreibung von Hadronen als Solitonen, die im skalaren σ -Feld gebunden sind. Die Lagrangedichte ist dabei durch

$$\mathcal{L}_{FL} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{q\sigma} + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_G \quad (3.6)$$

gegeben, wobei

$$\mathcal{L}_q = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \hat{D}_\mu - m)\Psi \quad (3.7)$$

den Dirac-Term,

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - U(\sigma) \quad (3.8)$$

den Anteil des skalaren Feldes,

$$\mathcal{L}_{q\sigma} = g_0 \sigma \bar{\Psi} \Psi \quad (3.9)$$

die Quark- σ -Kopplung und der letzte Term

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}\kappa(\sigma)F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

den gluonischen Anteil der Lagrangedichte beschreibt.

Der Dirac-Term ist identisch mit dem der QCD und beschreibt die Quarks als Spin-1/2-Teilchen mit der Stromquarkmasse $m \sim 10 \text{ MeV}$. Die Fermionwellenfunktion Ψ hat 4 (Dirac) mal 3 (Farbe) mal n (Flavor) Komponenten und die Form der kovarianten Ableitung ist

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_v \left(\frac{\lambda^a}{2}\right) A_a^\mu. \quad (3.11)$$

A_a^μ sind die Gluonenfelder, die minimal an die Quarks gekoppelt werden. Der Term (3.9) beschreibt die Kopplung der Quarks an das skalare σ -Feld und wirkt als Massenterm für diese, so daß das Modell nicht chiral invariant ist. Der kinetische und der potentielle Anteil für das σ -Feld enthält das Selbstwechselwirkungspotential $U(\sigma)$, das üblicherweise in vierter Ordnung in σ angenommen wird

$$U(\sigma) = \frac{a}{2!}\sigma^2 + \frac{b}{3!}\sigma^3 + \frac{c}{4!}\sigma^4 + B. \quad (3.12)$$

Die Konstanten in (3.12) werden so gewählt, daß $U(\sigma)$ ein lokales Minimum an $\sigma = 0$ hat, sowie ein energetisch tieferes (globales) Minimum an einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert σ_{vac} , an dem $U(\sigma) = 0$ angenommen wird. Die Konstante B wird so eingestellt, daß $U(\sigma_{vac}) = 0$ und $U(0) = B$, so daß man B mit der sogenannten Bag-Konstante, also der Volumenenergiedichte der Kavität, identifizieren kann. Gluonische Farbfelder werden wie in der reinen QCD eingeführt, bis auf eine indirekte Wechselwirkung mit dem skalaren σ -Feld durch eine dielektrische Funktion $\kappa(\sigma)$ mit $\kappa(0) = 1$ und $\kappa(\sigma_{vac}) = 0$. $\kappa(\sigma)$ wird in diesem Modell nicht eindeutig vorgeschrieben, und man muß eine Wahl bezüglich der funktionalen Form treffen. In der Vergangenheit wurden einige Vorschläge gemacht, die man folgendermaßen zusammenfassen kann:

$$\kappa_{nm}(\sigma) = \left| 1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{vac}} \right)^n \right|^m \Theta(\sigma_{vac} - \sigma) . \quad (3.13)$$

Friedberg und Lee schlugen ursprünglich $n = m = 1$ vor, während andere [41, 48] $n = 1, m = 2$ oder sogar $(n, m) = (2, 1), (2, 3/2)$ und $(2, 2)$ [36] benutzten. Wir bevorzugen die Parameter $(n, m) = (1, 2)$, womit garantiert wird, daß $\kappa'(\sigma_{vac}) = 0$ ist.

Weil man annimmt, daß das σ -Feld alle nichtperturbativen und somit langreichweitigen Effekte der QCD modelliert, vernachlässigt man die Beiträge der Selbstwechselwirkung der Gluonenfelder und behandelt diese konsistenterweise als klassische Maxwell-Felder, mit

$$\partial^\mu (\kappa F_{\mu\nu}^a) = j_\nu^a , \quad (3.14)$$

$$\text{und } F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a . \quad (3.15)$$

Die anderen beiden Feldgleichungen, die aus der Lagrangedichte folgen, haben die Form

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - ig_v \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a) - m_0 - g_0 \sigma) \Psi = 0 \quad \text{für } \Psi , \quad (3.16)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + U'(\sigma) + \frac{1}{4} \kappa'(\sigma) F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + g_0 \bar{\Psi} \Psi = 0 \quad \text{für } \sigma , \quad (3.17)$$

wobei die Ableitungen von U und κ als Ableitungen nach σ zu verstehen sind. Die Gleichungen (3.14), (3.16) und (3.17) bilden die Grundgleichungen des Modells, deren selbstkonsistente Lösung gesucht wird. Dieses Vorgehen wird durch die Tatsache erschwert, daß die Gleichungen gekoppelt und hochgradig nichtlinear in den Feldern sind. Man macht daher zunächst die vereinfachende Annahme, daß man von allen Feldern nur ihre Erwartungswerte betrachtet, und die quantenmechanischen Fluktuationen vernachlässigt. Dieses Vorgehen wird als Mittelfeldnäherung bezeichnet. Weiterhin wird angenommen, daß die Grundzustandseigenschaften des Modells im wesentlichen durch Quark-Wellenfunktionen und σ -Feld gegeben sind. Der Einfluß des Gluonenfelds

wird anschließend in niedrigster Ordnung Störungstheorie auf den (farbneutralen) Grundzustand berechnet. Unter diesen Prämissen wurden von vielen Autoren Solitonlösungen der statischen Gleichungen

$$(i\vec{\gamma}\nabla + m_0 + g_0\sigma)\Psi = 0 \quad (3.18)$$

$$\nabla^2\sigma - \frac{dU}{d\sigma} - g_0\bar{\Psi}\Psi = 0 \quad (3.19)$$

berechnet und versucht, die wichtigsten Eigenschaften des Hadronenspektrums mit zwei Quarksorten (up und down), also von $N - \Delta$ und $\rho - \pi$ zu reproduzieren, was unter einer geeigneten Wahl der Modellparameter stets möglich ist. Eine gute Übersicht über diese Arbeiten findet man in [16, 20]. Im weiteren wollen wir aber auf den weniger gut dokumentierten Gluonensektor des Modells eingehen und die bisherigen in der Literatur veröffentlichten Rechnungen zusammenfassen.

3.3 Der Gluonenpropagator im Medium

Betrachtet man die gebundenen Solitonzustände niedrigster Masse ohne explizite Farbfreiheitsgrade, so sind alle zwei Quarkzustände (Pion und Rho-Meson) sowie alle drei Quarkzustände (Nukleon und Δ) entartet. Somit ist der Quark-Antiquarkzustand, der gewöhnlich bei $\approx 465 \text{ MeV}$ festgelegt wird, eine Mischung aus ρ - und π -Meson und der drei Quarkzustand (bei $\approx 1080 \text{ MeV}$) eine Mischung aus Nukleon und Δ [16]. Eine Aufspaltung dieser wird erreicht durch die Wechselwirkung des Spins der Quarks (farbmagnetische Hyperfeinaufspaltung). Zur Berechnung dieses Energiebeitrages

$$E_M = - \sum_{ckk'} \sum_{i < j} \int d^3r \int d^3r' J_i^{kc}(\vec{r}) G^{kk'}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega = 0) J_j^{k'c}(\vec{r}'), \quad (3.20)$$

mit den Quarkströmen

$$J_i^{kc}(\vec{r}) = -gu(\vec{r})v(\vec{r})\chi_i^\dagger \lambda^c \epsilon_{klm} x_l \sigma_m \chi_i \quad (3.21)$$

benötigt man den Gluonenpropagator $G^{\mu\nu}(\vec{r}, \vec{r}'; \omega)$ des Modells. Dieser wurde von Bickeboeller et al. [41, 42] durch eine Entwicklung in Kugelflächenfunktionen erstmals konstruiert. Wir beschreiben nun kurz die Ableitung des skalaren G^{00} -Propagators. Die entsprechende Ableitung von $G^{kk'}$ durch Entwicklung nach Vektor-Kugelflächenfunktionen ist etwas aufwendiger aber verläuft analog:

Wählt man die Coulombbeichung im Medium $\nabla \cdot (\kappa \vec{A}) = 0$, so können die Maxwellgleichungen (3.14) in

$$\nabla \cdot (\kappa \nabla A_0) = -j_0, \quad (3.22)$$

$$-\kappa \partial_t^2 \vec{A} + \nabla^2 \kappa \vec{A} - \nabla \times (\kappa \vec{A} \times \frac{\nabla \kappa}{\kappa}) = -\vec{j} + \kappa \nabla \partial_t A_0, \quad (3.23)$$

umgeschrieben werden. Diese Gleichungen sind die Bestimmungsgleichungen für die Greenfunktionen. Den skalaren Anteil der Greenfunktion $G(\vec{r}, \vec{r}') \equiv G^{00}(\vec{r}, \vec{r}')$ erhält man durch

$$\nabla \kappa(\vec{r}) \nabla G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.24)$$

Um Divergenzen im Limes $\kappa \rightarrow 0$ zu vermeiden, definiert man

$$\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}') = \sqrt{\kappa(\vec{r})} G(\vec{r}, \vec{r}') \sqrt{\kappa(\vec{r}')}. \quad (3.25)$$

Somit muß \bar{G}

$$(\nabla^2 - W(\vec{r})) \bar{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.26)$$

erfüllen mit dem 'Potentialterm' $W(\vec{r})$, der durch

$$W(\vec{r}) = \frac{1}{4} |\nabla(\log(\kappa(\vec{r})))|^2 + \frac{1}{2} \nabla^2 \log(\kappa(\vec{r})) \quad (3.27)$$

gegeben ist. Die Greenfunktion \bar{G} , den Potentialterm W , sowie die δ -Funktion werden nun nach Kugelflächenfunktionen

$$W(\vec{r}) = W(r)_{LM} Y_{LM}(\Omega), \quad (3.28)$$

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') Y_{l'm'}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\Omega') \quad \text{und} \quad (3.29)$$

$$\bar{G}(\vec{r}, \vec{r}') = c_{\alpha\alpha'} \frac{1}{r_{<}} j_{lm}^\alpha(r_{<}) Y_{lm}(\Omega_{<}) \times \frac{1}{r_{>}} n_{l'm'}^{\alpha'}(r_{>}) Y_{l'm'}^*(\Omega_{>}), \quad (3.30)$$

entwickelt, wobei über wiederholte Indices automatisch summiert wird und die Größen $(r_{<}, \Omega_{<})$ sich auf (r, Ω) beziehen für $r < r'$, sowie auf (r', Ω') für $r > r'$; $(r_{>}, \Omega_{>})$ ist analog definiert. Durch Multiplikation von (3.30) mit $Y_{lm}^*(\Omega)$ und Integration über die Winkelkoordinate Ω reduziert die obige Entwicklung die homogene partielle Differentialgleichung (3.26) auf Differentialgleichungen für die radialen Funktionen $j_{lm}^\alpha(r)$ und $n_{l'm'}^{\alpha'}(r')$:

$$\left[\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \delta_{ll'} \delta_{mm'} + W_{LM}(r) \langle lm | Y_{LM} | l'm' \rangle \right] \times \begin{pmatrix} j_{l'm'}^\alpha \\ n_{l'm'}^{\alpha'} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.31)$$

Der Satz von Funktionen, der regulär im Ursprung ist, ist durch $j_{lm}^\alpha(r)$ gegeben und derjenige, der regulär im Unendlichen ist, durch $n_{l'm'}^{\alpha'}(r')$.

Betrachten wir nun zunächst den Fall, daß das Medium und somit $W(\vec{r}) = W(r) Y_{00}$ sphärische Symmetrie besitzt. Dann gilt für die Matrixelemente

$$\langle lm | Y_{LM} | l'm' \rangle = \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) Y_{LM}(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) \sim \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (3.32)$$

da in der Entwicklung von W nur der Term mit $L = 0$ und $M = 0$ beiträgt. Somit bricht die Summe über die Matrixelemente in (3.31) zusammen und

die Winkelanteile entkoppeln. Das verbleibende Gleichungssystem kann jedoch nicht weiter analytisch vereinfacht werden, da die radiale Abhängigkeit von $W(r)$ in (3.27) für eine realistische funktionale Form von $\kappa(\vec{r})$ zu komplex ist. Man muß daher mit numerischen Methoden die Radialfunktionen bestimmen.

Die Berechnung der Radialfunktionen stellt sich weitaus komplexer dar, wenn das Medium keine sphärische Symmetrie besitzt. In diesem Fall hat man nicht mehr den Vorteil, daß man zu gegebener Symmetrie der Quarkströme (beispielsweise einen dipolartigen Strom mit $l = 1$) nur die zugehörige Greenfunktion berechnen muß, sondern es werden verschiedene Drehimpulse l, l' und m, m' gemischt, so daß man immer einen vollständigen Satz von Radialfunktionen benötigt. Hat man es darüberhinaus mit einem sich dynamisch verändernden Medium zu tun, so müssen diese Funktionen stets neu berechnet werden, was zu einem sehr großen numerischen Aufwand führt. Da weiterhin nach Bestimmung der Greenfunktion noch die Potentiale durch Raumintegration bestimmt werden müssen, eignet sich dieses Verfahren nicht für dynamische Simulationen, sondern lediglich zur Berechnung statischer Eigenschaften der Gluonen im Rahmen dieses Modells. Diese Eigenschaften werden nun im folgenden Abschnitt kurz beschrieben.

3.4 Statische Gluonenfelder

In diesem Abschnitt beschreiben wir den Einfluß der Quark-Gluon Wechselwirkung auf die Massen der Hadronen. Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, haben die niedrigstliegenden ($s_{1/2}$) Zustände aus zwei Quarks (Mesonen), sowie die aus drei Quarks (Baryonen) ohne Berücksichtigung der Farbwechselwirkung dieselbe Masse. Diese Entartung wird aufgehoben durch die von den Quarks erzeugten Gluonenfelder, die man in niedrigster Ordnung Störungstheorie, also unter Vernachlässigung der Gluonselfwechselwirkung und des Einflusses der Gluonenfelder auf die Quarkwellenfunktionen bzw. das σ -Feld, berechnet. Der Beitrag der Gluonen zur Energiedichte des Systems beträgt daher [49]

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{2} [(\vec{E}^a)^2 + (\vec{B}^a)^2] - ig\bar{\Psi}\gamma_k\frac{\lambda^a}{2}\Psi A_k^a. \quad (3.33)$$

Verwendet man die Feldgleichung (3.14), so kann durch Integration von (2.6) der Energiebeitrag des Gluonenfeldes bestimmt werden,

$$H_G = \frac{1}{2} \int d^3x [(\vec{E}^a)^2 - (\vec{B}^a)^2]. \quad (3.34)$$

Aufgrund der Tatsache, daß das elektrische Feld im Grundzustand aus Gründen der Farbsymmetrie verschwindet [49, 50] und nur der magnetische Anteil zur Gesamtenergie beiträgt, erhält man aus (3.34) den Ausdruck

(3.20). Setzt man die Quarkströme (3.21) in (3.20) ein und beachtet, daß für Quarks im $s_{1/2}$ Grundzustand nur die $l = 1$ -Komponente des Gluonenpropagators beiträgt, so ergibt sich

$$E_M = -\frac{2}{3}\alpha_s \sum_{i < j} \langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle \mathcal{M}, \quad (3.35)$$

wobei

$$\mathcal{M} = \frac{\kappa(r_0)}{W(r_0)} \int r^2 dr \int r' 2dr' \left[\frac{u(r)v(r)}{r\kappa(r)} f_1(r_<) g_1(r_>) \frac{u(r')v(r')}{r'\kappa(r')} \right] \quad (3.36)$$

den Überlapp der radialen Quarkwellenfunktionen u und v mit den radialen Funktionen f_1 und g_1 des Gluonenpropagators beschreibt. Die Farb- und Spinmatrixelemente in (3.35) kann man faktorisieren und man erhält für Baryonen

$$\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle = -8/3 \quad (3.37)$$

$$\langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle = \begin{cases} -1 & \text{für das Nukleon} \\ 1 & \text{für das Delta,} \end{cases} \quad (3.38)$$

sowie für die Mesonen

$$\langle \vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j \rangle = -16/3 \quad (3.39)$$

$$\langle \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_j \rangle = \begin{cases} -3 & \text{für das Pi-Meson} \\ 1 & \text{für das Rho- oder Omega-Meson.} \end{cases} \quad (3.40)$$

Daher ergibt sich als Energiedifferenz

$$E(\Delta) - E(N) = \frac{32}{3}\alpha_s \mathcal{M}(\text{Baryon}) \quad (3.41)$$

$$E(\rho) - E(\pi) = \frac{128}{3}\alpha_s \mathcal{M}(\text{Meson}). \quad (3.42)$$

Die bisher unbestimmte starke Kopplungskonstante kann daher benutzt werden, um beispielsweise die experimentell bekannte Energiedifferenz zwischen Δ und Nukleon von $\approx 297 \text{ MeV}$ festzulegen und mit dem bestimmten Wert die Aufspaltungsenergie zwischen ρ - und π -Meson vorherzusagen.

Die in der Literatur veröffentlichten Ergebnisse [41, 43] sind in Abbildung 3.3 aufgeführt. Dabei wurden die Parameter des Modells, also a, b, c aus $U(\sigma)$, sowie die Kopplungsparameter g_0 und $\alpha_s = g_v^2/(4\pi)$ wie folgt festgelegt: Man fittet die Masse des Nukleons (938 MeV), die Masse des Δ (1232 MeV), sowie den Ladungsradius des Protons ($\langle r^2 \rangle_N^{1/2} = 0.83 \text{ fm}$), wodurch α_s , g_0 und ein Potentialparameter bestimmt sind. Die physikalischen Eigenschaften der Solitonlösungen des Modells werden mit den verbleibenden Parametern c , $f = b^2/ac$, sowie den unterschiedlichen Parametrisierungen von

Table 1. Quark sigma coupling constant g , the entry denoted by (0) is for the calculation without gluons. The other κ 's are defined in the text. All calculations are self-consistent

b^2/ac	c	(0)	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
3.0	500	8.37	9.65	8.56	9.15	8.96
3.0	1,000	7.40	8.92	7.93	8.22	8.12
3.2	500	7.58	8.76	7.79	8.33	8.12
3.2	1,000	6.95	8.22	7.48	7.74	7.64
6.0	500	6.77	7.76	7.01	7.51	7.34
6.0	1,000	6.65	7.64	7.17	7.49	7.36
∞	500	6.64	7.56	6.86	7.39	7.20
∞	1,000	6.64	7.56	7.12	7.47	7.33

Table 2. Strong coupling constant α_s , see Table 1

b^2/ac	c	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
3.0	500	1.63	1.14	1.30	1.26
3.0	1,000	1.81	1.20	1.32	1.30
3.2	500	1.71	1.13	1.32	1.27
3.2	1,000	1.85	1.14	1.31	1.28
6.0	500	1.77	1.02	1.31	1.23
6.0	1,000	1.85	0.96	1.24	1.16
∞	500	1.77	0.95	1.30	1.20
∞	1,000	1.81	0.88	1.21	1.12

Table 3. Pion mass, MeV (experimental value is 140 MeV). See Table 1 for explanation. The entry labelled $\kappa_4(P)$ is a perturbative calculation

b^2/ac	c	(0)	$\kappa_4(P)$	κ_1	κ_3	κ_4
3.0	500	767	452	222	328	297
3.0	1,000	756	421	206	319	295
3.2	500	766	444	251	346	322
3.2	1,000	756	423	228	340	321
6.0	500	767	448	245	359	349
6.0	1,000	761	448	221	358	353
∞	500	769	443	245	362	359
∞	1,000	765	175	nc	364	362

nc: not converged

Table 4. Magnetic moment of the proton in nuclear magnetons (experimental value is 2.79). See Table 1 for explanation

b^2/ac	c	(0)	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
3.0	500	2.53	2.55	2.55	2.56	2.56
3.0	1,000	2.48	2.49	2.50	2.51	2.50
3.2	500	2.50	2.52	2.53	2.54	2.53
3.2	1,000	2.45	2.46	2.47	2.48	2.48
6.0	500	2.45	2.47	2.47	2.49	2.48
6.0	1,000	2.40	2.41	2.43	2.44	2.43
∞	500	2.43	2.45	2.46	2.48	2.46
∞	1,000	2.38	2.41	2.41	2.43	2.41

Table 5. Quotient of axial and vector coupling constant (experimental value is 1.25). See Table 1 for explanation

b^2/ac	c	(0)	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4
3.0	500	1.01	1.05	1.05	1.04	1.05
3.0	1,000	1.06	1.12	1.11	1.11	1.11
3.2	500	1.04	1.08	1.08	1.07	1.08
3.2	1,000	1.09	1.14	1.14	1.13	1.13
6.0	500	1.08	1.13	1.13	1.12	1.12
6.0	1,000	1.12	1.17	1.17	1.16	1.17
∞	500	1.09	1.13	1.14	1.13	1.14
∞	1,000	1.13	1.17	1.17	1.17	1.17

Abb. 3.3: Parameter des Friedberg-Lee Modells und einige physikalische Eigenschaften der Solitonlösungen für verschiedene Parametrisierungen der Dielektrizitätskonstanten κ_{1-4} . Die Tabellen sind aus [41] entnommen.

$\kappa_1 - \kappa_4$ untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.3 zu sehen, die aus [41] entnommen wurden. Man erkennt in Table 2, daß der Wert der starken Kopplungskonstante α_s in den meisten Fällen zwischen $0.9 < \alpha_s < 1.9$ liegt, also insbesondere recht große Werte annimmt. In Table 3 (Auszug aus [43]) ist die Masse des Pions aufgetragen, wobei (0) die hier beschriebene perturbative Rechnung wiedergibt. Man sieht, daß die Aufspaltung der Energieniveaus für die Mesonen viel zu gering ist mit dem Wert von α_s , mit dem die Aufspaltung der Baryonen gefittet wird. Die Werte liegen zwischen $737 \text{ MeV} < m_\pi < 769 \text{ MeV}$, sowie $866 \text{ MeV} < m_\rho < 887 \text{ MeV}$ für Pion und Rho-Meson. Selbst eine selbstkonsistente Berechnung des Solitons, die die Rückkopplung der Gluonfelder auf Quarkverteilungen und σ -Feld beinhaltet, ist nicht in der Lage, die korrekte Pionenmasse von $\approx 140 \text{ MeV}$ zu reproduzieren. Der Grund dafür liegt wohl in der Tatsache, daß das Pion nicht als eigenständiges Teilchen betrachtet werden kann, sondern als Goldstone-Boson der chiralen Symmetrie.

In Table 4 + 5 ist das magnetische Moment des Protons

$$\mu_p = \left\langle \int d^3r (\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}))_z \right\rangle_{m=1/2} \quad (3.43)$$

und der Quotient aus axialer und Vektorkopplungskonstante

$$\frac{g_a}{g_v} = \langle p \uparrow | \hat{\tau}_3 \hat{\Sigma}_3 | \uparrow p \rangle = \frac{5}{3} \int_0^\infty dr r^2 (u^2(r) - \frac{1}{3} v^2(r)) \quad (3.44)$$

aufgetragen, wobei $\hat{\tau}_3 = \hat{\lambda}_3/2$ die Gell-Mann Matrix und $\hat{\Sigma}_3$ die 4×4 Spinmatrix darstellen. Beide Größen können im Rahmen des Modells und unabhängig von den verbleibenden Parametern gut reproduziert werden.

Mit diesem Modell ist man also in der Lage, die statischen Eigenschaften der Hadronen gut darzustellen. Allerdings sind bis heute nur wenige Versuche unternommen worden, auch dynamische Prozesse zu beschreiben. Das liegt zum einen an den oben dargestellten Schwierigkeiten, den Gluonenpropagator für deformierte Bagzustände zu berechnen und zum anderen daran, daß eine dynamische Zeitentwicklung der Quarks mit Hilfe der Diracgleichung oder einer zeitabhängigen Hartree-Fock-Rechnung zu Instabilitäten führt. Diese werden durch Diracseebeiträge hervorgerufen, die sich aufgrund der geringen Current-Quarkmasse leicht beimischen [53]. Das erste Problem der Lösung der Gluonenfeldgleichungen werden wir umgehen, indem wir mit Hilfe eines numerischen Verfahren (Finite Elemente) diese Gleichungen direkt im Ortsraum lösen. Eine detaillierte Beschreibung der numerischen Techniken befindet sich in Anhang B2. Die Zeitentwicklung der Quarks beschreiben wir mit einer semiklassischen Transportgleichung für die Phasenraumverteilungen der Quarks. In diesem Modell kann man auf Zustände mit wohldefinierter Energie projizieren, was eine getrennte Behandlung von Quarks und Antiquarks

ermöglicht. Weiterhin ist die Erhaltung der Baryonenzahl ein fundamentaler Bestandteil des Modells [20], so daß ein Zerfall der Quarkzustände nicht möglich ist. Mit der Ableitung und Darstellung eines solchen Transportmodells beschäftigen wir uns im folgenden Kapitel.

Kapitel 4

Das Friedberg-Lee Transportmodell

In diesem Kapitel werden wir die Entwicklungen auf dem Gebiet der Transporttheorien für Quarks und Gluonen darstellen. Während für Transporttheorien mit Nukleonen als fundamentalen Freiheitsgraden Modelle wie beispielsweise das RBUU- [54] oder das RQMD-Modell [55] längst etabliert sind, sind quarkbasierte Transportmodelle noch heute Gegenstand von Forschungsarbeiten. Die Hauptschwierigkeiten bei der Formulierung liegen zum einen an der geringen Quarkmasse und an der Tatsache, daß die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen durch eine nichtabelsche $SU(3)$ -Eichtheorie beschrieben wird. Um die Eichinvarianz zu garantieren, muß daher die Definition der quantenmechanischen Phasenraumverteilung (Wignerfunktion) modifiziert werden, was zu Komplikationen in der semiklassischen Entwicklung der Gleichungen führt. Andererseits gibt es bislang keine vollständige Ableitung eines Kollisions- oder Paarproduktionsterms, so daß die für hochenergetische Reaktionen eminent wichtige Produktion neuer Teilchen weiterhin ein offenes Problem bleibt.

Der folgende Abschnitt zeigt die Ableitung von kinetischen Gleichungen für klassische Farbladungen unter der Wechselwirkung von nichtabelschen Farbfeldern. In Abschnitt 4.2 wird skizziert, wie diese mit Hilfe eines wohldefinierten Näherungsschemas aus den exakten quantenmechanischen Bewegungsgleichungen hervorgehen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir schließlich diese in der abelschen Näherung betrachten und anschließend auf das Friedberg-Lee Modell erweitern.

4.1 Kinetische Theorie klassischer Farbladungen

Der Ausgangspunkt der Ableitung kinetischer Gleichungen für Quarks bildet die Einteilchen-Phasenraumfunktion für Teilchen mit Farbladung $f(x, p, Q)$ [21], wobei $x = x_\mu$ die Raum-Zeit-, $p = p_\mu$ die Energie-Impuls- und $Q = Q_a$ die Farbladungs-Abhängigkeit von f bestimmen. Q ist ein 8-komponentiger Farbvektor, dessen Komponenten komplexwertig sind. Ein eich- und lorentz-invarianter Ausdruck für die Zeitentwicklung von f ist durch die totale Ableitung nach der Eigenzeit gegeben;

$$m \frac{df}{d\tau} \equiv \left(p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \dot{p}^\mu \frac{\partial f}{\partial p^\mu} + m \dot{Q}^a \frac{\partial f}{\partial Q^a} \right) f(x, p, Q) = C(x, p, Q), \quad (4.1)$$

mit dem Kollisionsterm C , der die kurzreichweitigen Zweiteilchenstöße beschreibt. Die Zeitableitungen auf der rechten Seite von (4.1) beziehen sich ebenfalls auf die Eigenzeit τ der Teilchen. Unter der Annahme, daß die Farbladungen an ein klassisches SU(3)-Farbfeld koppeln, ist $\dot{Q}^a = dQ^a/d\tau$ durch die Wong-Gleichung [56]

$$m \dot{Q}^a = -g_v f^{abc} p^\nu A_\nu^b Q^c \quad (4.2)$$

bestimmt und $\dot{p}^\mu = dp^\mu/d\tau$ durch

$$m \dot{p}^\mu = -g_v Q^a F_a^{\mu\nu} p_\nu. \quad (4.3)$$

Setzt man diese Relationen in (4.1) ein, so ergibt sich

$$p^\mu \left(\partial_\mu - g_v Q_a F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu - g_v f_{abc} A_\mu^b Q^c \partial_{Q^a} \right) f(x, p, Q) = C(x, p, Q). \quad (4.4)$$

A_μ^a und $F_{\mu\nu}^a$ sind die klassischen SU(3)-Eichpotentiale und Eichfelder. Eine analoge Gleichung für Antiteilchen erhält man durch Ersetzung von Q^a durch $-Q^a$ in (4.4). Diese werden durch die Yang-Mills Gleichungen für die Farbfelder abgeschlossen:

$$D^\mu F_{\mu\nu}^a = -j_\nu^a = - \int p_\nu Q^a [f(x, p, Q) - \bar{f}(x, p, Q)] dP dQ. \quad (4.5)$$

Die Erweiterung der gewöhnlichen Vlasovgleichung auf Farbfreiheitsgrade besteht nun darin, daß die Mean-Field-Terme auf der linken Seite von (4.4), durch einen Driftterm erweitert werden, der durch die Farbabhängigkeit von f und die nichtabelsche Wechselwirkung gegeben ist.

Ausgehend von (4.4) können nun mehrere Hierarchien von Momentengleichungen abgeleitet werden, indem man Momente bezüglich Potenzen von

Q^a und/oder p_μ bildet. Die Momentengleichungen bezüglich des Farbvektors erweisen sich dabei als sehr nützlich im Vergleich zur quantenmechanischen Ableitung. Im folgenden Abschnitt wird nämlich gezeigt, daß man die niedrigsten Farbmomente von $f(x, p, Q)$ mit den Farbkomponenten der Wignermatrix identifizieren kann, wenn diese im semiklassischen Grenzfall berechnet werden. Wir definieren daher die klassische Phasenraumverteilung für Farbsinglett, Farboktett, u.s.w. durch

$$f_0(x, p) = \int f(x, p, Q) dQ, \quad (4.6)$$

$$f_a(x, p) = \int Q_a f(x, p, Q) dQ,$$

$$f_{ab}(x, p) = \int Q_a Q_b f(x, p, Q) dQ, \text{ etc.}$$

Integriert man die Transportgleichung (4.4) über den Farbraum, so erhält man unter Verwendung von (4.6)

$$p^\mu \partial_\mu f_0(x, p) = g_\nu p^\mu F_{\mu\nu}^a(x) \partial_p^\nu f_a(x, p) + \int C(x, p, Q) dQ \quad (4.7)$$

$$p^\mu \left[\partial_\mu \delta_{ac} + g_\nu f_{amc} A_\mu^m(x) \right] f_c(x, p) = \quad (4.8)$$

$$g_\nu p^\mu F_{\mu\nu}^b(x) \partial_p^\nu f_{ab}(x, p) + \int Q_a C(x, p, Q) dQ$$

$$p^\mu \left[\partial_\mu \delta_{ac} \delta_{bd} + g_\nu (\delta_{ac} f_{amc} + \delta_{bd} f_{amc}) A_\mu^m(x) \right] f_{cd}(x, p) = \quad (4.9)$$

$$g_\nu p^\mu F_{\mu\nu}^c(x) \partial_p^\nu f_{abc}(x, p) + \int Q_a Q_b C(x, p, Q) dQ, \text{ etc.}$$

Diese Hierarchie von Momentengleichungen kann für klassische Farbladungen nicht abgeschlossen werden, da die Farbmomente unabhängig sind. Elze und Heinz [58] argumentieren mit Hilfe von Analogiebetrachtungen, daß man die Farbalgebra der *quantenmechanischen* Farboperatoren $\hat{Q}_a = -\frac{1}{2} \hat{\lambda}_a$ auf die klassischen Farbvektoren übertragen kann. Insbesondere wird die Antikommutator-Relation $\{\hat{Q}_a, \hat{Q}_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} - d_{abc} \hat{Q}_c$ verwendet, um die Hierarchie der Farbmomente nach dem zweiten Term durch [57]

$$f_{ab} = \frac{1}{6} \delta_{ab} f - \frac{1}{2} d_{abc} f_c \quad (4.10)$$

abzubrechen. Durch Einsetzen dieser Annahme kann die Gleichung (4.8) in

$$p^\mu \left[\partial_\mu \delta_{ac} + g_\nu f_{amc} A_\mu^m(x) + \frac{g_\nu}{2} d_{amc} F_{\mu\nu}^m(x) \partial_p^\nu \right] f_c(x, p) = \quad (4.11)$$

$$+ \frac{g_\nu}{6} p^\mu F_{\mu\nu}^a(x) \partial_p^\nu f^0(x, p) + \int Q_a C(x, p, Q) dQ$$

umgeschrieben werden. Das abgeschlossene System von Gleichungen (4.7) und (4.11) beschreibt die Zeitentwicklung der Phasenraumverteilungen von

Farbladungen unter dem Einfluß von nichtabelschen Farbfeldern. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß diese Gleichungen im semiklassischen Grenzfall einer quantenmechanischen Ableitung im Rahmen des Wignerfunktionsformalismus exakt reproduziert werden können.

4.2 Kinetische Theorie der Quarks

Da die Ableitung der Bewegungsgleichung der QCD Wignerfunktion sehr umfangreich und auch technisch involviert ist, geben wir hier nur einen schematischen Abriß derselben. Eine detaillierte Beschreibung befindet sich in [21, 59].

Das quantenmechanische Analogon zur klassischen Phasenraumverteilung ist die Wignerfunktion, die durch

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) \equiv \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ipy} \bar{\Psi}_\alpha(x) e^{(y/2)\hat{D}_x^\dagger} \cdot e^{-(y/2)\hat{D}_x} \Psi_\beta(x) \quad (4.12)$$

definiert ist, wobei α, β die Quantenzahlen des Zustandes kennzeichnen und $\hat{D}_x = \partial_x - ig\hat{A}$ die eichkovariante Ableitung ist. Man beachte, daß nur unter Verwendung von \hat{D}_x statt ∂_x in der Definition der Wignermatrix diese sich unter Eichtransformationen kovariant verhält. Ist daher $\hat{S}(x) = \exp(i\Theta_a(x)\hat{T}^a)$ eine beliebige lokale SU(3)-Eichtransformation mit $\Psi(x) \rightarrow \hat{S}(x)\Psi(x)$, so gilt

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) \rightarrow \hat{S}(x)\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p)\hat{S}^{-1}(x). \quad (4.13)$$

Da weiterhin $\hat{D}^\mu \rightarrow \hat{S}(x)\hat{D}^\mu\hat{S}^{-1}(x)$ gilt, transformieren sich auch der Feldstärketensor $\hat{F}_{\mu\nu} = [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu]$ und die Farbströme

$$\hat{j}^\mu = \int d^4p \hat{T}_a \text{tr}[\gamma^\mu \hat{T}^a \hat{W}(x, p)] \quad (4.14)$$

eichkovariant. Eine weitere Motivation für die Definition der Wignermatrix (4.12) erhält man durch formale Auswertung der Fouriertransformation

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) = \bar{\Psi}_\alpha(x) \delta(p - \hat{\pi}) \Psi_\beta(x), \quad (4.15)$$

wobei die Phasenraumdynamik durch den *kinetischen* Impuls $\hat{\pi}^\mu = \hat{p}^\mu + g_v \hat{A}^\mu$ bestimmt wird und nicht durch den *kanonischen* Impuls p^μ .

