

# Farbfelder und Quarkpotentiale im Chromo-Dielektrischen Modell

Dissertation  
zur Erlangung des  
Doktors der Naturwissenschaften

vorgelegt bei den  
Naturwissenschaftlichen Fachbereichen  
der Justus-Liebig-Universität Gießen

von  
Gunnar Martens  
aus Bremen

**2004**

Dekan: Prof. Dr. Volker Metag  
1. Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Mosel  
2. Gutachter: Prof. Dr. Werner Scheid  
Tag der mündlichen Prüfung: 19. November 2004

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Das Confinement-Phänomen . . . . .	6
1.1.1	Modelle für das Confinement . . . . .	10
1.1.2	Motivation dieser Arbeit . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Das Chromo-Dielektrische Modell</b>	<b>15</b>
2.1	Die CDM-Lagrange-Dichte . . . . .	16
2.2	Die Modell-Bewegungsgleichungen . . . . .	21
2.2.1	Die Ladungen der Quarks . . . . .	22
2.3	Die CDM-Energiedichte . . . . .	24
2.4	Statische Konfigurationen . . . . .	26
2.5	Symmetrien des Modells . . . . .	28
2.5.1	Lokale Eichsymmetrie . . . . .	28
2.5.2	Diskrete Farbroationen . . . . .	29
2.5.3	Invariante $q\bar{q}$ - und $qqq$ -Zustände . . . . .	32
2.6	Energie ausgedehnter Zustände . . . . .	35
2.6.1	Mesonische $q\bar{q}$ -Zustände . . . . .	36
2.6.2	Baryonische $qqq$ -Zustände . . . . .	38
2.7	Phänomenologie des Modells . . . . .	40
2.7.1	Bag-Modell . . . . .	40
2.7.2	CDM-Ergebnisse . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Die Parameter des Modells</b>	<b>53</b>
3.1	Variation der Parameter . . . . .	56
3.1.1	Die Bag-Konstante $B$ . . . . .	56
3.1.2	Die Glueball-Masse $m_g$ . . . . .	58
3.1.3	Der Vakuumswert $\sigma_{vac}$ . . . . .	59
3.1.4	Die Kopplungs-Konstante $g_s$ . . . . .	60
3.1.5	Der dielektrische Vakuumswert $\kappa_{vac}$ . . . . .	61
3.2	Wahl der Parameter . . . . .	64

<b>4</b>	<b>Zwei- und Drei-Quark-Systeme</b>	<b>71</b>
4.1	$q\bar{q}$ -Flussschläuche . . . . .	71
4.1.1	Profile von Feldern und Energien . . . . .	71
4.1.2	CDM und der duale Supraleiter . . . . .	74
4.1.3	Das $q\bar{q}$ Potential . . . . .	76
4.1.4	Casimir Scaling . . . . .	80
4.2	$qqq$ -Zustände . . . . .	82
4.2.1	Felder und Energiedichten . . . . .	87
4.2.2	Das $qqq$ -Potential . . . . .	91
4.2.3	Diskussion des $qqq$ -Zustands . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Stabilität von Flussschläuchen</b>	<b>97</b>
5.1	Flussschläuche in äußeren Feldern . . . . .	97
5.1.1	Felder und Energiedichten . . . . .	102
5.1.2	Das $q\bar{q}$ -Potential im Hintergrundfeld . . . . .	112
5.2	Fragmentation durch Paarerzeugung . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Multiquark-Systeme</b>	<b>123</b>
6.1	Wechselwirkung zwischen Strings . . . . .	123
6.1.1	4-Teilchen Flussschläuche . . . . .	124
6.2	Das 4-Quark Potential . . . . .	129
6.3	Quarkphasen . . . . .	134
6.3.1	Das kalte Quark-Gluon-Plasma . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>141</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	141
7.2	Ausblick . . . . .	144
<b>A</b>	<b>Der FAS-Algorithmus</b>	<b>149</b>
A.1	Diskretisierung . . . . .	150
A.2	Grob-Gitter-Korrekturen . . . . .	154
A.2.1	Relaxations-Methode . . . . .	155
A.2.2	Fehler-Korrektur . . . . .	159
A.2.3	Gittertransfer . . . . .	161
A.3	Mehrgitter-Verfahren . . . . .	163
A.3.1	Vollständiger Mehrgitter-Algorithmus . . . . .	165
A.3.2	Nichtlinearer FAS . . . . .	166
A.3.3	Numerische Komplexität . . . . .	169
A.3.4	Effizienz des Algorithmus . . . . .	170
<b>B</b>	<b>SU(3) Yang-Mills Theorie</b>	<b>173</b>
B.1	Elemente der SU(3) Algebra . . . . .	173
B.2	Eichsymmetrie der QCD . . . . .	175

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	iii
B.3 Farbneutrale Zustände . . . . .	177
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>181</b>
<b>Danksagung</b>	<b>195</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Vorstellung vom Aufbau der Materie hat sich ständig erweitert und verfeinert. Von der Atom-Hypothese von Leukipp und Demokrit aus dem 5. Jahrhundert vor unserer heutigen Zeitrechnung bis zur Entschlüsselung der Atomstruktur durch Rutherford und seine Mitarbeiter Anfang des 20. Jahrhunderts sind immerhin noch mehr als 2000 Jahre vergangen. Durch die Methoden der modernen Wissenschaft hat sich die weitere Beschreibung des Atoms stark beschleunigt. Heute — also nur weitere 100 Jahre später — wissen wir von den Protonen und Neutronen des Atomkerns, sowie von den Elektronen, die den Kern umgeben und das Atom bilden. Neben den Kernbausteinen Proton und Neutron sind heute eine Vielzahl dieser sog. Hadronen bekannt. Gell-Mann und Zweig führten in den 60er Jahren zur Erklärung des Massenspektrums dieser Hadronen erstmals die Hypothese von den Quarks als Substruktur der Hadronen ein. Mit den ursprünglich drei Quarks, die sich durch die innere Quantenzahl *Flavor* unterscheiden, und den dazugehörigen Antiquarks kann bereits das Massenspektrum vieler Hadronen erklärt werden. Dieses Spektrum folgt aus der Annahme, dass die Quarks fundamentale Elemente aus der mathematischen Gruppe  $SU(3)$  des Flavors sind. Die Entdeckung weiterer Hadronen mit zusätzlichen Eigenschaften machte die Erweiterung auf sechs verschiedene Flavors nötig.

Der Widerspruch dieses Quark-Modells zum Pauli'schen Ausschlussprinzip führte zur zusätzlichen Quantenzahl *Farbe*. Eine Theorie für die Dynamik der Quarks in den Hadronen und damit für die starke Wechselwirkung entwickelte sich später mit der Quantenchromodynamik (QCD). Diese Theorie ist auf Grund ihrer lokalen Eichinvarianz ähnlich zur Theorie der elektrisch geladenen Teilchen und ihrer Felder, der Quantenelektrodynamik (QED). Die Quantenzahl Farbe hat allerdings eine 3-zählige Vielfachheit, so dass die QCD durch eine lokale  $SU(3)$ -Eichgruppe beschrieben wird. In der QED wird die Wechselwirkung zwischen den elektrisch geladenen Teilchen durch den Austausch von Photonen beschrieben. Die Photonen sind elektrisch neutral und können nicht direkt miteinander wechselwirken. Durch die Gruppenstruktur der QCD werden für die Wechselwirkung von farbgeladenen Quarks acht verschiedene Austauscheteilchen

benötigt. Diese sog. *Gluonen* tragen selbst eine Ladung und können somit auch direkt miteinander wechselwirken.

Elektrisch geladene Teilchen und farbgeladene Quarks werden also durch formal ähnliche Theorien beschrieben. Der Rückschluss, dass sich diese beiden Gruppen von Teilchen auch ähnlich verhalten, trifft allerdings nicht zu. Es folgt direkt aus der Analyse der QED und der QCD, dass die Stärke der Wechselwirkung, ausgedrückt durch die jeweilige Kopplungskonstante, nicht wirklich konstant ist. Sie ist vielmehr skalenabhängig, d.h. sie variiert mit dem typischen Impulsübertrag der zu untersuchenden Reaktion. Die Kopplung der QCD zeigt dabei ein grundsätzlich verschiedenes Verhalten als die der QED. Für sehr große Impulsüberträge bzw. sehr kleine räumliche Abstände nimmt die Kopplung der QCD ab. Diese Eigenschaft der QCD nennt man die asymptotische Freiheit. Dadurch lassen sich Prozesse mit hohem Impulsübertrag, wie sie z.B. bei der tiefinelastischen Elektron-Nukleon-Streuung auftreten, mit den Methoden der Störungstheorie beschreiben. Andererseits nimmt die Kopplung bei niederenergetischen Prozessen, wie sie typischerweise bei der Beschreibung von Hadronen auftreten, zu und störungstheoretische Methoden sind nicht mehr anwendbar.

Neben dem Phänomen der asymptotischen Freiheit, das sich direkt aus der QCD ableiten lässt, steht das Phänomen des *Confinements*.<sup>1</sup> Confinement ist die experimentelle Tatsache, dass sich die Quarks nicht aus dem Verbund des Hadrons isolieren lassen. Es ist zu vermuten, dass dieses Phänomen im engen Zusammenhang mit der Zunahme der Kopplungskonstanten steht. Allerdings verhindert gerade der große Wert der Kopplungskonstanten eine systematische Analyse des Hadrons. Eine direkte und eindeutige Ableitung des Confinements aus der QCD steht deshalb immer noch aus.

Confinement tritt bei den übergeordneten Strukturen der Materie nicht auf. So lassen sich Atome aus dem Festkörper lösen, aus dem Atom lassen sich die Elektronen vom Atomkern trennen und selbst der Atomkern lässt sich in seine Bestandteile aufspalten. Ein Proton oder Nukleon dagegen lässt sich nicht auf einfache Art und Weise in seine Quarkbestandteile zerlegen. Es stellt sich damit die Frage, wie der experimentelle Befund des Confinements mikroskopisch, also auf Grund der Dynamik der Quarks und ihrer Wechselwirkungen, verstanden werden kann. Genau diese Eigenschaft der stark wechselwirkenden Quarks ist der Inhalt der vorliegenden Arbeit. In ihrem Verlauf werden wir das Confinement näher erläutern und einen Erklärungsansatz im Rahmen des sog. *Chromo-Dielektrischen Modell* liefern.

Die Struktur dieser Arbeit gliedert sich wie folgt:

- In den folgenden Abschnitten dieser **Einleitung** werden wir das Phänomen des Confinement kurz erläutern. Dazu diskutieren wir verschiedene

---

<sup>1</sup>Confinement, zu deutsch: Einschluss. Dieser englische Begriff hat sich auch im deutschen Sprachgebrauch durchgesetzt.

alternative Modelle und vergleichen sie mit dem hier verwendeten Chromo-Dielektrischen Modell.