Eine Bewegungsgleichung für \hat{W} wird gewöhnlich abgeleitet, indem man den Driftoperator $p^\mu \partial_\mu$ auf die Wignerfunktion anwendet und unter Verwendung der Diracgleichung eine geschlossene Gleichung für die Wignermatrix erstellt. Diese wird dann einer semiklassischen Entwicklung unterzogen, die für abelsche- oder Nichteichsysteme unter der Bezeichnung Wigner-Kirkwood Entwicklung bekannt ist. Sie besteht formal in einer Entwicklung nach Potenzen in \hbar und wird generiert durch die Ersetzung $y \rightarrow i\hbar \partial_p$ in den Shift- oder

Paralleltransport-Operatoren von \hat{W} , also in einer Taylorentwicklung von $\exp(i\hbar/2\partial_x\partial_p)$. In einer nichtabelschen Eichtheorie ist diese Entwicklung jedoch nicht möglich, da der Paralleltransportoperator die eichkovariante Form der Ableitung

$$\exp(i\hbar/2[\partial_x - \frac{ig}{\hbar}\hat{A}(x)]\partial_p) \quad (4.16)$$

enthält. Daher existieren zu jeder Ordnung von \hbar abzählbar viele Terme, die nicht als geschlossener Ausdruck darstellbar sind.

Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, bietet die Wahl einer bestimmten Eichung, der sogenannten Fock-Schwinger (FS) Eichung, die an einem bestimmten Raum-Zeit Punkt fixiert wird:

$$(x - Z)_\mu \hat{A}_Z^\mu(x) \equiv 0 \quad \text{mit} \quad \hat{A}_Z^\mu(Z) = 0 \quad (4.17)$$

als Randbedingung. Der Index Z markiert die Wahl einer festen Eichung für die indizierte Größe. Die Wignerfunktion reduziert sich in dieser Eichung auf den bekannten Ausdruck

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(x, p) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} e^{-ipy} \bar{\Psi}_{Z\alpha}(x) e^{(y/2)\partial_x} \cdot e^{-(y/2)\partial_x} \Psi_{Z\beta}(x) . \quad (4.18)$$

Wendet man den eichkovarianten kinetischen Driftoperator $p \cdot [\hat{D}_Z(x), \cdot]$ auf (4.18) an und führt die semiklassische Entwicklung durch, so erhält man nach etwas Algebra

$$\begin{aligned} p^\mu \hat{D}_\mu \hat{W}(x, p) + \frac{g_v}{2} \{p^\mu \hat{F}_{\mu\nu}, \partial_p^\nu \hat{W}(x, p)\} \\ - \frac{ig_v}{2\hbar} [S^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}, \hat{W}(x, p)] \\ - \frac{g}{4} \{\hat{D}_\sigma(x) (S^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(x)), \partial_p^\sigma \hat{W}(x, p)\} = C(x, p) , \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei für die auftauchenden Größen wieder die feste Wahl der Eichung zu beachten ist. Man erkennt an (4.19), der semiklassischen Bewegungsgleichung der QCD Quark-Wignerfunktion, daß die relativistische und nichtabelsche Struktur der Theorie neue Kopplungsterme generiert, die sich durch (Anti-)Kommutatoren und die Kopplung des Spins $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\hbar\sigma^{\mu\nu}$ an die Farbfelder manifestieren.

Die Größen in Gleichung (4.19) sind nach wie vor Quantenfeldoperatoren, die, um Observable berechnen zu können, über wohldefinierte Ensembles gemittelt werden müssen. Zur Zeit kann man diese jedoch nur für spezielle Szenarien bestimmen (Hochtemperaturentwicklung, etc.), weil dafür das Problem des Confinements der QCD gelöst sein müßte. Um daher die Gleichung (4.19) weiter zu vereinfachen, wird bezüglich des Überganges zu einer Gleichung in Mittelfeldnäherung ein Ansatz gemacht, der in der Literatur als

Abelsche Dominanz Approximation bekannt ist. Man orientiert sich dabei an den im Rahmen der Gittereichtheorie recht gut untersuchten Eigenschaften von Flußschlauchkonfigurationen, in denen der Feldstärketensor $\langle \hat{F}_{\mu\nu}(x) \rangle$ sehr gut durch ein schwach variierendes, im Farbraum diagonales Mittelfeld beschrieben werden kann. Ist daher $\hat{S}(x)$ eine Eichtransformation so, daß

$$\langle \hat{F}_{\mu\nu}(x) \rangle = \hat{S}(x) F_{\mu\nu}^a(x) \hat{t}_a \hat{S}^{-1}(x) \quad (4.20)$$

diagonal (abelsch) ist, so besteht die Annahme der abelschen Dominanz darin, daß

$$\langle \hat{W}(x, p) \rangle = \hat{S}(x) (W^a \hat{t}_a + W^0) \hat{S}^{-1}(x) \quad (4.21)$$

ebenfalls diagonal in dieser Eichung ist. (Daher tragen in der Summe über die Farbindices nur noch die Terme zu kommutierenden Generatoren der Farbgruppe \hat{t}_3, \hat{t}_8 und der Einheitsmatrix bei, während die anderen Entwicklungskoeffizienten verschwinden.)

Wir zeigen im Folgenden, daß unter dieser Annahme die Gleichung (4.19) in die Gleichungen (4.7) und (4.11) für die klassischen Farbmomente übergeht. Wegen der Diagonalität von \hat{F} und \hat{W} verschwinden die Kommutatoren der beiden, wodurch sich unter Ausnutzung der Antikommutatorrelationen der \hat{t}_a ,

$$\{\hat{t}_a, \hat{t}_b\} = \frac{1}{3} \delta_{ab} - d_{abc} \hat{t}_c, \quad (4.22)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} & p^\mu \partial_\mu (W_0(x, p) + W_a(x, p) \hat{t}^a) + \frac{g_v}{2} \{p^\mu F_{\mu\nu}^a \hat{t}^a, \partial_p^\nu (W_0(x, p) + W_b \hat{t}^b)\} \\ &= \left(p^\mu \partial_\mu W_0(x, p) - \frac{1}{6} g_v p^\mu F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu W_a \right) + \\ & \hat{t}_a \left(p^\mu \partial_\mu W_a(x, p) - g_v p^\mu F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu W_0 - \frac{1}{2} g_v d_{abc} p^\mu F_{\mu\nu}^b \partial_p^\nu W_c \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Durch Spurbildung erhält man die Gleichungen

$$p^\mu \partial_\mu W_0(x, p) = \frac{1}{6} g_v p^\mu F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu W_a(x, p) \quad (4.24)$$

$$p^\mu \partial_\mu W_a(x, p) = g_v p^\mu F_{\mu\nu}^a \partial_p^\nu W_0 + \frac{1}{2} g_v d_{abc} p^\mu F_{\mu\nu}^b \partial_p^\nu W_c. \quad (4.25)$$

Die Korrespondenz zwischen den klassischen Farbmomenten und den Entwicklungskoeffizienten der Wignermatrix ist nun durch den Übergang von dem Integral über den Farbraum $d^8 Q$ in eine quantenmechanische Spurbildung

$$\int d^8 Q \rightarrow tr\{\cdot\} \quad \text{und} \quad \int d^8 Q Q_a \rightarrow tr\{\hat{t}_a \cdot\} \quad (4.26)$$

gegeben. Durch Ausnutzung der Spurrelation $tr\{\hat{t}_a\hat{t}_b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ findet man schließlich die Entsprechungen

$$W_0(x, p) \triangleq \frac{1}{3}f(x, p) \quad \text{und} \quad W_a(x, p) \triangleq 2f_a(x, p), \quad (4.27)$$

wodurch nach Einsetzen in die Gleichungen (4.24) und (4.25) die gewünschte Äquivalenz gezeigt ist. Die Bewegungsgleichungen für die (abelschen) Farbkomponenten der Wignermatrix folgen daher denselben Gleichungen wie die entsprechenden Komponenten der klassischen Phasenraumverteilungen f^a . Wir beschreiben nun die weitere Reduktion der Transportgleichung (4.19) durch die abelsche Annahme. Eine diagonale und spurlose $N \times N$ -Matrix kann man stets durch die $N - 1$ kommutierenden Generatoren der $SU(N)$ darstellen, die durch

$$\hat{h}_j = [2j(j+1)]^{-1/2} \text{diag}(1, \dots, 1, -j, 0, \dots, 0) \quad ; \quad j \in [1, N-1] \quad (4.28)$$

gegeben sind, wobei $-j$ in der $j+1$ -ten Zeile auftaucht. Wir schreiben daher (4.20) und (4.21) um in

$$\langle \hat{F}_{\mu\nu}(x) \rangle = \hat{S}(x) F_{\mu\nu}^j(x) \hat{h}_j \hat{S}^{-1}(x), \quad (4.29)$$

$$\langle \hat{W}(x, p) \rangle = \hat{S}(x) (W^j \hat{h}_j + W^0) \hat{S}^{-1}(x). \quad (4.30)$$

Die Verbindung zu den klassischen Phasenraumverteilungen f_j ist in diesem Fall durch

$$\langle \hat{W} \rangle_{ij} = (W^k \hat{h}_k + W^0)_{ij} = \delta_{ij} (W^k (\epsilon_k)_j + W^0) \equiv \delta_{ij} f_j \quad (4.31)$$

gegeben, wobei die Ladungsvektoren $\vec{\epsilon}_j$ durch die \hat{h}_j ausgedrückt werden können:

$$\vec{\epsilon}_j \equiv (\vec{h})_{jj} = ((h_1)_{jj}, \dots, (h_{N-1})_{jj}). \quad (4.32)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen kann die Gleichung (4.19) auf die wesentlich intuitivere Form

$$(p^\mu \partial_\mu - g_v \vec{\epsilon}_j p^\mu \vec{F}_{\mu\nu} \partial_p^\nu) f_j(x, p) = \frac{ig_v}{4} \vec{\epsilon}_j \vec{F}_{\mu\nu} [\sigma^{\mu\nu}, f_j(x, p)] \quad (4.33)$$

gebracht werden, wobei die linke Seite die Struktur einer gewöhnlichen Vlasovgleichung hat, während die rechte Seite einen spinabhängigen Korrekturterm darstellt.

Die Reduktion der Farbfreiheitsgrade besteht nun in einer dimensional Reduktion der Ladungsvektoren von der Farb- $SU(3)$ auf die skalare $U(1)$. Diese Reduktion hat zur Folge, daß man in der Gleichung (4.33) die Farbladungsvektoren durch $\vec{\epsilon}_j \rightarrow 1$ und die Phasenraumverteilungen durch eine skalare Funktion $f(x, p)$ ersetzen muß [21]. Eine entsprechende Gleichung

erhält man für Antiteilchen, indem man entsprechend den Ladungsvektor durch $\vec{e}_j \rightarrow -\vec{e}_j \rightarrow -1$ ersetzt. Somit entsprechen also die Bewegungsgleichungen für Quarks und Antiquarks denselben Gleichungen wie die eines Elektron-Positron Plasmas, die durch

$$(p^\mu \partial_\mu - g_v p^\mu F_{\mu\nu} \partial_p^\nu) f(x, p) = \frac{ig_v}{4} F_{\mu\nu} [\sigma^{\mu\nu}, f(x, p)] , \quad (4.34)$$

$$(p^\mu \partial_\mu + g_v p^\mu F_{\mu\nu} \partial_p^\nu) \bar{f}(x, p) = -\frac{ig_v}{4} F_{\mu\nu} [\sigma^{\mu\nu}, \bar{f}(x, p)] \quad (4.35)$$

gegeben sind [59]. Vernachlässigt man zusätzlich die Spinkorrekturen, so handelt es sich hierbei um ein gekoppeltes System von Vlasovgleichungen, wobei die Kopplung indirekt, also über das von Quarks und Antiquarks gemeinsam erzeugte Vektorfeld $F_{\mu\nu}$ vermittelt wird. Dieses berechnet sich analog zu (4.5) als

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = -j_\nu = \int p_\nu [f(x, p) - \bar{f}(x, p)] d^4 p . \quad (4.36)$$

Die Dynamik klassischer Farbladungen wird somit vollständig durch das gekoppelte System von partiellen Differentialgleichungen (4.34), (4.35) und (4.36) beschrieben.

4.3 Das Friedberg-Lee Transportmodell

Im weiteren wollen wir die für die Dynamik klassischer Farbladungen erhaltenen Ergebnisse (4.34), (4.35) und (4.36) auf das Friedberg-Lee Modell übertragen. Der Unterschied zwischen beiden besteht in der zusätzlichen Kopplung der Quarks an das skalare σ -Feld, wodurch in den Transportgleichungen (4.34) und (4.35) ein weiterer Kraftterm $F_\sigma = m^* \partial^\mu m^* \partial_\mu^p$ hinzugefügt werden muß:

$$(p^\mu \partial_\mu - m^* \partial^\mu m^* \partial_\mu^p) f(x, p) = g_v p^\mu F_{\mu\nu}(x) \partial_p^\nu f(x, p) , \quad (4.37)$$

$$(p^\mu \partial_\mu + m^* \partial^\mu m^* \partial_\mu^p) \bar{f}(x, p) = -g_v p^\mu F_{\mu\nu}(x) \partial_p^\nu \bar{f}(x, p) . \quad (4.38)$$

Dabei ist $m^* = m_0 + g_0 \sigma$ die durch die Quark- σ -Kopplung erzeugte effektive Masse der Quarks. Weiterhin führt die zusätzliche Abhängigkeit des Farbfeldes von der dielektrischen Konstanten $\kappa(\sigma)$ zu einer modifizierten Maxwellgleichung in einem dielektrischen Medium (siehe (3.14)):

$$\partial^\mu (\kappa(\sigma) F_{\mu\nu}(x)) = -j_\nu = \int p_\nu [f(x, p) - \bar{f}(x, p)] d^4 p . \quad (4.39)$$

Die Gleichungen (4.37), (4.38) und (4.39) werden durch eine Klein-Gordon Gleichung, die die Eigendynamik des σ -Feldes beschreibt, vervollständigt (siehe (3.17)):

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + U'(\sigma) + \frac{1}{4} \kappa'(\sigma) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + g_0 \rho_s = 0 . \quad (4.40)$$

Dabei sind die Ableitungen von U und κ bezüglich σ zu verstehen und $\rho_s = \bar{\Psi}\Psi$ stellt die skalare Quarkdichte dar.

Die Transportgleichungen (4.37) und (4.38) lassen sich nun weiter vereinfachen unter Berücksichtigung der sogenannten Massenschalenbedingung [21]

$$(p_\mu p^\mu - (m^*)^2)f(x, p) = 0, \quad (4.41)$$

wodurch sich der achtdimensionale Phasenraum durch Eliminierung der Energieabhängigkeit von $f(x, p)$ und $\bar{f}(x, p)$ auf die sieben üblichen Phasenraumkoordinaten \mathbf{x} , \mathbf{p} und t reduzieren läßt:

$$(\omega \partial_t + p^i \partial_i + g_v \omega F^{i0} \partial_i^p - g_v p_j F^{ij} \partial_i^p - m^* \partial_i^x m^* \partial_i^p) f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (4.42)$$

$$(\omega \partial_t + p^i \partial_i - g_v \omega F^{i0} \partial_i^p + g_v p_j F^{ij} \partial_i^p - m^* \partial_i^x m^* \partial_i^p) \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = 0. \quad (4.43)$$

Man erkennt wieder, daß sich die Gleichungen für Quarks und Antiquarks nur durch das Vorzeichen der Vektorkopplungskonstante g_v unterscheiden. Der Zusammenhang der Transportgleichungen mit den Feldgleichungen ist über die Berechnung der Dichten und Ströme gegeben [20]

$$\rho_s(\mathbf{x}, t) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p m^*}{\omega} (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)), \quad (4.44)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int d^3 p (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)), \quad (4.45)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{\omega} \mathbf{p} (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)), \quad (4.46)$$

$$\epsilon_Q(\mathbf{x}, t) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int d^3 p \omega (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)), \quad (4.47)$$

mit $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m^*)^2}$. Hierbei wurde der Entartungsfaktor η eingeführt, der sich ergibt, falls man die inneren Freiheitsgrade mitberücksichtigt. (Wir werden bei der Konstruktion der Hadronenzustände noch genauer auf die Normierung der Verteilungsfunktionen eingehen.)

Wir beschreiben nun ein intuitives Verfahren zur Lösung der Transportgleichungen (4.42) und (4.43). Dazu bringen wir die Vlasovgleichung auf die Form eines totalen Differentials

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \partial_i^x + \frac{\partial p^i}{\partial t} \partial_i^p \right) f(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) = 0, \quad (4.48)$$

wobei man sowohl dem Impuls, als auch die Ortskoordinate als Funktion eines Parameters t (Zeit) betrachtet. Ein Vergleich mit (4.42) liefert die Geschwindigkeit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{\omega} \quad (4.49)$$

sowie den Kraftterm

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{m^*}{\omega} \nabla_x m^* + \frac{g_v}{\omega} (\omega \mathbf{E} - \mathbf{p} \times \mathbf{B}) . \quad (4.50)$$

Die Bewegungsgleichungen der Koordinaten der Phasenraumverteilungen entsprechen daher denjenigen klassischer Teilchen, wodurch man eine anschauliche Motivation für die numerische Lösung der Vlasogleichung erhält. Es handelt sich dabei um die sogenannte *Testteilchenmethode*, die erstmals von Wong [93] vorgeschlagen wurde. Die Phasenraumverteilung wird durch ein Ensemble von Testteilchen dargestellt

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_T} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) , \quad (4.51)$$

mit der Anzahl der Testteilchen N_T . Setzt man diesen Ansatz in die Vlasogleichung (4.42) ein, so sieht man, daß die Testteilchen-Koordinaten und -Impulse den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i}{\omega_i} , \quad (4.52)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{m^*(\mathbf{x}_i)}{\omega_i} \nabla_x m^*(\mathbf{x}_i) + \frac{g_v}{\omega_i} (\omega \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)) \quad (4.53)$$

folgen. Entsprechende Gleichungen erhält man auch für ein weiteres Ensemble von Testteilchen, welches die Antiquarkverteilung beschreibt

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_T} \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}_i(t)) , \quad (4.54)$$

die mit (4.52) und (4.53) identisch sind, bis auf die übliche Ersetzung $g_v \rightarrow -g_v$. Aus diesen Ensembles von Testteilchen lassen sich die skalare Dichte und die Ladungsdichte wie folgt berechnen:

$$\rho_s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} \frac{m_i^*}{\omega_i} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) + \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i(t))) , \quad (4.55)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N_T} \sum_{i=1}^{N_T} (\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) - \delta(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_i(t))) , \quad (4.56)$$

wobei die δ -Funktionen folgendermaßen auszuwerten sind:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/(\Delta x)^3 & \text{falls } x_i \in [\mathbf{x} - \frac{\Delta \mathbf{x}}{2}, \mathbf{x} + \frac{\Delta \mathbf{x}}{2}] \\ 0 & \text{falls } x_i \in [\mathbf{x} - \frac{\Delta \mathbf{x}}{2}, \mathbf{x} + \frac{\Delta \mathbf{x}}{2}] \end{array} \right\} . \quad (4.57)$$

Δx stellt die Größe einer Zelle dar, über die gemittelt wird.

Das dynamische Problem der Zeitentwicklung reduziert sich also auf die

gleichzeitige Lösung der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (4.52) und (4.53) für das Ensemble der Testteilchen (und entsprechend für das Ensemble der Antiquarks), sowie der Lösung der Klein-Gordon Gleichung (4.40) für das skalare σ -Feld und der Maxwellgleichung (4.39) für das (abelsche) Farbfeld. Dieses System von Gleichungen ist gekoppelt und nichtlinear in den Feldern, so daß man für sämtliche Rechnungen auf numerische Methoden zurückgreifen muß. Diese sind in Anhang B erläutert. Die Ergebnisse dieser Simulationsrechnungen sind der Inhalt des folgenden Kapitels, wobei wir zunächst den statischen Grenzfall des Modells untersuchen wollen um die Grundzustandseigenschaften des Modells zu finden.

Kapitel 5

Ergebnisse

In diesem Kapitel zeigen wir die Ergebnisse der Rechnungen und Simulationen im Rahmen des Modells. In Abschnitt 5.1 konstruieren wir statische Solitonlösungen und legen die Modellparameter fest, indem wir die Eigenschaften der leichtesten Hadronen reproduzieren. Mit einem adiabatischen Verfahren werden wir aus den leichten Mesonenzuständen schwere (J/ψ und D/\bar{D}) erzeugen und deren physikalische Observablen bestimmen. Anschließend werden wir die dynamische Formierung von Strings beschreiben, was es uns gestattet, den Wert des letzten Parameter des Modells, die starke Kopplungskonstante $\alpha_s = g_v^2/(4\pi)$ zu ermitteln, indem wir die aus dem $q\bar{q}$ -Potential bekannte Stringspannung einstellen. Weiterhin beschreiben wir die Fusion zweier Strings mit entweder paralleler oder antiparalleler Ausrichtung und extrahieren aus den Energiebilanzen ein String-String Wechselwirkungspotential (Abschnitt 5.2). In Abschnitt 5.3 untersuchen wir Farbanregungsmoden der Hadronen und somit das dynamische Verhalten der Quarks in einem Medium mit Confinement. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich schließlich mit der sehr wichtigen Frage der Hadronisierung von Strings. Wir werden den Prozeß der Hadronisierung durch Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren innerhalb der Strings behandeln, wobei wir sowohl die Dynamik leichter Quark-Antiquark-Paare beschreiben, als auch die Dissoziation von schweren Quarkonium Zuständen (J/ψ).

5.1 Hadronische Grundzustände

In diesem Abschnitt konstruieren wir statische Solitonlösungen des Modells, die wir an die physikalischen Eigenschaften der niedrigstliegenden Hadronen durch geeignete Wahl der Modellparameter anpassen. Die Berechnung dieser wird zunächst vereinfacht durch die $SU(3)$ -Farbsymmetrie, die dafür sorgt, daß die Ladungs- und Stromdichte *lokal* verschwindet [49, 50] (siehe auch

Kapitel 3). Daher gilt wegen

$$\rho(\mathbf{x}) = \int d^3p (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})) \equiv 0 \quad (5.1)$$

$$\implies f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) . \quad (5.2)$$

Somit verschwinden auch die elektrischen und magnetischen Felder, wodurch sich das gekoppelte Gleichungssystem (4.39), (4.40) und (4.42)-(4.43) auf

$$\mathbf{p} \nabla_x f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - m^* \nabla_x m^* \nabla_p f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 \quad (5.3)$$

$$\nabla_x^2 \sigma = U'(\sigma) + g_0 \rho_s \quad (5.4)$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \quad (5.5)$$

reduziert. Man beachte, daß im statischen Grenzfall die Zeitableitungen der Verteilungsfunktionen und der Felder verschwinden. Die Gleichungen (5.3) und (5.4) sind mit den Gleichungen (4.18) und (4.19) aus [20] identisch. Dort wird gezeigt, daß die Vlasovgleichung (5.3) in diesem Grenzfall durch jede beliebige Funktion der Energie $f(\omega)$ mit $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + (m^*)^2}$ gelöst wird. Dies schränkt den Raum der möglichen Verteilungsfunktionen bereits stark ein, läßt uns aber noch die beträchtliche Freiheit in der Wahl der funktionalen Form derselben. Um zu einer weiteren Einschränkung zu gelangen, wird abgeleitet, daß aus der Idempotenz des quantenmechanischen Dichteoperators $\hat{\rho}_{\alpha\beta} = \langle \Psi_\beta^\dagger \Psi_\alpha \rangle$,

$$(\hat{\rho})^2 = \hat{\rho} , \quad (5.6)$$

unter einer Wignertransformation und anschließender semiklassischer Entwicklung ($\hbar \rightarrow 0$) folgt:

$$f^2(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) . \quad (5.7)$$

Dieser Zusammenhang bedeutet aber, daß die Verteilungsfunktion nur die Werte 0 und 1 annehmen kann. Zusammen mit der Bedingung, daß f nur eine Funktion der Energie ω sein kann, wird man zwangsläufig auf

$$f(\omega) = \Theta(\mu - \omega) \quad (5.8)$$

geführt. Die semiklassische Entwicklung hat daher die Konsequenz, daß die Phasenraumfunktionen lokale *Thomas-Fermi* Verteilungen sind, wobei μ die Fermienergie ist. Durch Einsetzen dieser Identität in die Gleichungen (4.44) - (4.47) können die Integrale analytisch ausgewertet werden, und man erhält die Skalardichte ρ_s , die vektorielle Dichte ρ_v und die fermionische Energiedichte ϵ_Q als Funktion von σ , bzw. als implizite Funktion von $m^*(\sigma)$. Die Dichten hängen dabei parametrisch von der Fermienergie μ ab:

$$\rho_s(m^*) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{m^*}{\omega} (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \quad (5.9)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} 2\pi\eta m^* \left(\mu \mathbf{p}_f + (m^*)^2 \log\left(\frac{m^*}{\mu + \mathbf{p}_f}\right) \right) \Theta(\mu - m^*)$$

$$\rho_v(m^*) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int d^3p (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \quad (5.10)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4}{3} \pi \eta \mathbf{p}_f^3 \Theta(\mu - m^*)$$

$$\epsilon_Q(m^*) = \frac{\eta}{(2\pi)^3} \int d^3p \omega (f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \quad (5.11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \pi \eta \left(\mu \mathbf{p}_f^3 + \frac{1}{2} (m^*)^2 \mu \mathbf{p}_f + \frac{1}{2} (m^*)^4 \log\left(\frac{m^*}{\mu + \mathbf{p}_f}\right) \right) \Theta(\mu - m^*),$$

wobei wir den Fermiimpuls $\mathbf{p}_f = \sqrt{\mu^2 - (m^*)^2}$ und die vektorielle Dichte ρ_v definiert haben. Man beachte, daß der Fermiimpuls implizit ortsabhängig ist, da m^* eine ortsabhängige Größe ist. Der Entartungsfaktor η beschreibt die Spin- und Flavorentartung der Grundzustände und beträgt deshalb

$$\eta = 2_{Flavor} \times 2_{Spin} = 4, \quad (5.12)$$

im Gegensatz zu [20], wo die explizite Farbentartung des Nukleonenzustandes zu einer dreifachen Gesamtentartung führt, also $\eta = 12$. In unserem Fall müssen wir zwischen dem mesonischen und dem baryonischen Grundzustand unterscheiden. Da es sich bei Mesonen um ein Zwei-Quark-System handelt, normieren wir die vektorielle Dichte auf $N_Q = \int d^3r \rho_v = 2$, während Baryonen aus drei Quarks zusammengesetzt sind, also $N_Q = \int d^3r \rho_v = 3$.

Die Kenntnis der funktionalen Abhängigkeit der skalaren Dichte von σ erlaubt es nun die statischen Gleichungen (5.3) und (5.4) zu entkoppeln. Das statische Problem reduziert sich auf die Lösung der Gleichung

$$\nabla^2 \sigma = U'(\sigma) + g_0 \rho_s(\sigma) \equiv -U'_{eff}(\sigma), \quad (5.13)$$

wobei ρ_s implizit über m^* von σ abhängt. Weiterhin haben wir ein 'effektives Potential' $U_{eff}(\sigma)$ eingeführt. Die Bedeutung dieses Potentials wird verständlich, wenn man sich die Gleichung (5.13) in einer Dimension betrachtet, wobei diese die Form einer Newton'schen Bewegungsgleichung annimmt

$$\partial_x^2 \sigma = -U'_{eff}(\sigma), \quad (5.14)$$

falls man σ mit dem Ort eines Teilchens und x mit der Zeit identifiziert. Daher beschreibt diese Gleichung die Bewegung eines fiktiven σ -Teilchens mit Einheitsmasse in einem Potential $U_{eff}(\sigma)$. Auch in drei Dimensionen

kann man bei sphärischer Symmetrie des Problems die Gleichung (5.13) auf die Form einer Newton'schen Bewegungsgleichung bringen, wobei allerdings aufgrund des Laplaceoperators in drei Dimensionen ein 'Reibungsterm' $\sim d\sigma/dr$ auftaucht:

$$\frac{d^2\sigma}{dr^2} = -U'_{eff}(\sigma) - \frac{2}{r} \frac{d\sigma}{dr}. \quad (5.15)$$

Unter Verwendung von (5.9) und der Definition des effektiven Potentials (5.13) kann dieses nun berechnet werden [20]:

$$U_{eff} = -U(\sigma) + \frac{\eta}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} \int_{m^*(\sigma)}^{m^*(\sigma_{vac})} d\omega (\omega^2 - (m^*)^2)^{3/2} f(\omega). \quad (5.16)$$

Mit Hilfe der lokalen Thomas-Fermi Verteilung (5.8) kann man das Integral analytisch ausführen und erhält den Ausdruck

$$U_{eff}(\sigma) = -U(\sigma) + \frac{\eta\pi}{3(2\pi)^3} \Theta(\mu - m^*) \left(\mu \mathbf{p}_f^3 - \frac{3}{2} \mu (m^*)^2 \mathbf{p}_f - \frac{3}{2} (m^*)^4 \log\left(\frac{m^*}{\mu + \mathbf{p}_f}\right) \right), \quad (5.17)$$

wobei die gleichen Definitionen wie in den Gleichungen (5.9)-(5.11) verwendet wurden.

Wir wollen nun im folgenden die solitonischen Lösungen der Gleichung (5.15) diskutieren. Dabei werden die drei Parameter des Selbstwechselwirkungspotentials $U(\sigma)$ und die Kopplungskonstante g_0 so eingestellt, daß die experimentell bekannte mittlere Masse von Nukleon und Delta, der mittlere Radius des Nukleons (rms), sowie die Anzahl der Quarks $N_Q = 3$ möglichst genau reproduziert werden können.

Die verwendeten Parameter, die Ergebnisse des Fits und die bekannten experimentellen Daten für Baryonen sind in den Tabellen 5.1 und 5.3 aufgeführt. Die entsprechenden physikalischen Eigenschaften der mesonischen Lösung, die mit denselben Parametern berechnet wurden, ist in 5.2 aufgetragen. Um die unterschiedlichen Quarkzahlen für Meson $N_Q = 2$ und Baryon $N_Q = 3$ zu erhalten, muß lediglich die Fermienergie μ angepaßt werden. Man erkennt, daß es möglich ist, die meisten experimentell bekannten Daten sowohl der Baryonen als auch der Mesonen mit Hilfe eines einzigen Parametersatzes zu reproduzieren. Dabei sollte beachtet werden, daß die Bindungsenergie des skalaren Feldes, also die Differenz von der Vakuummasse der Quarks $m_{vac} = g_0\sigma_{vac}$ und der Fermienergie nur ca. 50 MeV beim Baryon und sogar nur 15 MeV beim Meson beträgt. Diese Teilchen wären daher in einem Modell ohne explizite Farbfreiheitsgrade nur sehr schwach gebunden. Weiterhin ist der Wert der Bagkonstanten mit $B = 56 \text{ MeV}/fm^3$ ebenfalls sehr gering im Vergleich zu anderen Bagmodell-Rechnungen [50] mit B ca. $50 - 100 \text{ MeV}/fm^3$, oder zu Rechnungen im Rahmen der Gittereichtheorie mit $B \approx 200 \text{ MeV}/fm^3$

[51].

Die einzige größere Abweichung von den experimentellen Daten findet man bei der Mesonenmasse, was man darin begründen kann, daß die sehr geringe Pionmasse stark vom Mesonen-Massenspektrum abweicht, da das Pion auch als Goldstone-Boson der chiralen Symmetrie der QCD verstanden werden kann, was bereits in Kapitel 3 diskutiert wurde.

Das effektive Potential für die mesonische Konfiguration ist in der Abbil-

Parametersatz	
$a [fm^{-2}]$	0.0
$b [fm^{-1}]$	-419.3
$c [1]$	4973.0
$B [fm^{-4}]$	0.283
$g_0 [1]$	8.0
$m_0 [fm^{-1}]$	0.025
$\mu [fm^{-1}]$	1.768 / 1.9582
η	4
$\sigma_{vac} [fm^{-1}]$	0.253

Tabelle 5.1: Die Tabelle zeigt die verwendeten Parameter zur Konstruktion der mesonischen ($\mu = 1.9582 fm^{-1}$) und baryonischen ($\mu = 1.768 fm^{-1}$) Solitonlösung der σ -Feldgleichung.

	Modellerggebnisse	Experimentelle Daten
$E [MeV]$	798	465
$RMS [fm]$	0.653	0.66
$Glueballmasse [GeV]$	1.045	1 - 2

Tabelle 5.2: Die Tabelle zeigt die Modellergebnisse für die mesonische Lösung verglichen mit den experimentellen Daten, die aus [16] entnommen wurden.

dung 5.1 als Funktion von σ/σ_{vac} dargestellt. Die gepunktete Linie markiert den Beitrag von $U(\sigma)$ zum effektiven Potential, während die gestrichelte Linie den Beitrag der skalaren Dichte kennzeichnet. Man erkennt, daß der Beitrag der skalaren Dichte (also die Anwesenheit von Quarks) zu einer Anhebung des effektiven Potentials führt. Eine solitonische Lösung der Gleichung (5.15) in diesem Potential ist dadurch definiert, daß sie räumlich lokalisiert ist, es also einen Übergang zweier Vakua geben muß. Diese entsprechen dem perturbativen Vakuum bei Anwesenheit der Quarks und dem nichtperturbativen Vakuum, welches beim Grenzübergang $r \rightarrow \infty$ erreicht werden muß. Es muß

	Modellerggebnisse	Experimentelle Daten
E [MeV]	1099	1087
RMS [fm]	0.693	0.83
Glueballmasse [GeV]	1.045	1 - 2

Tabelle 5.3: Die Tabelle zeigt die Ergebnisse des Fits für die baryonische Lösung verglichen mit den experimentellen Daten, die aus [16] entnommen wurden.