- In **Kapitel 2** werden wir das Chromo-Dielektrische Modell (CDM) vorstellen. Ausgehend von der CDM-Lagrange-Dichte leiten wir die Bewegungsgleichungen her und diskutieren die damit verbundene Energiedichte. Das Modell ist in Anlehnung an die QCD konstruiert. Die gluonischen Freiheitsgrade der QCD werden im CDM in einer Abel'schen Näherung wiedergegeben. Wir diskutieren die damit verbundene Einschränkung der QCD-Farbgruppe auf eine Abel'sche Untergruppe und identifizieren die im CDM noch erhaltenen kontinuierlichen und diskreten Symmetrien im Farbraum. Die Farbsymmetrie beschreiben wir an Hand von Zwei- und Drei-Teilchen-Systeme. Die Quarks und die Gluonen beschreiben wir durch klassische Farbladungsdichten und klassische Felder. Dadurch vernachlässigen wir die quantenmechanisch geforderten Überlagerungen bzw. Antisymmetrisierungen der Farbwellenfunktion von Mehrteilchen-Zuständen. Wir finden allerdings, dass die Energiedichte solcher Zustände in unserer klassischen Näherung identisch ist mit jener mit einer entsprechenden quantenmechanischen Beschreibung. Wir schließen das Kapitel ab mit einer phänomenologischen Beschreibung des Modells und vergleichen es mit der Phänomenologie des sog. Bag-Modells.
- In **Kapitel 3** beschreiben wir zunächst den Einfluss der Modellparameter auf ein Quark-Antiquark- ( $q\bar{q}$ )-System. Zwischen dem Quark und dem Antiquark bilden sich schlauchartige Felder aus. Wir interessieren uns hauptsächlich für die räumliche Verteilung der Felder und die dazugehörige Energiedichte – mit besonderem Augenmerk auf das Profil der Energiedichte, d.h. auf die Energieverteilung in der zentralen Ebene zwischen den Quarks. Aus dieser Energiedichte ergibt sich die Gesamtenergie des Systems, die wir als Funktion des Teilchenabstandes beschreiben. Dieses  $q\bar{q}$ -Potential kann im CDM für große Quark-Abstände sehr gut durch ein linear steigendes Confinement-Potential beschrieben werden. Wir studieren die Abhängigkeit des Profils der Energiedichte als auch des  $q\bar{q}$ -Potential von den Modellparametern. Die Modellparameter haben zum Teil eine Entsprechung im Bag-Modell, so dass wir das Ergebnis der Parameteranalyse mit den Erwartungen im einfacheren Bag-Modell für  $q\bar{q}$ -Flussschläuche vergleichen können.

Anschließend vergleichen wir die CDM-Ergebnisse für das  $q\bar{q}$ -System mit solchen in SU(2)- und SU(3)-Gitterrechnungen. Wir wählen die Parameter unseres Modells so, dass wir die bestmögliche Übereinstimmung mit den Gitterresultaten erlangen. Dabei wählen wir drei verschiedene Strategien. In der ersten lassen wir alle Modellparameter frei und suchen den optimalen Parametersatz zur Beschreibung der  $q\bar{q}$ -Gitterergebnisse. In den

anderen beiden Strategien fixieren wir schrittweise die Modellparameter, indem wir ihnen Standardwerte aus der Literatur zuweisen. In dieser Arbeit verwenden wir eine Formulierung des CDMs, die allein die gluonischen Freiheitsgrade der QCD beschreibt. Die Quarks treten in dieser Beschreibung lediglich als äußere Quellen auf. In vorangegangenen Arbeiten (siehe z.B. [Goldflam82, Wilets89]) wurde das CDM zur Beschreibung hadronischer Eigenschaften verwendet, in denen die Quarks explizite dynamische Freiheitsgrade waren. Die Modellparameter dort weichen deshalb teilweise stark von den von uns verwendeten ab

- In **Kapitel 4** analysieren wir die Felder, Energiedichten und Potentiale von  $q\bar{q}$ -Flussschläuchen und von 3-Quark-Zuständen  $qqq$  mit den Parametersätzen, die wir in Kapitel 3 erhalten haben. Wir untersuchen hier sehr detailliert die Zusammensetzung des  $q\bar{q}$  Flussschlauches aus seinen verschiedenen Energieanteilen. Wir stellen dort fest, dass das naive Bild des Flussschlauches mit konstantem Querschnitt nicht aufrecht erhalten werden kann. Wir untersuchen die transversale Ausdehnung des Quarks als Funktion des Quarkabstandes und geben eine charakteristische Länge an, ab der der Flussschlauch seine asymptotische Form annimmt. Wieder vergleichen wir unsere Rechnungen mit vorhandenen Gitterrechnungen. Zusätzlich vergleichen wir auf der Ebene des aus dem CDM-Modell extrahierten magnetischen Stroms unsere Ergebnisse mit solchen im Modell des *dualen Supraleiters*. Wir stellen hier eine qualitative Übereinstimmung fest.

Im baryonischen 3-Quark-Zustand konzentrieren wir uns auf die geometrische Form und das damit verbundene Skalieren der Gesamtenergie des Systems mit seiner Größe. Damit entscheiden wir im Rahmen unseres Modell zwischen zwei alternativen Beschreibungsweisen, die dieses baryonische System beschreiben, der sog.  $Y$ - und der  $\Delta$ -Konfiguration der Flussschläuche. In der ersten bildet sich ein zentraler Punkt, in dem sich die Flussschläuche der drei einzelnen Quarks treffen und die Energie skaliert mit der Länge der  $Y$ -artigen Flussschläuche. In der  $\Delta$ -artigen Beschreibung ändert sich die effektive Stringspannung und die Energie skaliert mit der Kantenlänge der Dreieckskonfiguration der drei Quarks. Dieses Verhalten lässt sich für kleine Quarkabstände durch eine perturbative Rechnung verstehen. Diese Frage wird seit langem in der Literatur diskutiert. Gitterergebnisse lassen auf Grundlage des Potentials bis jetzt keinen eindeutigen Schluss zu. Wir werden sehen, dass sich das System für moderat große Ausdehnung mit der  $\Delta$ -Hypothese beschreiben lässt. Die von der QCD erwartete  $Y$ -Ausprägung der Flussschläuche setzt erst für charakteristische Größen von ungefähr 2 fm ein. Wir erklären dieses späte Ausbilden der nicht-perturbativen  $Y$ -Flussschläuche durch die typische transversale Ausdehnung der Flussschläuche, die in der Größenordnung von etwas unter einem Fermi liegt.

- Die 2- und 3-Quark-Systeme sind im Vakuum stabil. In **Kapitel 5** wenden wir uns der Frage nach der Stabilität der Flussschläuche bei äußeren Störungen zu. Dazu konzentrieren wir uns auf zwei mögliche Anregungen. Zum einen studieren wir  $q\bar{q}$ -Flussschläuche in einem äußeren farbelektrischen Feld und zum anderen diskutieren wir die Möglichkeit des Stringaufbruchs durch Quark-Paarbildung. Im ersten Fall stellen wir uns das Szenario einer Schwerionenkollision vor, in der durch mehrfache Farbaustausch-Wechselwirkungen der einzelnen Nukleonen ein starkes Hintergrundfeld entsteht, in dem die  $q\bar{q}$ -Paare eingebettet sind. Ein äußeres Feld bricht die Isotropie des Raumes und zeichnet eine Vorzugsrichtung im internen Raum der Farbfreiheitsgrade aus. Wir untersuchen die Form und das Potential des Flussschlauches für verschiedene Orientierungen im Farbraum und für verschiedene räumliche Lagen des Flussschlauches und finden ein allmähliches zerfließen des Flussschlauches. Wir geben eine kritische Feldstärke und die entsprechende Hintergrundenergie des äußeren Feldes an, ab der ein  $q\bar{q}$ -Flussschlauch nicht mehr gebunden ist und das System dissoziiert.
- **Kapitel 6** steht im Zeichen der Wechselwirkung von weißen Clustern untereinander. Wir beschäftigen uns erst mit der Wechselwirkung zwischen  $q\bar{q}$ -Strings. Diese analysieren wir für verschiedenen Stringlängen und für verschiedene relative Orientierungen zueinander. Wir finden kurzreichweitige Kräfte zwischen den Strings, deren Reichweite und Stärke abhängig von der Länge und der Orientierung ist. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir das Verhalten von ungeordneten Quarks mit variierender Teilchenzahl untersuchen. Wir stellen dort fest, dass die Größe der sich bildenden Bagstrukturen, als auch der energetische Inhalt der Bags stark von der Quarkdichte abhängig ist. Für große Quarkdichten stellt sich das System der Quarks wie ein freies Gas dar, das allein durch langreichweitige farbelektrische Coulomb-Felder beschrieben werden kann. Dieser Übergang von der hadronischen Phase in die partonische Phase vollzieht sich kontinuierlich mit steigender Dichte.
- Im letzten **Kapitel 7** fassen wir die gefunden Ergebnisse noch einmal zusammen und geben einen Ausblick auf mögliche weitere Untersuchungen.
- Ergänzende Information finden sich in den beiden Anhängen. Im ersten (**Anhang A**) stellen wir den von uns gewählten numerischen Algorithmus vor. Die CDM-Bewegungsgleichungen lassen nur analytische Lösungen von trivialen also ladungsfreien Systemen zu. Der Satz von gekoppelten partiellen Differential-Gleichungen ist durch die Einführung eines skalaren Potentials  $U$  und einer dielektrischen Funktion  $\kappa$  stark nicht-linear. Für solche Probleme kann man nicht mehr auf Standardalgorithmen zurückgreifen. Deshalb stellen wir den verwendeten Algorithmus und seine Wirkungsweise sehr ausführlich vor.

Im zweiten **Anhang B** stellen wir einige Beziehungen aus der  $SU(3)$ -Farbgruppe zusammen, die wir zum besseren Verständnis der vorliegenden Arbeit benötigen.

## 1.1 Das Confinement-Phänomen

Alle Materie, wie sie sich im Alltag für uns darstellt ist aus den Hadronen aufgebaut. Hadronen sind alle Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, und deren Konstituenten die Quarks sind. Die Hadronen werden je nach ihrem Quarkinhalt in Mesonen, bestehend aus einem Quark-Antiquark-Paar, und Baryonen, bestehend aus je drei Quarks, unterschieden. Die Confinement-Hypothese postuliert in einer einfachen Formulierung, dass es unmöglich ist, ein einzelnes Quark aus dem Hadron zu lösen. Diese Vorstellung impliziert bereits ein gängiges Bild. Bei dem Versuch, ein Quark aus dem Hadronenverband zu lösen, gibt es einen Mechanismus, der das Quark selbst bei beliebig großen Abständen wieder zurücktreibt. Dieser Mechanismus ist leicht in der Wechselwirkung zwischen den Quarks zu suchen. Zwischen dem Quark und dem Restsystem entwickelt sich ein farbelektrisches Feld, das so geformt sein muss, dass die auf das Quark wirkende Rückstellkraft niemals verschwindet. Bei einem gewöhnlichen Coulomb-Feld, wie es zwischen elektrisch geladenen Teilchen herrscht, nimmt diese Rückstellkraft quadratisch mit dem inversen Abstand der Teilchen ab. Dieses inverse Abstandsgesetz ist eine Konsequenz des Coulomb-Gesetzes in drei Dimensionen. Das Coulomb-Gesetz in nur einer räumlichen Dimension liefert ein linear anwachsendes Potential, verbunden mit einer konstanten Kraft zwischen den Teilchen. Es liegt also nahe, das Confinement durch ein farbelektrisches Feld zwischen dem Quark und dem Resthadron zu erklären, dass sich im Wesentlichen nur auf der Verbindungsachse zwischen den beiden Teilsystemen ausbreitet. Das farbelektrische Feld schnürt sich auf einen schlauchartigen Bereich mit einer charakteristischen transversalen Ausdehnung ein. Dieses Objekt nennt man auf Grund des eingesperren farbelektrischen Flusses einen *Farbflussschlauch*, oder auch *String*. Dieser nahezu eindimensionale Flussschlauch liefert sofort ein linear anwachsendes Potential, so dass die Kraft zwischen den Quarks niemals abnimmt.

Solch ein quasistatisches System lässt sich mit den störungstheoretischen Methoden der QCD nicht beschreiben. Mit der sog. Gitter-Eich-QCD hat sich allerdings in den letzten Jahrzehnten ein relativ mächtiges Instrument entwickelt, das speziell für nicht-perturbative Systeme geeignet ist [Creutz88]. Mit Hilfe eines 4-dimensionalen Raum-Zeit-Gitters mit endlicher Ausdehnung und endlichem Gitterabstand wird die QCD regularisiert, so dass für ausgewählte Systeme numerische Vorhersagen getroffen werden können. Die Gitter-QCD in der sog. *quenched* (unterdrückten) Näherung findet so tatsächlich für ein Quark und ein Antiquark ein Potential, das linear mit dem Abstand wächst (s. Abb. 1.1).

Das Stringbild und das entsprechende Potential hat sich zur Beschreibung

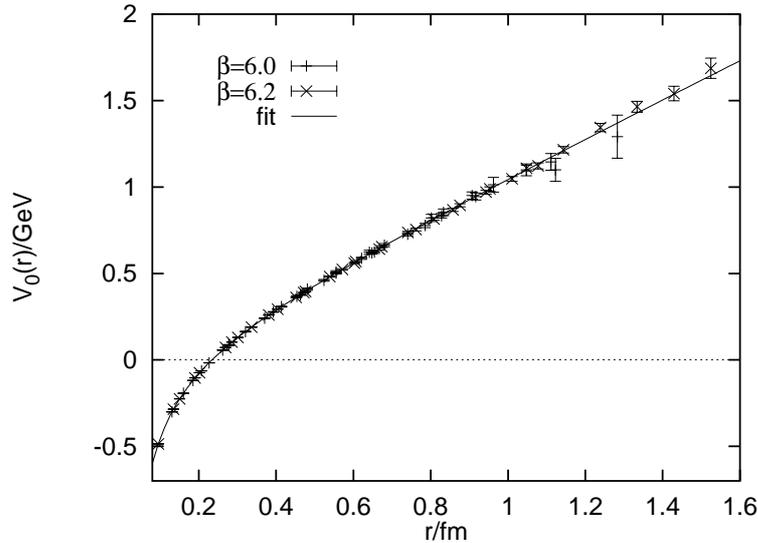


Abbildung 1.1: Das linear anwachsende Potential für ein Quark-Antiquark-Paar in der quenched Gitter-QCD. Abbildung entnommen aus [Bali97].

vieler hadronischer Eigenschaften bewährt. So liefert z.B. eine quantenmechanische Analyse eines Systems aus schweren Quarks mit der Annahme des linearen Potentials eine gute Beschreibung des Spektrums des Charmoniums und des Bottomiums [Eichten75, Quigg79, Eichten80]. Auch zur Beschreibung dynamischer Prozesse ist das Stringbild gut geeignet. Ein physikalischer String entsteht z.B. durch die Erzeugung eines hochenergetischen Quark-Antiquark-Paares bei der Elektron-Positron- $(e^+e^-)$ -Streuung. Solche Experimente werden z.B. am DESY<sup>2</sup> in Hamburg am SLAC<sup>3</sup> in Stanford/USA oder am LEP<sup>4</sup> in Genf/Schweiz durchgeführt. Die Energie des  $e^+e^-$ -Paares wird in ein  $q\bar{q}$ -Paar mit hohem Relativimpuls umgewandelt. Dieses Quark-Antiquark-Paar dehnt sich aus und bildet einen energiereichen String zwischen sich. Diese im String gespeicherte Energie wiederum kann zur Erzeugung neuer Hadronen umgesetzt werden. Diese Fragmentation des  $q\bar{q}$ -Strings wird z.B. im Lund-Modell gut reproduziert [Andersson83, Andersson87]. Ebenso findet das Stringbild Einzug in sog. Transportmodelle wie z.B. das BUU-Modell<sup>5</sup> [Effenberger99, Lehr00] und HSD<sup>6</sup> [Cassing99] aus Gießen oder das UrQMD-Modell<sup>7</sup> aus Frankfurt [Bass98]. Diese Modelle dienen zur dynamischen Simulation Photon/Elektron-induzierter Kernreaktionen oder zur Beschreibung einer Schwerionen-Kollision und machen implizit vom Stringbild gebrauch.

<sup>2</sup>DESY: Deutsches Elektronen Synchrotron

<sup>3</sup>SLAC: Stanford Linear Accelerator Center

<sup>4</sup>LEP: Large Electron-Positron collider, jetzt nicht mehr in Betrieb

<sup>5</sup>BUU: Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck

<sup>6</sup>HSD: Hadron-String Dynamics

<sup>7</sup>UrQMD: Ultra-relativistic Quantum Molecular Dynamics

Quark-Antiquark-Strings sind also ein angemessenes Objekt zur Beschreibung physikalischer Prozesse. Das Stringbild ändert sich allerdings, wenn man  $q\bar{q}$ -Paare in einer sehr heißen oder sehr dichten Umgebung betrachtet. Eine der interessantesten Erkenntnisse der Gitter-QCD brachte die Analyse eines stark wechselwirkenden Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. In Abb. 1.2 zeigen wir den Druck als thermodynamisches Potential (links) und die Energiedichte (rechts) des Systems als Funktion der Temperatur bei verschwindendem baryochemischem Potential [Karsch03]. Die Temperatur ist normiert auf eine kritische Temperatur  $T_c$ , Druck und Energiedichte sind normiert auf  $T^4$ . Die drei verschiedenen Kurven von unten nach oben entsprechen in beiden Bildern Rechnungen mit 2 leichten Quarks, mit 2 leichten und 1 schwerem Quark bzw. mit 3 leichten Quarks. Die jeweils mittlere kommt damit der physikalischen Realisation eines Systems aus up, down und strange Quarks am nächsten. Bei der kritischen Temperatur steigen sowohl der Druck als auch die Energiedichte stark an. Dieses

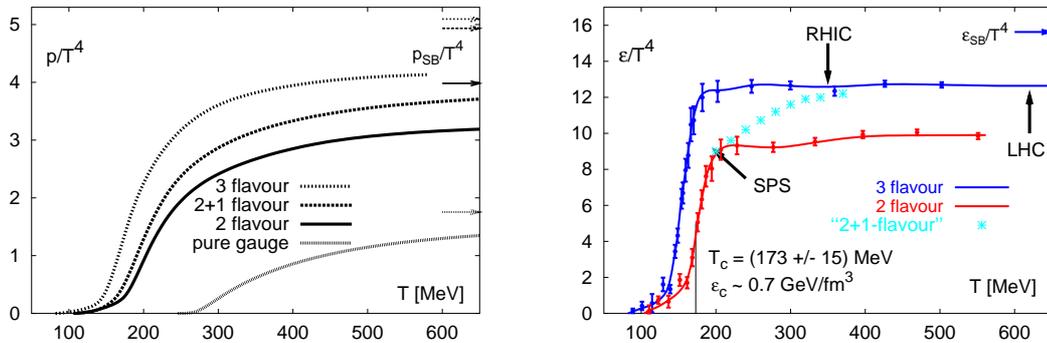


Abbildung 1.2: Der Druck (links) und die Energiedichte (rechts) eines stark wechselwirkenden Systems. Abbildung entnommen aus [Karsch03].

Verhalten ist typisch für einen Phasenübergang. Für Temperaturen  $T < T_c$  sind die Quarks im Hadron gebunden, ihre mittlere freie Weglänge liegt in der Größenordnung des Hadrons selbst. Für niedrige Temperaturen sind die Hadronen selbst die wesentlichen Freiheitsgrade. Bei Temperaturen um  $T \approx T_c$  steigt die Zahl der Freiheitsgrade stark an. Die mittlere freie Weglänge der Quarks steigt und sie werden nahezu frei. Der Phasenübergang beschreibt also einen Übergang von einer Phase mit Confinement zu einer ohne Confinement. Die kritische Temperatur bei verschwindendem chemischen Potential wird auf dem Gitter mit  $T_c \approx 170$  MeV [Fodor04a, Karsch04] angegeben. Die kritische Energiedichte beträgt dann  $\varepsilon_c \approx 0.7$  GeV/fm<sup>3</sup>. Die Ordnung des Phasenübergang ist sowohl abhängig von der Zahl der betrachteten Quarkflavors als auch von deren Masse. Für zwei leichte (up und down)-Quarks und ein schweres (strange) Quark mit realistischen Massen ergibt sich lediglich ein schneller Übergang (Crossover) [Fodor04b]. Gitterrechnungen sagen also einen Phasenübergang zu einem neuen Materiezustand voraus, in dem die Quarks nahezu frei sind. In der Abb. 1.2

zeigen die Pfeile den jeweiligen Wert des Drucks und der Energiedichte für ein ideales Gas an. Für die gezeigten Temperaturen  $T < 4T_c$  steigen die Werte auf 80% dieses Stefan-Boltzmann-Grenzwerts.

Solch einen Phasenübergang findet man ebenso bei Erhöhung des baryochemischen Potentials, also mit zunehmender Quarkdichte. Das Phasendiagramm der QCD stellt sich somit wie in Abb. 1.3 gezeigt dar. Neue theoretische Untersuchungen postulieren sogar noch weitere Phasenübergänge bei hohen Quarkdichten, wie z.B. der Übergang zum Farbsupraleiter [Schmitt02]. Den neuen Materiezustand bezeichnet man als Quark-Gluon-Plasma (QGP). Dieses ist eine Art Gas mit einer geringen Restwechselwirkung. Die Existenz des Quark-Gluon-Plasmas soll in Schwerionenreaktionen festgestellt werden [Matsui86]. Dabei werden schwere Atomkerne auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt und zur Kollision gebracht. Solche Experimente werden am SIS<sup>8</sup> bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt, am RHIC<sup>9</sup> in Brookhaven bei New York/USA und in Zukunft am LHC<sup>10</sup> am CERN in Genf/Schweiz durchgeführt. Die jeweils erreichten Schwerpunktsenergien sind dabei  $2 A \text{ GeV}$  (SIS),  $200 A \text{ GeV}$  (RHIC) und  $5500 A \text{ GeV}$  (LHC), wobei  $A$  die Massenzahl der verwendeten Kerne bezeichnet. Die dort erreichten Temperaturen und Quarkdichten sind so groß, dass der Phasenübergang zu sehen sein müsste.

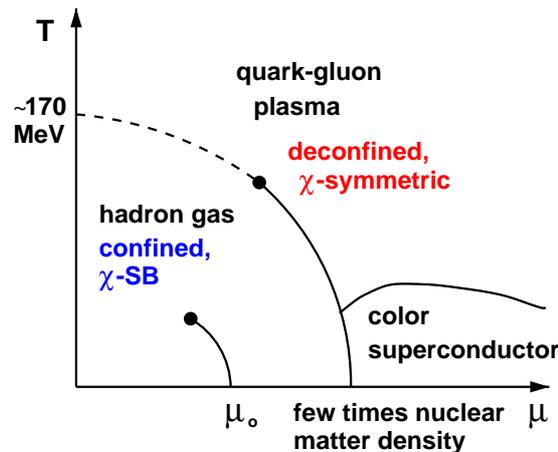


Abbildung 1.3: Das Phasendiagramm der QCD. Bei kleinen chemischen Potentials vermutet man einen Crossover zum QGP (gestrichelte Linie) der ab einem kritischen Potential  $\mu \approx 360 \text{ MeV}$  [Fodor04a] in einen Phasenübergang erster Ordnung übergeht (durchgezogene Linie). Abbildung entnommen aus [Karsch03].