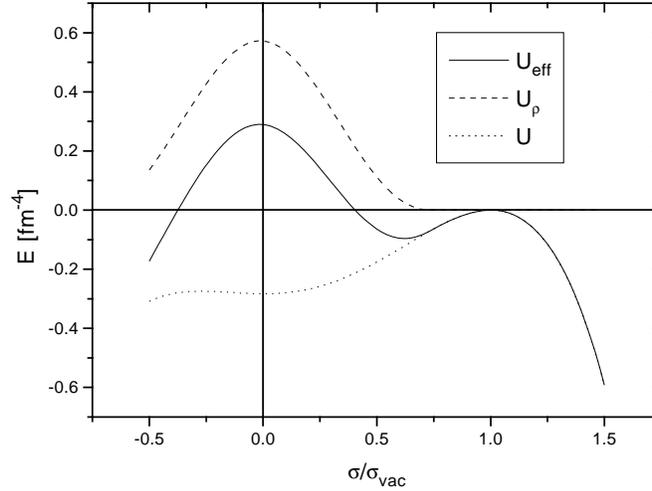


Abb. 5.1: Das effektive Potential als Funktion von σ/σ_{vac} (durchgezogene Linie). Die gepunktete Linie kennzeichnet den Beitrag von $U(\sigma)$ zum effektiven Potential, wohingegen die gestrichelte Linie den Beitrag der skalaren Dichte markiert.

daher gelten: $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = \sigma_{vac}$. Die Bewegung des fiktiven σ -Teilchens in diesem Potential endet daher genau bei σ_{vac} . Da aber, wie erwähnt, 'Reibungsterme' auftreten und das Teilchen keine 'Anfangsgeschwindigkeit' hat wegen $d\sigma/dr(r=0) = 0$, muß es mit einer relativ hohen potentiellen Energie bei $\sigma \approx 0$ starten, um schließlich bei $\sigma = \sigma_{vac}$ zum Stillstand zu kommen.

Aus dieser Diskussion ergibt sich die numerische Methode zur Lösung der Gleichung (5.15), nämlich die sogenannte 'shooting method'. Dabei gibt man einen Startwert $\sigma_0 = \sigma(r=0)$, sowie $d\sigma/dr(r=0) = 0$ vor, und integriert die Bewegungsgleichung des σ -Teilchens im effektiven Potential bis zu einem Wert r_{max} auf. Der Anfangswert σ_0 wird schließlich so lange variiert, bis gilt $\sigma(r_{max}) = \sigma_{vac}$. Weiterhin werden die Parameter des effektiven Potentials so modifiziert, bis die Observablen des Solitons mit den physikalischen Eigenschaften von Meson bzw. Baryon übereinstimmen. Zur Lösung der Bewegungsgleichung (5.15) verwenden wir einen klassischen Runge-Kutta Algorithmus und die Modifizierung des Anfangswertes geschieht mit der

Van Wijngaarden-Dekker-Brent Methode [20, 52].

Die radiale Abhängigkeit des σ -Feldes, der skalaren Dichte ρ_s , sowie der

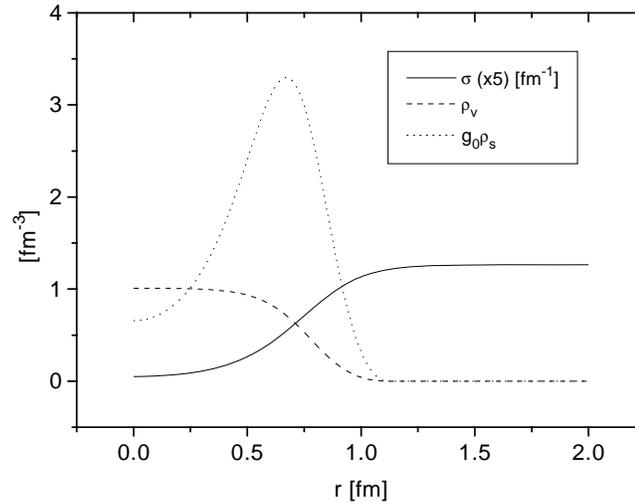


Abb. 5.2: Die Abbildung zeigt das σ -Feld (durchgezogene Linie), die skalare Dichte multipliziert mit g_0 (gepunktete Linie), sowie die vektorielle Dichte (gestrichelte Linie) eines Solitons mit den physikalischen Eigenschaften eines Mesons.

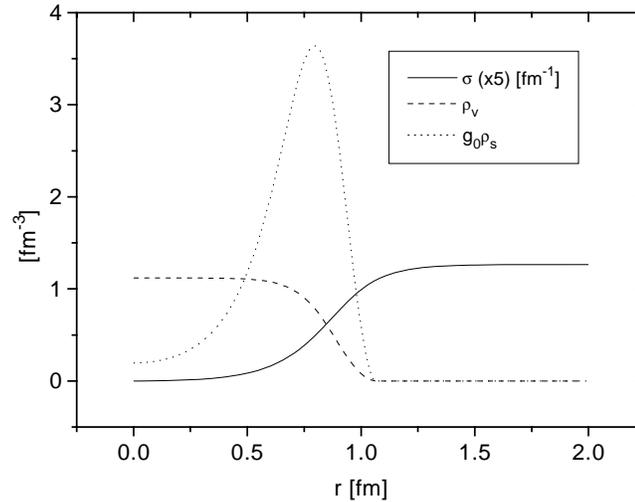


Abb. 5.3: Die Abbildung zeigt das σ -Feld (durchgezogene Linie), die skalare Dichte multipliziert mit g_0 (gepunktete Linie), sowie die vektorielle Dichte (gestrichelte Linie) eines Solitons mit den physikalischen Eigenschaften eines Baryons.

vektoriellen Dichte ρ_v innerhalb des Solitons ist für die mesonische Lösung in Abbildung 5.2 gezeigt. Zur besseren Übersicht wurde das σ -Feld mit einem Faktor 5 skaliert. Man erkennt anhand der Form des σ -Feldes, wie die oben

erwähnte Bewegung des σ -Teilchens vonstatten geht. Durch den bei $r \approx 0$ sehr großen Einfluß des 'Reibungsterms' des Laplaceoperators $\frac{2}{r}d\sigma/dr$ bleibt der Wert des σ -Feldes im Innern des Solitons lange in der Nähe des Startwertes $\sigma_0 \approx 0$ um schließlich an der Oberfläche stetig auf seinen Vakuumwert zu steigen. Das Verhalten der vektoriellen Dichte ist dem sehr ähnlich, also relativ konstant im Innern des Solitons (bis $r \sim 0.5 fm$) und fällt dann im Bereich der Oberfläche auf Null ab. Im Gegensatz zur volumenzentrierten vektoriellen Dichte ist die skalare Dichte oberflächenzentriert, da sie im Koordinatenursprung proportional zur effektiven Masse $m^* = m_0 + g_0\sigma$ ist. ρ_s nimmt daher den Maximalwert erst bei ca. $r \approx 0.5 fm$ an. Die Abbildung 5.3 zeigt für die baryonische Konfiguration qualitativ ähnliche Eigenschaften wie die mesonische. Man erkennt aber die größere Ausdehnung der Dichten und des σ -Feldes für den 3-Quark Zustand, woraus sich die unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften von Meson und Baryon ergeben.

5.1.1 Das J/ψ - und D/\bar{D} -Meson

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion von Mesonen mit schweren Quarks (charme-Quarks). Die entsprechenden Teilchen, die modelliert werden sollen, sind das J/ψ -Meson als gebundener ($c\bar{c}$)-Quarkoniumzustand und die D/\bar{D} -Mesonen als gebundener ($u\bar{c}$ - bzw. ($\bar{u}c$)-Zustand. Die hier verwendeten Current-Quarkmassen für die verschiedenen Quark-Flavor sind in der Tabelle 5.4 aufgetragen, wobei wir wie gesagt nur Teilchen mit bis zu charm-Quark Inhalt behandeln wollen; man glaubt, daß das J/ψ -Meson in hochenergetischen Schwerionenreaktionen eine mögliche Signatur für das Quark-Gluon-Plasma ist. Wir werden darauf im weiteren noch zurückkommen.

Zur Bestimmung der physikalischen Eigenschaften der Mesonen aus schweren

Quark Flavor	Kürzel	Masse [MeV]
Up-Quark	u	2-8
Down-Quark	d	5-15
Strange-Quark	s	100-300
Charm-Quark	c	1000-1600
Bottom-Quark	b	4100-4500
Top-Quark	t	150000-200000

Tabelle 5.4: Current-Quarkmassen der verschiedenen Quark Flavor. Die Werte sind aus [60] entnommen.

Quarks verwenden wir das gleiche Verfahren wie in Kapitel 2.3, wo wir uns für das nichtabelsche Verhalten der Eichfelder unter adiabatischer Erhöhung

der starken Kopplungskonstante interessiert hatten. Hier werden wir dieses numerische 'staggered leapfrog'-Verfahren dazu benutzen, um die Current-Quarkmasse zeitabhängig zu verändern. Dieses Verfahren besitzt zwei entscheidende Vorteile; zum einen werden die restlichen Parameter des Modells automatisch beibehalten, während man mit der im vorigen Abschnitt beschriebenen 'shooting method' immer wieder in Bereiche des Parameterraums gelangen kann, in dem es keine Solitonlösungen gibt und man zur Variation der restlichen Parameter gezwungen wird. Zum anderen reduziert sich die Zahl der Solitonlösungen drastisch, da beim zeitabhängigen Verfahren die Anzahl der (Anti-)Quarks festgelegt ist, im Gegensatz zum statischen Verfahren.

Wir starten daher mit der im vorangegangenen Abschnitt bestimmten Solitonlösung der Feldgleichung (5.15) die die physikalischen Eigenschaften eines Rho- bzw. Pi-Mesons hat. Wir simulieren die Phasenraumverteilung der Quarks $f(x, p)$ und $\bar{f}(x, p)$ durch ein Ensemble von Testteilchen gemäß (4.51) und (4.54), wobei wir, um eine gute Statistik zu bekommen, die Anzahl der Testteilchen auf $N_T = 50000$ festlegen. Mit diesem Anfangszustand wird das Verhalten der Teilchen und des σ -Feldes unter der fest vorgegebenen Zeitabhängigkeit der Current-Quarkmasse

$$m_0(t) = m_c - (m_c - m_0 - \beta t)\Theta(m_c - \beta t) \quad (5.18)$$

untersucht. Als Anfangsmasse wählen wir $m_0 = 10 \text{ MeV}$ und die Endmasse legen wir zunächst auf $m_c = 1.56 \text{ GeV}$ fest [61]. Da die Masse des charm-Quarks experimentell nicht exakt bestimmt ist, sondern einen Wert im Bereich von $m_c \approx 1.0 - 1.6 \text{ GeV}$ annehmen kann [60], verwenden wir diese Masse später als Parameter zur bestmöglichen Bestimmung der Gesamtmasse des Solitons.

Der Massenänderungsparameter β muß zuerst so eingestellt werden, daß das σ -Feld der geänderten Quarkbewegung adiabatisch folgen kann. Wir verwenden daher zunächst Werte zwischen $30 \text{ MeV}/fm$ und $150 \text{ MeV}/fm$. In Abbildung 5.4 sehen wir den rms-Radius des Mesons als Funktion der Current-Quarkmasse für die verschiedenen Werte von β . Man erkennt, daß zwar bei allen Werten von β leichte Oszillationen der Quarkverteilungen auftreten, aber der rms-Radius des Endzustands in allen Fällen gleich ist. Wir setzen daher im weiteren $\beta = 100 \text{ MeV}/fm$ und betrachten unser Verfahren als unabhängig von diesem Parameter.

Weiterhin sehen wir in Abbildung 5.4, daß ein Vergrößern der Current-Quarkmasse bewirkt, daß sich der Radius des Mesons verringert. Diesen Effekt kann man qualitativ durch die thermodynamische Energiebilanz der Testteilchen erklären:

$$PV = \frac{2}{3}U = \frac{2}{3}N_T m \langle v^2 \rangle / 2. \quad (5.19)$$

P ist der Druck des Vakuums auf die Quarks, der durch die Bagkonstante B festgelegt ist und $\langle v^2 \rangle$ die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Teilchen. Für sehr leichte Quarks ist $\langle v \rangle = p/E \sim 1$, während für schwere, also nichtrelativistische Quarks $\langle v \rangle = p/m$ ist und somit $U \sim 1/m$. Da der Vakuumdruck festliegt, muß sich das Volumen des Objektes verringern.

Weiterhin sieht man anhand der Abbildung, daß nach Erreichen der Charm-Quarkmasse $m_c = 1.56 \text{ GeV}$ der Radius für alle Werte von β gleich ist und daß dieser gut mit dem aus anderen Quarkmodellen bekannten Radius des J/ψ von $\leq 0.3 \text{ fm}$ übereinstimmt [62].

In Abbildung 5.5 ist die radiale Abhängigkeit des σ -Feldes und der vek-

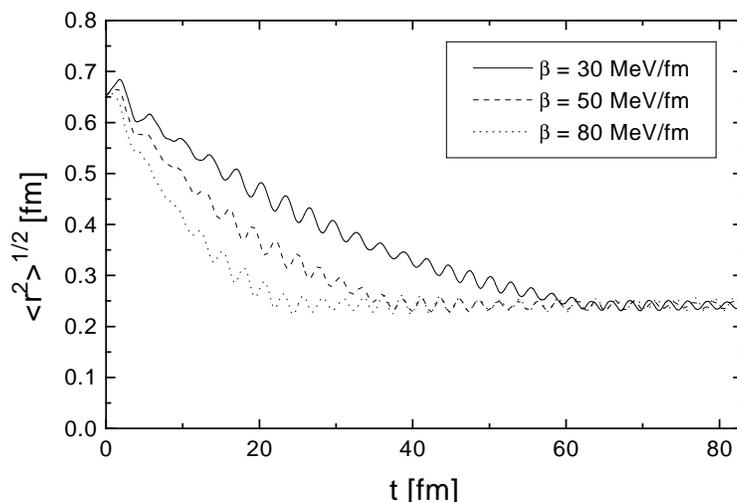


Abb. 5.4: Die Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung des rms-Radius des Mesons unter Erhöhung der Current-Quarkmasse von 10 MeV auf $m_c = 1.56 \text{ GeV}$ für verschiedene Werte des Massenänderungsparameters β .

toriellen Dichte entlang der x-Achse aufgetragen. Die gepunkteten Linien markieren den Anfangszustand mit $m = m_0$, während die durchgezogenen Linien den Endzustand mit $m = m_c$ kennzeichnen. Man sieht deutlich das sich verringerende Volumen des Zustandes, wobei die Endzustandsdichte aus Gründen der Übersicht noch um einen Faktor 8 reduziert wurde. Das Zentrieren der Quarkdichte hat zur Folge, daß auch das σ -Feld sich zusammenzieht und insbesondere im Innern des Solitons stark negative Werte annimmt. Ein ähnliches Bild ergibt sich für das D/\bar{D} -Meson (Abbildung 5.6), das aus einer Kombination von Charm- und Up-Quark besteht: $\bar{D} = (u, \bar{c})$, $D = (\bar{u}, c)$. Zur Konstruktion dieses Zustand wurde nur die Current-Quarkmasse der Quark- bzw. Antiquark-Verteilung erhöht. Der Endzustand ist daher ein heterogenes Gemisch aus zwei Teilchensorten unterschiedlicher Masse. Man kann sich aber auch für diesen Fall klar machen, daß der rms-Radius des Gesamtzustandes sich verringert. Allerdings reicht die Verteilung der leichten Quarks im

Endzustand noch weiter nach außen als die der charm-Quarks, und auch das σ -Feld verändert sich nicht so stark. Die Abhängigkeit der rms-Radien von J/ψ und D/\bar{D} von der Current-Quarkmasse sind in Abbildung 5.7 gezeigt. Daraus ergibt sich im Falle von $m_c = 1.56 \text{ GeV}$ für das D/\bar{D} ein zu erwartender Radius von 0.40 fm und für das J/ψ von 0.25 fm . Die Abbildung 5.8 zeigt die entsprechende Abhängigkeit der Gesamtmasse E_{tot}

$$E_{tot} = \int \left\{ \frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 + \epsilon_Q(\mathbf{r}) \right\} d^3r \quad (5.20)$$

der Mesonenzustände von der Current-Quarkmasse. So ergibt sich für das J/ψ -Meson eine Masse von $\sim 4100 \text{ MeV}$ und für das D/\bar{D} -Meson $\sim 2250 \text{ MeV}$. Der Wert des J/ψ liegt etwa 1000 MeV über dem experimentellen Wert von $M_{J/\psi} = 3097 \text{ MeV}$ und der des D/\bar{D} etwa 350 MeV über $M_{D/\bar{D}} = 1850 \text{ MeV}$. Diese absoluten Massen der Mesonen haben daher zwar eine relative Abweichung von ca. 20 Prozent, aber das Modell sagt in etwa die korrekte Massendifferenz der charm-Quark Mesonen $2 * M_{D/\bar{D}} - M_{J/\psi} \approx 400 \text{ MeV}$ voraus, wobei der experimentell exakte Wert bei 680 MeV liegt. (Diese Massendifferenz ist experimentell von großer Bedeutung, da sie erklärt, daß der Zerfall des J/ψ -Mesons energetisch unterdrückt ist und somit eine große Lebensdauer hat.)

Da wie bereits erwähnt die Current-Quarkmasse des charm-Quarks m_c experimentell nicht exakt bekannt ist, sondern zwischen $1 - 1.6 \text{ GeV}$ variieren kann [60], sieht man anhand der Abbildung 5.8, daß man für einen Wert der Current-Quarkmasse von $m_c \approx 1.25 \text{ GeV}$ eine bessere Übereinstimmung der Gesamtmassen der charm-Quark Mesonen erhält und sich der relative Fehler auf ca. 5 Prozent verringert. Auch die rms-Radien der Mesonen liegen nach der Neubestimmung der charm-Quarkmasse noch immer im Bereich der Vorhersagen anderen Charmoniummodelle, beispielsweise $r_{rms}^{J/\psi} \leq 0.3 \text{ fm}$ [62]. Diese Neubestimmung der charm-Quarkmasse kann man auch durch das Fehlen der Coulombkräfte in den lokal farbneutralen (semklassischen) Grundzuständen unseres Modells motivieren. Betrachtet man die Quarks als Punktteilchen, was die gängige Annahme in vielen anderen Charmoniummodellen ist, so führt die attraktive Coulombkraft zu einer Verringerung der Gesamtenergie des Charmoniumzustandes um ca. 1 GeV [62], so daß in diesen Modellen eine größere Current-Quarkmasse angenommen werden muß, um die Gesamtmasse korrekt zu reproduzieren. Wir betrachten die charm-Quarkmasse $m_c = 1.25 \text{ GeV}$ als optimalen Fit für die Grundzustandseigenschaften der Mesonen, arbeiten aber im weiteren mit der Masse von $m_c = 1.56 \text{ GeV}$ [61], da diese Wahl auf die in Abschnitt 5.5.2 vorgestellten Ergebnisse nur einen geringen Einfluß hat.

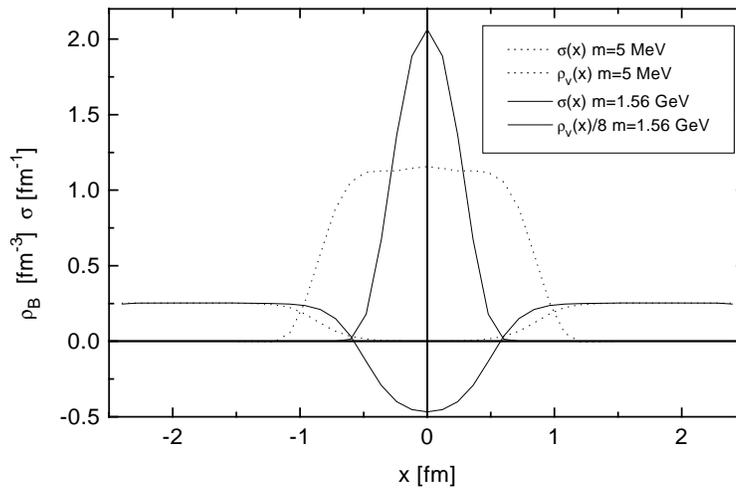


Abb. 5.5: Die Abbildung zeigt das σ -Feld und die Summe der Dichten der Quarks für das J/ψ -Meson zu Beginn der Zeitentwicklung (gepunktete Linien), sowie am Ende der Zeitentwicklung (durchgezogene Linien) nach $100 fm/c$.

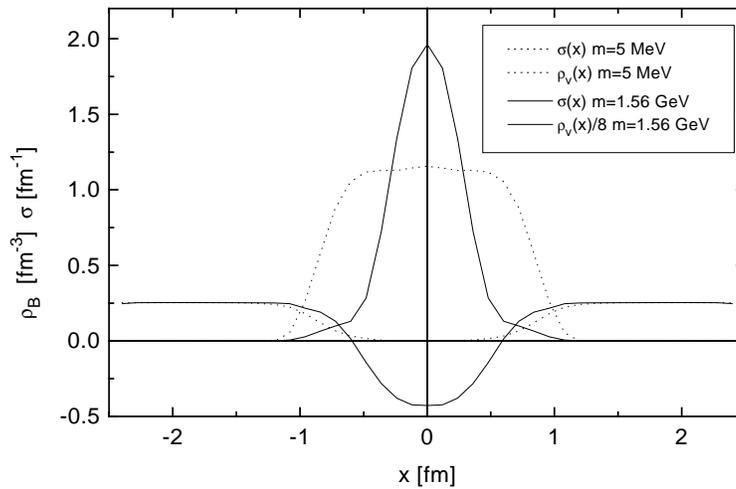


Abb. 5.6: Die Abbildung zeigt das σ -Feld und die Summe der Dichten der Quarks für das D/\bar{D} -Meson zu Beginn der Zeitentwicklung (gepunktete Linien), sowie am Ende der Zeitentwicklung (durchgezogene Linien) nach $100 fm/c$.

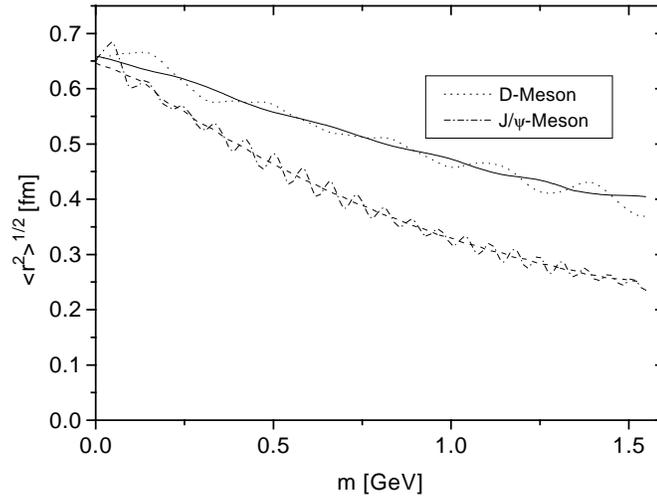


Abb. 5.7: Die Abbildung zeigt die Abhängigkeit des rms-Radius von der Current-Quarkmasse.

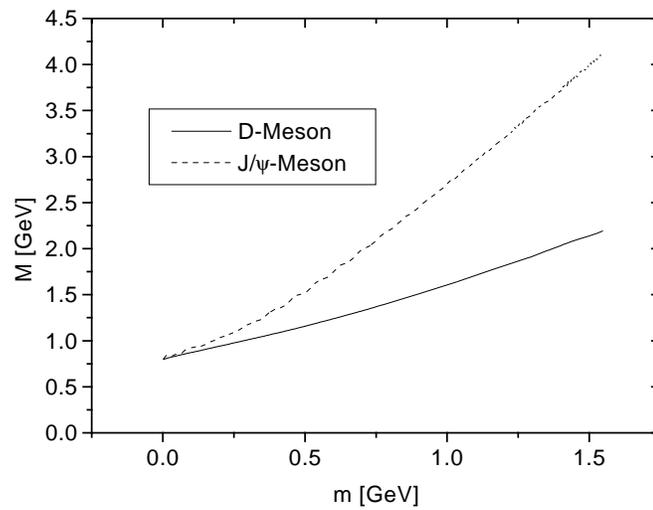


Abb. 5.8: Die Abbildung zeigt die Abhängigkeit der Gesamtmasse des Solitons von der Current-Quarkmasse.

5.2 Eigenschaften von Flux-Tubes

Wie wir bereits mehrfach erwähnt haben, verschwinden aufgrund der Farbsymmetrie der Quarks im Grundzustand die farbelektrischen und farbmagnetischen Felder. Es ist daher noch nicht möglich gewesen, den letzten Parameter des Modells, die starke Kopplungskonstante $\alpha_s = g_v^2/(4\pi)$ festzulegen. Experimentell wird der Wert dieser Konstanten ermittelt durch einen Vergleich der Anregungsspektren schwerer Mesonen, also des $J/\psi = (c\bar{c})$ oder des $\Upsilon = (b\bar{b})$ mit dem phänomenologischen $q\bar{q}$ -Potential

$$V_{q\bar{q}} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \tau r, \quad (5.21)$$

wobei $\tau = 1 \text{ GeV}/fm$ durch die Stringspannung festgelegt ist. Diese Spektren können mit einem Wert von $\alpha_s \simeq 1$ erklärt werden [62].

Auf der theoretischen Seite hat man im Rahmen von Bag-Modellen (MIT-Bag- [50], Friedberg-Lee- [41] und Nielsen-Patkos-Modell [63]-[68]) die starke Kopplungskonstante bestimmt, in dem man die farbmagnetische Hyperfeinaufspaltung des baryonischen Grundzustandes in Nukleon und Delta berechnet hat (siehe Kapitel 3.4). Die typischen Werte von α_s liegen zwischen $1 < \alpha_s < 2$. Weiterhin hat man in diesen Modellen auch Flux-tube Konfigurationen untersucht [41, 69, 70, 71], bei denen Quark und Antiquark einen sehr großen (bzw. unendlichen) Abstand haben und zwischen sich eine Flux-tube bilden, in der das farbelektrische Feld als konstant angenommen wird. Identifiziert man die Energie des Farbfeldes pro Einheitslänge mit der Stringspannung (Stringkonstanten) $\tau = 1 \text{ GeV}/fm$, so ergibt sich die starke Kopplungskonstante α_s ebenfalls in der Größe von $\alpha_s \approx 2$.

Beide Vorgehensweisen sind jedoch nicht konsistent. Bei der Berechnung der Matrixelemente der farbmagnetischen Aufspaltung werden die Selbstwechselwirkungsterme unberechtigterweise vernachlässigt [50], während dies bei der farbelektrischen Selbstwechselwirkung nicht der Fall ist. Bei der Stringkonfiguration wird die Bewegung der Quarks nicht berücksichtigt, sondern es wird ein konstantes ortsunabhängiges farbelektrisches Feld zwischen den Quarks (ab initio) angenommen (Born-Oppenheimer Näherung) [41].

Wir verfahren deshalb unterschiedlich und untersuchen die Reaktion des Systems auf eine adiabatische Separierung der Quarks mit konstanter Geschwindigkeit. In diesem Sinne beschreiben wir die dynamische Formierung einer Flux-tube aus dem mesonischen Grundzustand. Dabei nehmen wir an, daß sich die räumliche Form der Verteilung der Quarks während dieses Prozesses nicht ändert. Simulieren wir daher das Quark-Antiquark-Paar des Mesons durch ein Ensemble von Testteilchen gemäß (4.51) und (4.54), so kann die Bewegung des Quark-Antiquark-Paars durch eine konstante Testteilchengeschwindigkeit v_0 mit $\mathbf{v}_i(t) = -\bar{\mathbf{v}}_i(t) = v_0 \mathbf{e}_z$ beschrieben werden. Berechnen wir schließlich die skalare und die Ladungsdichte gemäß (4.55) und (4.56), so

liegen die zeitliche Entwicklung der Quellen des skalaren und des farbelektrischen Feldes fest. Die Lösung der zugehörigen Feldgleichungen erfolgt folgendermaßen:

Für die Maxwellgleichungen wählen wir die Coulombbeziehung im Medium $\nabla(\kappa\mathbf{A}) = 0$, woraus für die Vektorpotentiale

$$\nabla(\kappa\nabla\phi) = -\rho_B, \quad (5.22)$$

$$-\kappa\partial_t^2\mathbf{A} + \nabla^2\kappa\mathbf{A} - \nabla \times \left(\kappa\mathbf{A} \times \frac{\nabla\kappa}{\kappa}\right) = -\mathbf{j} + \kappa\nabla\partial_t\phi, \quad (5.23)$$

mit

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - d\mathbf{A}/dt, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.25)$$

folgt. Willets und Puff haben gezeigt [72], daß Farbströme innerhalb von Flux-tubes kein Magnetfeld erzeugen. In diesem Fall wird der physikalische Strom \mathbf{j} vom Konvektionsstrom $-d\mathbf{E}/dt$ exakt weggehoben, falls die transversale Ausdehnung der Flux-tube konstant bleibt. Wir werden daher die Gleichung (5.23), die die Wellengleichung des Magnetfeldes darstellt, hier und auch im folgenden vernachlässigen, und lediglich das elektrostatische Potential ϕ aus der Gleichung (5.22) berechnen. Das farbelektrische Feld bestimmen wir schließlich durch $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, was im allgemeinen Fall eine Vernachlässigung der Retardierung des \mathbf{E} -Feldes bedeutet. In unserem Fall ist diese Annahme jedoch gerechtfertigt, da das ausschließlich longitudinale \mathbf{E} -Feld in einem String unter Lorentztransformationen seine Form behält.

Die Lösung der Poissongleichung (5.22) wird numerisch mit Hilfe einer Finite-Elemente Methode [73] ermittelt, die den entscheidenden Vorteil hat, daß man nicht auf äquidistante Gitter angewiesen ist und insbesondere Randbedingungen auf gekrümmten Oberflächen behandeln kann. In unserem Fall werden die Randbedingungen durch zwei Parameter a, b festgelegt, die in Abbildung 5.9 zu sehen sind. b beschreibt den rms-Radius der Quarks an den

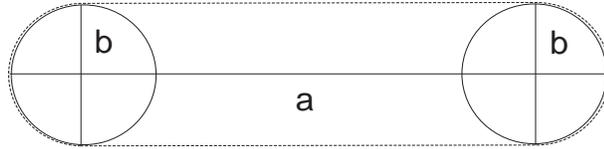


Abb. 5.9: Die in Programm verwendeten Parameter zur Festlegung der Randbedingungen für die Poissongleichung. Die Oberfläche S ist durch die gepunktete Linie dargestellt.

Endkappen der Flux-tube und a den Abstand ihrer Zentren. Da die Form der Quarkverteilungen während der Zeitentwicklung nicht geändert wird, bleibt

b konstant, während a in jedem Zeitschritt neu bestimmt wird. Weitere Details der numerischen Implementierung sind in Anhang B zu finden. Auf dem so definierten Rand fordern wir die reine von Neumannsche Randbedingung

$$\mathbf{n} \nabla \phi|_S = 0, \quad (5.26)$$

wobei \mathbf{n} der Normalenvektor auf die Oberfläche S der Kavität ist. Durch diese Forderung verlaufen die Feldlinien stets parallel zur Oberfläche, was wir bereits im Zusammenhang mit Abbildung 3.2 gesehen haben.

Die Zeitentwicklung der Klein-Gordon Gleichung für das σ -Feld (4.40) kann unter Vernachlässigung des farbmagnetischen Feldes in

$$\partial_t^2 \sigma - \nabla^2 \sigma + U'(\sigma) + \frac{1}{2} \kappa'(\sigma) \mathbf{E}^2 + g_0 \rho_s = 0. \quad (5.27)$$

umgeschrieben werden. Diese Gleichung wird mit dem bereits mehrfach erwähnten 'staggered leapfrog'-Verfahren integriert, wobei sich die Dichten dynamisch aus der Testteilchenverteilung ergeben und das farbelektrische Feld in jedem Zeitschritt durch die Lösung der Poissongleichung (5.22) ermittelt wird.