Bis heute hat es leider kein eindeutiges Signal gegeben, das dieses QGP tatsächlich experimentell erzeugt worden ist. Zur theoretischen Beschreibung

<sup>8</sup>SIS: Schwerionen-Synchrotron

<sup>9</sup>RHIC: Relativistic Heavy Ion Collider

<sup>10</sup>LHC: Large Hadron Collider

dieser Hochtemperatur-Dichte-Phase gibt es aber zahlreiche Möglichkeiten. Da die Quarks nicht mehr im Hadron eingeschlossen sind und die Kopplung zwischen ihnen nicht mehr so groß ist, können wieder störungstheoretische Methoden angewendet werden. Hier nennen wir zum einen die thermische Feldtheorie [Blaizot02, Rebhan02] und zum anderen Transportmodelle auf Quark-Gluon-Ebene [Geiger95, Borchers00, Xu04, Hofmann00].

### 1.1.1 Modelle für das Confinement

Die a priori Beschreibung von  $q\bar{q}$ -Strings im Vakuum und in Materie, sowie von quasi freien Quarks liefert leider keine mikroskopische Erklärung für das Confinement selbst. Die Gitter-QCD ist lediglich in der Lage, ein lineares Potential für statische Quarks sowie den Phasenübergang für Gleichgewichtssysteme anzugeben, gibt aber keinen Hinweis auf den Mechanismus zur Hadronenbildung. Hier sind wir weiterhin auf Modelle angewiesen, die mehr oder weniger stark an die QCD angelehnt sind, und die das wesentliche Element der Confinement-Eigenschaft eindeutig extrahieren. Im Folgenden wollen wir kurz einige Modelle mit Confinement beschreiben.

**Das MIT-Bag-Modell** Das MIT-Bag-Modell <sup>11</sup> ist sicher das älteste Modell mit Confinement [Chodos74b, Chodos74a]. Allerdings gibt das Modell selbst keinen Mechanismus des Confinements an. Stattdessen nimmt das Modell einen Hohlraum – den Bag – a priori als gegeben an. Innerhalb dieses Hohlraums findet sich ein perturbatives Vakuum, d.h. hier lassen sich störungstheoretische Methoden anwenden. Der Bag ist eingebettet in das nicht-perturbative Vakuum eingebettet. Confinement für die Quarks wird in diesem Modell durch Randbedingungen an die Quark-Wellenfunktion eingeführt. Die Lagrangedichte für das Bag-Modell, ausgedrückt durch die Felder  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  für Quarks und Antiquarks, mit den Randbedingungen auf der Oberfläche  $S$  des Bags ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{Bag}} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi - B \quad , \quad (1.1a)$$

$$n_\mu j^\mu|_S = 0 \quad , \quad (1.1b)$$

wobei  $n^\mu$  ein Einheitsvektor ist, der senkrecht auf der Oberfläche des Bags steht und  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  der Quarkstrom ist. Die Randbedingung (1.1b) bedeutet, dass keine Quarkstrom durch die Oberfläche fließt. Insbesondere verschwindet damit auch die skalare Quarkdichte  $\bar{\psi}\psi$  auf  $S$  [Mosel99]. Die sog. *Bag-Konstante*  $B$  entspricht der Energiedifferenz zwischen dem perturbativen Vakuum innerhalb und dem nicht-perturbativen Vakuum außerhalb des Bags. Dadurch wirkt das nicht-perturbative Vakuum einen Druck auf den Bag aus und stabilisiert ihn auf diese Weise. Confinement ist im Bag-Modell also nur eine ad hoc Annahme. Gluoni-

---

<sup>11</sup>MIT: Massachusetts Institute of Technology

sche Beiträge innerhalb des Bag-Modells können perturbativ integriert werden. In den Originalarbeiten [Chodos74b, Chodos74a, DeGrand75] wurde es zur Beschreibung statischer Hadroneigenschaften wie z.B. die Massenaufspaltung zwischen dem Nukleon und dem  $\Delta$ -Baryon, das magnetische Moment des Nukleons sowie der mittlere isoskalare Radius des Nukleons verwendet. Bei dieser Beschreibung der Nukleon-Eigenschaften wurde ein Wert von  $B^{1/4} = 146 \text{ MeV}$  für die Bag-Konstante verwendet in einer späteren Analyse des Spektrums schwerer  $q\bar{q}$ -Mesonen im Rahmen des Bag-Modells wurde ein sehr viel höherer Wert von  $B^{1/4} = 235 \text{ MeV}$  extrahiert.

**Der duale Farbsupraleiter** Das Modell des *dualen Farbsupraleiters* nennt man auch das *duale Abel'sche Higgs* Modell oder auch das *duale Ginzburg-Landau*-Modell.<sup>12</sup> Das Modell beschreibt magnetische Farbmonopole, wie sie von t'Hooft [t'Hooft74], Polyakov [Polyakov74] und Mandelstam [Mandelstam74] in nicht-Abel'schen Eichtheorien beschrieben wurden. In solchen Theorien lassen sich Konfigurationen der Eichfelder konstruieren, die die Eigenschaften eines magnetischen Monopols besitzen. Im Rahmen der QCD sind es die Gluonen, die zu solchen Monopolen kondensieren. Das Modell beschreibt dieses Monopolkondensat durch ein magnetisch geladenes skalares Feld  $\chi$  mit einer quartischen Selbstwechselwirkung. Die Gluonen werden durch die sog. dualen Eichfelder  $B^\mu$  in das Modell eingeführt. Die Lagrange-Dichte für den dualen Farbsupraleiter ist:

$$\mathcal{L}_{\text{DSC}} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\chi)(D^\mu\chi)^* - \frac{1}{2}b(\chi\chi^* - v^2)^2 \quad , \quad (1.2a)$$

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_m B^\mu \quad , \quad (1.2b)$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu + \mathcal{S}^{\mu\nu} \quad , \quad (1.2c)$$

mit der kovarianten Ableitung  $D^\mu$ . Wir haben hier eine U(1)-symmetrische Form des Modells gewählt, wie sie ursprünglich von Abrikosov zur Beschreibung des gewöhnlichen Supraleiters verwendet wurde [Abrikosov57]. Eine Erweiterung auf ein SU(3)-Modell in Abel'scher Näherung mit drei magnetisch geladenen Feldern  $\chi_c$  und zwei dualen Eichfeldern  $B^{\mu,3}$  und  $B^{\mu,8}$  findet sich z.B. in [Ripka04] und [Koma03b]. Der duale Feldtensor  $\mathcal{F}^{\mu\nu}$  ist mit dem farbelektromagnetischen Feldtensor durch  $\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$  verknüpft, wobei  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  der vollständig antisymmetrische Tensor 4. Stufe ist. Farbelektrisch geladene Quarkströme  $j_e^\mu$  werden durch den Dirac'schen Stringterm  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  [Dirac31, Dirac48] ins Modell integriert. Der zu  $\mathcal{S}^{\mu\nu}$  duale Tensor  $S^{\mu\nu}$  erfüllt die Gleichung  $\partial_\mu S^{\mu\nu} = g_e j_e^\nu$  und beschreibt infinitesimal dünne Strings, die an die Ladungen geknüpft sind.  $g_m$  und  $g_e$  sind die magnetischen bzw. elektrischen Ladungen. Der Stringterm ist keiner physikalischen Größe zugeordnet. Aus der Forderung seiner Unbeobachtbarkeit folgt sofort die Quantisierung der elektrischen Ladung  $g_m g_e = 2n\pi$ , wobei

<sup>12</sup>Für eine Einführung in das Modell siehe insbesondere [Ripka04].

$n$  eine ganze Zahl ist. Durch spontane Symmetriebrechung erhält das skalare Feld in seinem Grundzustand  $\chi = v$  eine Higgs-Masse  $m_H = 2v\sqrt{b}$  und das Gluonfeld eine Vektormasse  $m_v = g_m v$ . Man unterscheidet je nach den Verhältnissen dieser beiden Massen zwei Arten von Supraleitern. Bei Supraleitern 1. Art gilt  $m_v > m_H$  und bei Supraleitern 2. Art  $m_v < m_H$ . Im Rahmen des Modells sind Flussschläuche zwischen Quarks und Antiquarks möglich und stabil [Nielsen73, Wyld76, Ball88, Maedan90, Baker91]. Diese sog. *Abrikosov-Nielsen-Olesen*-Flussschläuche entstehen durch den dualen Meissner-Effekt, durch den die farbelektrischen Felder aus dem supraleitenden QCD-Vakuum heraus- und in einen wohldefinierten, normalleitenden Fluss Schlauch hineingedrängt werden. Gitterrechnungen zeigen, dass sich das QCD-Vakuum mit einem Supraleiter auf der Grenze zwischen Supraleiter 1. und 2. Art, also mit  $m_H \approx m_v$  beschreiben lässt [Bali98, Trottier95].

**Das Stochastische Vakuum Modell** Die fundamentale Größe im *Stochastischen Vakuum* Modell [Dosch87, Dosch88] ist der Erwartungswert des sog. *Wilson-Loops*

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp } \mathcal{P} \exp \left[ -ig \oint_{\mathcal{C}} dx_{\mu} A^{\mu,a} t^a \right] \quad , \quad (1.3)$$

wobei  $\mathcal{P}$  das pfadgeordnete Integral entlang des geschlossenen Wegs  $\mathcal{C}$  bedeutet. Die  $t^a$  sind die Generatoren der Eichgruppe  $SU(3)$  (s. Anhang B) und die  $A^{\mu,a}$  die acht Eichfelder der QCD. In diesem Modell wird diese Größe durch eine Kumulantenentwicklung ausgedrückt und neben weiteren Annahmen [Nachtmann96] durch ein Gauß'sches Integral genähert. Im Rahmen dieses Modells zeigt der Wilson-Loop ein Flächengesetz und damit ein linear anwachsendes Potential  $V_{q\bar{q}}$  für ein statisches Quark-Antiquark-Paar.

$$\begin{aligned} W(\mathcal{C}) &= \exp[-\tau R T] \\ &= \exp[-V_{q\bar{q}}(R) T] \quad , \end{aligned} \quad (1.4)$$

wobei  $T$  die zeitliche Ausdehnung des Loops  $\mathcal{C}$  ist und  $R$  seine räumliche Ausdehnung, d.h. der Quark-Antiquark-Abstand.  $\tau$  entspricht der Stringsannung des Potentials, also der Energie pro Länge des Strings. Auf Grund der Näherungen und Annahmen des Modells skaliert das Potential direkt mit dem Quadrat der starken Kopplung  $g$  und damit linear mit dem Wert des quadratischen Casimir-Operators [Shoshi03] (s. dazu auch Anhang B und die Diskussion zum Casimir Scaling in Abschnitt 4.1.4).

**Das Chromo-Dielektrische Modell** Das Chromo-Dielektrische Modell ist eine Fortführung des Bag-Modells, gibt aber einen expliziten Mechanismus zur Entstehung des Bags an. In dieser Arbeit verwenden wir dieses Modell zur Beschreibung von farbelektrischen Flussschläuchen gegebener Quarkkonfigurationen. Eine detaillierte Einführung in das Modell geben wir daher später in

Kapitel 2. Das Phänomen des Quarkeinschlusses und die Formierung von farbelektrischen Flussschläuchen auf Grund dielektrischer Eigenschaften des QCD-Vakuums wurde schon früh von Kogut und Susskind betrachtet [Kogut74]. Das Chromo-Dielektrische Modell wurde dann von Friedberg und Lee [Friedberg77a, Friedberg77b] eingeführt und von den Gruppen um Wilets und Pirner weiterentwickelt und angewendet. Eine Motivation der dielektrischen Kopplung der Gluonen an ein skalares Feld ausgehend von der QCD Wirkung wird in den Arbeiten von Mack [Mack84] und Pirner et al. [Chanfray89, Mathiot89, Pirner92] gegeben. Die statischen Eigenschaften des Nukleons im CDM werden in [Goldflam82, Wilets89] und [Schuh86a] beschrieben. Eine Diskussion der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung im Vakuum findet sich in [Schuh86b, Koepf94, Pepin96] und für die im Atomkern in [Pirner84, Achtzehnter85]. Die Übertragung auf Quarkmaterie, wie sie z.B. in Neutronensternen auftreten kann, findet sich in [Barone95, Alberico02].