Die Abbildung 5.10 zeigt den Verlauf der Quarkseparierung anhand der Ladungsdichte und des σ -Feldes zu Beginn des Prozesses bei $t = 3 fm/c$ und am Ende zur Zeit $t = 40 fm/c$. Da wir für die Quarks eine konstante Geschwindigkeit $v_0 = 0.166 c$ gewählt haben, hat das $q\bar{q}$ -Paar am Ende einen Abstand von $13 fm$, was somit auch der Länge der Flux-tube entspricht. Die Geschwindigkeit der Quarks wurde so klein gewählt, um Retardierungseffekte des σ -Feldes sicher ausschließen zu können. Wie wir in Verbindung mit Abbildung 5.11 erkennen, baut sich das farbelektrische Feld zu Beginn der Separierung innerhalb der Kavität auf. Die Feldlinien verlaufen wie erwartet parallel zur Oberfläche und wir sehen, daß die absolute Stärke dieses Feldes in der Nähe der Endkappen deutlich geringer ist als zwischen den Ladungen. Weiterhin erkennen wir, daß das farbelektrische Feld am Ende der Quarkseparierung in der Nähe der Farbladungen weitaus geringere Werte annimmt als im Bereich zwischen den Quarks, wo das Feld eine konstante, transversal unabhängige Form $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_z$ annimmt. Dieser Verlauf des Feldes zwischen den Ladungen entspricht der gängigen Annahme, die in sämtlichen Quarkmodellen über das Verhalten des farbelektrischen Feldes gemacht wird. Unsere Rechnungen liefern somit eine Bestätigung für die Gültigkeit dieser Annahmen. Den konstanten Wert E_0 kann man mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes abschätzen [72]:

$$\nabla^2 \phi = -\rho_B \implies E_0 = \frac{Q}{A} = \sqrt{\frac{16\pi}{3A^2}} \sqrt{\alpha_s}. \quad (5.28)$$

Er ist durch den Fluß des Feldes durch eine Oberfläche A senkrecht zur Flux-tube gegeben. Der Fluß wird dabei vollständig durch die Stärke der Ladung

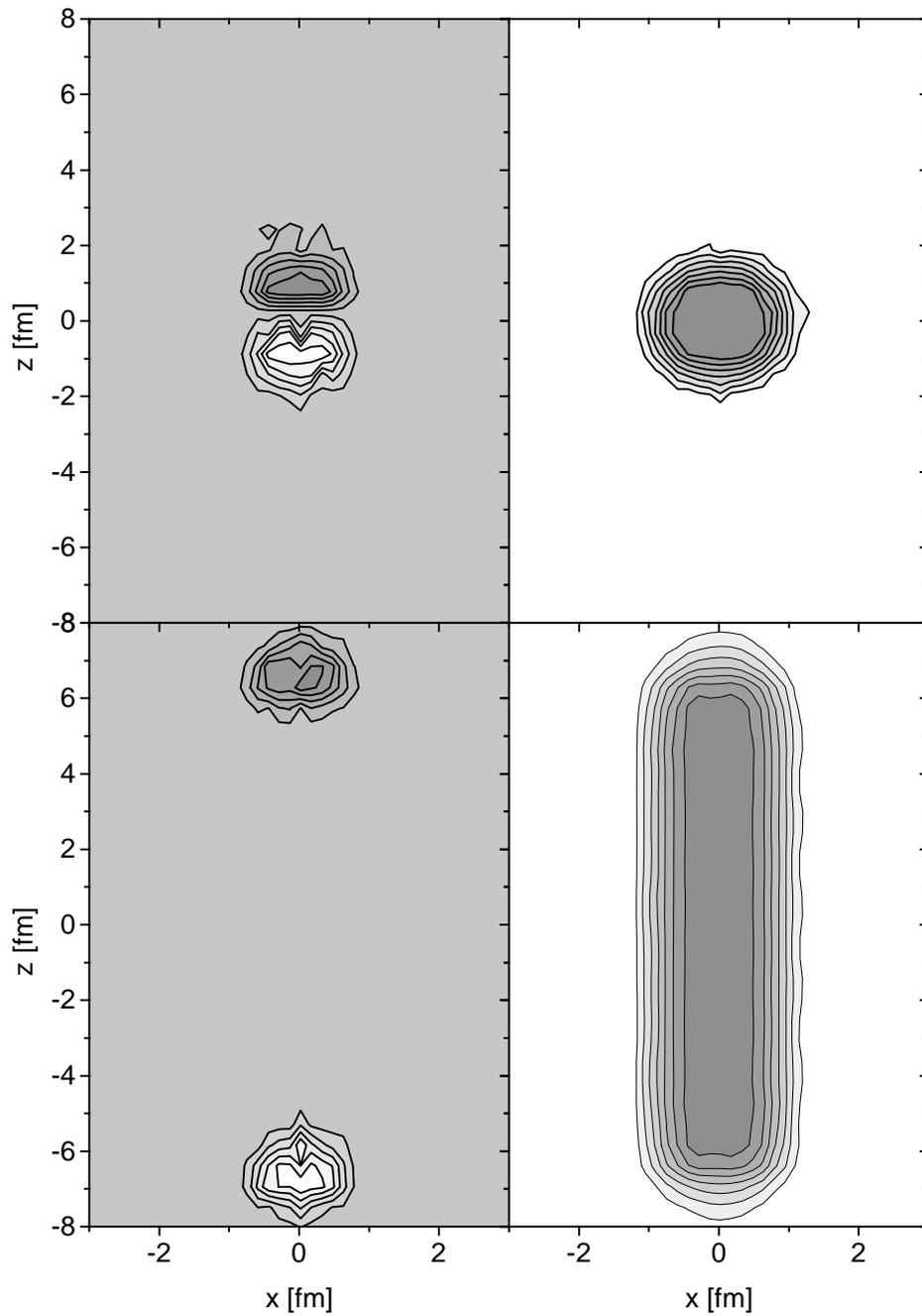


Abb. 5.10: Die linke Seite der Abbildung zeigt die Ladungsdichte ρ und die rechte Seite das σ -Feld bei $t = 3 \text{ fm}/c$ und $t = 40 \text{ fm}/c$. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.35 fm^{-3} bis 0.35 fm^{-3} für ρ und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

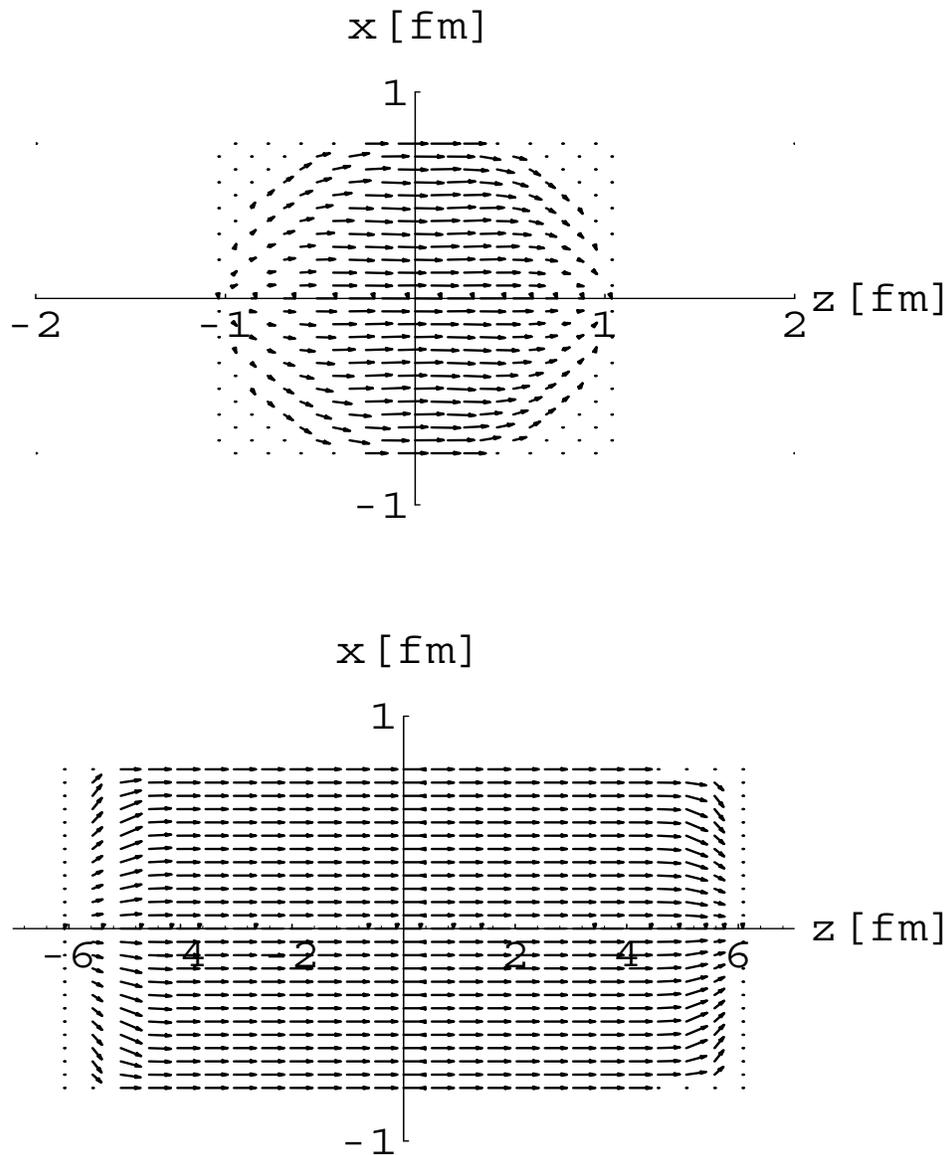


Abb. 5.11: Das elektrische Feld innerhalb der Kavität bei $t = 3 \text{ fm}/c$ und bei $t = 40 \text{ fm}/c$. Man beachte die reskalierte z -Achse im unteren Bild.

$Q = \langle \hat{Q}^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{16\pi\alpha_s/3}$ an den Endkappen bestimmt, also indirekt durch den Wert der starken Kopplungskonstanten α_s .

Wie man an Gleichung (5.27) erkennt, bildet das farbelektrische Feld neben der skalaren Dichte ρ_s eine weitere Quelle für das σ -Feld. Aufgrund der

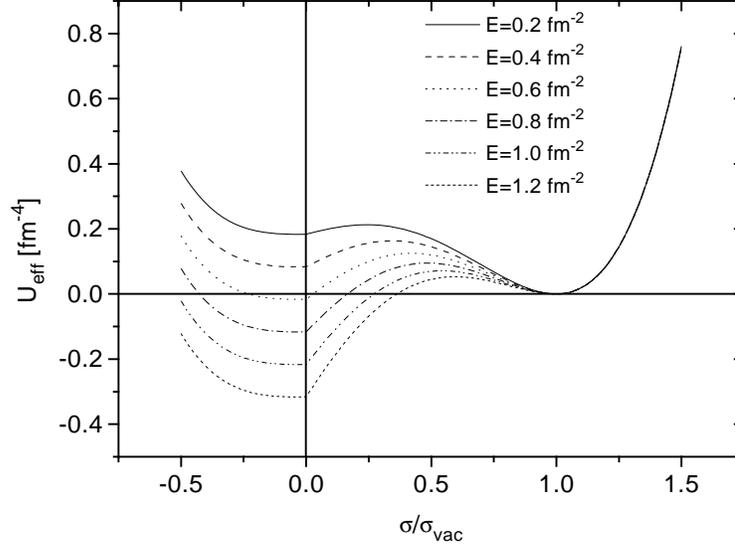


Abb. 5.12: Die Abbildung zeigt das effektive Potential des σ -Feldes mit verschiedenen elektrischen Feldstärken.

Konstanz des Farbfeldes kommt es daher zur Formierung der eigentlichen Flux-tube des σ -Feldes (Abbildung 5.10), da ein Farbfeld ab einer gewissen Stärke E_{krit} , die in unserem Fall bei ca. 0.6 fm^{-2} liegt, ebenfalls einen Phasenübergang vom nichtperturbativen zum perturbativen Vakuum bewirkt. Das wird in Abbildung 5.12 verdeutlicht, wo man das effektive Potential des σ -Feldes unter Berücksichtigung des farbelektrischen Beitrages sieht. Mit steigender Feldstärke $|\mathbf{E}|$ wird das Minimum im perturbativen Bereich ($\sigma \approx 0$) stetig abgesenkt. Es ist demzufolge ab einem gewissen kritischen Wert $|\mathbf{E}| > E_{krit}$ für das σ -Feld energetisch günstiger den perturbativen Vakuumwert einzunehmen. Da weiterhin nach (5.28) die Stärke des Farbfeldes proportional zu $\alpha_s^{1/2}$ ist, existiert eine minimale Kopplungskonstante ab der es erst zur Formierung einer Flux-tube kommt. In unserem Modell liegt dieser Wert bei $\alpha_s \sim 1$, wie man an Abbildung 5.13 erkennen kann. Dort ist die Stringkonstante (oder Stringspannung)

$$\tau = \frac{E_{col}}{L} = \frac{1}{L} \int d^3r \frac{1}{2} \kappa(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) \quad (5.29)$$

in Abhängigkeit von der starken Kopplungskonstante aufgetragen, wobei diese durch die beschriebene Quarkseparierung für verschiedene Werte von α_s ermittelt wurde. Die Größe L bezeichnet die Länge der Flux-tube. Wie man

der Abbildung entnehmen kann ergibt sich der phänomenologische Wert der Stringkonstanten von $\tau = 1 \text{ GeV}/\text{fm}$ bei $\alpha_s = 1.92$. Somit ist der letzte Parameter des Modells festgelegt, der mit den oben erwähnten Modellrechnungen gut übereinstimmt.

Wir stellen aber weiterhin anhand von Abbildung 5.13 fest, daß der kritischen Wert von α_s , unter dem es nicht zur Bildung einer Flux-tube kommt, in unserem Fall recht groß ist $\alpha_s^{crit} \approx 1$. Wir schließen daraus, daß der Parametersatz, mit dem das Hadronenspektrum optimal reproduziert wird, nicht unbedingt geeignet sein muß, um die Eigenschaften von Flux-tubes ebenfalls optimal zu beschreiben. Für beide Konfigurationen werden in der Tat in statischen Bagmodellen sehr unterschiedliche Parametersätze verwendet [41, 71], so daß eine kompatible Kombination der beiden Fälle in der hier vorgestellten Form zwar wünschenswert, aber dennoch zufällig ist.

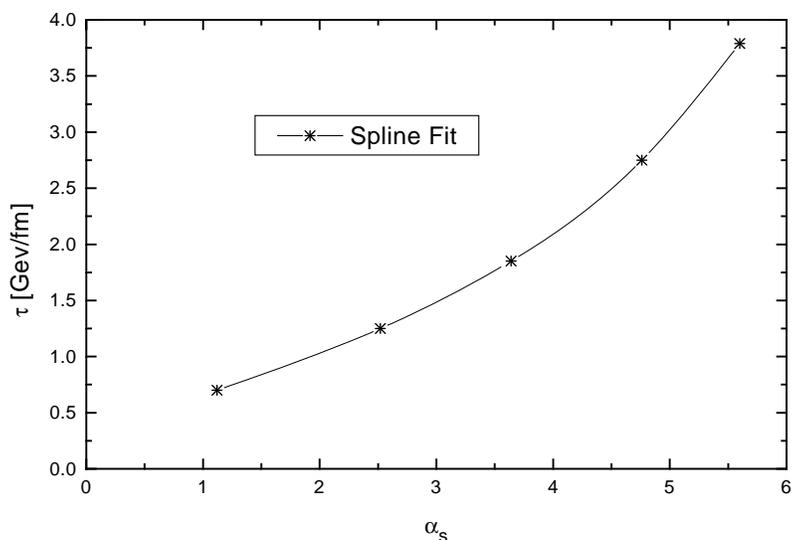


Abb. 5.13: Die Stringkonstante als Funktion der starken Kopplungskonstante α_s .

5.3 Das String-String Wechselwirkungspotential

Bedingt durch die Tatsache, daß man im Friedberg-Lee Modell eine dynamische und sich selbstkonsistent verändernde Oberfläche der Solitonen hat, ist es möglich, dynamische Prozesse, wie beispielsweise Nukleon-Nukleon-Kollisionen oder die bereits beschriebene Stringformierung und den Stringzerfall (Abschnitt 5.5) zu beschreiben. Eine weitere Anwendungsmöglichkeit ist die Bestimmung der Wechselwirkung zweier Solitonen durch den Vergleich

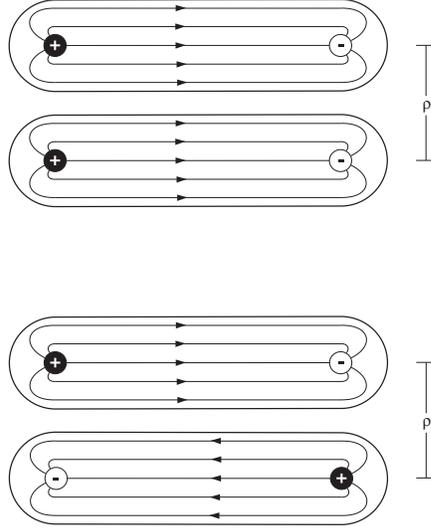


Abb. 5.14: Schematische Darstellung der parallelen (oben) und antiparallelen (unten) Flux-tube Konfiguration.

der Energien des skalaren Feldes mit dem Farbfeld. So gelang es zum Beispiel Koepf et al. [74], ein Nukleon-Nukleon Potential zu extrahieren durch die adiabatische Trennung eines deformierten Sechs-Quark Bagzustands in zwei separate Nukleonen. Das adiabatische Potential wurde dabei durch

$$V_{ad}(\alpha) = \langle \alpha | H | \alpha \rangle - 2E_N \quad (5.30)$$

berechnet, wobei der Vorgang durch einen Deformationsparameter α parametrisiert wird. Der Erwartungswert des Hamiltonoperators zerfällt in diesem Fall in zwei Anteile, die durch die kinetische Energie der Quarks und die potentielle Energie des σ -Feldes $\langle H^{bag} \rangle$ gegeben sind, sowie durch die Matrixelemente des farbmagnetischen Ein-Gluon-Austausches $\langle H^{OGE} \rangle$.

Wir beschreiben hier in ähnlicher Weise die Fusion zweier Flux-tubes, mit paralleler oder antiparalleler Ausrichtung des Farbfeldes, wie dies schematisch in Abbildung 5.14 dargestellt ist. In Abhängigkeit vom transversalen Abstand ρ der beiden Flux-tubes berechnen wir das Wechselwirkungspotential durch

$$V_{ad}(\rho) = E_{\sigma}(\rho) + E_{gl}(\rho) - E_{\sigma}(\infty) - E_{gl}(\infty) , \quad (5.31)$$

mit

$$E_{\sigma} = \int d^3r \left(\frac{1}{2} (\nabla \sigma)^2 + U(\sigma) + g_0 \sigma \rho_s(\sigma) \right) , \quad (5.32)$$

$$E_{gl} = \frac{1}{2} \int d^3r \kappa(\sigma) \mathbf{E}^2, \quad (5.33)$$

wobei die Energiebeiträge relativ zu der vollständig getrennten Konfiguration $\rho \rightarrow \infty$ bestimmt werden.

Wie man dem Anhang B entnehmen kann, in dem die numerischen Methoden dargestellt sind, wird die Dynamik des σ -Feldes vollständig in den drei Raumdimensionen bestimmt. Die Finite-Elemente Methode zur Lösung der Poissongleichung (5.22) ist jedoch auf zwei Dimensionen beschränkt. Man benötigt daher im Prinzip mindestens eine räumliche Symmetrie des Problems (z. B. Zylindersymmetrie), die in dem hier beschriebenen System nicht vorhanden ist. Um aber dennoch einen (qualitativen) Eindruck von der Wechselwirkung zweier Strings zu erhalten, sind wir gezwungen eine Annahme zur Bestimmung des farbelektrischen Feldes zu machen. Wir betrachten daher die Achse, die Quark und Antiquark von *einem* der beiden Strings verbindet, als neue (hypothetische) Symmetrieachse und berechnen mit diesem $q\bar{q}$ -Paar das (von den Quarks des anderen Strings) unbeeinflusste Farbfeld $\mathbf{E}_u(x, y, z)$. Das Farbfeld für die Gesamtkonfiguration bestimmen wir dann durch die kohärente Addition der beiden ungestörten Felder:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}_u(x - \rho_t, y, z) \pm \mathbf{E}_u(x + \rho_t, y, z), \quad (5.34)$$

wobei das Pluszeichen für parallele und das Minuszeichen für antiparallele Strings gilt. Die Größe ρ_t gibt dabei den transversalen Abstand der Symmetrieachse eines Strings zur x-Achse an. Durch diese Annahme wird die direkte Wechselwirkung jedes einzelnen Quarks mit beiden Quarks des benachbarten Strings vernachlässigt. Das Farbfeld bleibt daher während des kompletten Fusionsprozesses stringförmig. Die Näherung sollte gut sein für sehr kleine Abstände $\rho \ll 1 \text{ fm}$, da das farbelektrische Feld (5.34) für $\rho \rightarrow 0$ durch die Wiederherstellung der Zylindersymmetrie in die exakte Lösung der Feldgleichung (5.22) übergeht. Die Bewegung der Quarks wird wie bei Stringformierung in Abschnitt 5.2 durch eine konstante Testteilchen-Geschwindigkeit von $v_q = -v_{\bar{q}} = 0.166 c$ beschrieben, die auch als transversale Fusionsgeschwindigkeit gewählt wird.

Das Verhalten des σ -Feldes und des farbelektrischen Feldes für die Fusion zweier *paralleler* Strings ist in Abbildung 5.15 gezeigt. Im oberen Bild sind die beiden Flux-tubes noch getrennt, während im zweiten Bild die Kavitäten sich berühren und die Confinement-Wand zwischen ihnen zusammenbricht. Im weiteren Verlauf der Fusion findet die bereits angesprochene kohärente Addition der Farbfelder statt, womit am Ende des Prozesses eine einzige Flux-tube zurückbleibt mit der zweifachen Ladung an den Endkappen und dem entsprechenden doppelten Wert E_0 des farbelektrischen Feldes. Dies hat zur Folge, daß sich die Energie des Farbfeldes E_{gl} während der Fusion vervierfacht, woraus die starke kurzreichweitige Repulsion ($\rho < 0.5 \text{ fm}$) des

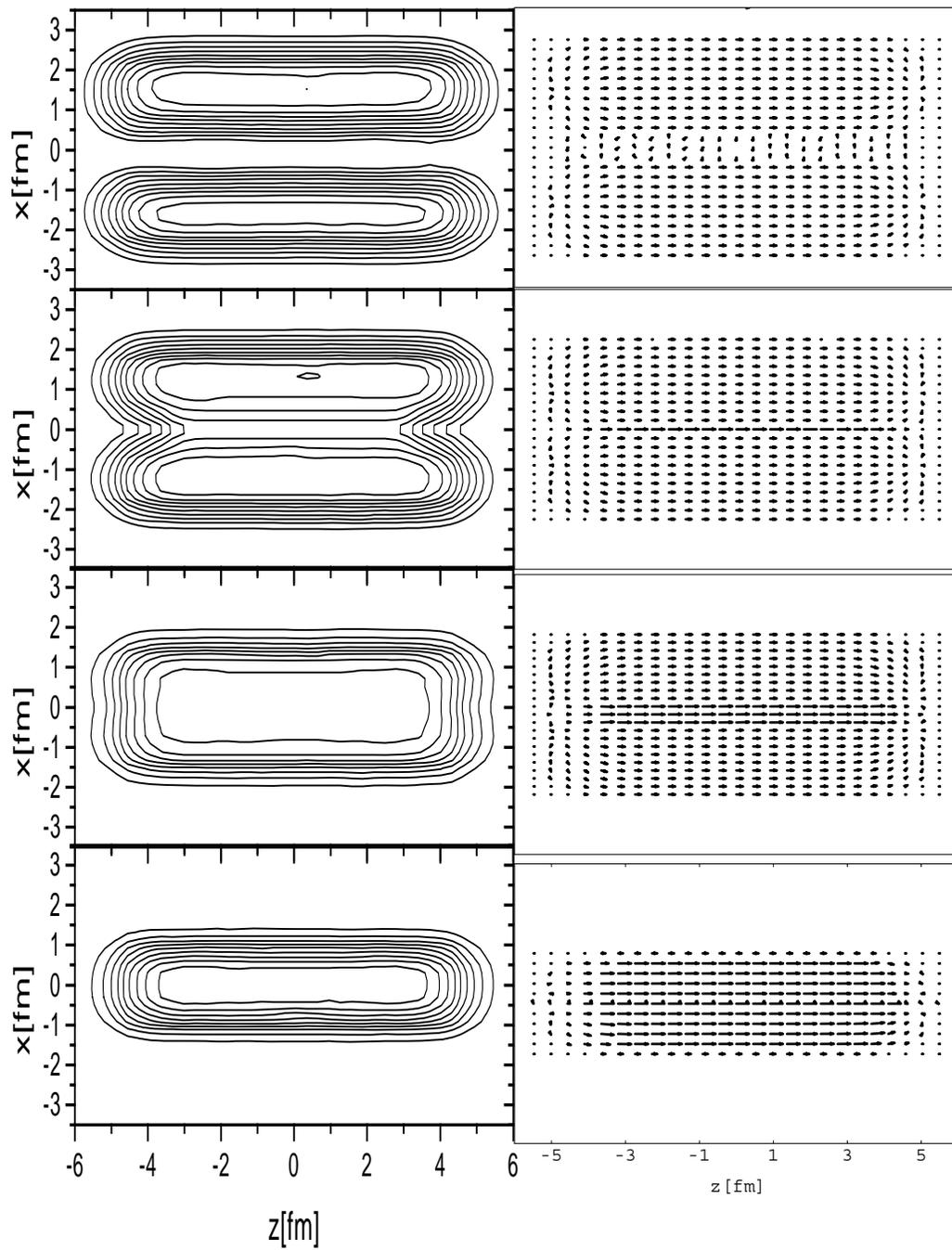


Abb. 5.15: Die Kavität des σ -Feldes und des farbelektrischen Feldes während des adiabatischen Fusionsprozesses. Der transversale Abstand der Strings beträgt (von oben nach unten): $\rho = 1.75 \text{ fm}$; 1.25 fm ; 0.75 fm ; 0.25 fm . Die äquidistanten Contourlinien des σ -Feldes laufen von -0.125 fm^{-1} (in der unteren Reihe von -0.175 fm^{-1}) bis 0.25 fm^{-3} .

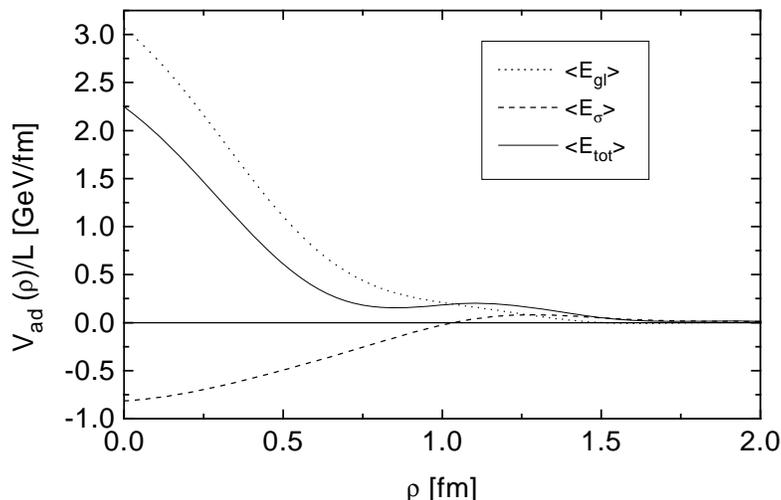


Abb. 5.16: Adiabatisches String-String Potential der parallelen Konfiguration. Die durchgezogene Linie zeigt die Summe der Beiträge des σ -Feldes und des farbelektrischen Feldes.

adiabatischen Potentials V_{ad} im parallelen Fall folgt, wie in Abbildung 5.16 zu sehen ist. Dort ist das Potential bezogen auf die Gesamtlänge L des Strings aufgetragen, da der Wert von V_{ad} trivialerweise mit dieser Länge skaliert. Im mittlereichweitigen Bereich ($\rho \sim 1 \text{ fm}$) ist V_{ad} weder stark repulsiv noch attraktiv, da sich die beginnende Erhöhung der Energie des Farbfeldes und der Energiegewinn durch Verringerung der Oberfläche des σ -Feldes in etwa ausgleichen. Für Abstände $\rho > 1.5 \text{ fm}$ verschwindet das Potential; es hat daher keinen langreichweitigen Anteil (Van der Waals-Kräfte), was an der Eigenschaft des Confinements des Modells liegt.

Wir möchten noch anmerken, daß das adiabatische Potential für parallele Strings in Abbildung 5.16 zumindest qualitativ mit dem Nukleon-Nukleon Potential von Koepf et al. ([74], Fig. 10) übereinstimmt. Obwohl die Strings in unserem Fall aus dem mesonischen und nicht dem nukleonischen Grundzustand formiert werden, so wird in beiden Szenarien die Wechselwirkung zweier zusammengesetzter Quarksysteme mit demselben Modell beschrieben. Unsere Ergebnisse geben Anlaß zu folgender Analogie: für die Stringkonfiguration stammt die starke kurzreichweitige Repulsion von der parallelen Ausrichtung der Ladungen, während diese für das NN-Potential von der entsprechenden parallelen Ausrichtung der Spins der Quarks herrührt. Dadurch dominieren in letzterem Fall die Matrixelemente des farbmagnetischen Ein-Gluon-Austauschs $\langle H^{OGE} \rangle$ gegenüber dem Energiegewinn durch das σ -Feld.

Für die *antiparallele* Konfiguration (Abbildung 5.17) ist die physikalische Situation die folgende: Man hat wieder keine langreichweitigen Anteil von V_{ad} , aber sobald die Confinement-Wand zusammenbricht, erhält man eine starke attraktive Kraft, die daher rührt, daß man sowohl durch die Verringerung

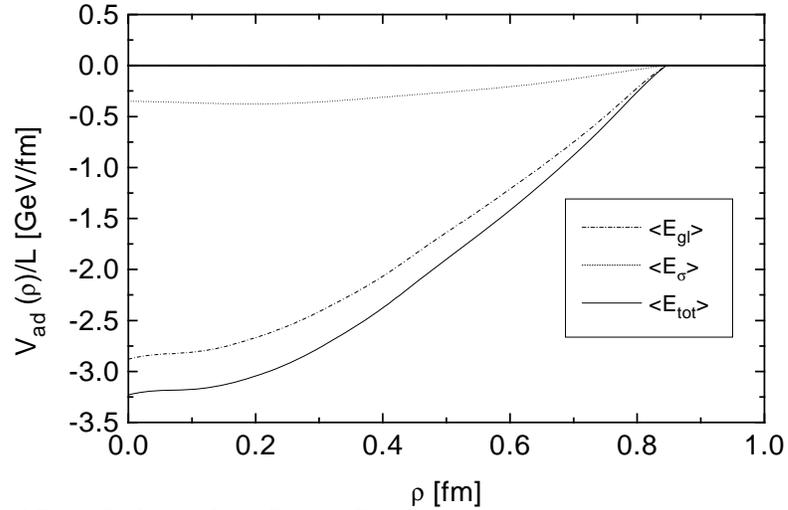


Abb. 5.17: Adiabatisches String-String Potential der antiparallelen Konfiguration. Die durchgezogene Linie zeigt die Summe der Beiträge des σ -Feldes und des farbelektrischen Feldes.

der Oberfläche des σ -Feldes als auch durch die Weghebung des farbelektrischen Feldes gemäß (5.34) Energie gewinnen kann. Weil die Farbladungen für $\rho \rightarrow 0$ sich neutralisieren, bricht sowohl das Farbfeld und dadurch auch das σ -Feld (die Flux-tube) zusammen.

Überträgt man die hier vorgestellte Wechselwirkung von Strings auf die Dynamik bei einer hochenergetischen Schwerionenreaktion, so wird das Bild von sich unabhängig bewegenden Strings unterstützt. Diese können dann auch unabhängig nach phänomenologischen Zerfallsregeln hadronisieren, was beispielsweise im Lund-Fragmentierungsmodell ausgenutzt wird [8]. In diesem und in weiteren Modellen geht man davon aus, daß es durch stochastische Prozesse (*random walk* in der Farb-SU(3)) ausschließlich zur parallelen Ausrichtung der Strings kommt [75]. Eine Weiterbehandlung des Zerfalls von antiparallelen Strings ist zur Zeit unbekannt, da unklar ist, wie man die Energie des Farbfeldes und des σ -Feldes beim Zusammenbruch des Strings zur Produktion neuer Teilchen verwendet.

5.4 Farbanregungen des Mesons

Während zur Berechnung der Stringeigenschaften und des String-String Wechselwirkungspotentials die Bewegung der Quarks fest vorgegeben wurde, beschreiben wir in diesem Abschnitt das vollständige dynamische Verhalten der Quarks, das durch die Zeitentwicklung der Phasenraumverteilungen $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ und $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ gegeben ist. Wir interessieren uns insbesondere für das Verhalten des Nukleons unter der Anregung der sogenannten *isovektori-*

ellen Mode.

Darunter versteht man einen angeregten Zustand, bei dem die beiden unterschiedlichen Quellen des Vektorfeldes gegenphasig entlang einer ausgezeichneten Achse schwingen. Diese Mode ist bereits eingehend bei Schwerionenreaktionen untersucht worden. Sie wird durch den Impulsübertrag des (stark lorentzkontrahierten) elektrischen Feldes auf die Protonen der Ionen verursacht, wodurch die Protonen zu Schwingungen relativ zu den Neutronen angeregt werden. Durch eine Analyse der Schwingungsfrequenzen kann man beispielsweise Rückschlüsse auf die Kompressibilität von Kernmaterie ziehen.

Wir simulieren den Impulsübertrag auf das $q\bar{q}$ -Paar des Mesons durch Addition bzw. Subtraktion eines festen Impulses p_z zur z -Komponente der Grundzustandsphasenraumverteilung (5.8):

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{p} + p_z \mathbf{e}_z) \quad (5.35)$$

$$\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p} - p_z \mathbf{e}_z) . \quad (5.36)$$

Die Anfangsbedingung der Zeitentwicklung sind daher zwei lokale Thomas-Fermi Verteilungen, die im Impulsraum einen mittleren Abstand von $2p_z$ haben und somit einen angeregten Nichtgleichgewichtszustand beschreiben. Die Anfangskonfiguration im Phasenraum ist in der linken Figur von Abbildung 5.18 für einen Wert des Boostimpulses von $p_z = 2 \text{ GeV}$ zu sehen, wobei zu beachten ist, daß dort die *Summe* von f und \bar{f} aufgetragen ist. Die weitere Zeitentwicklung erfolgt durch selbstkonsistente Bestimmung des farbelektrischen Feldes gemäß (5.22), des σ -Feldes gemäß (5.27) und der Quellen der Felder gemäß (4.55) und (4.56). Letztere werden durch ein Ensemble von Testteilchen dargestellt, wobei wir eine Anzahl von $N_T = 50000$ wählen.

Die Bewegung der Quarks kann man nun folgendermaßen beschreiben: Abhängig vom Anfangsimpuls bewegen sich die Quarks entlang der z -Achse und durch diese Separierung baut sich eine Kavität und darin ein farbelektrisches Feld auf. Dadurch verlieren die Quarks ihre kinetische Energie an das Farbfeld und an die Deformation des σ -Feldes. Wenn die kinetische Energie vollständig verbraucht ist, wird die Bewegung gestoppt und kehrt sich um. Die Verteilungen der Quarks durchdringen sich wieder am Ursprung und der beschriebene Prozeß wiederholt sich in der umgekehrten Richtung. Es kommt zu dem oben diskutierten isovektoriellen Schwingungszustand.

Handelte es sich bei den Quarkverteilungen um Punktladungen, so würde dieser Schwingungsvorgang unverändert und vor allem ungedämpft weiterlaufen. In unserem Fall mit ausgeschmierten Verteilungsfunktionen, die durch Testteilchen simuliert werden, tritt ein neuer Effekt auf, der durch die Selbstwechselwirkung der Quarks hervorgerufen wird. Die Bewegung der Testteilchen eines Quarks wird nicht nur durch die Testteilchen des anderen Quarks beeinflusst, sondern auch von den Testteilchen des eigenen Quarks, die die

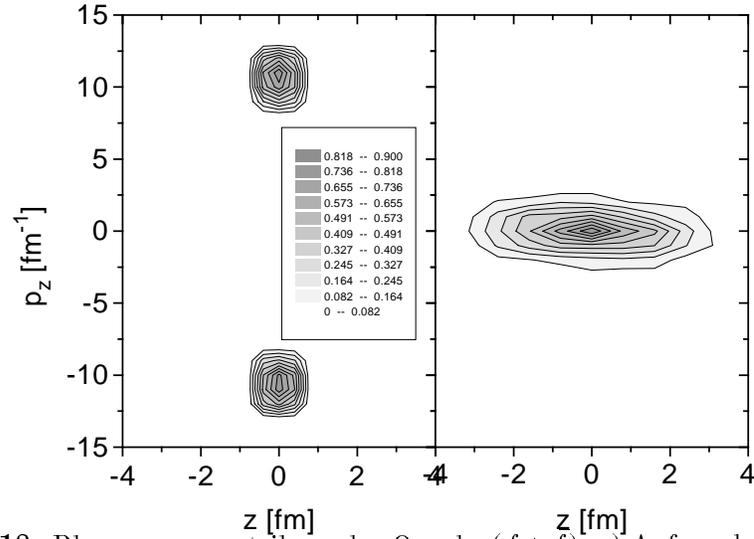


Abb. 5.18: Phasenraumverteilung der Quarks ($f + \bar{f}$). a) Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$ und b) der äquilibrierte Endzustand.

effektive Ladung abschirmen. So kommt es zu stark unterschiedlichen Farbkraften innerhalb einer Quarkverteilung, was auch bereits im Zusammenhang mit Abbildung 5.11 kurz diskutiert wurde, und eine schnelle Dispersion der Quarkverteilungen hervorruft. Dieser Effekt wird in unserem Fall von nur zwei wechselwirkenden physikalischen Teilchen dominant, kann jedoch für Vielteilchensysteme (z. B. Nukleonen bei Schwerionenkollisionen) vernachlässigt werden.

Im weiteren Verlauf der Reaktionsdynamik vergrößert sich die räumliche Ausdehnung der Ladungen innerhalb der Kavität stetig, bis es schließlich zur vollständigen Neutralisierung der Quarkverteilungen kommt. Diese Aussage wird unterstützt durch das zeitliche Verhalten der Energie des Farbfeldes E_{gl} , das in Abbildung 5.19 aufgetragen ist. Man erkennt die kontinuierliche Abnahme von E_{gl} bis ca. $80 \text{ fm}/c$, worauf das Farbfeld vollständig verschwindet. Diese Energie wird in kinetische Energie der Quarks umgewandelt und somit dazu verwendet, die Länge L der Kavität zu vergrößern,

$$L \equiv \iint z(f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) d^3x d^3p . \quad (5.37)$$

Das zeitliche Verhalten dieser Größe ist in Abbildung 5.20 dargestellt. Die Verteilungen der Quarks liegen daher im Endzustand wieder in einem lokal farbneutralen Gleichgewichtszustand in einer elongierten Kavität vor. Das Phasenraumbild dieses Endzustandes ist in der rechten Figur der Abbildung 5.18 zu sehen.

Wir sehen daher, daß die selbstkonsistente dynamische Bewegung von Quarkverteilungen innerhalb einer Flux-tube stets sehr schnell zu einem Übergang globaler Farbneutralität (Strings) zu lokaler Farbneutralität führt. Dieser Ef-

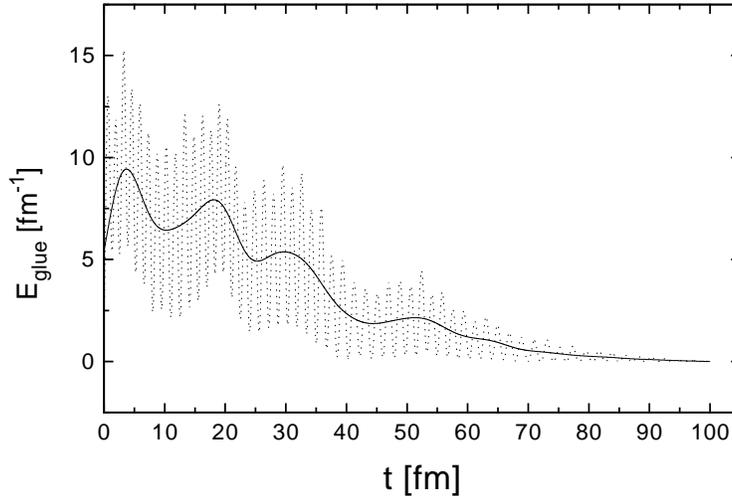


Abb. 5.19: Zeitentwicklung der Energie des Farbfeldes bis $100 \text{ fm}/c$ (gepunktete Linie). Für die durchgezogene Linie sind die Oszillationen herausgemittelt. Die Anregungsenergie beträgt 3 GeV .

fekt spielt, wie wir in den nächsten Abschnitten sehen werden, eine wichtige Rolle für die Dynamik des Hadronisierungsprozesses von Strings.

5.5 Die Hadronisierung von Strings

Nachdem wir nun in den letzten Abschnitten die Eigenschaften von Fluxtubes, insbesondere die Stringformierung und die Bewegung der Quarks innerhalb des Strings untersucht haben, widmen wir uns in diesem Abschnitt dem wichtigen Prozeß der Stringfragmentierung mittels Quark-Antiquark Paarproduktion. Da die Quarks eine geringe Current-Quarkmasse von $\approx 10 \text{ MeV}$ haben, kann die Energie des starken Farbfeldes des Strings zur zahlreichen Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren verwendet werden. Dadurch kommt es zu Abschirmungseffekten innerhalb des Strings, und dieser fragmentiert in (angeregte) Hadronen. Wir diskutieren zunächst die bisherigen, in der Literatur veröffentlichten Ergebnisse zu diesem Thema, um dann die Fragmentierung des Strings durch die Produktion von leichten (*up/down*-Quarks), sowie die Dissoziierung von schweren (*charm*-Quarks) Quarkonium Zuständen zu simulieren.

5.5.1 Paarproduktion in starken Farbfeldern

Erste Untersuchungen zur Paarproduktionsrate in starken Feldern gehen auf Schwinger [76] zurück. Er berechnete die Rate von e^+e^- -Paaren pro

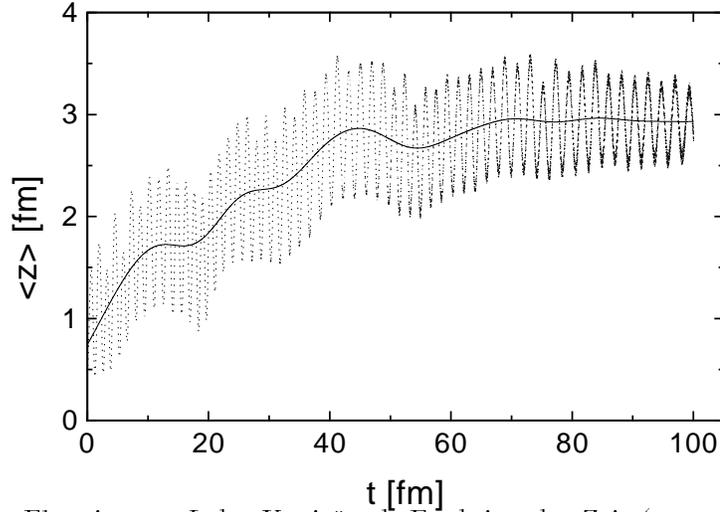


Abb. 5.20: Elongierung L der Kavität als Funktion der Zeit (gepunktete Linie). Für die durchgezogene Linie wurden die Oszillationen herausgemittelt. Die Anregungsenergie beträgt $3 GeV$.

Einheits-Volumen und -Zeit in einem homogenen und konstanten \mathbf{E} -Feld zu

$$\frac{dN}{dV dt} = \frac{E^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi n m_0^2/E}}{n^2}, \quad (5.38)$$

mit der Masse der Teilchen m_0 und der Stärke des Feldes $E = |\mathbf{E}|$. Eine wichtige Anwendung findet dieses Ergebnis in der Modellierung von hochenergetischen Schwerionenkollisionen. Dort glaubt man, daß die einzelnen Hadronen der Ionen durch den Austausch von Gluonen in der Reaktionszone eine nichtverschwindende Netto-Farbladung erhalten und sich somit zwischen den jeweiligen Reaktionspartnern eine Flux-tube bildet. In dieser Flux-tube existiert, wie wir in den vorangegangenen Abschnitten gesehen haben, ein konstantes Farbfeld, daß durch Produktion von Quark-Antiquark Paaren in weitere Hadronen zerfällt. Man kann aber trotzdem nicht einfach durch Ändern der Teilchenmasse und des Feldes die aus der QED erhaltene Rate (5.38) auf die QCD übertragen, und zwar aus folgenden Gründen:

- Die typischen Feldstärken in der QED sind weitaus größer als diejenigen, die durch die erzeugten e^+e^- -Paare hervorgerufen werden. Diese können somit als Perturbation des Systems behandelt werden. In der QCD ist dies nicht der Fall. Die Feldlinien in einer Flux-tube werden von einer (oder wenigen) Ladungen am Ende der Tube hervorgerufen und sind in dieser eingeschlossen, so daß man die Rückreaktion der produzierten Paare auf das 'äußere' Feld nicht vernachlässigen kann. Gerade diese Abschirmung der Felder durch die produzierten Ladungen ermöglicht erst den Zerfall der Flux-tube in Hadronen. Glenden-

ning und Matsui [77] berücksichtigen diesen Effekt und berechnen eine vollständig energieerhaltende Paarproduktionsrate:

$$\frac{dN}{dV dt} = \frac{(g_v E)^2}{64\pi^3} \sum_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4\pi n m_f^2 / (g_v E)}}{n^2}, \quad (5.39)$$

die sich zu (5.38) nur durch numerische Konstanten unterscheidet.

- Der Einfluß des transversalen Confinements auf die Paarproduktionsrate muß beachtet werden, da die transversale Masse $m_t = \sqrt{p_t^2 + m_f^2}$ wegen der Unschärferelation bei geringer Breite des Strings sehr groß werden kann. Die Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren wird daher energetisch unterdrückt. Für typische Stringradien von $\approx 0.5-1.0 fm$ reduziert sich $dN/(dV dt)$ um mehr als eine Größenordnung, wobei die relative Unterdrückung bei schweren Quarks (s,c) größer ist als bei leichten (u,d). Diese Untersuchungen wurden sowohl im Rahmen des MIT-Bagmodells [69, 78], als auch des Friedberg-Lee Modells [71] durchgeführt.
- Der Einfluß des longitudinalen Confinements auf die Paarproduktion kann ebenfalls nicht vernachlässigt werden. Dieser Effekt hat zur Folge, daß die Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren in der Stringformierungsphase stark unterdrückt ist [79, 80]. Wong et al. [81] leiten sogar eine minimale Stringlänge ab $L_{min} = 2m_t/\tau \approx 1 fm$, unter der keine Paarproduktion stattfindet. Dieses Ergebnis liefert aber andererseits ein Argument dafür, daß es überhaupt zur Formierung einer Flux-tube kommt, was die Grundannahme der meisten phänomenologischen Fragmentierungsmodelle ist, wie beispielsweise des Lund-Modells [8].

Die für diese Arbeit benötigte zeitabhängige Paarproduktionsrate für die dynamische Formierung von Flux-tubes im Rahmen des Friedberg-Lee Modells ist bis heute noch nicht berechnet worden.

Die beschriebenen Raten wurden in einigen einfachen dynamischen Simulationen verwendet, um die Neutralisierung des farbelektrischen Feldes und somit den Zerfall der Flux-tube zu beschreiben:

Kluger et al. [82] simulieren die Dynamik von e^+e^- -Paaren in einem 1+1-dimensionalen Fall mit longitudinal unendlicher Geometrie durch die Lösung einer Boltzmann-Gleichung ohne Stoßterm mit der zugehörigen semiklassischen Feldgleichung. Es werden ungedämpfte Plasmaoszillationen beobachtet.

Sailer et al. [79] bestimmen die typische Zerfallszeit eines Strings durch die stochastische Mittlung über ein Ensemble von N Strings gemäß $dN(t) = -\Lambda(t)N(t)dA$, wobei $\Lambda(t) = \pi R^2 W(t)$ die zeitabhängige Zerfallskonstante mit der Paarproduktionsrate $W(t)$ ist. $dA = 2t dt$ beschreibt die invariante Raum-Zeit Fläche, die von einer Flux-Tube eingenommen wird. Die Werte

der Zerfallszeiten liegen zwischen $1 fm/c < \tau_{1/2} < 2 fm/c$.

Wilets et al. [72] beschreiben die Neutralisierung einer MIT-Flux-tube mit Hilfe einer Boltzmann-Gleichung mit Stoßterm, wobei die Paarproduktionsrate von Pavel und Brink [69] verwendet wird. Die Flux-tube erfährt gedämpfte radiale Oszillationen durch das $q\bar{q}$ -Plasma, bis das farbelektrische Feld verschwindet, wodurch die Flux-tube in eine Plasma-tube übergeht. Die Neutralisierungszeiten liegen zwischen $1 fm/c < \tau_{1/2} < 10 fm/c$ und sind sehr sensitiv auf die Parameter des phänomenologischen $q\bar{q}$ -Stoßterms.

Da die numerischen Werte der Paarproduktionsraten ebenfalls sehr sensitiv auf die transversale Ausdehnung der Strings ist, die in dem MIT-Modell stets vorgegeben werden muß, sind dies auch die Neutralisierungszeiten. Ein weiterer Nachteil des MIT-Bagmodells ist die bereits angesprochene statische Randbedingung, die es unmöglich macht die eigentliche Disintegration der Flux-tube in (angeregte) Hadronen zu ermöglichen. Wir werden uns in den nächsten beiden Abschnitten mit der dynamischen Simulation genau dieses Vorganges beschäftigen.

5.5.2 Die Dissoziation des J/ψ

Seit der Originalarbeit von Matsui und Satz [61], die die Unterdrückung der J/ψ -Mesonen als Signatur für das Quark-Gluon-Plasma vorschlugen, sind experimentelle Gruppen (NA38-Kollaboration) intensiv auf der Suche nach diesem Signal [83]. Es handelt sich dabei um den Effekt, daß sich ein gebundener ($c\bar{c}$)-Zustand (ein J/ψ) durch die Debye-Abschirmung der Farbkraft nicht bilden kann. Daher liegen aus kombinatorischen Gründen im Endzustand der Kollision, also nach der Hadronisierung, weitaus weniger J/ψ -Mesonen als bei einer rein hadronisch verlaufenden Reaktion vor. In der Tat hat man in den letzten Jahren solche Signale in Reaktionen mit leichten Projektilen, wie O+Cu, O+U und S+U gemessen. Jedoch können diese Ergebnisse mittlerweile auch alternativ erklärt werden, und zwar entweder durch hadronische Endzustandswechselwirkungen, wie z. B. $J/\psi + N \rightarrow \Lambda_c + \bar{D}$ oder durch andere exotherme Reaktionen, wie z. B. $J/\psi + \rho \rightarrow D + \bar{D}$, die durch sogenannte 'comovers' hervorgerufen werden [84, 85]. In jedem Fall benötigt man allerdings eine intermediäre Reaktionszone mit sehr hoher (Energie-)Dichte, um die experimentellen Daten zu erklären.

In den meisten mikroskopischen Modellen, die die Dynamik der Reaktionszone simulieren, nimmt man an, daß die Reaktion mit der Produktion von Strings, die im weiteren Verlauf in sekundäre Hadronen (oder Hadronresonanzen) zerfallen, beginnt. Wir interessieren uns nun für das dynamische Verhalten des J/ψ -Mesons, das beispielsweise in einer hochenergetischen Nukleon-Nukleon-Kollision zu Beginn der Reaktion erzeugt wurde und schließlich in den Bereich der Strings eindringt. Dieser Vorgang ist sehr wahrscheinlich, da

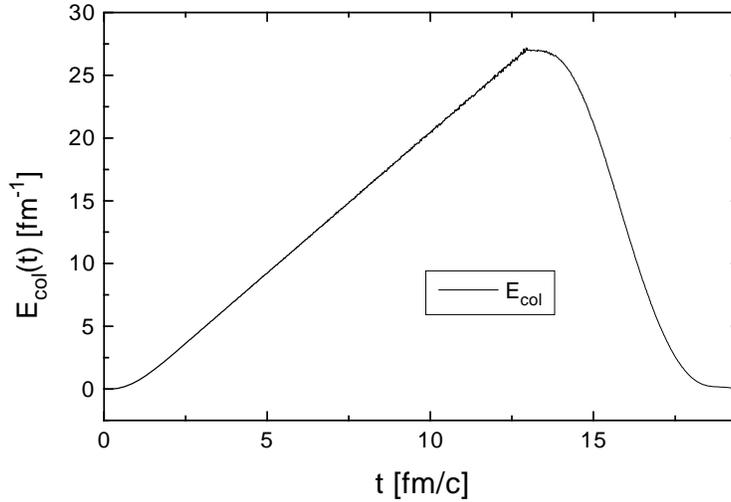


Abb. 5.21: Die Zeitabhängigkeit der Energie des farbelektrischen Feldes innerhalb des Strings. Bis $t = 13 \text{ fm}/c$ wird der String aufgebaut und anschließend das $c\bar{c}$ -Paar bei $z = 0$ eingesetzt. Die nahezu lineare Abnahme der Energie zeigt den Abschirmeffekt des $c\bar{c}$ -Paares.

die Dichte der Strings in den obengenannten Systemen so groß ist, daß sie fast die gesamte Fläche der Reaktionszone abdecken [86].

Zu diesem Zweck verwenden wir die mesonische Solitonlösung, die wir in Abschnitt 5.1 konstruiert haben und erzeugen mit dem in Abschnitt 5.2 erläuterten Verfahren durch adiabatische Separierung des Quark-Antiquark Paares eine Flux-tube von 8 fm Länge innerhalb der Zeit $t = 13 \text{ fm}/c$ (Abbildung 5.22). Bedingt durch die numerische Restriktion der Poissongleichung für das Farbfeld auf zwei Dimensionen sind wir auf zylindersymmetrische Konfigurationen angewiesen. Daher können wir das transversale Durchdringen des Strings nicht vollständig simulieren, sondern wir erzeugen das J/ψ -Meson bereits auf der Symmetrieachse des Strings bei $z = 0$ mit verschwindendem Gesamtimpuls. Die Grundzustandseigenschaften des J/ψ entnehmen wir aus Abschnitt 5.1.1. Mit dieser Anfangskonfiguration untersuchen wir die vollständige dynamische Zeitentwicklung der Bewegung des J/ψ -Mesons in diesem String. Wie in den vorangegangenen Abschnitten werden die σ -Feld- (5.27), die Poisson- (5.22) und die Transport-Gleichungen (4.52) und (4.53) selbstkonsistent gelöst, wobei die Phasenraumverteilungen wieder durch ein Testteilchenensemble ($N_T = 50000$) dargestellt werden. Die Freiheitsgrade der leichten Quarks an den Endkappen des Strings betrachten wir als eingefroren. (Im nächsten Abschnitt werden wir diese Annahme aufgeben.)

In Abbildung 5.21 ist die Zeitabhängigkeit der farbelektrischen Energie aufgetragen. Wie man erkennt, nimmt diese nach Erzeugung des J/ψ -Mesons bei $t = 13 \text{ fm}/c$ näherungsweise linear ab. Der Grund dafür ist, daß das c -Quark durch die Farbkraft zur Endkappe des leichten Antiquarks gezogen

wird und umgekehrt das \bar{c} -Quark zur Endkappe des leichten Quarks. Diese Bewegung ist in Abbildung 5.22 zu vier verschiedenen Zeitschritten dargestellt. Durch die Trennung des charm-Quark Paares heben sich im Bereich zwischen dem c - und \bar{c} -Quark die Farbfelder der Quarks an den Endkappen und der $c\bar{c}$ -Quarks exakt weg (Screening). Die Feldenergie geht in die kinetische Energie der schweren Quarks über und diese werden in sehr kurzer Zeit $\approx 0.5 fm/c$ auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigt, wodurch der nahezu lineare Abfall der Feldenergie zustande kommt.

Im weiteren Verlauf der Zeitentwicklung verbreitert sich die anfänglich schmale Verteilung der schweren Quarks, wie wir in der zweiten und dritten Reihe von Abbildung 5.22 sehen. Schließlich erreichen die charm Quarks dieselbe Breite wie die als statisch angenommenen leichten Quarks an den Endkappen des Strings, wenn sie diese erreichen. Dort wird die Bewegung der schweren Quarks eingefroren, da wir uns hier für die Anregungszustände der erzeugten $D\bar{D}$ -Mesonen nicht weiter interessieren, sondern lediglich das weitere zeitliche Verhalten des σ -Feldes, das letztendlich den dynamischen Einschluß der Quarks in die (angeregten) Mesonen verursachen soll, beschreiben wollen.

In den Abbildungen 5.22 und 5.23 ist das zeitliche Verhalten des σ -Feldes simultan zur Quarkbewegung dargestellt. Man erkennt in der oberen Reihe den Anfangszustand mit dem durch die adiabatische Quarkbewegung statischen String, in den zur Zeit $t = 13 fm/c$ das schwere Charmoniumpaar eingesetzt wird. Dadurch vertieft sich das σ -Feld im Koordinatenursprung erheblich, was wir auch gemäß der statischen J/ψ -Konfiguration erwarten würden (Abbildung 5.5). Bei der darauffolgenden Trennung der Quarks finden wir, daß das σ -Feld etwas träger auf die Abschirmung reagiert als das instantane Farbfeld. So hat sich zur Zeit $t = 17.4 fm/c$ die Flux-tube zwar bereits eingeschnürt, aber noch nicht abgetrennt. Erst bei $t = 18.6 fm/c$, also ca. $3 - 4 fm/c$ später als das Farbfeld, kommt es zu einem Aufbruch des Strings.

Diese Tatsache wird begründet durch den Verlauf des nichtlinearen Selbstwechselwirkungspotentials $U(\sigma)$, das im Bereich des perturbativen Vakuums $\sigma \approx 0$ sehr flach ist und somit einen schnellen Übergang zum nichtperturbativen Vakuum $\sigma = \sigma_{vac}$ verhindert. Ist der nichtperturbative Vakuumwert σ_{vac} schließlich erreicht, so beginnt das σ -Feld um diesen Wert zu oszillieren, was in der zweiten und dritten Reihe von Abbildung 5.23 zu sehen ist. In dieser Darstellung wurde jeweils ein Zeitpunkt gewählt, an dem das σ -Feld über den Vakuumwert schwingt, sowie darunter. Diese Oszillationen beschreiben daher einen angeregten Vakuumzustand. Da es in unserem Modell in der hier vorgestellten Form außer einer numerischen Dämpfung, die durch Schmierungsalgorithmen hervorgerufen wird [20], keinen direkten Dämpfungsmechanismus gibt, können diese Oszillationen nur durch transversale Ausdehnung (Abstrahlung) gedämpft werden.

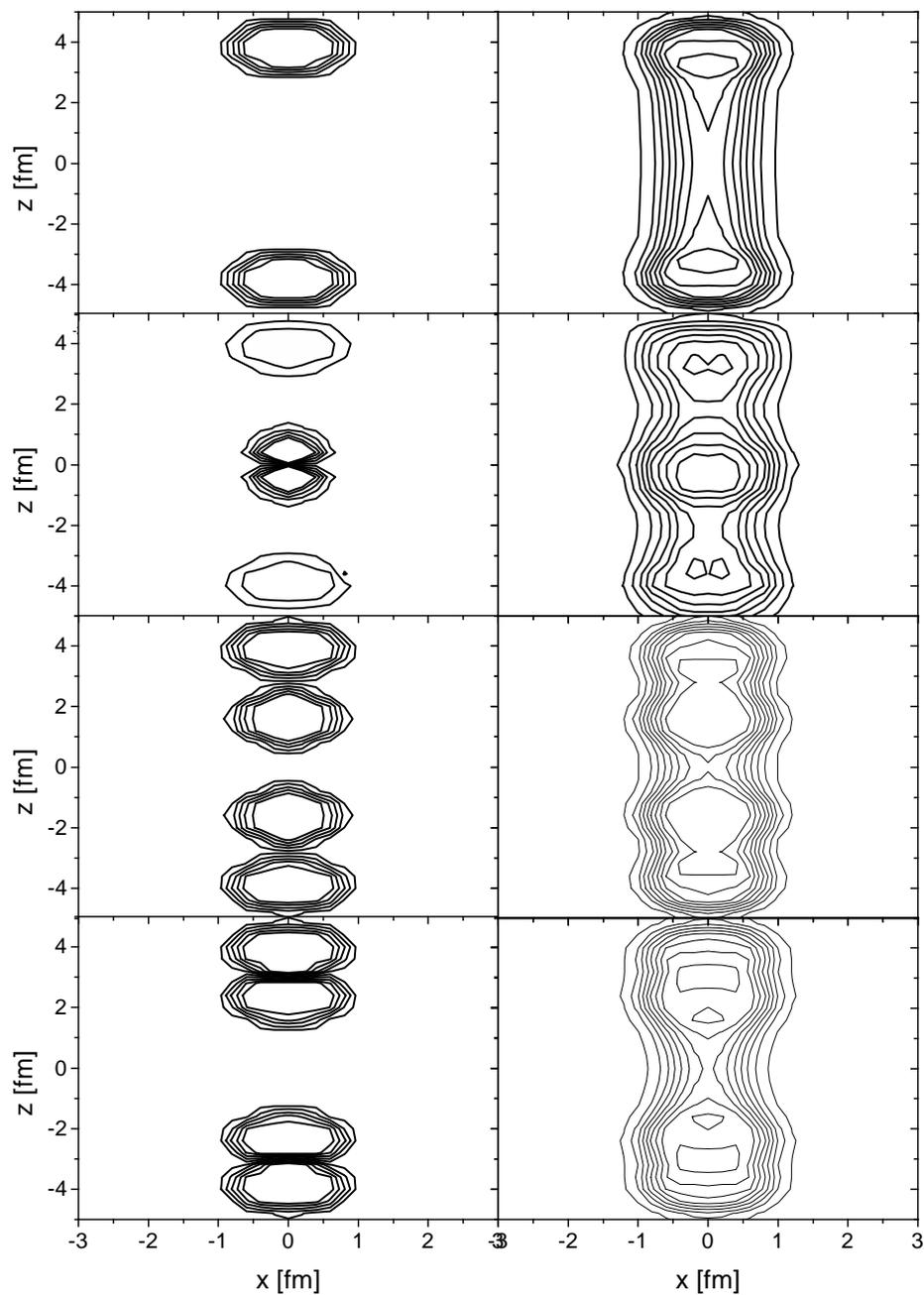


Abb. 5.22: Die Abbildung zeigt die Quarkverteilung und das σ -Feld zu verschiedenen Zeitschritten $t = 12.8, 13.6, 16.2, 17.4 \text{ fm}/c$. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.35 fm^{-3} bis 0.35 fm^{-3} für ρ (von -1 fm^{-3} bis 1 fm^{-3} in der zweiten Figur) und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

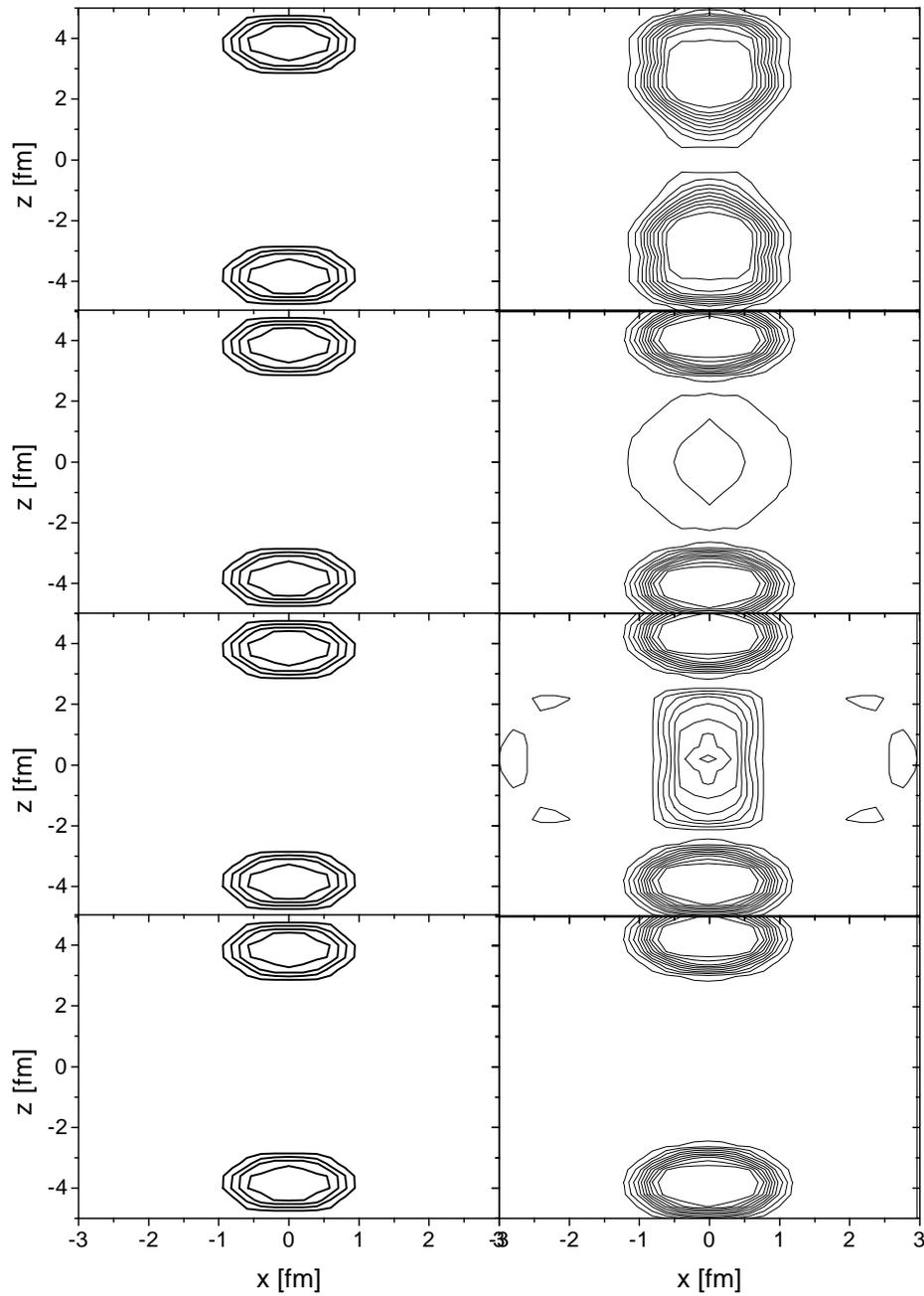


Abb. 5.23: Die Abbildung zeigt die (vektorielle) Quarkverteilung und das σ -Feld zu verschiedenen Zeitschritten $t = 18.6, 23.2, 26.8, 40.0 \text{ fm}/c$. Die äquidistanten Konturlinien laufen von 0.00 fm^{-3} bis 0.70 fm^{-3} für ρ und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

Der zeitliche Verlauf der Abstrahlung von σ -Wellen in das umgebende nichtperturbative Vakuum wird bestimmt durch die zweite Ableitung von $U(\sigma)$ an $\sigma = \sigma_{vac}$, da man in guter Näherung das Potential bei σ_{vac} durch $U(\sigma) \sim U''(\sigma_{vac})(\sigma - \sigma_{vac})^2$ darstellen kann. Diese Größe fungiert daher als quadratische (Glueball-)Masse

$$U''(\sigma_{vac}) = m_{Glueball}^2 \quad (5.40)$$

des σ -Feldes und ist ein Maß für die Trägheit desselben. Der in unserem Fall verwendete Wert ist $m_{Glueball} = 1.045 \text{ GeV}$ (siehe Tabelle 5.2). Die typischen Zeitskalen τ für die Ausbreitung und Dämpfung der σ -Wellen betragen zwischen $20 \text{ fm}/c < \tau < 30 \text{ fm}/c$. Vergleicht man diese Zeiten mit typischen Werten von $\approx 1 \text{ fm}/c$, die in String-Fragmentierungsmodellen wie z. B. dem URQMD- [55] oder dem HSD-Modell [87] verwendet werden um die verschiedenen Hadronenspektren zu reproduzieren, so sehen wir, daß das Modell dieser schnellen Reaktionsdynamik des Stringzerfalls nicht gerecht wird. Nichtsdestotrotz schließen wir aus der Simulation, daß ein lokalisierter $c\bar{c}$ -Zustand instantan in einem starken Farbfeld separiert wird und somit zur Produktion von $D\bar{D}$ -Mesonen (oder Λ_c -Baryonen) führt.

Die Frage, ob eine Dissoziierung dieses Zustandes ebenso stattfindet, wenn dieser einen Transversalimpuls p_t hat, kann folgendermaßen abgeschätzt werden: Die Zeit zum Durchdringen der Flux-tube kann man durch

$$\Delta t \approx \frac{2\rho_{rms}}{v_t^{J/\psi}} = 2\rho_{rms} \frac{\sqrt{p_t^2 + m_{J/\psi}^2}}{|p_t|} \approx 2 - 4 \text{ fm}/c \quad (5.41)$$

bestimmen, wobei mittlere bis große Transversalimpulse von $1 - 5 \text{ GeV}/c$ angenommen werden und eine transversale Ausdehnung des Strings von $\rho_{rms} = 0.8 \text{ fm}$. Bei einer mittlere farbelektrischen Feldstärke von $\langle |\mathbf{E}| \rangle$ von 1.61 fm^{-2} erfahren die Quarks des J/ψ eine longitudinale Impulsänderung von

$$|\Delta p_z| \approx g_v |E_z| \Delta t \approx 3 - 6 \text{ GeV}/c, \quad (5.42)$$

wobei $\alpha_s = g_v^2/(4\pi) = 1.92$ ist. Eine solche Impulsänderung, die einer Änderung der kinetischen Energie der Quarks von $3 - 6 \text{ GeV}$ entspricht, ist sicherlich ausreichend, um den mit ca. 800 MeV in einem Coulombpotential gebundenen J/ψ -Zustand zu dissoziieren. Allerdings muß man dabei bedenken, daß die Bindung des J/ψ -Grundzustandes in unserem Modell ausschließlich durch das skalare Feld vermittelt wird, da die Coulomb Wechselwirkung für Farbsingletts verschwindet. Daraus ergibt sich eine geringere Bindungsenergie, die man durch $g_0\sigma_{vac} \approx 200 - 300 \text{ MeV}$ abschätzen kann. Das führt zu einer leichteren Dissoziierung des J/ψ . Die bestimmten Energieverhältnisse geben aber Anlaß zu der Vermutung, daß auch bei quantenmechanisch exakter Behandlung des Problems das Ergebnis unverändert bleibt.

In den nächsten Abschnitten werden wir den vollständigen dynamischen Prozeß der Stringformierung und des Stringzerfalls untersuchen, wobei in diesem Fall die Endkappen sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, so daß der Stringzerfall durch vielfache Produktion von leichten $q\bar{q}$ -Paaren geschieht.

5.5.3 Das Lund-Modell

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt an einem vereinfachten Beispiel eines statischen Strings mit festgehaltenen Quarkverteilungen an den Endkappen gesehen, wie dieser durch Produktion eines $c\bar{c}$ -Paars in Mesonen aufbricht. Der vollständige Prozeß der Stringformierung und des Stringzerfalls ist jedoch weitaus komplexer, so daß vor allem die Bestimmung einer exakten zeitabhängigen Paarproduktionsrate im Rahmen des Friedberg-Lee Modells bisher nicht durchgeführt werden konnte (siehe Diskussion in Kapitel 5.5.1). Um aber einen qualitativen Eindruck vom zeitlichen Verlauf der Reaktionsdynamik zu erhalten, stellen wir im folgenden ein einfaches, phänomenologisches Modell der Stringfragmentierung vor; das sogenannte Lund-Modell [88]. Wir verwenden anschließend diese einfache Modellierung der Paarproduktion, um die Raum-Zeit Dynamik des Stringzerfalls mit dem Friedberg-Lee Modell zu beschreiben.