Eine transporttheoretische Betrachtung des Modells wurde in einer Serie von Arbeiten aus Gießen gegeben. Die Dynamik von Nukleon-Nukleon-Stößen wurde dabei in [Kalmbach93, Vetter95] untersucht und die Dynamik von Quark-Antiquark induzierten Flussschläuchen und ihrer Fragmentation in [Loh96] und [Loh97b]. Die Hadronisierung aus einem Quark-Gluon-Plasma heraus wurde letztlich in [Traxler99b, Martens01] untersucht.

### 1.1.2 Motivation dieser Arbeit

In den genannten Arbeiten wurden nicht immer alle Freiheitsgrade des Modells berücksichtigt. In den Arbeiten zum Nukleon und seiner Wechselwirkung wurde beispielsweise nur der fermionische Sektor mit seiner Wechselwirkung zum Soliton-Feld betrachtet und die gluonische Wechselwirkung vernachlässigt oder höchstens als Korrektur zum Quarkbeitrag aufgefasst. Die dort erlangten Ergebnisse beschreiben demnach den hadronischen Sektor des Modells.

In dieser Arbeit dagegen sind wir allein an den gluonischen Eigenschaften des Modells interessiert. Das heißt, wir untersuchen im Rahmen des Modells die Reaktion des nicht-perturbativen QCD-Vakuums auf die Existenz von äußeren statischen Farbladungen. Damit untersuchen wir die Eigenschaften des Vakuums und gleichzeitig die elementare Struktur der farbelektrischen Flussschläuche. Farbelektrische Flussschläuche wurden in den Arbeiten von Loh [Loh96] und Traxler [Traxler99b] zwar untersucht, allerdings mit Modellparametern, die stark am Bag-Modell orientiert waren. Es zeigt sich in diesen Arbeiten, aber auch in denen von Bickeböller [Bickeboeller85] und Rosina [Rosina86], dass das Profil der Flussschläuche nicht mit neueren Rechnungen der Gitterreich-Theorie übereinstimmt [Bali95, Cea95]. Das Ziel dieser Arbeit ist es also, das Modell in Einklang zu bringen mit solchen Gitterergebnissen. Dazu betrachten wir nur statische Quark-Konfigurationen, da dieses den Möglichkeiten der Gitterrechnungen entspricht.



# Kapitel 2

## Das Chromo-Dielektrische Modell

In diesem Kapitel stellen wir das Chromo-Dielektrische Modell (CDM) vor. Es wurde von Friedberg und Lee [Friedberg77a, Friedberg77b] vorgestellt, um das Confinement-Phänomen zu beschreiben. Im Rahmen dieses Modells werden einige Annahmen über das nicht-perturbative Vakuum der QCD gemacht. Zunächst einmal wird angenommen, dass die QCD an sich auch dynamisch bereits Confinement enthält. Hier meinen wir nicht, dass die QCD durch ihre Konstruktion nur eichinvariante Zustände als physikalische zulässt. Vielmehr wird hier angenommen, dass die Konstituenten eines physikalischen Zustands in ihrer Dynamik *aneinandergelockt* sind. Konkret heißt das, dass die Quarks in einem Hadron dieses nicht verlassen können. Wenn wir in diesem Zusammenhang von absolutem Confinement sprechen, dann meinen wir hier, dass selbst bei Aufwenden einer unendlichen Energie, ein einzelnes Quark nicht aus dem Hadronen-Verband isoliert werden kann.

Solch eine hochenergetische Anregung sollte höchstens neue (farbneutrale) Hadronen erzeugen. Wir wollen hier nicht ausschließen, dass mehrere Hadronen durch Wechselwirkung miteinander ihre Konstituenten-Quarks austauschen oder neue Hadronen bilden. Beispielsweise können Proton und Antiproton nach einer Kollision in mehrere Hadronen (z. B. Pionen) zerfallen.

Da in der Abel'schen Quantenelektrodynamik (QED) kein Confinement enthalten ist, kann man vermuten, dass die nicht-Abel'schen Strukturen der QCD für das Confinement verantwortlich sind. In der Arbeit von Loh [Loh97a] wurde die Struktur der nicht-Abel'schen Felder in Abhängigkeit von der Kopplungsstärke angegeben. Dort wurde eine starke Erhöhung der magnetischen Farbfelder gegenüber dem Abel'schen Fall festgestellt. Qualitativ stimmt dies mit der Beobachtung in [Savvidy77] überein, dass die Vakuumsenergie abgesenkt wird, wenn man ein farbmagnetisches Feld in das perturbative Vakuum einfügt. Wir vermuten also, dass die nicht-linearen Wechselwirkungen der Gluonen-Felder untereinander zum Quarkeinschluss führen. Das CDM nimmt nun an, dass durch

diese Wechselwirkungen das nicht-perturbative Vakuum die Eigenschaften eines Dielektrikums hat, in dem sich die farbgeladenen Quarks bewegen können. Wir führen hier deshalb ein skalares Confinement-Feld  $\sigma$  ein, das diese dielektrischen Eigenschaften vermittelt. Gleichzeitig wird der gluonische Teil der QCD reduziert auf den Abel'schen Unterraum.

## 2.1 Die CDM-Lagrange-Dichte

Das Modell ist dann durch seine Lagrange-Dichte definiert:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{qg} + \mathcal{L}_{q\sigma} \quad , \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi} (i\gamma_\mu \partial^\mu - m) \psi \quad , \quad (2.1b)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\kappa(\sigma)F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad , \quad (2.1c)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - U(\sigma) \quad , \quad (2.1d)$$

$$\mathcal{L}_{qg} = -g_s \bar{\psi} \gamma_\mu t^a \psi A^{\mu,a} =: -g_s j_\mu^a A^{\mu,a} \quad , \quad (2.1e)$$

$$\mathcal{L}_{q\sigma} = -g_\sigma \bar{\psi} \sigma \psi \quad , \quad (2.1f)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \quad , a \in \{3, 8\} \quad . \quad (2.1g)$$

Die Terme in Gl. (2.1a) beschreiben der Reihenfolge nach die freie Quark-Lagrangedichte, den Gluon- und den Confinement-Term, die minimale Quark-Gluon-Kopplung und die Kopplung zwischen Quarks und Confinement-Feld  $\sigma$ . In dieser Form enthält die Lagrange-Dichte direkte Wechselwirkungen aller Felder untereinander. Da wir in dieser Arbeit nur spezielle Systeme untersuchen, werden wir die Lagrange-Dichte weiter vereinfachen.

Die Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_q$  für die Quarks beschreibt Teilchen mit halbzahligem Spin und Masse  $m$ . Sie koppeln mit der starken Kopplungskonstanten  $g_s$  an die Gluonen-Felder über den Farbstrom  $j_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu t^a \psi$  im Term  $\mathcal{L}_{qg}$ .

Der gluonische Teil  $\mathcal{L}_g$  ist gegenüber der QCD (s. kurze Diskussion der QCD in Anhang B) auf zwei Arten modifiziert. In Gitter-Rechnungen wurde eine infrarote *Abel'sche Dominanz* festgestellt [Ezawa82, Kronfeld87, Amemiya99]. Die nicht-Abel'schen Gluonkomponenten entwickeln eine dynamische Masse, so dass der Gluon-Propagator im Vergleich zu den Abel'schen Gluonen unterdrückt wird. Damit verbunden werden physikalische Größen wie z.B. das  $q\bar{q}$ -Potential hauptsächlich von den Abel'schen Freiheitsgrößen bestimmt. Aus diesem Grunde werden erstens im CDM die acht Gluon-Freiheitsgrade auf zwei Abel'sche (masselose) Felder reduziert. Die Farbindices ( $a \in \{3, 8\}$ ) entsprechen gerade den zwei miteinander kommutierenden Generatoren der SU(3)-Algebra. Im Gegensatz zu den acht Gluonfeldern der QCD wechselwirken diese beiden Abel'schen Gluonfelder nicht mehr direkt miteinander. Der Feldstärke-Tensor  $F_{\mu\nu}^a$  zerfällt in

zwei unabhängige Abel'sche Tensoren für die beiden Eichfelder  $A_\mu^{3,8}$  analog zum QED-Feldstärketensor.

Die massiven, kurzreichweitigen Gluonen werden zweitens im CDM durch das neue skalare Feld  $\sigma$  modelliert. Im CDM separieren wir also auf einfache Weise von den nicht-Abel'schen Yang-Mills-Gleichungen einen Abel'schen Teil ab, der durch die zwei Gluon-Felder  $A_\mu^{3,8}$  beschrieben wird, und subsumieren alle Confinement-Effekte in der dielektrischen Kopplung  $\kappa(\sigma)$  des Confinement-Felds  $\sigma$  an die Gluonfelder. Eine Motivation für dieses Szenario der dielektrischen Kopplung der (Abel'schen) Farbfelder an ein (nicht-Abel'sches) gluoninduziertes Medium findet sich in den Arbeiten von Mack [Mack84] und Pirner [Pirner92].

Der neu eingeführte skalare Freiheitsgrad  $\sigma$  wird selbst als dynamische Größe betrachtet. Die Dynamik dieses Feldes ist durch  $\mathcal{L}_\sigma$  beschrieben. Das skalare Feld unterliegt einer Selbstwechselwirkung  $U(\sigma)$ . Dieses Potential zeichnet zwei (meta-) stabile Phasen für das skalare Feld aus. Die eine ist verbunden mit dem perturbativen Vakuum bei  $\sigma = 0$ , die andere mit dem nicht-perturbativen Vakuum bei  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$ . Die Energiedifferenz zwischen den beiden Minima entspricht dem Druck, den das nicht-perturbative Vakuum auf das perturbative (auf den Bag) ausübt. Wenn wir  $U(\sigma_{\text{vac}}) = 0$  festlegen, entspricht also  $B = U(\sigma = 0)$  der Bag-Konstanten aus dem Bag-Modell. Da wir das Confinement-Feld mit einer kollektiven Gluon-Dynamik verbunden haben, liegt es zudem nahe, das Verhalten des Potentials am absoluten Minimum mit den niedrigliegenden Anregungen des Gluon-Feldes in Verbindung zu bringen, den Glueballs. Wir parametrisieren das skalare Potential durch ein quartisches Polynom, und fordern die eben genannten Bedingungen:

$$\begin{aligned} U(\sigma) &= B + a\sigma^2 + b\sigma^3 + c\sigma^4 \quad , & (2.2) \\ U(\sigma_{\text{vac}}) &= 0 \quad , \\ U'(\sigma_{\text{vac}}) &= 0 \quad , \\ U''(\sigma_{\text{vac}}) &= m_g^2 \quad . \end{aligned}$$

Das Potential ist demnach vollständig mit der Angabe des Vakuum-Wertes des skalaren Feldes  $\sigma_{\text{vac}}$ , der Bag-Konstanten  $B$  und der Glueball-Masse  $m_g$  festgelegt und die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  lassen sich durch sie ausdrücken:

$$a = \frac{1}{2} \frac{m_g^2 \sigma_{\text{vac}}^2 - 12B}{\sigma_{\text{vac}}^2} \quad , \quad (2.3a)$$

$$b = - \frac{m_g^2 \sigma_{\text{vac}}^2 - 8B}{\sigma_{\text{vac}}^3} \quad , \quad (2.3b)$$

$$c = \frac{1}{2} \frac{m_g^2 \sigma_{\text{vac}}^2 - 6B}{\sigma_{\text{vac}}^4} \quad . \quad (2.3c)$$

Damit  $U(\sigma)$  bei  $\sigma = 0$  ein lokales Minimum hat, muss für die Parameter zusätzlich

gelten, dass  $a \geq 0$ , oder

$$m_g^2 \sigma_{\text{vac}}^2 \geq 12B \quad . \quad (2.4)$$

Das Potential ist in Abb. 2.1 dargestellt. Wenn gerade die Gleichheit in Relation (2.4) erfüllt ist, hat das Potential bei  $\sigma = 0$  nur noch einen Wendepunkt (durchgezogene Linie). Die gestrichelten Linien entsprechen dem Potential für festgehaltenes  $\sigma_{\text{vac}}$  und  $m_g$  und variierendem  $B$  und die strich-punktiierten Linien dem Potential für variierendes  $m_g$  und festgehaltenen Werten von  $\sigma_{\text{vac}}$  und  $B$ .

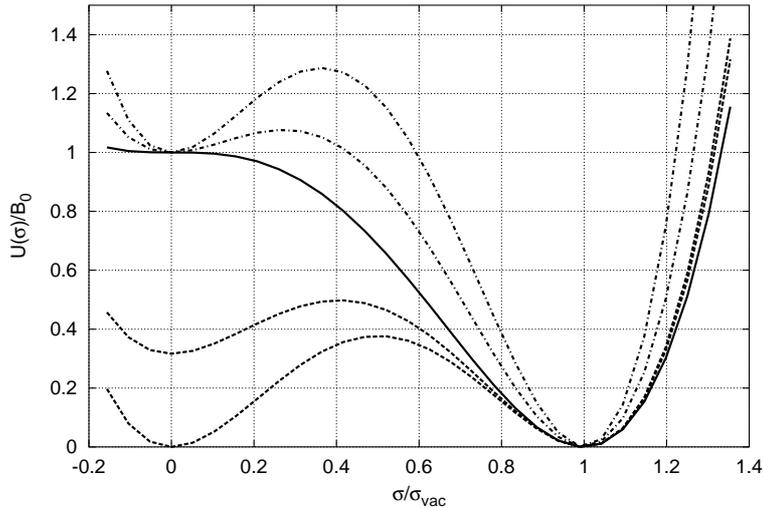


Abbildung 2.1: Das skalare Potential  $U(\sigma)$ . Bei der durchgezogenen Linie gilt die Gleichheit in der Relation (2.4). Variiert man  $B$  bei festen Parametern  $m_g$  und  $\sigma_{\text{vac}}$  erhält man die gestrichelten Linien, bei Variation von  $m_g$  und festen  $B$  und  $\sigma_{\text{vac}}$  die strich-punktiierten Linien.

Durch die Reduktion der Gluon-Felder auf den Abel'schen Unterraum wechselwirken sie nur noch indirekt durch den Einfluss des Mediums miteinander. Dieses Medium beeinflusst die Gluonen über eine dielektrische Funktion  $\kappa(\sigma)$ . Der Wert dieser Dielektrizitätszahl  $\kappa$  wird demnach vom Wert des skalaren Felds  $\sigma$  bestimmt. Wir wählen die Funktion  $\kappa(\sigma)$  derart, dass wir tatsächlich Confinement modellieren können. In der Anschauung des Modells bedeutet das, dass es Raumbereiche gibt, in denen Quarks und Gluonen-Felder existieren, und solche, in denen beide verschwinden. Ähnlich wie bei einem perfekt diamagnetischen Supraleiter, aus dem alle magnetischen Felder herausgedrängt werden, möchten wir, dass alle elektrischen Felder aus dem nicht-perturbativen Vakuum herausgedrängt werden. Wir fordern also ein perfekt dielektrisches Vakuum mit  $\kappa = 0$ . Gleichzeitig sollen sich die Gluonen im perturbativen Vakuum ungestört ausbreiten können. Deshalb soll  $\kappa$  im perturbativen Vakuum den Wert  $\kappa = 1$  annehmen. Zwischen  $\sigma = 0$  und  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$  soll die dielektrische Funktion monoton abfallen. Fai et al. [Fai88] haben  $\kappa(x) = 1 + \Theta(x) x^n [nx - (n+1)]$  mit  $n = 3$  und  $x = \sigma/\sigma_{\text{vac}}$  gewählt

und Loh et al. [Loh97b] ebenfalls eine Polynom-Parametrisierung  $\kappa(x) = |1 - x^n|^m$  mit  $n = 1$  und  $m = 2$ . Für diese Parametrisierungen gilt  $\kappa(0) = 1$ ,  $\kappa(\sigma_{\text{vac}}) = 0$  und  $\kappa'(\sigma_{\text{vac}}) = 0$ . Traxler et al. [Traxler99b] haben eine Wood-Saxon-artige Parametrisierung gewählt, d.h.  $\kappa(\sigma) = (\exp((x - \beta)/\alpha) + 1)^{-1}$  mit  $\alpha = 0.2$  und  $\beta = 0.4$ . Diese Parametrisierung hat den Vorteil, dass die Funktion  $\kappa(\sigma)$  und alle ihre Ableitungen stetig für alle reellen  $\sigma$  sind. Allerdings gilt dann  $\kappa(0) < 1$  und  $\kappa(\sigma_{\text{vac}}) \approx 0.05 > 0$ . Diese letzte Eigenschaft, d.h. dass  $\kappa(\sigma)$  geringfügig von Null verschieden ist, ist wichtig für die numerische Stabilität. Wir werden später bei der Beschreibung unseres Algorithmus darauf zurückkommen (siehe Anhang A). Wir wählen deshalb eine Parametrisierung, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\kappa(0) = 1 \quad , \quad \kappa(\sigma_{\text{vac}}) = \kappa_{\text{vac}} \quad , \quad (2.5a)$$

$$\kappa'(0) = 0 \quad , \quad \kappa'(\sigma_{\text{vac}}) = \frac{\kappa_{\text{vac}}}{\sigma_{\text{vac}}} \quad , \quad (2.5b)$$

$$\kappa''(0) = 0 \quad , \quad \kappa''(\sigma_{\text{vac}}) = \frac{\kappa_{\text{vac}}}{\sigma_{\text{vac}}^2} \quad . \quad (2.5c)$$

Wie wir später sehen werden, führen die beiden Bedingungen in (2.5a) im Grenzübergang  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$  zu absolutem Confinement. Mit den Bedingungen (2.5b) nimmt das skalare Feld den Wert  $\sigma = 0$  bzw.  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$  im perturbativen und im nicht-perturbativen Vakuum an [Bickeboeller85]. Die letzten beiden Bedingungen (2.5c) führen wir hier aus numerischen Gründen ein (siehe wieder Anhang A). Die Bedingungen (2.5) lassen sich von einem Polynom 5. Ordnung erfüllen. Unser Ansatz für die dielektrische Funktion ist also

$$\kappa(x) = \begin{cases} 1 + k_3 x^3 + k_4 x^4 + k_5 x^5 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \quad x < 0 \\ \kappa_{\text{vac}} & , \quad x > 1 \end{cases} \quad , \quad (2.6)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{2}(29\kappa_{\text{vac}} - 20) & k_3 &= -10 \\ k_4 &= (15 - 23\kappa_{\text{vac}}) \xrightarrow{\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0} & k_4 &= 15 \quad . \\ k_5 &= \frac{1}{2}(19\kappa_{\text{vac}} - 12) & k_5 &= -6 \end{aligned} \quad (2.7)$$

In unserer numerischen Analyse werden wir die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Vakuumwert  $\kappa_{\text{vac}}$  analysieren. Wir zeigen die dielektrische Funktion für verschiedene Werte von  $\kappa_{\text{vac}}$  in Abb. 2.2.

Der letzte Term in der Lagrange-Dichte (2.1),  $\mathcal{L}_{q\sigma}$  beschreibt eine direkte Kopplung von Quarks und Confinement-Feld. Der Term wirkt wie ein Massenterm für die Quarks, die damit eine effektive Masse  $m_{\text{eff}} = m + g_\sigma \sigma$  erlangen. Goldflam et al. [Goldflam82] haben unter Vernachlässigung der gluonischen Wech-

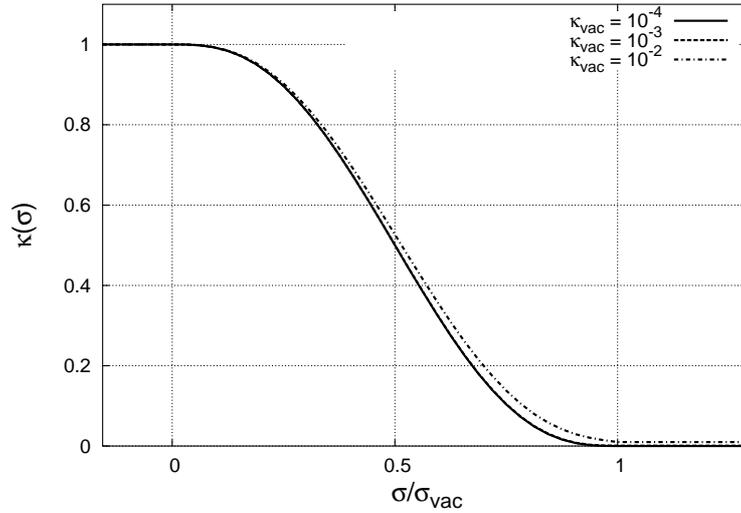


Abbildung 2.2: Die dielektrische Funktion  $\kappa(\sigma)$ . Für Werte  $\kappa_{\text{vac}} < 10^{-3}$  ändert sich die Funktion nur noch unwesentlich und die Änderungen verschwinden innerhalb der Strichstärke. Für alle Rechnungen verwenden wir einen Wert von  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$ .

selwirkungen – also mit  $g_s = 0$  bzw.  $\kappa = 1 = \text{const}$  – Quark-Wellenfunktionen in sphärischen Konfigurationen bestimmt und damit hadronische Eigenschaften wie Grundzustandsenergien des Nukleons und dessen magnetisches Moment bestimmt. In [Fai88] wurde stattdessen die skalare Kopplung vernachlässigt,  $g_\sigma = 0$  und eine effektive skalare Quark-Kopplung an das dielektrische Medium generiert. In [Bickeboeller85] dagegen wurden auch die gluonischen Freiheitsgrade mitberücksichtigt und Quark-Wellenfunktionen, sowie das elektrische Gluon-Potential in sphärischen Bags ermittelt.

In dieser Arbeit sind wir allein an den Gluonfeld-Konfigurationen bei vorgegebener Quark-Verteilung interessiert. Dazu betrachten wir von außen vorgegebene Quark-Farbströme  $j_\mu^a$ . Die Quarks sind dadurch keine dynamischen Freiheitsgrade mehr und wir vernachlässigen die Quark-Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_q$  vollständig. Dadurch verliert auch die effektive Quarkmasse in  $\mathcal{L}_{q\sigma}$  ihre Bedeutung. Von außen vorgegebene Quark-Ströme entsprechen bereits Quarks mit unendlicher Masse. In der Gitter-QCD entspricht das der Näherung, in der dynamische Quarks unterdrückt werden (quenched approximation). Die Dynamik solcher Quarks wird nicht von der Kopplung an das Gluon- oder das Confinement-Feld beeinflusst und entkoppelt vom restlichen System. Wir vernachlässigen also auch  $\mathcal{L}_{q\sigma}$  und setzen  $g_\sigma = 0$ .