Im Lund-Modell nimmt man an, daß die Quarks masselos sind und sich somit stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Ebenso sollen die Endkappen des Strings (das den String erzeugende $Q\bar{Q}$ -Paar) mit c propagieren. Daher wird zur vollständigen Beschreibung eines solchen Systems lediglich eine 1+1-dimensionale Raum-Zeit Geometrie benötigt. Der Grund dafür ist, daß es kausal unmöglich ist, einen physikalischen Fluß von Teilchen zu erzeugen, der sich auf die Endkappen des Strings zubewegt. Eine weitere Annahme ist, daß die Farbkräfte innerhalb des Strings einem linearen Kraftgesetz $V_{q\bar{q}} = \tau|x_q - x_{\bar{q}}|$ folgen, was eine gültige Annahme ist, wie unsere bisherigen Untersuchungen gezeigt haben. Unter diesen Prämissen kann man zeigen, daß sich $q\bar{q}$ -Paare innerhalb des Strings sogenannte 'Yo-Yo'-Bewegungen ausführen (siehe Abbildung 5.24). Diese Moden sind beispielsweise für ein reines Zweiteilchensystem Lösungen der Bewegungsgleichungen des Hamiltonoperators

$$H = |p_1 - p_2| + \tau|x_1 - x_2|. \quad (5.43)$$

Wir betrachten nun die einfachsten Raum-Zeit Diagramme in diesem Modell. In Abbildung 5.24 a) findet die Produktion eines $q\bar{q}$ -Paars bei $x = 0$ statt. Die entstehenden angeregten Mesonen propagieren symmetrisch entlang der x-Achse, wobei die schattierte Fläche die Raumbereiche markiert, in der das Farbfeld noch existiert. Abbildung 5.24 b) zeigt die symmetrische Produktion zweier $q\bar{q}$ -Paare bei $x = \pm x_0$, wobei wieder die symmetrisch auf dem Lichtkegel propagierenden Mesonen entstehen und zusätzlich ein angeregtes

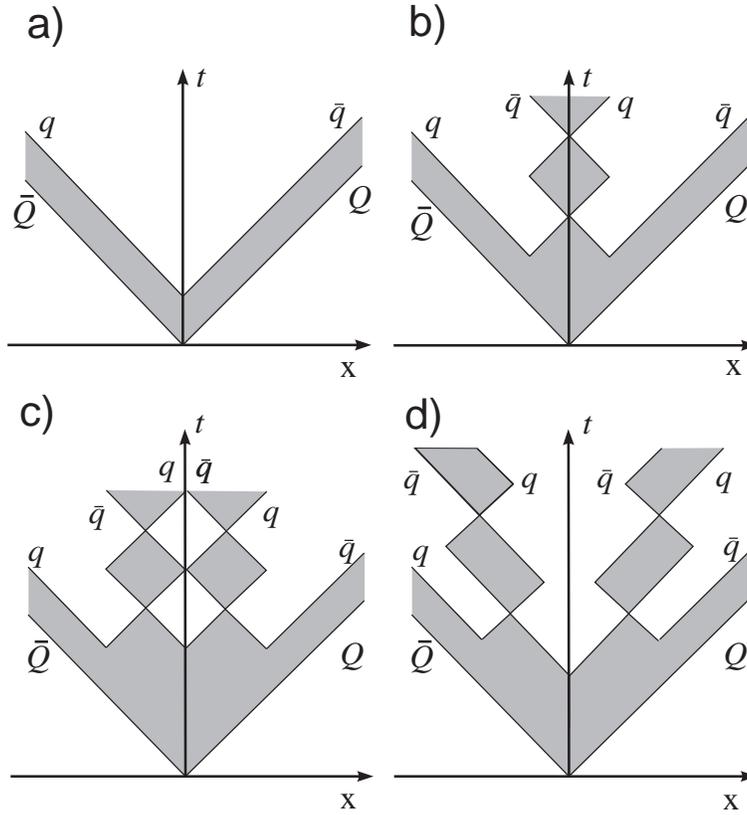


Abb. 5.24: Raum-Zeit-Darstellung der einfachsten Lund-Diagramme.

Meson, das eine Yo-Yo-Bewegung um $x = 0$ mit verschwindendem Gesamtimpuls beschreibt. Der symmetrische Aufbruch des Strings bei $x = \pm x_0$ und $x = 0$ zur gleichen Zeit $t = t_0$ wird in Abbildung 5.24 c) beschrieben. Neben den zwei äußeren Mesonen entstehen nun zwei parallel propagierende Mesonen, die jeweils einen verschwindenden Gesamtimpuls haben. Diese Situation ändert sich, falls man das $q\bar{q}$ -Paar bei $x = 0$ etwas früher als die anderen beiden Paare produziert. Wir sehen in Abbildung 5.24 d), daß die Bewegung immer noch symmetrisch verläuft, die beiden mittleren Mesonen allerdings einen nichtverschwindenden Relativimpuls besitzen.

Aufschluß über den Zusammenhang zwischen den Aufbruchpunkten und der Impulsverteilung im Endzustand der Reaktion erhält man durch Betrachtung der Energiereaktionen der produzierten Quarkpaare, die wir im folgenden durch $q_i\bar{q}_i$ indizieren. Die Energie und der Impuls des Hadrons i im Endzustand, das aus den Konstituenten $(q_{i-1}\bar{q}_i)$ besteht, ist durch

$$E_i = \tau(x_{i-1} - x_i) \quad \text{und} \quad p_i = \tau(t_{i-1} - t_i) \quad (5.44)$$

gegeben. Die Größen (x_i, t_i) sind die Raum-Zeit Aufbruchpunkte des Paares $(q_i\bar{q}_i)$. Der 'Zweier-Impuls' p^μ des Hadrons ist daher durch den Schritt vom

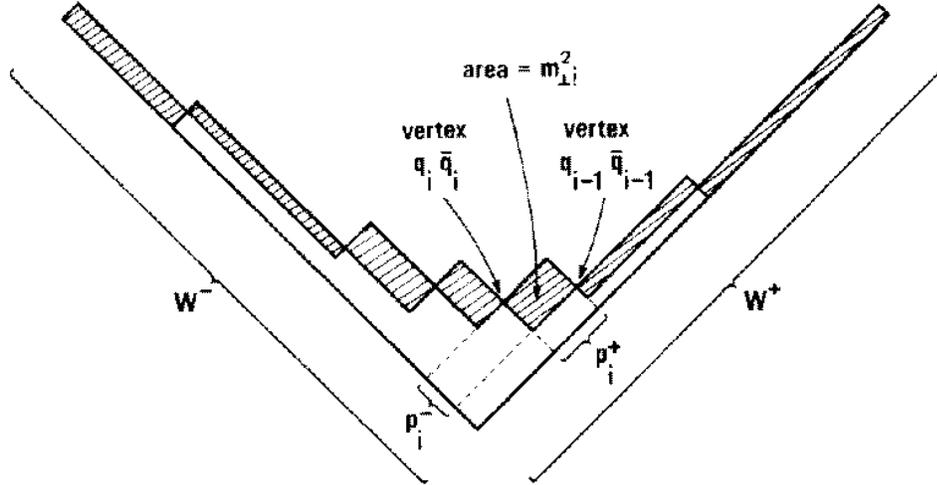


Abb. 5.25: Energie-Impulsdarstellung des stochastischen Aufbruchschemas.

Raum-Zeit Punkt i zum Raum-Zeit Punkt $i - 1$ gegeben:

$$p_i^\mu = \tau(x_{i-1}^\mu - x_i^\mu) \equiv \tau \Delta x_i^\mu . \quad (5.45)$$

Der Aufbruch des Strings kann somit durch eine Folge von Schritten repräsentiert werden, wobei in jedem Schritt die Bedingung

$$p_i^\mu p_{i\mu} = -\tau^2 \Delta x_i^\mu \Delta x_{i\mu} = m_i^2 \quad (5.46)$$

erfüllt ist. m_i ist die invariante Masse des Hadrons i , die in Abbildung 5.25 durch die schraffierten Flächen gekennzeichnet ist.

Die Details des numerischen Prozesses im Lund-Modell, das heißt die Wahl der Aufbruchpunkte und somit auch der Massen der Endzustandshadronen geschieht nach einem stochastischem Schema. Sind

$$x_i^+ = t_i + x_i \quad , \quad x_i^- = t_i - x_i \quad (5.47)$$

$$p_i^+ = E_i + p_i \quad , \quad p_i^- = E_i - p_i \quad (5.48)$$

die Lichtkegelkoordinaten der Quarkpaare, so findet der Schritt in die (+)-Richtung vom Punkt $i - 1$ zum Punkt i mit einer Wahrscheinlichkeit z'_i statt:

$$\Delta x_i^+ = z'_i x_{i-1}^+ . \quad (5.49)$$

Der Schritt in die (-)-Richtung wird dann durch die Hadronenmasse m_i (5.46) festgelegt:

$$\Delta x_i^- = \frac{m_i^2}{\tau^2} \Delta x_i^+ . \quad (5.50)$$

Der Zerfall eines Strings in Hadronen erfolgt daher nach der Rekursionsformel

$$x_i^+ = (1 - z'_i)x_{i-1}^+ \quad (5.51)$$

$$x_i^- = x_{i-1}^- + \frac{m_i^2}{\tau^2} \frac{1 - z'_i}{z'_i} \frac{1}{x_i^+} \quad (5.52)$$

zusammen mit der Randbedingung

$$x_0^+ = (E + p)/\tau \quad , \quad x_0^- = 0 \quad (5.53)$$

zu Beginn der Fragmentierung. Die z'_i unterliegen nur im letzten Fragmentierungsschritt j der Bedingung, daß

$$x_j^- = (E - p)/\tau \quad , \quad x_j^+ = 0 \quad (5.54)$$

Sie sind ansonsten frei wählbar (zwischen 0 und 1). Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Aufbruch des Strings mit z'_i erfolgt, ist durch die *Fragmentierungsfunktion* gegeben:

$$f(z) = N z^{\alpha-1} \left(\frac{1-z}{z} \right)^\beta \exp(-b m_\perp^2 / z) \quad (5.55)$$

Diese Funktion wird durch die drei Parameter α, β, b , die transversale Masse der produzierten Hadronen m_\perp und den Normierungsfaktor N bestimmt, die an die Hadronenspektren von hochenergetischen e^+e^- -Kollisionen gefittet werden. Der Erfolg dieses Stringfragmentierungsmodells manifestiert sich in der Tatsache, daß man mit den relativ wenigen Modellparametern auch sehr gut die Hadronenspektren von Hadron-Hadron- bzw. Schwerionen-Kollisionen beschreiben kann. Allerdings werden keine Aussagen über die raum-zeitliche Entwicklung der Schwerionenreaktion gemacht, sondern man geht von einer Stringkonfiguration mit vorgegebener Gesamtenergie aus und trifft Aussagen über die Impulsverteilung der aus diesem String erzeugten Hadronen. Somit werden weder Aussagen über den Beginn der Reaktion gemacht (Stringformierungsphase), noch über Endzustandswechselwirkungen der Hadronen.

5.5.4 Die Transportdynamik

Wir werden daher im folgenden eine Raum-Zeitentwicklung für die in der Abbildung 5.24 dargestellten Diagramme im Rahmen unseres Modells geben. Die Vorgehensweise verläuft analog zu den bisherigen dynamischen Simulationen. Wir stellen die Verteilungen der produzierten Quarks und Antiquarks (q und \bar{q}) jeweils durch ein Testteilchenensemble mit $N_T = 50000$ dar. Die einzelnen Testteilchen folgen den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen (4.52)

und (4.53). Die Verteilungen des den String erzeugenden $Q\bar{Q}$ -Paares propagieren mit $\pm c$ entlang der z -Achse, wobei die Form der beiden Verteilungen festgehalten wird. Die skalare Dichte ρ_s und die Ladungsdichte ρ werden durch die Summe über alle vorhandenen Quark-Antiquark Paare berechnet und dienen als Quellen für das σ -Feld gemäß (5.27) und das farbelektrische Feld gemäß (5.22). Die Felder werden mit denselben Techniken berechnet, die auch in den vorangegangenen Abschnitten verwendet wurden.

Wir beginnen mit der Raum-Zeit Darstellung des Lund-Diagramms 5.24 a). Der Zeitpunkt t_0 , an dem das $q\bar{q}$ -Paar produziert wird, ist durch [88]

$$t^2 - z^2 = 2m^2/\tau^2 \quad (5.56)$$

gegeben. Findet die Produktion bei $z = 0$ statt und sollen die Hadronen im Endzustand eine Masse von $1 - 2 \text{ GeV}$ haben, so legen wir den Aufbruchzeitpunkt bei $t = 2 \text{ fm}/c$ fest. Die Abbildung 5.26 zeigt die zeitliche Entwicklung der Ladungsdichte ρ der Quarks, der Energiedichte ϵ des Farbfeldes, sowie die des σ -Feldes. Man erkennt, wie sich zwischen dem $Q\bar{Q}$ -Paar eine Flux-tube aufbaut, in die nach $2.0 \text{ fm}/c$ ein $q\bar{q}$ -Paar eingestreut wird. Durch die Kraft des farbelektrischen Feldes werden die Quarks instantan auseinandergezogen und propagieren ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit den Quarks an den Endkappen hinterher, also $v_q = -c$ und $v_{\bar{q}} = c$ ist. Dadurch wird das Feld im Bereich zwischen dem $q\bar{q}$ -Paar vollständig abgeschirmt und der String bricht an dieser Stelle auf. Diesen Aufbruch kann man sowohl an der verschwindenden Energiedichte des Farbfeldes im Koordinatenursprung, als auch an der Rückkehr des σ -Feldes zum nichtperturbativen Vakuumwert σ_{vac} erkennen kann. Wir stellen weiterhin fest, daß die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Oszillationen des σ -Feldes auch in diesem, sich dynamisch entwickelnden Szenario stattfinden, wenn auch mit weitaus geringerer Amplitude, wie man zu den Zeitpunkten $t = 3.4 \text{ fm}/c$ und $t = 7.0 \text{ fm}/c$ sehen kann. In der unteren Abbildung erkennen wir wieder die in Abschnitt 5.4 diskutierte Dispersion der Verteilungen von q und \bar{q} . Der hier beschriebene einfache Aufbruch eines Strings verläuft ansonsten vollkommen analog zu dem entsprechenden Raum-Zeit Diagramm des Lund-Modells, das im Endzustand die freie Propagation der gebildeten Mesonen entlang des Lichtkegels darstellt.

Der Aufbruch des Strings durch die gleichzeitige und symmetrische Produktion zweier $q\bar{q}$ -Paare bei $z = \pm z_0$ ist in Abbildung 5.27 gezeigt. In der oberen Figur erkennt man die bereits aufgebaute Flux-tube mit einer Länge von 3.8 fm , in die kurze Zeit später beide $q\bar{q}$ -Paare bei $z = \pm 1.5 \text{ fm}$ eingesetzt werden. Die Quarks separieren sich wieder, wodurch eine spontane Abschirmung des Farbfeldes hervorgerufen wird, was in der zweiten Figur zu erkennen ist. Das σ -Feld beginnt ebenfalls, mit etwas Verzögerung, sich einzuschnüren. In der dritten Figur sehen wir, wie sich das $q\bar{q}$ -Paar in der Mitte

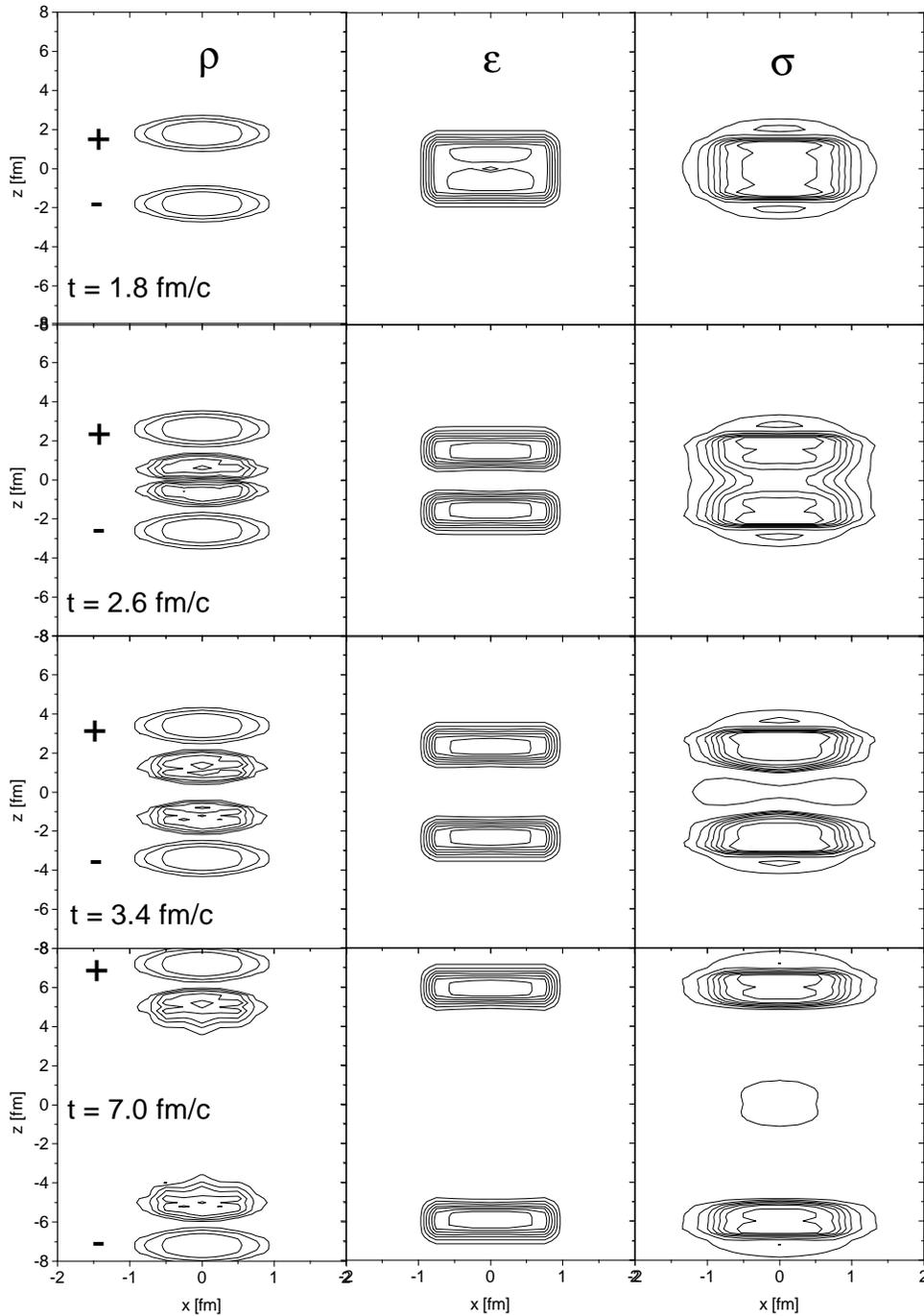


Abb. 5.26: Die Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten der Ladungsdichte ρ , der Energiedichte des Farbfeldes ϵ , sowie des σ -Feldes für den Aufbruch eines Strings durch Produktion eines $q\bar{q}$ -Paares. Es wurde die vollständige Dynamik (VD) des Transportmodells verwendet. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} für ρ , von 0.0 fm^{-4} bis 4.0 fm^{-4} für ϵ und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

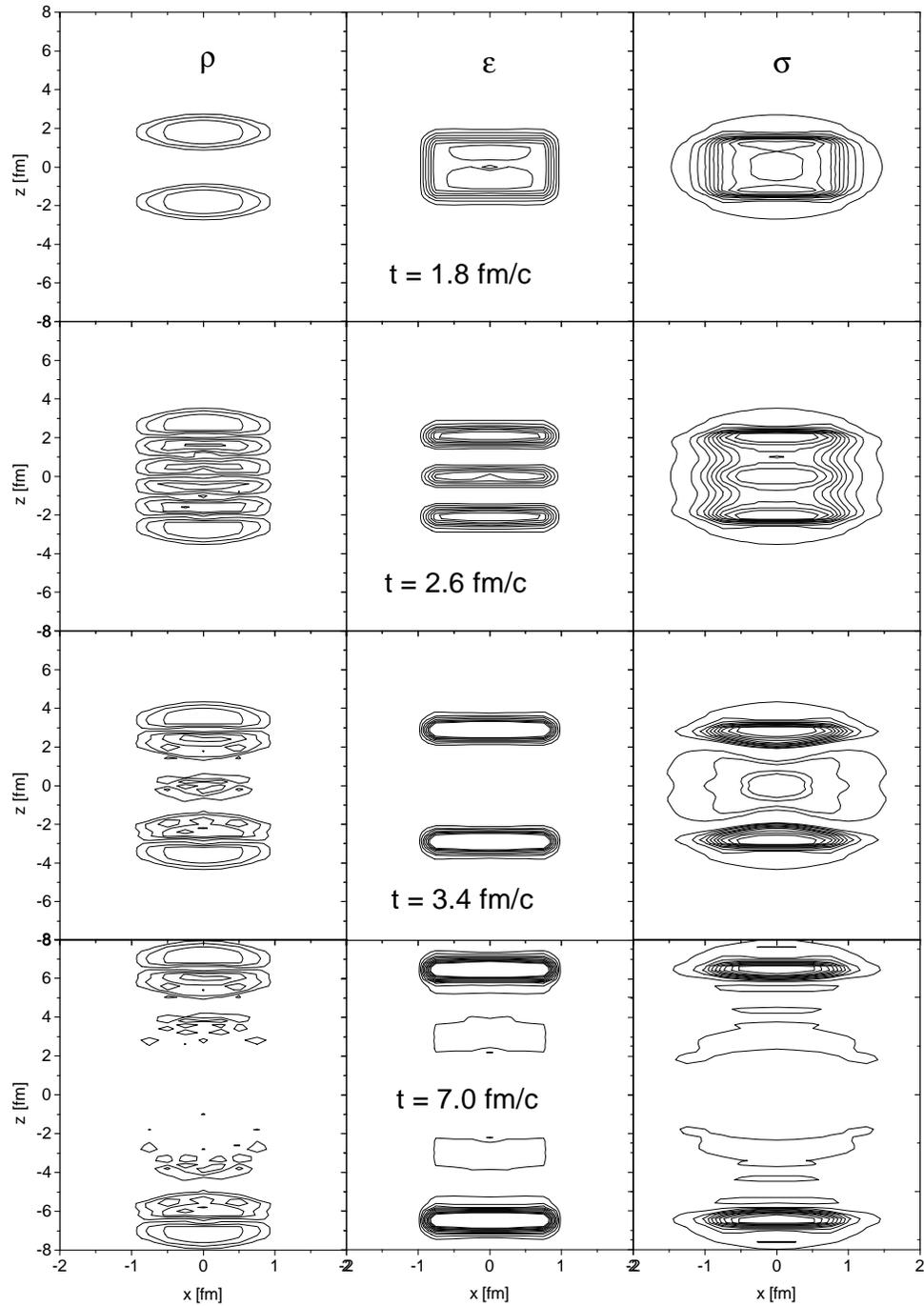


Abb. 5.27: Die Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten der Ladungsdichte ρ , der Energiedichte des Farbfeldes ϵ , sowie des σ -Feldes für den Aufbruch eines Strings durch die symmetrische Produktion zweier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 1.8, 2.6, 3.4, 7.0 \text{ fm}/c$. Es wurde die vollständige Dynamik (VD) des Transportmodells verwendet. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} für ρ , von 0.0 fm^{-4} bis 3.0 fm^{-4} für ϵ und von -0.125 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

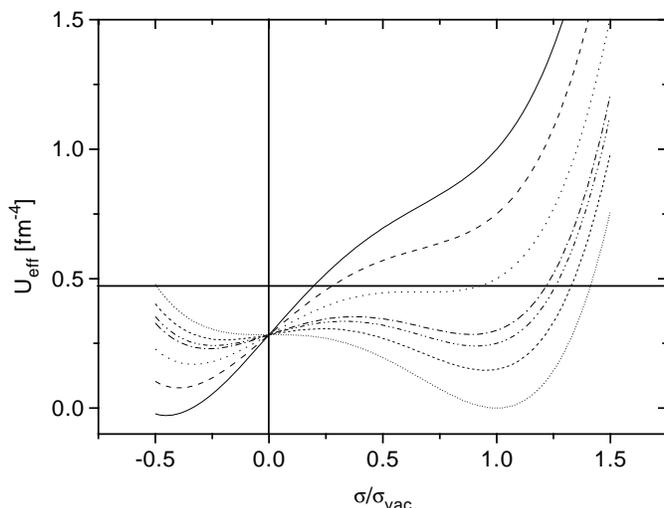


Abb. 5.28: Die Abbildung zeigt das effektive Potential des σ -Feldes mit unterschiedlicher skalarer Dichte.

des Strings fast vollständig durchdringt, so daß das Farbfeld an dieser Stelle verschwindet. Bedingt durch die rapide Abschirmung des Farbfeldes, fällt dieses als Quelle des σ -Feldes weg (siehe Gleichung (5.27)) und das σ -Feld wird an dieser Stelle hoch angeregt. Anschließend beginnt das σ -Feld um den nichtperturbativen Vakuumwert zu oszillieren. Im weiteren Verlauf der Zeitentwicklung zeigt sich, daß das σ -Feld die zur Zeit $t = 3.4 \text{ fm}/c$ erst leicht ausgeschmierten $q\bar{q}$ -Verteilungen nicht lokalisiert und in eine Kavität einschließt, sondern daß diese sich schließlich lokal neutralisieren und entlang der z -Achse bis auf eine Gesamtlänge von ca. 8 fm ausbreiten, was in der unteren Figur zu erkennen ist.

Durch die Ausdünnung der $q\bar{q}$ -Verteilungen kommt es schließlich zu einem kompletten Phasenübergang in der Mitte des Strings, da die verbliebene geringe skalare Dichte nicht ausreicht, um das perturbative Vakuum aufrechtzuerhalten. Diesen Phasenübergang erkennt man an der Abhängigkeit des effektiven Potentials $U_{eff} = U(\sigma) + g_0\sigma\rho_s$ von ρ_s , was in der Abbildung 5.28 gezeigt ist. Fällt der Wert von ρ_s unter etwa $1/3$ des Grundzustandswertes, so ist es für das σ -Feld energetisch günstiger zum nichtperturbativen Vakuumwert σ_{vac} zurückzukehren.

Als nächstes betrachten wir den symmetrischen Aufbruch des Strings durch Produktion dreier $q\bar{q}$ -Paare in Analogie zu Abbildung 5.24 c). Es ergibt sich ein dynamisches Verhalten der Quarks, das dem vorangegangenen Beispiel sehr ähnlich ist.

In der oberen Reihe sehen wir die Flux-tube zum Zeitpunkt $t = 2.8 \text{ fm}/c$ mit einer Länge von 5.6 fm . Zur Zeit $t = 3.0 \text{ fm}/c$ produzieren wir die drei $q\bar{q}$ -Paare bei $z = 0 \text{ fm}$ und $z = \pm 2 \text{ fm}$. Daraufhin erkennen wir in der zweiten Figur wieder, wie durch die Bewegung der Quarks das Farb-

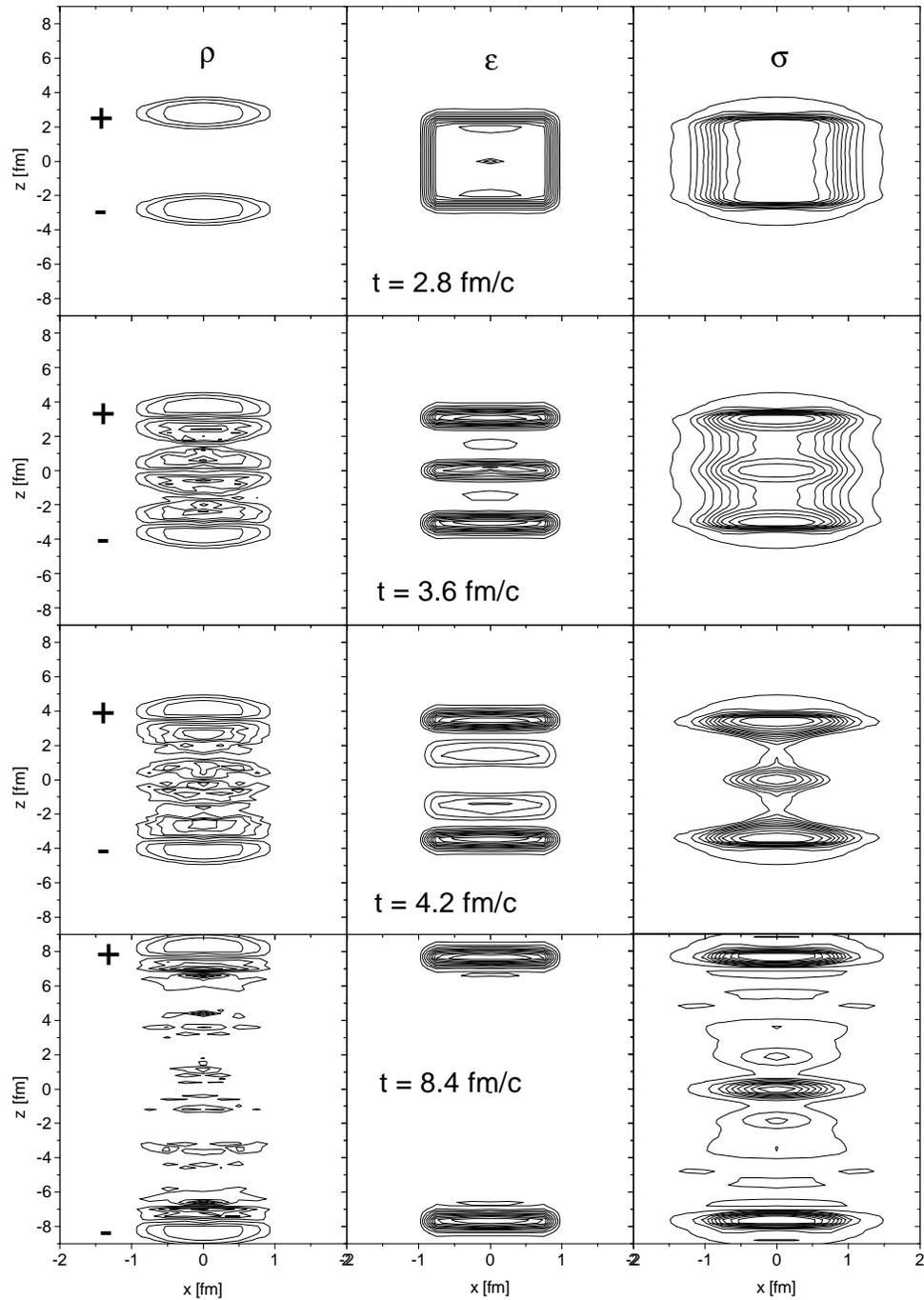


Abb. 5.29: Die Abbildung zeigt das zeitliche Verhalten der Ladungsdichte ρ , der Energiedichte des Farbfeldes ϵ , sowie des σ -Feldes für den Aufbruch eines Strings durch die symmetrische Produktion dreier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 2.6, 3.6, 4.2, 8.2$ fm/c . Es wurde die vollständige Dynamik (VD) des Transportmodells verwendet. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} für ρ , von 0.0 fm^{-4} bis 3.0 fm^{-4} für ϵ und von -0.125 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

feld abgeschirmt wird und sich das σ -Feld einschnürt. Die Bildung der beiden äußeren Mesonenpaare, sowie das Durchdringen der $q\bar{q}$ -Paare sehen wir zum Zeitpunkt $t = 4.2 fm/c$. Ähnlich wie im vorangegangenen Beispiel führt die schnelle Abschirmung des Farbfeldes zu einer hohen Anregung des σ -Feldes, wodurch letzteres anfängt um σ_{vac} zu oszillieren. Dadurch werden die jeweiligen $q\bar{q}$ -Paare wieder nicht in Kavitäten eingeschlossen und die weitere Dispersion der Quarkverteilungen kann nicht verhindert werden. Es findet wieder eine Neutralisierung derselben statt und schließlich verteilen sich die farbneutralen $q\bar{q}$ -Fragmente entlang der z -Achse bis zu einer Gesamtlänge von $8 fm$ zum Zeitpunkt $t = 8.4 fm/c$. Nachdem die Oszillationen des σ -Feldes unter schwacher Dämpfung nachlassen, findet der vollständige Phasenübergang zum nichtperturbativen Vakuum statt.

Wir stellen daher fest, daß das Transportmodell in seiner hier verwendeten Form nicht in der Lage ist, dynamisch die propagierenden Quarkverteilungen in Kavitäten zu lokalisieren. Stattdessen entspricht der erreichte Endzustand stets lokal farbneutralen reellen Quark-Antiquark Fragmenten, die im nicht-perturbativen Vakuum propagieren.

Das Zustandekommen der in den vorangegangenen Beispielen gezeigten Reaktionsdynamik hat mehrere Ursachen. Zum einen ist der Wert der starken Kopplungskonstante sehr groß, was zu einer sehr hohen Energiedichte des Farbfeldes führt. Dadurch nimmt das σ -Feld in der Mitte eines Strings stark negative Werte an, die sogar bis zu $-\sigma_{vac}$ gehen können. Verschwindet diese Energiedichte nun durch die spontane Abschirmung der produzierten Quarks, so ändert sich die Form des effektiven Potentials ebenfalls spontan, so daß das σ -Feld eine hohe Anregungsenergie erhält. Das physikalische Problem dabei ist, daß diese Anregungsenergie in der momentanen Form unseres Modells nicht in die Masse von neu produzierten Teilchen (Pionen) umgewandelt werden kann. Daher können die entstehenden Oszillationen nur schwach gedämpft werden (entweder numerisch oder durch transversale Expansion). Das σ -Feld folgt daher den Quarkverteilungen nicht schnell genug, um diese zu lokalisieren. Somit wird das weitere Zerlaufen der $q\bar{q}$ -Verteilungen nicht verhindert. Eine effektive Dämpfung könnte man beispielsweise durch die Ankopplung eines Pionenfeldes erreichen, wodurch man ebenfalls die chirale Symmetrie des Modells wiederherstellt [89, 90, 91].

Weiterhin bereiten diese σ -Feld Oszillationen auch numerische Probleme, da bei Werten von $\sigma(\mathbf{x}) > \sigma_{vac}$ die Singularität in der Poissongleichung abgefangen werden muß, jedenfalls an Stellen, an denen Farbladungsfluktuationen vorliegen, also $\rho \neq 0$ ist.

Die Ursache der Dispersion der Quarkverteilungen ist die geringe Teilchenzahl, also ein $1/N_{phys}$ -Effekt. Da in unseren Simulationen nur wenige physikalische Teilchen $N_{phys} < 10$ vorliegen, nimmt die Selbstwechselwirkung dieser entscheidenden Einfluß auf die Dynamik; nur ein einziges geladenes Teilchen mit fast verschwindender Masse würde durch das repulsive Vektor-

feld instantan zerlaufen. In diesem Grenzfall ist auch die Voraussetzung der Mittelfeldnäherung nicht mehr gegeben, die besagt, daß sich ein Teilchen in einem Feld bewegt, das durch Mittelung über alle anderen Teilchen bestimmt wird.

Um aber wenigstens einen qualitativen Eindruck von der Raum-Zeitentwicklung der Stringfragmentierung im Friedberg-Lee Modell zu erhalten, stellen wir im nächsten Abschnitt ein einfaches molekulardynamisches Modell vor, mit dem wir die bisher aufgetretene Dispersion der Quarkverteilungen künstlich verhindern.

5.5.5 Die Molekulardynamik

Zur Motivation unseres Ansatzes orientieren wir uns an dem für Schwerionenkollisionen sehr erfolgreichen Modell der Quantenmolekulardynamik (QMD) [55]. In diesem Modell geht man davon aus, daß der Beitrag eines einzelnen Nukleons i zur gesamten Phasenraumverteilung durch

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = N \exp(-(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t))^2/\Delta_x^2) \exp(-(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))^2/\Delta_p^2) \quad (5.57)$$

gegeben ist. Man propagiert daher nur die Vektoren $\mathbf{x}_i(t)$ und $\mathbf{p}_i(t)$ gemäß den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen und nimmt an, daß die Verteilung im Orts- und Impulsraum durch eine Gaußfunktion mit einer konstanten Breite darstellbar ist.

Wir verfahren hier sehr ähnlich und beschreiben die physikalischen Teilchen (Quark und Antiquark) jeweils durch einen zeitabhängigen Orts- und Impulsvektor, die ebenfalls den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen folgen. Das erreichen wir in dem wir in den Bewegungsgleichungen der Testteilchen (4.52) und (4.53) $N_T = N_{phys}$ setzen, wobei N_{phys} die Anzahl an physikalischen Teilchen angibt. Der einzige Unterschied zum QMD-Modell besteht darin, daß wir dem Ortsvektor $\mathbf{x}_i(t)$ als Annahme die mesonische Grundzustandsverteilung zuordnen, wodurch wir sowohl die skalare Dichte ρ_s , als auch die Ladungsdichte ρ jedes einzelnen Quarks erhalten. Die gesamte skalare Dichte und Ladungsdichte ermitteln wir durch die Summe über alle (Anti-)Quarks.

Der Impulsvektor jedes Quarks $\mathbf{p}_i(t)$ verschwindet zum jeweiligen Produktionszeitpunkt, was der Annahme entspricht, daß die Teilchen mit verschwindendem Gesamtimpuls produziert werden [72]. Anschließend werden die Impulse ebenfalls gemäß der Bewegungsgleichung der Testteilchen (4.53) propagiert. Da wir die Form der Quarkverteilungen während der Zeitentwicklung nicht ändern, verhindern wir somit künstlich ihre starke Dispersion.

Wir vergleichen zunächst die bereits diskutierten Prozesse mit diesem neuen molekulardynamischen Verfahren anhand des dynamischen Verhaltens der Ladungsdichten ρ . In Abbildung 5.30 sind diese zu verschiedenen Zeitschrit-

ten aufgetragen. Die linke Seite stellt die Simulation mit vollständiger Testteilchendynamik (VD) dar, während auf der rechten Seite das molekulardynamische Modell verwendet wurde (MD). Für diesen speziellen Aufbruch des Strings mit der Produktion nur eines $q\bar{q}$ -Paares sind bis auf die leichte Dispersion der Verteilungen des VD-Verfahrens bei $t = 7.0 fm/c$ keine weiteren Unterschiede festzustellen.

Anders sieht die Situation bei dem Aufbruch des Strings durch Erzeugung zweier $q\bar{q}$ -Paare aus. Während im VD-Verfahren die Verteilungen sich neutralisieren und anschließend expandieren, findet im MD-Verfahren die aus Abbildung 5.24 b) erwartete Yo-Yo-Bewegung statt, die ungedämpft verläuft, wie man an Abbildung 5.31 erkennen kann. Dort sind die Dichten der Quarks zu den Zeiten $t = 1.8, 2.6, 3.4, 7.0 fm/c$ aufgetragen und man sieht an der unteren Figur, das selbst nach $7.0 fm/c$ die 'Yo-Yo'-Bewegung mit unveränderter Amplitude stattfindet.

Ein weiterer Vergleich der beiden Verfahren ist in Abbildung 5.32 für den Stringaufbruch mit drei $q\bar{q}$ -Paaren gezeigt. Wir erkennen, wie sich im Laufe der Zeit die beiden parallelen Yo-Yo-Moden ausbilden, wobei die Verteilungen der Quarks während der Oszillationen stets wieder exakt zum Ursprung ($z = 0$) zurückkehren und sich dort vollständig überlappen, wie wir es aufgrund der äquivalenten Bewegung aus Abbildung 5.24 c) erwarten. Wir sehen daher, daß wir mit dem molekulardynamischen Verfahren die einfachen Lund-Diagramme 5.24 a) - c) reproduzieren können.

Wir zeigen nun zusätzlich, daß man im Rahmen des MD-Verfahrens die Quarkbewegung der Abbildung 5.24 d) nachvollziehen kann. Dazu sind in Abbildung 5.33 sowohl die Quarkdichten als auch das σ -Feld dargestellt. Wir erkennen hier anhand der Dichten, daß das mittlere Quark-Antiquark Paar bereits erzeugt ist und sich durch die Kraft des Farbfeldes separiert hat, bevor die anderen beiden $q\bar{q}$ -Paare symmetrisch bei $z = \pm z_0 = \pm 2 fm$ eingestreut werden. Diese separieren sich ebenfalls instantan, wobei wieder die äußeren Mesonenpaare gebildet werden, sowie die beiden inneren Mesonenpaare. Diese inneren Mesonenpaare haben in diesem Fall allerdings einen gerichteten Gesamtimpuls, da die Quarks des bei $z = 0$ erzeugten $q\bar{q}$ -Paares bereits über eine Zeit von $0.5 fm/c$ Energie und somit Impuls aus dem Farbfeld aufnehmen konnten. Aus der Summe dieser beiden Impulse ergibt sich nun der Gesamtimpuls des gebildeten Mesons und daraus schließlich die Geschwindigkeit, mit der dieser angeregte Mesonenzustand weiterpropagiert. In diesem angeregten Zustand führen die Quarks aber weiterhin eine 'Yo-Yo'-Bewegung durch, was man an zu den Zeitpunkten $t = 5.4, 7.2, 7.8 fm/c$ sieht. Während dieses Zeitraums ist eine vollständige Phase der Oszillationsbewegung gezeigt. Sie beginnt und endet mit dem fast vollständigen Überlapp der Quarkverteilungen, was sich an dem Verschwinden der Energiedichte bei $t = 5.4 fm/c$ und $t = 7.8 fm/c$ äußert. Die weitere gerichtete Bewegung der Mesonen ist in der Abbildung 5.34 deutlich zu erkennen. Weiterhin sehen

wir anhand des σ -Feldes, daß sich die richtigen, sich gegenseitig neutralisierenden Quark-Antiquark Paare gefunden haben, da das σ -Feld in den Bereichen, wo das farbelektrische Feld abgeschirmt wird, auf seinen Vakuumwert zurückkehrt. Ein Vergleich mit der Abbildung 5.24 d) bestätigt diese Aussage; die Bereiche des Farbfeldes sind schraffiert dargestellt. In den anderen Bereichen muß das σ -Feld wieder auf seinen Vakuumwert zurückkehren.

Wir sehen anhand dieser Simulationsergebnisse, daß wir mit den MD-Verfahren in der Lage sind, die Raum-Zeit Graphen des Lund-Modells im Rahmen des Friedberg-Lee Modells dynamisch zu reproduzieren. Wir erhalten mit diesem Verfahren angeregte Hadronen im Endzustand, deren Rapiditätsverteilung man durch geeignete Wahl der Aufbruchpunkte festlegen kann. Durch Einführung des molekulardynamischen Verfahrens ist eine Basis geschaffen, die es erlaubt, die Raum-Zeit-Entwicklung eines Strings oder von einem Ensemble von Strings und deren Fragmentierung zu beschreiben. Somit ist ein weiterer Schritt zur konsistenten Simulation einer Schwerionenkollision getan, auch wenn es bis dahin noch ein weiter Weg ist.

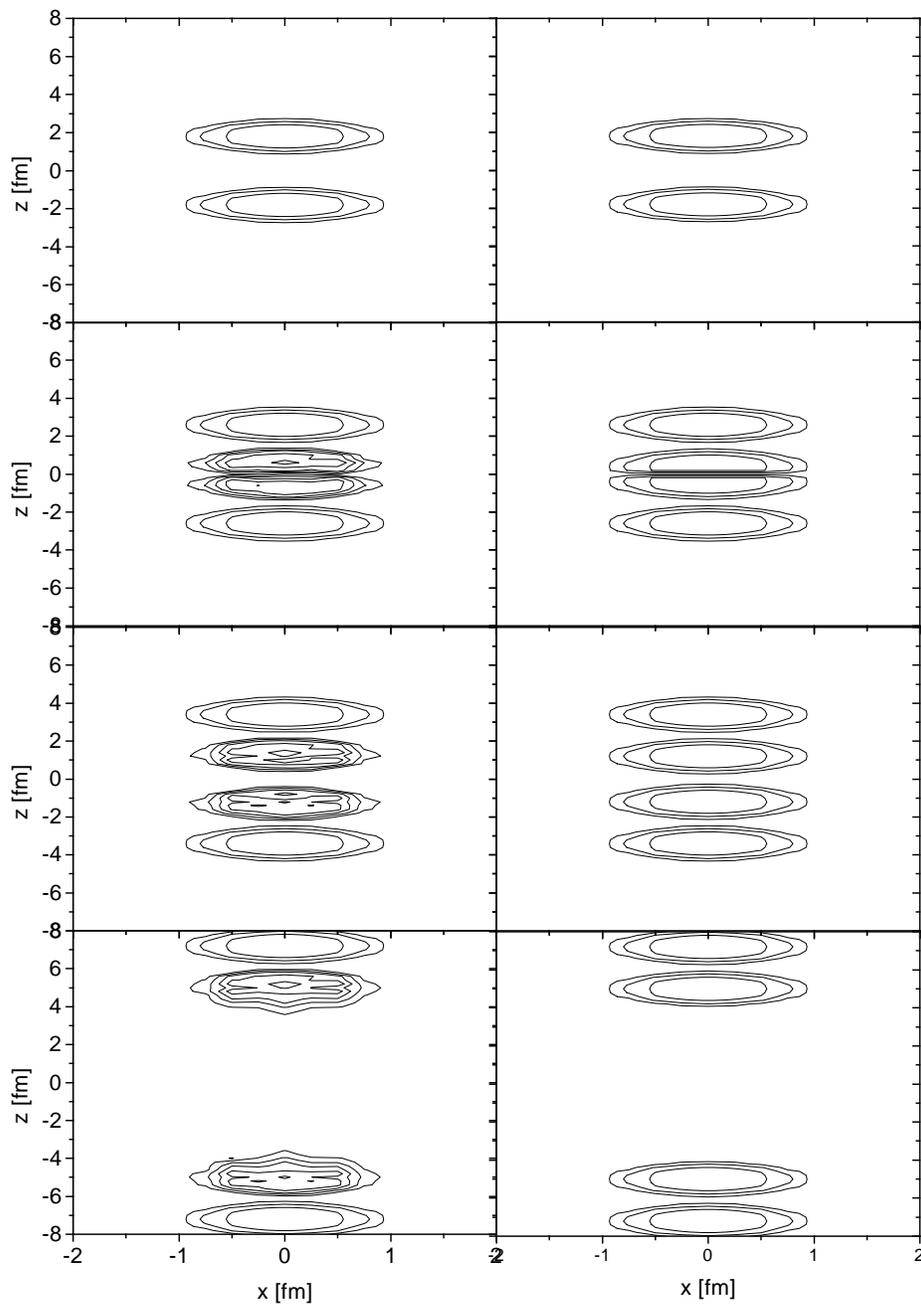


Abb. 5.30: Die Abbildung zeigt den Vergleich der Ladungsdichte für den Stringaufbruch durch die symmetrische Produktion eines $q\bar{q}$ -Paares zu den Zeitpunkten $t = 1.8, 2.6, 3.4, 7.0 \text{ fm}/c$. Die linke Seite beschreibt die vollständige Transportdynamik (VD) und die rechte Seite die molekulardynamische Simulation (MD). Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} .

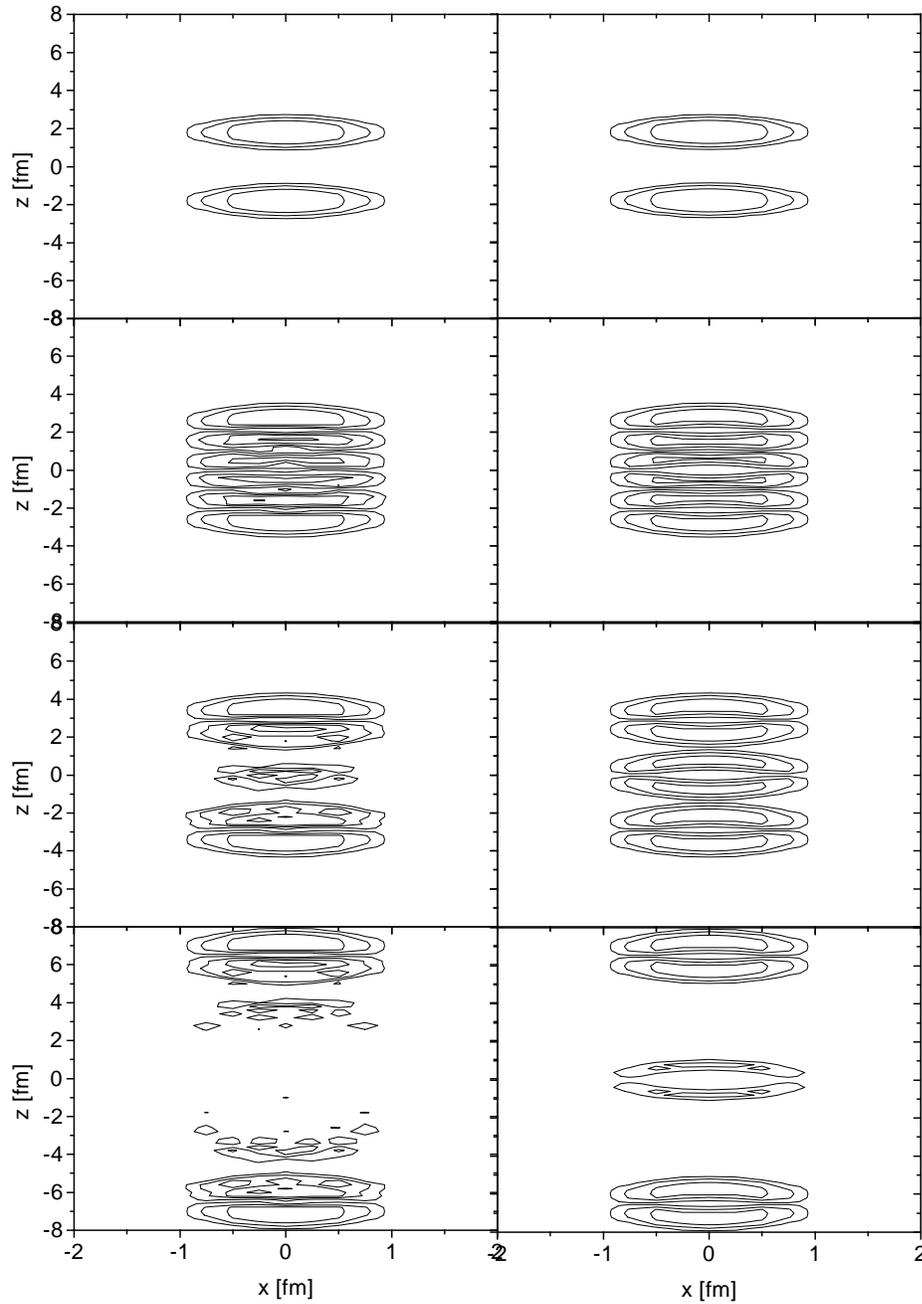


Abb. 5.31: Die Abbildung zeigt den Vergleich der Ladungsdichte für den Stringaufbruch durch die symmetrische Produktion zweier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 1.8, 2.6, 3.4, 7.0 \text{ fm}/c$. Die linke Seite beschreibt die vollständige Transportdynamik (VD) und die rechte Seite die molekulardynamische Simulation (MD). Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} .

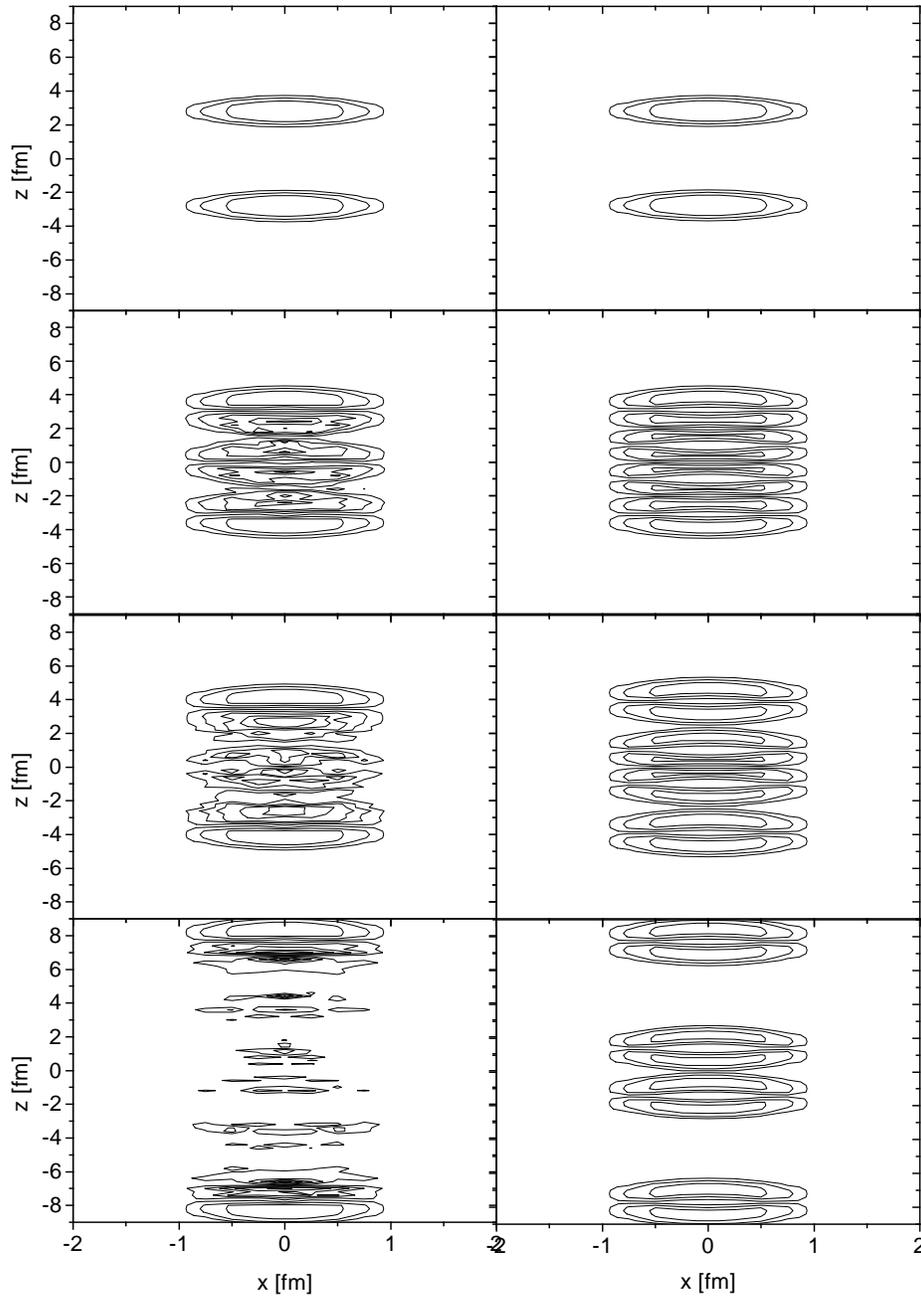


Abb. 5.32: Die Abbildung zeigt den Vergleich der Ladungsdichte für den Stringaufruch durch die symmetrische Produktion dreier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 2.6, 3.6, 4.2, 8.2 \text{ fm}/c$. Die linke Seite beschreibt die vollständige Transportdynamik (VD) und die rechte Seite die molekulardynamische Simulation (MD). Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.5 fm^{-3} bis 0.5 fm^{-3} .

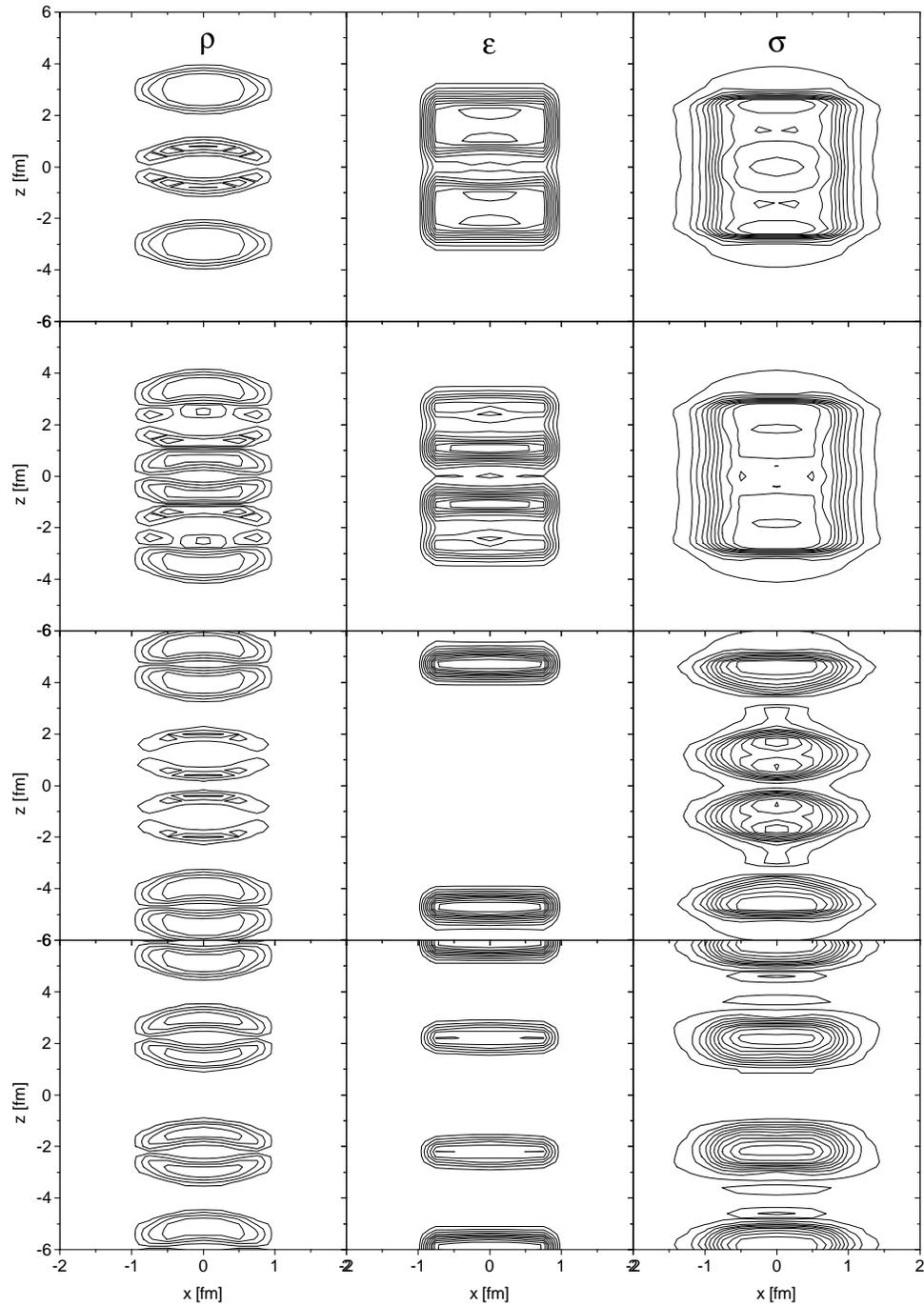


Abb. 5.33: Die Abbildung zeigt den Beginn der Zeitentwicklung der Ladungsdichte, der Energiedichte des Farbfeldes, sowie des σ -Feldes für den Aufbruch eines Strings durch zeitlich verzögerte Produktion dreier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 2.7, 3.2, 5.4, 7.2 \text{ fm}/c$. Es wurde die molekulardynamische Vorgehensweise (MD) verwendet. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.35 fm^{-3} bis 0.35 fm^{-3} für ρ , von 0.0 fm^{-4} bis 3.0 fm^{-4} für ϵ und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

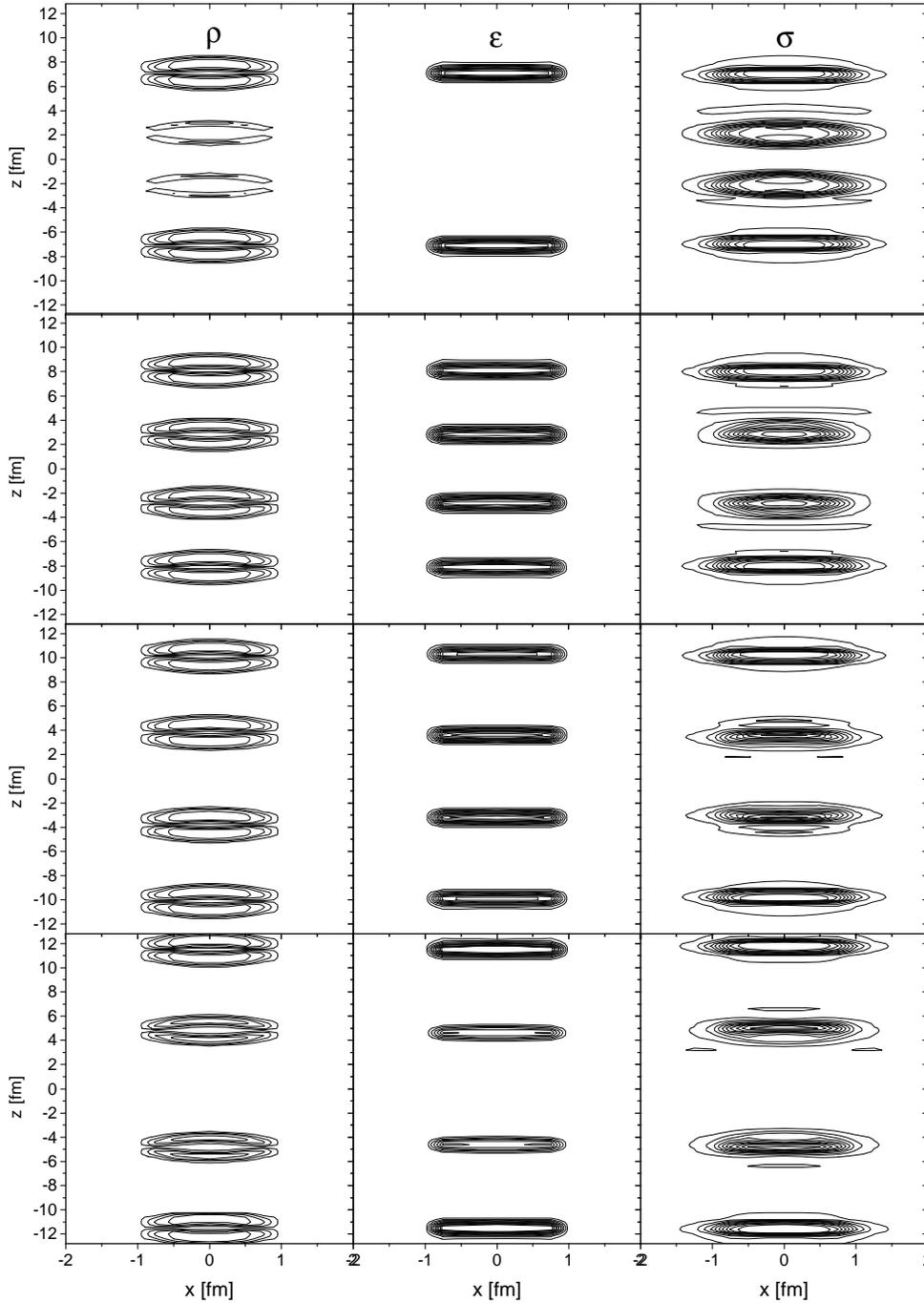


Abb. 5.34: Die Abbildung zeigt den späteren Verlauf der Zeitentwicklung der Ladungsdichte, der Energiedichte des Farbfeldes, sowie des σ -Feldes für den Aufbruch eines Strings durch zeitlich verzögerte Produktion dreier $q\bar{q}$ -Paare zu den Zeitpunkten $t = 7.8, 8.6, 10.6, 12.2 \text{ fm}/c$. Es wurde die molekulardynamische Vorgehensweise (MD) verwendet. Man beachte die gegenüber der Abbildung 5.33 reskalierte z -Achse. Die äquidistanten Konturlinien laufen von -0.35 fm^{-3} bis 0.35 fm^{-3} für ρ , von 0.0 fm^{-4} bis 3.0 fm^{-4} für ϵ und von -0.15 fm^{-1} bis 0.25 fm^{-1} für σ .

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein relativistisches Transportmodell vorgestellt, das es erlaubt, die Dynamik von Quarks als klassische Farbladungen in einem Medium mit Confinement zu beschreiben.

Ausgangspunkt unserer Untersuchungen war die Frage nach dem dynamischen Verhalten der fundamentalen Theorie der Quarks und Gluonen, der Quantenchromodynamik (QCD), im klassischen Grenzfall großer Feldstärken, in dem die quantenmechanischen Fluktuationen vernachlässigbar sind. Wir haben gesehen, daß in diesem Grenzfall die fundamentale Voraussetzung für Confinement, die Antiabschirmung der Farbladungen, nicht gegeben ist. Im Gegenteil hat die nichtabelsche Struktur der Feldgleichungen dazu geführt, daß die klassischen Farbladungen stets abgeschirmt werden. Der dynamische Einschluß der Quarks in Farbsinglett-Zustände ist daher ein rein quantenmechanischer Effekt, der eine nichtperturbative Behandlung des QCD-Vakuums erfordert. Diese ist aber mit den momentanen mathematischen Methoden und/oder modernsten Rechenanlagen nicht möglich.

Wir sind daher zur Modellbildung der QCD gezwungen und haben im dritten Kapitel das nichttopologische Solitonen-Modell von Friedberg und Lee vorgestellt. In diesem Modell wird die komplexe nichtperturbative Struktur des QCD-Vakuums phänomenologisch durch ein skalares Feld dargestellt, das durch seine Kopplung an die Quarks und Gluonen ein Dielektrikum mit verschwindender Dielektrizitätskonstanten modelliert und so den Einschluß der Quarks in farbneutrale Gebilde bewirkt. Anhand einer Darstellung der bisherigen in der Literatur veröffentlichten Arbeiten wurde gezeigt, daß die dortigen Verfahren es nicht erlauben, dynamische Prozesse zu untersuchen.

Wir haben deshalb im vierten Kapitel die Ableitung einer Transportgleichung beschrieben, die die numerische Behandlung dynamischer Reaktionen erheblich vereinfacht. Dabei sind wir zunächst von der Phasenraumverteilung von klassischen $SU(3)$ -Farbladungen ausgegangen und haben mit Hil-

fe des Liouville-Theorems Bewegungsgleichungen für das Farbsinglett- und Farboktett-Moment der Verteilung abgeleitet. Anschließend wurde gezeigt, daß man diese Gleichungen aus den exakten quantenmechanischen Transportgleichungen für die QCD-Wignerfunktion gewinnen kann, und zwar in der niedrigsten Ordnung der semiklassischen Entwicklung nach \hbar und unter der Annahme der abelschen Dominanz der Feldkonfiguration. Weiterhin sind wir auf die Probleme der Eichinvarianz der Wignerfunktion eingegangen.

Nach diesen Vorarbeiten sind wir zur numerischen Simulation der Modellgleichungen übergegangen und haben zunächst die Grundzustandseigenschaften untersucht. Es stellte sich heraus, daß man mit einem Parametersatz sowohl die physikalischen Eigenschaften der Mesonen als auch der Baryonen zufriedenstellend beschreiben kann. Da die Quarks im Grundzustand in einer lokalen Thomas-Fermi Verteilung vorliegen, kann die unterschiedliche Anzahl von Quarks in Mesonen ($n = 2$) und Baryonen ($n = 3$) durch Anpassung der Fermienergie erreicht werden. Ausgehend vom mesonischen Grundzustand haben wir mit Hilfe eines zeitabhängigen Verfahrens die Current-Quarkmasse adiabatisch erhöht und somit Mesonenzustände mit schweren charm-Quarks erzeugt. Um die Massen der J/ψ - und D/\bar{D} -Mesonen optimal zu reproduzieren, mußten wir einen Wert der Masse des charm-Quarks von $m_c = 1.25 \text{ GeV}$ wählen, der durchaus noch in dessen experimentellem Unsicherheitsbereich liegt.

Eine Konsequenz der Farbneutralität des Grundzustandes ist, daß die absolute Stärke der Farbladungen, die durch die starke Kopplungskonstante α_s gegeben ist, anhand von Grundzustandseigenschaften nicht festgelegt werden kann. Wir haben daher durch die adiabatische Separierung des Quark-Antiquark-Paars des Mesons eine Flux-tube-Konfiguration erzeugt. Die starke Kopplungskonstante wird schließlich bestimmt durch Anpassung der Stringspannung an die phänomenologisch ermittelte Stringkonstante $\tau = 1 \text{ GeV}/\text{fm}$. Diese Rechnung lieferte einen Wert von $\alpha_s = 1.92$, in Übereinstimmung mit anderen Stringmodellen.

Weiterhin haben wir die Wechselwirkung zweier Strings untersucht, die insbesondere für Schwerionenkollisionen von Interesse ist, da man glaubt, daß zu Beginn dieser Reaktionen die Dichte der Strings sehr groß werden kann. Der Verlauf des Wechselwirkungspotentials ist gekennzeichnet durch das Verhältnis von Oberflächenenergie durch die Fusion des σ -Feldes zur farbelektrischen Energie. Zur Bestimmung des Farbfeldes mußten wir wegen der fehlenden Zylindersymmetrie des Systems die Annahme machen, daß diese sich gegenseitig nicht beeinflussen und kohärent addiert (bzw. subtrahiert) werden können. Da die absolute Größe der farbelektrischen Energie dominiert, ist das Potential für die parallele Konfiguration stark repulsiv und im antiparallelen Fall stark attraktiv. In beiden Fällen zeigen sich keine langreichweitigen Anteile des Potentials (Van der Waals-Kräfte), was an der Confinement-Eigenschaft des Modells liegt.

Im weiteren haben wir Farbanregungen des Nukleons untersucht, wobei erstmals die vollständigen dynamischen Gleichungen gelöst wurden. Durch einen Shift der lokalen Thomas-Fermi Verteilungen wurde ein angeregter Anfangszustand erzeugt, der zu isovektoriellen Schwingungen der Quarks gegen die Antiquarks führt. Hier zeigte sich bereits die erste Konsequenz der Mittelfeldnäherung unseres Modells, die eigentlich nur für Vielteilchensysteme anwendbar ist. Sie führt zur Selbstwechselwirkung der Ladungsverteilungen und somit zur Dispersion derselben, wodurch der global farbneutrale in einen lokal farbneutralen Schwingungszustand übergeht. Der Gewinn an farbelektrischer Energie erhöht die kinetische Energie der Quarks und führt zu einer elongierten Kavität (Plasma-tube).

Schließlich haben wir uns mit dem Problem der Hadronisierung eines Strings durch Produktion von Quark-Antiquark Paaren in dem Farbfeld auseinandergesetzt. Es wurde erläutert, daß man die weitläufig verwendete Paarproduktionsrate des Schwinger-Mechanismus nicht einfach auf den Fall eines stringförmigen Farbfeldes übertragen kann. Vielmehr müssen Effekte des longitudinalen und transversalen Confinements sowie die Rückkopplung der Quark-Antiquark-Paare auf das Farbfeld berücksichtigt werden. Da sich diese Rechnungen als nichttrivial erwiesen, konnte die exakte zeitabhängige Paarproduktionsrate für eine expandierende Friedberg-Lee Flux-tube bisher nicht bestimmt werden. Wir orientieren uns daher an der Phänomenologie des Lund-Fragmentierungsmodells, mit dem man sehr erfolgreich und mit relativ wenigen Parametern die Hadronenspektren von Hadron-Hadron- und von Schwerionen-Kollisionen reproduzieren kann. Wir haben daraufhin eine Raum-Zeit-Beschreibung der einfachsten Stringfragmentierungsgraphen gegeben. Zunächst untersuchten wir die vollständige Transportdynamik und stellten fest, daß die Energie des Farbfeldes nicht in sogenannte 'Yo-Yo'-Moden geht, wie dies vom Lund-Modell vorhergesagt wird. Stattdessen führt das Zusammenspiel der Dispersion der Quarkverteilungen und der starken Oszillationen des σ -Feldes zu ausgedünnten, lokal farbneutralen Quark-Antiquark Fragmenten, woraufhin es zu einen Phasenübergang des Systems zum nichtperturbativen Vakuum kommt.