Die CDM-Lagrange-Dichte reduziert sich also auf die folgenden Terme

$$\mathcal{L}_{\text{CDM}} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{qg} \quad , \quad (2.8a)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4}\kappa(\sigma)F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad , \quad (2.8b)$$

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - U(\sigma) \quad , \quad (2.8c)$$

$$\mathcal{L}_{qg} = -g_s j_\mu^a A^{\mu,a} \quad , \quad (2.8d)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a \quad , a \in \{3, 8\} \quad , \quad (2.8e)$$

mit  $j^{\mu,a} = (\rho^a, \vec{j}^a)$  und  $A_\mu^a = (\phi^a, \vec{A}^a)$ . Im Folgenden nennen wir  $\mathcal{L}_{\text{CDM}}$  der Einfachheit halber  $\mathcal{L}$ .

## 2.2 Die Modell-Bewegungsgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit betrachten wir alle Felder als klassisch und vernachlässigen alle Quantenkorrekturen. Aus der Lagrange-Dichte für das Modell in Gl. (2.8) ergeben sich durch ein Variationsprinzip die Euler-Lagrange-Gleichungen als die Bewegungsgleichungen des Systems,

$$\partial_\mu (\kappa(\sigma)F^{\mu\nu,a}) = g_s j^{\nu,a} \quad , \quad (2.9a)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\sigma = -U'(\sigma) - \frac{1}{4}\kappa'(\sigma)F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} \quad . \quad (2.9b)$$

Auf Grund der Abel'schen Projektion und der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu,a}$  ist der Quarkstrom in unserem Modell, im Gegensatz zum Quarkstrom in der QCD (s. Gl. (B.18)), eine Erhaltungsgröße:

$$\partial_\mu j^{\mu,a} = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Zusätzlich zu den 4 inhomogenen Gleichungen (2.9a) für die Eichfelder  $A^{\mu,a} = (\phi^a, \vec{A}^a)$  können wir noch 4 homogene konstruieren. Ausgehend vom anti-symmetrischen Feldtensor  $F_{\mu\nu}^a$  definieren wir den dualen Feldtensor

$$\mathcal{F}^{\mu\nu,a} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^a \quad , \quad (2.11)$$

wobei  $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$  der vollständig anti-symmetrische Tensor 4. Stufe ist. Mit dieser Definition erhält man sofort

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu,a} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

wobei wir hier die Definition von  $F_{\mu\nu}^a$  in Gl. (2.8e) verwendet und die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen vorausgesetzt haben.

Die Komponenten des Feldtensors  $F^{\mu\nu,a}$  sind gerade die elektrischen Felder  $E_i^a = -F^{0i,a} = -\nabla_i\phi^a - \partial_t A_i^a$  und die magnetischen Felder  $B_i^a = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk,a} =$

$(\nabla \times \vec{A}^a)_i$ , bzw.

$$F^{\mu\nu,a} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.13)$$

Zusammen mit diesen mikroskopischen Feldern können wir die Mediumfelder  $\vec{D}^a = \kappa(\sigma)\vec{E}^a$  und  $\vec{H} = \kappa(\sigma)\vec{B}$  einführen. Damit lassen sich die Gleichungen (2.9a) und (2.12) in die Maxwell-Gleichungen umschreiben:

$$\nabla \cdot \vec{D}^a = g_s \rho^a \quad (2.14a)$$

$$\nabla \times \vec{H}^a - \partial_t \vec{D}^a = g_s \vec{j}^a \quad (2.14b)$$

$$\nabla \times \vec{E}^a + \partial_t \vec{B}^a = 0 \quad (2.14c)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.14d)$$

Wie gewöhnlich beschreibt die letzte Gleichung (2.14d) die Nichtexistenz von magnetischen Monopolen und das Faraday'sche Gesetz (2.14c) die Abwesenheit von magnetischen Strömen. Für ein nicht-homogenes Medium, und im Allgemeinen ist der dielektrische Wert  $\kappa$  eine ortsabhängige Größe, können wir allerdings eine Größe definieren, die sich wie ein magnetischer Strom verhält. Wenn wir den elektromagnetischen Feldtensor reskalieren mit  $F^{\mu\nu,a} \rightarrow G^{\mu\nu,a} = \kappa(\sigma)F^{\mu\nu,a}$  erhalten wir mit dem entsprechenden dualen Tensor  $\mathcal{G}^{\mu\nu,a} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}G_{\alpha\beta}^a$

$$j_{\text{mag}}^{\nu,a} := \partial_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu,a} \quad (2.15)$$

$$\vec{j}_{\text{mag}}^a = \nabla \times \vec{D}^a + \partial_t \vec{H} = (\vec{\nabla} \kappa) \times \vec{E} + (\partial_t \kappa) \vec{B} \quad (2.16)$$

$$\rho_{\text{mag}}^a = \nabla \cdot \vec{H} = (\vec{\nabla} \kappa) \cdot \vec{B} . \quad (2.17)$$

Der so definierte magnetische Strom wird also allein durch die Inhomogenitäten des Mediums induziert. Im Falle, dass  $\kappa = \text{const} = 1$  überall gilt, verschwindet auch der magnetische Strom  $j_{\text{mag}}^{\mu,a} = 0$ .

Die Gleichung für das skalare Confinement-Feld  $\sigma$  (2.9b) können wir noch mit Hilfe der elektromagnetischen Felder umschreiben zu:

$$\partial_t^2 \sigma = \Delta \sigma - U'(\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\kappa'(\sigma)}{\kappa^2(\sigma)} \left( \vec{D}^a \cdot \vec{D}^a - \vec{H}^a \cdot \vec{H}^a \right) . \quad (2.18)$$

### 2.2.1 Die Ladungen der Quarks

Mit den Gleichungen (2.9) bzw. (2.14) und (2.18) ist das zu lösende Gleichungssystem beschrieben. Die einzigen äußeren Quellen sind die Farbströme  $j_\mu^a$ . Diese sind durch die Quarks und ihre Bewegungen gegeben. In dieser Arbeit betrachten wir Quarks als spinlose Punktteilchen mit einer Farbladung  $q^a$ . Aus nume-

rischen Gründen weisen wir den Quarks eine räumliche Verteilung  $w(\vec{x})$  zu. Der Farbstrom ergibt sich also zu

$$j^{\mu,a} = \sum_k q_k^a u_k^\mu w(\vec{x} - \vec{x}_k(t)) \quad , \quad (2.19a)$$

$$w(\vec{x}) = (2\pi r_0^2)^{-3/2} e^{-\vec{x}^2/(2r_0^2)} \quad . \quad (2.19b)$$

Die Gauß'sche Breite der Quarkverteilung  $r_0$  ergibt sich aus der Wahl des verwendeten numerischen Gitters (siehe Anhang A). Für Punktteilchen geht  $r_0 \rightarrow 0$ , aber auf Grund der Diskretisierung ist es besser, den Quarks eine endliche Breite zu geben. Die Summe in Gl. (2.19a) erstreckt sich über alle Teilchen im System.  $u_k^\mu = (\gamma, \gamma \dot{\vec{x}}_k)$  ist die Vierergeschwindigkeit und  $\gamma$  der zugehörige Parameter aus dem Lorentz-Boost.

Die Farbladung ergibt sich in unserem klassischen Modell aus folgender Überlegung. Der Farbstrom der QCD ergibt sich mit Gl. (2.1e) zu  $j_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu t^a \psi$ . Die Quark-Wellenfunktionen  $\psi$  sind Spinoren im Spin-Raum und Elemente des Farb-Tripletts im Farbraum. Den Spin-Anteil haben wir bereits vernachlässigt. Den Farbanteil der Quark-Wellenfunktion werden wir dagegen in folgendem Sinne beibehalten. Analog zur Flavor-SU(3) lassen sich in der Farb-SU(3) (siehe auch Anhang B) zwei miteinander kommutierende Farb-Ladungsoperatoren  $Q^3 = t^3$  und  $Q^8 = t^8$  einführen.<sup>1</sup> Die Elemente innerhalb eines Farb-Multipletts lassen sich nach den gemeinsamen Eigenvektoren dieser beiden Operatoren klassifizieren. Die Farbladungen  $q^3$  und  $q^8$  sind dann deren Eigenwerte. Die Eigenvektoren des Tripletts nennen wir  $|r\rangle$ ,  $|g\rangle$  und  $|b\rangle$  mit der expliziten Darstellung

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.20)$$

Allgemein hat dann ein Quark mit Farbe  $c \in \{r, g, b\}$  bzw. ein Antiquark mit Antifarbe  $\bar{c} \in \{\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}\}$  die Ladung

$$q_c^a = \langle c | Q^a | c \rangle \quad (2.21)$$

$$q_{\bar{c}}^a = \langle \bar{c} | \bar{Q}^a | \bar{c} \rangle = -\langle c | Q^a | c \rangle = -q_c^a \quad . \quad (2.22)$$

Wir bezeichnen natürlich ein Quark im Zustand  $r$ ,  $g$  oder  $b$  mit *rot*, *grün* bzw. *blau*. Analog dazu lassen sich die Farbladungen der Elemente der adjungierten Darstellung, also des Oktetts, beschreiben. Die adjungierten Farbladungsoperatoren sind  $Q_A^{3,8} = T_A^{3,8}$  mit den in Anhang B definierten adjungierten Generatoren  $T_A^{3,8}$ . Die Ladungen der Elemente des Farb-Oktetts sind dann genauso die Eigenwerte der Farbladungsoperatoren. Die Ladungen sind in Abb. 2.3 schematisch dargestellt und ihre Werte sind in Tab. 2.1 gegeben.

<sup>1</sup>In der Flavor-SU(3) sind dies gerade der Isospin  $\tau_3$  und die Hyperladung  $Y$ .

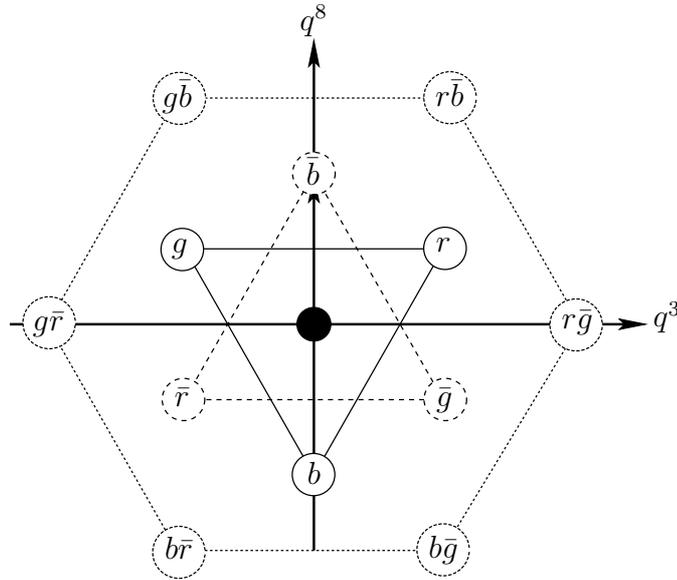


Abbildung 2.3: Die Farbladungen des fundamentalen Quark-Tripletts (durchgezogene Linien), des Antitripletts (gestrichelte Linien) und des Oktetts (gepunktete Linien). Der schwarze Punkt in der Mitte symbolisiert die beiden ungeladenen Oktett-Zustände.

Wir haben in der Abbildung den Oktett-Zuständen Namen gegeben, die aus je einer Farbe und einer Antifarbe bestehen. Dies ist sinnvoll, da sich tatsächlich die Farbladung eines Oktett-Zustandes aus je einer Farb- und einer Antifarbladung zusammensetzt. Der schwarze Punkt in der Mitte der Abbildung symbolisiert die beiden ungeladenen Oktett-Zustände. Da sich die Gluonen der QCD wie ein Oktett transformieren, liegt es nahe, die Oktett-Zustände mit den acht Gluonen zu identifizieren. Im CDM werden die geladenen Gluon-Felder mit dem Confinement-Feld modelliert und nur die beiden ungeladenen Gluon-Felder explizit beibehalten.