Um dies zu verhindern, simulierten wir anschließend die gleichen Prozesse mit Hilfe eines molekulardynamischen Modells, wodurch die Dispersion der Quarkverteilungen künstlich verhindert wird. In diesem Modell wird die Bewegung der Quarks durch die eines Punktteilchens beschrieben, dem man zur Regulierung der kurzreichweitigen Divergenzen eine räumliche Verteilung zuordnet. In unserem Fall wählten wir die Grundzustandsverteilung des Mesons. Mit Hilfe dieser Annahme gelang es uns die tatsächliche Beschreibung der Raum-Zeit Dynamik der Fragmentierungsgraphen im Rahmen unseres Modells.

In einer weiteren Simulation zeigten wir die Dissoziation eines schweren Quarkonium-Zustandes ($(c\bar{c})$ oder J/ψ) durch das Farbfeld eines Strings.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß der $(c\bar{c})$ -Zustand keinen Impuls in transversaler Richtung hat, haben wir gesehen, daß die Dissoziierung auch bei den schweren Quarks sehr schnell vonstatten geht. Die Beschleunigung der charm-Quarks auf nahezu Lichtgeschwindigkeit erfolgt innerhalb von $\approx 0.5 fm/c$. Durch eine einfache Abschätzung konnten wir ermitteln, daß auch ein J/ψ -Zustand mit mittleren bis großem Transversalimpuls ($< 5 GeV/c$) beim durchqueren eines Strings dissoziiert und so zur vermehrten Produktion von D/\bar{D} -Mesonen beiträgt. Diese Ergebnisse weisen darauf hin, daß die mittlerweile experimentell bestätigte Unterdrückung der J/ψ -Mesonen sich auch auf die Formierung von Strings und deren Zerfall zurückzuführen ist. Es werden allerdings keine Aussagen darüber gemacht, ob die vielfache Erzeugung von Strings oder sogar von vielfach farbgeladenen Color-ropes zu einem Quark-Gluon-Plasma führt.

Die im Laufe dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse geben Anlaß zu folgenden Erweiterungen des Modells:

Die Simulation der Poissongleichung sollte auf drei Raumdimensionen erweitert werden. Damit kann man die in dieser Arbeit verwendeten Näherungen zur Berechnung des String-String Wechselwirkungspotentials aufgeben und dieses exakt bestimmen. Weiterhin kann man die Dissoziierung der J/ψ -Mesonen beim transversalen Durchlaufen des Strings untersuchen und so den Energiebereich der J/ψ festlegen, der zu einer Unterdrückung dieser Mesonen führt. Mit dieser Erweiterung kann auch die Produktion von $q\bar{q}$ -Paaren mit relativem Transversalimpuls beschrieben werden, womit man beispielsweise den Energieverlust der Quarks und die damit verbundene Jet-Unterdrückung simulieren kann.

Der Mechanismus des Confinements muß beschleunigt werden. Die Oszillationen des σ -Feldes mit großer träger Masse könnten durch eine Ankopplung desselben an ein Pionenfeld mit erheblich geringerer Masse effektiv gedämpft werden. Eine Erweiterung des Modells auf ein chirales $O(4)$ -Solitonfeld ist in der Literatur weithin bekannt [89, 90, 91].

Letzteres könnte man auch durch eine Neubestimmung der Parameter des Modells erreichen. Eine Verringerung der Bagkonstante würde beispielsweise die Stringformierung, als auch den Zerfall energetisch erleichtern. Weiterhin kann man mit einer größeren skalaren Kopplungskonstante g_0 die schnelle Formierung von Bags auch durch eine ausgedünnte skalare Dichte erreichen. Das molekulardynamische Modell kann ebenfalls leicht erweitert werden. Man kann den Radius der Quarkverteilungen zeitabhängig machen und somit Monopolschwingungen beschreiben. Weiterhin kann man auch höhere Multipolmomente einführen, wodurch man die Lorentz-Kovarianz wiederherstellen, sowie Polarisierungseffekte analysieren kann.

Anhang A

Notationen und Konventionen

Solange nicht ausdrücklich darauf hingewiesen wird, werden die natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet. Vierervektoren sind normal gedruckt, beziehungsweise durch griechische Indizes gekennzeichnet. Es gilt die Einstein-Summenkonvention. Dreiervektoren sind entweder fett gedruckt oder mit lateinischen Indizes versehen. Farboperatoren \hat{O} sind in der Konvention

$$\hat{O} = \hat{G}^a O_a \quad (1.1)$$

zu verstehen, mit den Generatoren der jeweiligen Symmetriegruppe \hat{G}^a . Im Falle der Farb-SU(3) ist $\hat{G}^a = \hat{T}^a = \lambda^a/2$, wobei λ^a die Gell-Mann Matrizen sind. Tauchen die Entwicklungskoeffizienten O_a auf, so ist stets der Entwicklungsindex vorhanden.

Die Metrik des Minkowskiraumes ist durch

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (1.2)$$

gegeben. Damit gilt

$$\begin{aligned} x_\mu &= (t, -\mathbf{x}) \\ x^\mu &= (t, \mathbf{x}) \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, \partial^i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right). \end{aligned}$$

Der Viererimpuls ist gegeben durch

$$p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial_0, -i\nabla). \quad (1.3)$$

Die γ -Matrizen erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

γ_0 ist dabei hermitesch, die γ_i sind anti-hermitesch. Sie sind über

$$\gamma_0 = \beta \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} \quad (1.5)$$

mit den Matrizen $\vec{\alpha}$ und β verknüpft.

Die Matrix γ_5 , die mit allen γ_μ antikommutiert, ist dabei als

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (1.6)$$

gegeben.

Die sechzehn Matrizen $(1, \gamma_\mu, i\gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu})$ bilden eine Basis im Raum der 4x4 Matrizen, wobei $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ den Kommutator der γ -Matrizen bezeichnet.

Weitere Beziehungen, insbesondere die bei der Spinorzerlegung wichtigen Spur-Theoreme findet man in [92].

Anhang B

Numerische Methoden

In diesem Anhang werden die verwendeten numerischen Verfahren näher erläutert. Das verwendete Verfahren zur Zeitintegration der Bewegungsgleichungen wird im folgenden Abschnitt beschrieben, während die Details der Bestimmung des nicht explizit zeitabhängigen farbelektrischen Feldes mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente in Anhang B2 dargelegt wird.

B.1 Verfahren zur Zeitintegration

Wie in den Kapiteln 4 und 5 erwähnt, benutzen wir für die Zeitintegration der Vlasov-Gleichung die Testteilchenmethode, wie sie von Wong [93] vorgeschlagen wurde. Damit reduziert sich die Lösung der Vlasov-Gleichung auf die Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (4.52) und (4.53)

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \frac{\mathbf{p}_i}{\omega_i}, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = -\frac{m^*(\mathbf{x}_i)}{\omega_i} \nabla_x m^*(\mathbf{x}_i) + g_v \mathbf{E}(\mathbf{x}_i) \quad (2.2)$$

für die Testteilchen. Für die Zeitintegration des skalaren Feldes σ wandeln wir zuerst die Klein-Gordon-Gleichung (5.27) in zwei partielle Differentialgleichungen (pDGL) erster Ordnung um

$$\frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} \quad (2.3)$$

$$\frac{d\dot{\sigma}}{dt} = \nabla^2 \sigma - U'(\sigma) - g'_{eff}(\sigma) \rho_S - \frac{1}{4} \kappa'(\sigma) \mathbf{E}^2 \stackrel{\text{def}}{=} r_{hs}. \quad (2.4)$$

Wie üblich in diesen Simulationsrechnungen definieren wir nun das σ -Feld, $\dot{\sigma}$ und die Dichten auf einem räumlichen Gitter, wohingegen die Testteilchenkoordinaten kontinuierlich sind. In unseren Rechnungen benutzen wir ein 41 x

41 x 129 Gitter mit einem typischen Gitterabstand von 0.1 - 0.15 fm in transversaler, sowie in longitudinaler Richtung. Als Reaktionsebene wurde die x-z Ebene gewählt. Die Zeitschrittweite wurde üblicherweise $\Delta t = 0.010 fm$ gewählt. Die Anzahl der verwendeten Testteilchen beträgt 50000 pro Quark. Die Skalar- und Baryondichte werden nun wie in Kapitel 4 beschrieben aus den Testteilchenkoordinaten an den Gitterpunkten berechnet (Gleichung (4.55) und (4.56)). Aufgrund der begrenzten Anzahl der Testteilchen treten stets statistische Fluktuationen in der skalaren Dichte auf, welche als Quellterm für das Mesonenfeld fungiert. Diese Fluktuationen führen in der Lösung der Klein-Gordon-Gleichung zu Instabilitäten und müssen daher minimiert werden. Dies wird in unseren Simulationsrechnungen auf zwei Wegen erreicht. Zum einen macht man sich die Symmetrie des Problems zunutze und berücksichtigt sowohl die Punktsymmetrie in der Reaktionsebene, als auch die Spiegelsymmetrie bezüglich der Reaktionsebene. Ein Testteilchen mit den Koordinaten x, y, z trägt also zur Dichte an $\rho(x, y, z), \rho(-x, y, -z), \rho(x, -y, z)$ und an $\rho(-x, -y, -z)$ bei. Weiterhin werden die Dichten nach einem von Reinhardt und Cusson [94] vorgeschlagenen Algorithmus geglättet. Dabei ist der geglättete Funktionswert \tilde{f}_i an einem Gitterpunkt i durch eine Mittelung über die Nachbarpunkte gegeben

$$\tilde{f}_i = \frac{1}{4}f_{i-1} + \frac{1}{2}f_i + \frac{1}{4}f_{i+1}. \quad (2.5)$$

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ergibt sich einfach aus der sukzessiven Anwendung von Gleichung (2.5) für jede Dimension und ist z. B. in [95] gegeben.

Für die Zeitintegration der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen für die Testteilchen und der Bewegungsgleichungen für σ und $\dot{\sigma}$ verwenden wir einen sogenannten *staggered leapfrog* Algorithmus, wie er von Hernquist und Katz in [96] vorgeschlagen wurde.

$$\mathbf{x}_n^{t+2\Delta t} = \mathbf{x}_n^t + 2\Delta t \frac{\mathbf{p}_n^{t+\Delta t}}{\omega_n} + O(\Delta t^3) \quad (2.6)$$

$$\sigma^{t+2\Delta t} = \sigma^t + 2\Delta t \dot{\sigma}^{t+\Delta t} + O(\Delta t^3) \quad (2.7)$$

$$\mathbf{p}_n^{t+3\Delta t} = \mathbf{p}_n^{t+\Delta t} - 2\Delta t \frac{m^* \nabla_x m^*}{\omega_n}^{t+2\Delta t} + O(\Delta t^3) \quad (2.8)$$

$$\dot{\sigma}^{t+3\Delta t} = \dot{\sigma}^{t+\Delta t} + 2\Delta t \text{rhs}^{t+2\Delta t} + O(\Delta t^3), \quad (2.9)$$

wobei die Indizes die Zeitschritte anzeigen, zu welchen die Ausdrücke zu berechnen sind. Man erkennt, das \mathbf{p}_n und $\dot{\sigma}$ nur an ungeraden Zeitschritten, \mathbf{x}_n und σ hingegen nur zu geraden Zeitschritten berechnet werden. Dieses Überspringen der ungeraden Zeitschritte erklärt auch den Namen des Verfahrens. Zu beachten ist jedoch, daß die rechte Seite von Gleichung (2.6) über ω implizit von $\mathbf{x}_n^{t+\Delta t}$ sowie $\sigma^{t+\Delta t}$ abhängt. Genauso ist die rechte Seite von

Gleichung (2.8) von $\mathbf{p}_n^{t+2\Delta t}$ abhängig. Zudem muß auch für die Berechnung der Dichte, welche in Gleichung (2.9) eingeht $\mathbf{p}_n^{t+2\Delta t}$ berechnet werden. Um weiterhin die Genauigkeit bis zur dritten Ordnung in der Zeitschrittweite zu gewährleisten, berechnen wir einen vorläufigen Ort und Impuls sowie ein vorläufiges σ -Feld und $\dot{\sigma}$ gemäß

$$\mathbf{x}_n^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_n^t + \Delta t \frac{\mathbf{p}_n^{t-\Delta t}}{\omega_n} \quad (2.10)$$

$$\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^t + \Delta t \dot{\sigma}^{t-\Delta t} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{p}_n^{t+2\Delta t} = \mathbf{p}_n^{t+\Delta t} + \Delta t \left(\frac{-m^* \nabla_x m^*}{\omega_n} \right)^t \quad (2.12)$$

$$\dot{\sigma}^{t+2\Delta t} = \dot{\sigma}^{t+\Delta t} \Delta t \text{ rhs}^t. \quad (2.13)$$

Der hier vorgestellte Algorithmus ermöglicht eine konsistente Integration von Testteilchenkoordinaten und mittlerem Feld zu gleichen Zeiten. Diese gleichartige Behandlung von Testteilchen und mittlerem Feld ist absolut notwendig, da die Testteilchengeschwindigkeit, insbesondere in der Oberflächenregion stark von der exakten Testteilchenkoordinate, sowie dem mittleren Feld abhängt. Aus diesem Grund wird auch das σ -Feld an der exakten Position des Testteilchens aus den benachbarten Stützstellen interpoliert, und nicht einfach wie im relativistischen BUU das σ -Feld an der nächstliegende Stützstelle genommen.

Neben den oben beschriebenen Maßnahmen ist es allerdings zusätzlich noch nötig, $\dot{\sigma}$ alle 25 Zeitschritte *räumlich* zu schmieren, um die hohen Impulsfluktuationen aus dem σ -Feld herauszunehmen. Dieses Standardverfahren in der Hydrodynamik [96] entspricht allerdings einer numerischen Dissipation, welche für einen geringen Energieverlust während der Zeitentwicklung verantwortlich ist.

B.2 Die Methode der Finiten Elemente

Wie man an den Gleichungen (2.9) und (2.13) erkennen kann, muß die rechte Seite von (2.4) in jedem geraden Zeitschritt berechnet werden. Außer dem effektiven Potential und der skalaren Dichte wird dazu das farbelektrische Feld als ortsabhängige Funktion benötigt. Dieses bestimmt man aus der quasistatischen Gleichung (5.22)

$$\nabla(\kappa \nabla \phi(\mathbf{x}, t)) = -\rho(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad (2.14)$$

wobei man die reine von Neumann'sche Randbedingung

$$\frac{d}{d\mathbf{n}} \phi|_S = 0 \quad (2.15)$$

für das Potential ϕ fordert. Die Ladungsdichte ρ wird gemäß (4.56) aus der Testteilchenverteilung berechnet. Zur Bestimmung der Lösung der Poissongleichung wird in der Finite-Elemente Methode folgende Strategie verwendet: Zunächst unterteilt man das Gebiet, auf dem die Differentialgleichung definiert ist in Unterbereiche ein. Diese sind in einer Dimension Intervalle $x \in [a, b]$, bzw. in zwei Dimensionen Polygone jeglicher Art mit geradem oder krummlinigem Rand. In der Abbildung B.1 sind einige Beispiele zweidimensionaler finiter Elemente, sowie deren weiterer Zerteilung bezüglich einer beliebigen Koordinate gegeben, die durch einen Punkt markiert ist. Die Unterteilung

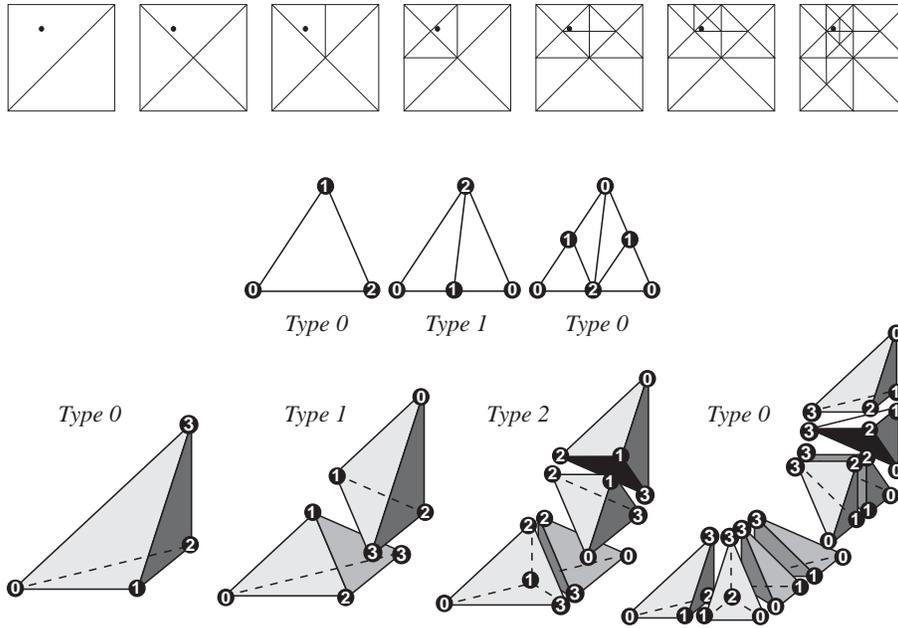


Abb. B.1: Beispiele für zwei- und dreidimensionale Finite Elemente, sowie deren weitere Zerteilung nach dem *newest vertex bisection*-Schema.

des dreidimensionalen Raumes erfolgt durch Tetraeder oder andersförmige Polyeder. Die Wahl der Form der Finiten Elemente hängt letztendlich von der Geometrie des Definitionsbereiches und der physikalischen Fragestellung ab (meistens handelt es sich dabei um die Eigenschaften fest vorgegebener Medien oder Kontinua). Diese Unterteilung ermöglicht es, Differentialgleichungen, die nicht auf rechteckigen Gebieten definiert sind, zu behandeln. Wir definieren auf jedem Finiten Element jeweils eine Näherungslösung $\tilde{\phi}$ durch einen Polynomialansatz:

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^N \phi_i \eta_i(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

wobei die Ansatzfunktionen $\eta_i(\mathbf{x})$ Polynomentwicklungen der Ordnung n in den Koordinaten sind. Die Ordnung der Ansatzfunktionen kann im Prin-

zip beliebig gewählt werden. Dabei potenziert sich aber jeweils die Anzahl der zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten und der damit verbundene Speicher- und Verwaltungsaufwand. Wir verwenden Ansatzfunktionen bis zu vierter Ordnung. Abhängig von der Anzahl der Entwicklungskoeffizienten werden sogenannte *Knotenpunkte* auf dem Finiten Element festgelegt. Diese können sowohl innerhalb, als auch auf dem Rand des definierten Gebietes liegen. Gehört im letzteren Fall ein Knoten K zu zwei verschiedenen benachbarten Finiten Elementen n und m , so muß gelten: $\tilde{\phi}_n(K) = \tilde{\phi}_m(K)$. Neben der Stetigkeit der Funktion kann man auch weiterhin die Steigkeit der ersten Ableitung auf dem Rand der Finiten Elemente fordern. Nach der Wahl der Knotenpunkte kann man die Entwicklungskoeffizienten der Ansatzfunktionen η_i bestimmen. Sie werden so gewählt, daß $\eta_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ ist, wobei die \mathbf{x}_j die Koordinaten der Knotenpunkte darstellen. Die Bestimmung der nun eindeutig an den Knotenpunkten festgelegten Funktionswerte ϕ_i erfolgt nach dem Ritz'schen Variationsverfahren. Ist die allgemeine pDGL durch

$$L\phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

mit dem linearen Operator L gegeben, setzt man für ϕ die Entwicklung (2.16) ein:

$$L \sum_i \phi_i \eta_i(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) . \quad (2.18)$$

Durch Projektion mit der Ansatzfunktion η_j

$$\int d\mathbf{x} \eta_j(\mathbf{x}) L \sum_i \phi_i \eta_i(\mathbf{x}) = \quad (2.19)$$

$$\sum_i \phi_i \int d\mathbf{x} \eta_j(\mathbf{x}) L \eta_i(\mathbf{x}) = \quad (2.20)$$

$$\int d\mathbf{x} \eta_j \rho(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\sum_i \phi_i L_{ij} = r_j . \quad (2.22)$$

Man erhält also eine lineare banddiagonale Matrixgleichung für die Knotenwerte ϕ_i , nach deren Inversion die genäherte Lösungsfunktion $\tilde{\phi}$ als *analytische* Funktion auf dem gesamten Definitionsbereich vorliegt.

Die hier beschriebene prinzipielle Vorgehensweise kann man durch eine geeignete Wahl der numerischen Hilfsmittel erheblich beschleunigen. In dem von uns gewählten Verfahren von Mitchell et al. [73] wird das lineare Gleichungssystem (2.22) mit Hilfe eines Multigrid-Verfahrens invertiert [52]. Weiterhin werden die Finiten Elemente nach einem adaptiven Verfeinerungsschema, der sogenannten *newest vertex bisection* weiter zerteilt [97]. Der Algorithmus zur Bestimmung der Lösung verläuft schließlich iterativ nach folgendem Schema:

- Lokale Bestimmung des Fehlers der pDGL an allen Knoten.
- Festlegung der Finiten Elemente, die weiter zerlegt werden sollen, und anschließende Verfeinerung.
- Neuberechnung der Näherungsfunktion $\tilde{\phi}$.

Dieses Schema wird solange durchlaufen, bis die gewünschte Genauigkeit der Lösungsfunktion erreicht ist.

Im Folgenden sind abschließend noch einmal die Vor- und Nachteile des Finite Elemente (FE) Verfahrens aufgezeigt.

- **Vorteile**

Das FE-Verfahren erlaubt die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen, deren Definitionsbereich krummlinig berandet ist.

- Man benötigt keine finiten Differenzen, sondern muß stattdessen Integrale auf den Finiten Elementen berechnen. Dies erlaubt beispielsweise eine wesentlich exaktere Behandlung von Singularitäten.
- Durch das Ritzsche Variationsprinzip kann man durch partielle Integration die Ordnung der Ableitungen verringern.
- Durch adaptive Verfeinerung wird der Rechenaufwand nur dort lokal erhöht, wo die Abweichung zur exakten Lösung am größten ist.

- **Nachteile**

Das FE-Verfahren erfordert sicherlich eine intelligente Algorithmik und Verwaltung von Speicherplatz.

- Die Differentialgleichung muß in eine entsprechende Integralgleichung überführbar sein.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Creutz, “Quarks, Gluons, and Lattices”, *Cambridge 1983*
- [2] B. Petersson, “Lattice Results on Finite-Temperature QCD: A Status Report”, *Nucl. Phys.* **A525** (1991) 237c
- [3] T. Matsui, H. Satz, *Phys. Lett.* **B178** (1986) 416
- [4] T. A. DeGrand, C. E. DeTar, *Phys. Rev.* **D34** (1986), 2469
- [5] K. Kanaya, H. Satz, *Phys. Rev.* **D34** (1986), 3193
- [6] P. Koch, J. Rafelski und B. Müller, “Strangeness in Relativistic Heavy-Ion Collisions”, *Phys. Rep.* **142** (1986) 167
- [7] J. Rafelski, “Strange anti-baryons from quark-gluon plasma”, *Phys. Lett.* **B262** (1991) 333
- [8] B. Andersson, G. Gustafson, B. Nielsson-Almquist, *Nucl. Phys.* **B281** (1987) 289
- [9] K. Werner, *Z. Phys.* **C42** (1989) 85
- [10] H. Sorge, H. Stöcker and W. Greiner, *Nucl. Phys.* **A498** (1989) 567c
- [11] X.-N. Wang and M. Gyulassy, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 3501
- [12] K. Geiger and B. Müller, *Nucl. Phys.* **B369** (1992) 600
- [13] K. Geiger, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3669
- [14] J. Ellis, K. Geiger, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 1500
- [15] E. V. Shuryak, *Phys. Rep.* **C61** (1980), 71, *The QCD Vacuum, Hadrons and the Superdense Matter*, (Singapore, World Scientific Lecture Notes in Physics), (1988)
- [16] L. Willets, *Nontopological Solitons*, Lecture Notes in Physics, Vol. 24 (World Scientific, Singapore 1989)

- [17] U. Kalmbach, T. Vetter, T. S. Biró and U. Mosel, Nucl. Phys. **A563** (1993) 584
- [18] T. Vetter, T. S. Biró and U. Mosel, Nucl. Phys. **A581** (1995) 598
- [19] U. Kalmbach, *Eine relativistische Transporttheorie für Quarks zur Beschreibung von Nukleon-Nukleon Kollisionen*, Dissertation Universität Giessen (1993)
- [20] T. Vetter, *Das Friedberg-Lee Modell in einer relativistischen Transporttheorie*, Dissertation Universität Giessen (1994)
- [21] H.Th. Elze, U. Heinz, Phys. Rep. 183 (1989), 81
- [22] R. Friedberg and T.D. Lee, Phys. Rev. **D15** (1977) 1694 und **D16** (1977) 1096
- [23] J. E. Mandula, Phys. Rev. **D14** (1976), 3497
- [24] M. Magg, Phys. Lett. **B74** (1978), 246
- [25] K. Cahill, Phys. Rev. Lett. **41** (1978), 599
- [26] H. Arodz, Phys. Lett. **B78** (1978) 129
- [27] R. A. Freedman, L. Wilets, S. D. Ellis, E. M. Henley, Phys. Rev. **D22** (1980), 3128
- [28] R. Jackiw, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rev **D20** (1979), 474
- [29] H. Feldmeier, P. Danielewicz, *Fast numerical solution of the Poisson equation on a three dimensional grid*, MSU-preprint (1992) MSUCL-833
- [30] P. Sikivie, N. Weiss, Phys. Rev **D18** (1978), 3809 und Phys. Rev. **D20** (1979), 487
- [31] G. Gatoff, A. K. Kerman, D. Vautherin, Phys. Rev **D38** (1988), 96
- [32] G. Gatoff, *(2+1)-dimensional chromohydrodynamics of for relativistic heavy-ion collisions*, Oak-Ridge-preprint, ORNL-CCIP-91-24 (1991)
- [33] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, harwood academic publishers (1981)
- [34] R. Friedberg and T.D. Lee, Phys. Rev. **D18** (1978) 2623
- [35] T. D. Lee and Y. Pang, *Nontopological Solitons*, Phys. Rep. **221** (1992), 251

- [36] R. Goldflam and L. Wilets, Phys. Rev. **D25** (1982) 1951
- [37] R. Horm, R. Goldflam, L. Wilets, Comp. Phys. Comm. **42** (1986), 105
- [38] L. Wilets, M. C. Birse, G. Lübeck, E. M. Henley, Nucl. Phys. **A434** (1985), 129
- [39] G. Lübeck, M. C. Birse, E. M. Henley, L. Wilets, Phys. Rev **D33** (1986), 234
- [40] G. Lübeck, E. M. Henley, L. Wilets, Phys. Rev **D35** (1987), 2809
- [41] M. Bickeböller, M.C. Birse, H. Marschall and L. Wilets, Phys. Rev. **D31** (1985) 2892
- [42] P. Tang, L. Wilets, J. Math. Phys. **31** (1990) 1661
- [43] M. Bickeböller, M.C. Birse and L. Wilets, Z. Phys. **A326** (1988) 89
- [44] L. Bayer, H. Forkel, W. Weise, Z. Phys. **A324** (1986), 365
- [45] G. Fai, R. J. Perry, L. Wilets, Phys. Lett. **B208** (1988), 1
- [46] G. Krein, P. Tang, L. Wilets, A. G. Williams, Phys. Lett. **B212** (1988), 362
- [47] G. Krein, P. Tang, L. Wilets, A. G. Williams, Nucl. Phys. **A523** (1991), 548
- [48] T. D. Lee, Phys. Rev. **D19** (1979) 1802
- [49] U. Mosel, *Fields, Symmetries and Quarks*, McGraw-Hill (1989)
- [50] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis, Phys. Rev. **D 12** (1975), 2060
- [51] K. Ishikawa, G. Schierholz, M. Teper, Phys. Lett. **B116** (1982) 429
- [52] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [53] U. Post, *Statische und dynamische mean-field-Rechnungen im Rahmen zweier relativistischer Feldtheorien mit Quarks*. Dissertation, Universität Gießen, unveröffentlicht, (1988)
- [54] W. Cassing, V. Metag, U. Mosel, K. Niita, Phys. Rep. **188** (1990) 363

- [55] H. Stöcker et al. , *VUU and RQMD-Model of high energy heavy-ion collisions*, Nucl. Phys. **A538** (1992) 53c
- [56] S. K. Wong, Nuovo Cimento **A 65** (1970) 689
- [57] S. L. Adler und R. F. Dashen, *Current Algebras*, (Benjamin, New York, 1968)
- [58] U. Heinz, Ann. Phys. **173** (1987) 462
- [59] H. Th. Elze, M. Gyulassy und D. Vasak, Nucl. Phys. **B276** (1986) 706
- [60] Particle Data Group Booklet (1994) 17j
- [61] T. Matsui, H. Satz, Phys. Lett. **B178** (1986) 416
- [62] D. H. Perkins, *Hochenergiephysik*, Addison-Wesley (1990)
- [63] H. B. Nielsen, A. Patkos, Nucl. Phys. **B195** (1982) 137
- [64] M. C. Birse, Prog. Part. Nucl. Phys. **A448** (1990) 557
- [65] Q. Haider, L. C. Liu, J. Phys. **G12** (1986) L75
- [66] L. R. Dodd, A. G. Williams, Phys. Lett. **B210** (1988) 10
- [67] N. Aoki, H. Hyuga, Nucl. Phys. **A505** (1989) 525
- [68] S. Sahu, Nucl. Phys. **A554** (1993) 721
- [69] H. P. Pavel, P. M. Brink, Z. Phys. **C51** (1991) 119
- [70] M. Grabiak, M. Gyulassy, J. Phys. **G 17** (1991), 583
- [71] I. D. Flintoft, M. C. Birse, J. Phys. **G 19** (1993), 389
- [72] L. Wilets, R. D. Puff, Phys. Rev **C 51** (1995), 339
- [73] W. F. Mitchell, *Unified Multilevel Adaptive Finite Element Methods for Elliptic Problems*, PhD Thesis Unversity of Illinois, (1988)
- [74] W. Koepf, L. Wilets, S. Pepin, Fl. Stancu, Phys. Rev. **D50** (1994) 614
- [75] T. S. Biro, B. H. Nielsen, J. Knoll, Nucl. Phys. **B245** (1984) 449
- [76] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664
- [77] N. K. Glendenning, T. Matsui, Phys. Rev. **D28** (1983) 2890

- [78] K. Sailer, Th. Schönfeld, A. Schäfer, B. Müller, W. Greiner, Phys. Lett. **B240** (1990) 381
- [79] K. Sailer, Z. Hornyak, A. Schäfer, W. Greiner, Phys. Lett. **B287** (1992) 349
- [80] K.Sailer, Th. Schönfeld, Zs. Schram, A. Schäfer, W. Greiner, Jour. Phys **G** (1991), Nucl. Part. Phys. **17** 1005
- [81] C. Wong, R. Wang, J. Wu, Phys. Rev. **D51** (1995) 3940
- [82] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper, E. Mottola, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 2427
- [83] C. Baglin et al. , Phys. Lett. **B220** (1989) 471, Phys. Lett. **B255** (1991) 459, Phys. Lett. **B270** (1991) 105
- [84] C. Gerschel, J. Hüfner, Z. Phys. **C56** (1992) 171
- [85] S. Gavin, R. Vogt, Nucl. Phys. **B345** (1990) 104, Nucl. Phys. **A566** (1994) 287c
- [86] S. Loh, C. Greiner, U. Mosel, nucl-th/9701062
- [87] W. Ehehalt, W. Cassing, Nucl. Phys. **A602** (1996) 449
- [88] B. Andersson, G. Gustafsson, G. Ingelmann, T. Sjöstrand, Phys. Rep. **97** (1983) 33
- [89] H. Kitagawa, Nucl. Phys. **A487** (1988) 544
- [90] A. Drago, K. Bräuer, A. Fässler, J. Phys. **G15** (1989) L7
- [91] T. Neuber, M. Fiolhais, K. Goeke, J. N. Urbano, Nucl. Phys. **A560** (1993) 909
- [92] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, New York, (1980)
- [93] C. Y. Wong, Phys. Rev. **C 45** (1982) 1460
- [94] P. G. Reinhardt, R. Y. Cusson, *A comparative study of Hartree-Fock iteration techniques*, Nucl. Phys. **A378** (1982) 418
- [95] A. Lang, *Dynamik von Schwerionenkollisionen im Rahmen eines mikroskopischen Modells*. Dissertation, Universität Gießen, unveröffentlicht, (1991)

- [96] L. Hernquist, N. Katz, *Treesph: A unification of sph with the hierarchical tree method*, *Astrophys. J. Supplement* **70** (1989) 419
- [97] C. Traxler, *An Algorithm for Adaptive Mesh Refinement in n Dimensions*, *Computing* (in print)

Danksagung

Diese Arbeit entstand unter der Leitung von Prof. Dr. Ulrich Mosel, dessen Rat und Hilfe zum Fortgang dieser Arbeit entscheidend beigetragen hat. Über wissenschaftlichen Rat hinaus habe ich von Prof. Mosel Verständnis und Förderung erhalten, für die ich mich an dieser Stelle sehr herzlich bedanken möchte.

Bei den Herren Dr. Markus Thoma, Dr. Carsten Greiner und Dr. Tamas Biró möchte ich mich für die intensive Zusammenarbeit bedanken. Sie haben durch zahlreiche Diskussionen entscheidend zum Fortgang dieser Arbeit beigetragen.

Bei meinen Kollegen und Freunden Steffen Hardt, Jörn Häuser und Christoph Traxler möchte ich mich ebenfalls bedanken. Sie hatten stets ein offenes Ohr für physikalische, als auch nichtphysikalische Fragestellungen.

Mein Dank gilt auch den restlichen Mitgliedern der Arbeitsgruppe, in der ein lockeres und angenehmes Arbeitsklima herrschte, das das tägliche Arbeiten erheblich erleichtert hat.

Bei der Berichtigung von Druckfehlern und als Berater in Stilfragen standen mir Christoph Traxler, Dr. Carsten Greiner und Dr. Markus Thoma zur Seite. In organisatorischen Fragen war mir Elke Szauter immer behilflich und bei der Organisation von Fachliteratur war Christiane Pausch eine große Hilfe. Ihnen allen sei dafür herzlich gedankt.

Schließlich möchte ich noch meinen Eltern für die langjährige Unterstützung meines Studiums danken, ohne die diese Arbeit sicherlich nicht geschrieben worden wäre.