Ähnlich wie in der QCD können wir in unserem klassischen Modell sowohl farbneutrale Quark-Antiquark-Zustände ( $q\bar{q}$ ) als auch 3-Quark-Zustände ( $qqq$ ) konstruieren. Wir werden auch Systeme untersuchen, in denen wir *Quarks* aus dem Oktett verwenden, um die Abhängigkeit der Gesamtenergie, genauer der Stringspannung eines Quark-Antiquark-Flussschlauches von der gewählten Darstellung zu analysieren. In unserem klassischen Modell reduziert sich das auf die Zuweisung einer höheren Quarkladung (siehe Tab. 2.1).

## 2.3 Die CDM-Energiedichte

Wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, sind die wesentlichen Größen des Systems diejenigen, die invariant sind unter Farbroationen. Dieses sind die

Farbe	$2q^3$	$2\sqrt{3}q^8$
$r$	1	1
$g$	-1	1
$b$	0	-2
$r\bar{g}$	2	0
$g\bar{r}$	-2	0
$b\bar{g}$	1	-3
$g\bar{b}$	-1	3
$r\bar{b}$	1	3
$b\bar{r}$	-1	-3

Tabelle 2.1: Die Farbladungen  $q^a$  der drei Triplet-Zustände sowie der sechs geladenen Oktett-Zustände.

Wirkungsdichte, also die Lagrange-Dichte selbst, aber auch die entsprechende Energiedichte. Aus der Lagrange-Dichte (2.8a) ergeben sich zunächst einmal die kanonisch konjugierten Impulse

$$\Pi_i^a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i^a} = \kappa E_i^a = D_i^a \quad , \quad (2.23a)$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\sigma}} = \dot{\sigma} \quad . \quad (2.23b)$$

Der zum Vektor-Potential  $A_\mu^a$  kanonisch konjugierte Impuls ist also nicht das elektrische Feld  $\vec{E}^a$ , sondern das Mediumfeld  $\vec{D}^a$ .

Die Energiedichte des Systems entspricht gerade der Hamilton-Dichte, also der  $(\mu = 0, \nu = 0)$  Komponente des Energie-Impuls-Tensors  $T^{\mu\nu}$ . Der kanonische Energie-Impuls-Tensor ist definiert durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\alpha^a)} \partial^\nu A_\alpha^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \sigma)} \partial^\nu \sigma - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad . \quad (2.24)$$

Der elektromagnetische Anteil des kanonischen Tensors  $T^{\mu\nu}$  ist nicht symmetrisch in den Indizes  $\mu\nu$ . Er lässt sich allerdings durch Addition eines divergenzlosen Terms symmetrisieren [Jackson75, Peskin95], wenn der Quarkstrom  $j^{\mu,a}$  verschwindet. Der Energie-Impuls-Tensor im CDM hat dann folgende Form:

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta}^a F^{\beta\nu,a} + \partial^\mu \sigma \partial^\nu \sigma - g_s j^{\mu,a} A^{\nu,a} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.25)$$

Durch die Kopplung an den äußeren Strom ist der resultierende Tensor  $T^{\mu\nu}$  symmetrisch bis auf den Kopplungsterm  $j^{\mu,a} A^{\nu,a}$ . Aus der  $(0,0)$ -Komponente erhal-

ten wir dann die Energiedichte des Systems:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\vec{r}) &= T^{00} \\ \varepsilon(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \frac{\vec{D}^a \cdot \vec{D}^a + \vec{H}^a \cdot \vec{H}^a}{\kappa(\sigma)} - g_s \vec{J}^a \cdot \vec{A}^a \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \sigma)^2 + U(\sigma)\end{aligned}\tag{2.26}$$

## 2.4 Statische Konfigurationen

In dieser Arbeit sind wir allein an statischen Lösungen interessiert. Das heißt, die Quarks befinden sich an vorgegebenen festen Positionen. Dadurch verschwindet der räumliche Anteil des Quarkstroms  $\vec{J}^a$ . Es ist dann auch vernünftig anzunehmen, dass sowohl das skalare Feld als auch das 4-Potential  $A^{\mu,a}$  zeitunabhängig sind. Die elektromagnetischen Felder sind dann ebenfalls statisch, und es gibt somit keine Quellen mehr für ein magnetisches Feld  $\vec{B}$ . Die Energiedichte vereinfacht sich dann auf

$$\varepsilon(\vec{r}) = \frac{1}{2} \frac{\vec{D}^a \cdot \vec{D}^a}{\kappa(\sigma)} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \sigma)^2 + U(\sigma)\tag{2.27}$$

mit statischen Bestimmungsgleichungen für die elektrischen Felder  $\vec{E}^a$  bzw. die elektrischen Potentiale  $\phi^a$  und das skalare Feld  $\sigma$ :

$$\vec{D}^a = \kappa(\sigma) \vec{E}^a = -\kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi^a \quad ,\tag{2.28a}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi^a) = -g_s \rho^a \quad ,\tag{2.28b}$$

$$\Delta \sigma - U'(\sigma) = -\frac{1}{2} \frac{\kappa'(\sigma)}{\kappa^2(\sigma)} \vec{D}^a \cdot \vec{D}^a \quad .\tag{2.28c}$$

Die Poisson-Gleichung (2.28b) erzwingt ein elektrisches Feld bei vorgegebener Ladungsdichte  $\rho^a$ . Dieses elektrische Feld wiederum ist dann die Quelle für das Confinement-Feld  $\sigma$ .

Wir werden in unserer numerischen Analyse sehen, dass das skalare Feld in typischen Feldkonfigurationen nur in stark lokalisierten Raumbereichen von seinem Vakuumwert  $\sigma_{\text{vac}}$  abweicht und im Zentrum dieser Bereiche einen Wert  $\sigma_0 \ll \sigma_{\text{vac}}$  annimmt. Diese lokalisierten Raumbereiche werden auf Grund ihrer Struktur *nicht-topologische Solitonen* [Friedberg77a, Friedberg77b] genannt. Weitaus anschaulicher ist allerdings der Begriff des *Bags*.<sup>2</sup> Das elektrische Feld ist weitestgehend auf das Innere der Bags beschränkt. Diese Bags haben ein Inneres, also das Volumen, in dem  $\sigma = \sigma_0$  gilt, und eine Oberfläche, an der der

---

<sup>2</sup>Eine genauso griffige wie kurze deutsche Bezeichnung für diese Strukturen ist schwer zu finden, deshalb verwenden wir hier durchgehend den englischen Begriff.

Übergang von  $\sigma_0 \rightarrow \sigma_{\text{vac}}$  stattfindet. Entsprechend lässt sich die Gesamtenergie des Systems auch in einen elektrischen Anteil  $E_{\text{el}}$ , eine Volumenenergie  $E_{\text{vol}}$  und eine Oberflächenenergie  $E_{\text{sur}}$  zerlegen:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{el}} + E_{\text{vol}} + E_{\text{sur}} \quad , \quad (2.29\text{a})$$

$$E_{\text{el}} = \int d^3x \frac{1}{2} \frac{\vec{D}^a \cdot \vec{D}^a}{\kappa(\sigma)} \quad , \quad (2.29\text{b})$$

$$E_{\text{vol}} = \int d^3x U(\sigma) \quad , \quad (2.29\text{c})$$

$$E_{\text{sur}} = \int d^3x \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \sigma)^2 \quad . \quad (2.29\text{d})$$

Mit Hilfe der Poisson-Gleichung (2.28b) lässt sich die elektrische Energie  $E_{\text{el}}$  umschreiben auf

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \int d^3x \kappa(\sigma) \vec{E}^a \cdot \vec{E}^a \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi^a \cdot \vec{\nabla} \phi^a \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi^a) \phi^a \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x g_s \rho^a(\vec{y}) \phi^a(\vec{y}) \quad . \end{aligned} \quad (2.30)$$

Im vorletzten Schritt haben wir eine partielle Integration ausgeführt und den entstehenden Oberflächenterm vernachlässigt. Im rein perturbativen Vakuum ist überall  $\kappa = 1$  und wir kennen die Greens-Funktion für die Poisson-Gleichung [Jackson75]. Damit können wir die elektrische Energie ausdrücken durch

$$E_{\text{el}} = \frac{g_s^2}{2} \iint d^3x d^3y \frac{\rho^a(\vec{x}) \rho^a(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad . \quad (2.31)$$

Dieses ist natürlich nichts anderes als der Ausdruck für die Energie in der freien Maxwell-Theorie. Allerdings lässt sich hier sehr schön erkennen, dass die elektrische Energie vom Quadrat der Ladungsdichte abhängt. Dieses ändert sich auch nicht durch eine Modifikation des elektrischen Potentials durch eine realistische Funktion  $\kappa(\sigma)$ , da diese ein Skalar im Farbraum ist. Das Potential  $\phi^a$  lässt sich lediglich nicht mehr auf so einfache Weise durch ein Integral über die Ladungsdichte darstellen. Im nächsten Abschnitt werden wir diese Eigenschaft der elektrischen Energie noch weiter untersuchen.

## 2.5 Symmetrien des Modells

In diesem Abschnitt wollen wir die Symmetrien erläutern, die noch in unserer klassischen und Abel'schen Näherung enthalten sind. Die Lagrange-Dichte der QCD und also auch die daraus abgeleiteten Bewegungsgleichungen sind invariant unter lokalen SU(3)-Transformationen  $U(x)$ . Diese transformieren die Quark- und die Eichfelder gemäß

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) \quad , \quad (2.32a)$$

$$A^\mu = A^{\mu,a}(x)t^a \rightarrow U(x)A^\mu U^\dagger(x) - \frac{i}{g_s}U(x)\partial^\mu U^\dagger(x) \quad , \quad (2.32b)$$

$$U(x) = e^{ig_s\theta^a(x)t^a} \quad . \quad (2.32c)$$

In unserer Modell-Lagrange-Dichte in Gl. (2.8) ist kein dynamischer Quarkterm mehr enthalten. Die Quark-Felder treten nur noch als äußere Quelle im Farbstrom  $j^{\mu,a}$  auf. Mit den Definitionen des Stroms in Gl. (2.19) und der Ladungen  $q^a$  in Gl. (2.21) ist der Quark-Gluon-Kopplungsterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qg} &= -g_s j_\mu^a A^{\mu,a} \\ &= -g_s \sum_k \langle c_k | t^a | c_k \rangle u_{k,\mu} w_k A^{\mu,a} \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Zustände  $|c_k\rangle$  sind dabei die in Gl. (2.20) definierten Farbvektoren des  $k$ -ten Teilchens.

### 2.5.1 Lokale Eichsymmetrie

In der Abel'schen Projektion sind die Gluon-Felder auf  $a \in \{3, 8\}$  eingeschränkt. Wenn wir die Transformationen  $U(x)$  in Gl. (2.32c) ebenfalls auf die von  $t^3$  und  $t^8$  generierten Transformationen einschränken, dann ist  $U(x)$  auf Grund der Diagonalgestalt von  $t^3$  und  $t^8$  ebenfalls diagonal. Die eingeschränkten Transformationen sind dann

$$\begin{aligned} |c\rangle \rightarrow |c'\rangle &= e^{ig_s\theta^a(x)t^a} |c\rangle \\ &= \text{diag}(e^{ig_s\chi_1}, e^{ig_s\chi_2}, e^{-ig_s(\chi_1+\chi_2)}) |c\rangle \end{aligned} \quad (2.34a)$$

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= U(x) A^\mu U^\dagger(x) - U(x) (\partial^\mu \theta^a(x)) t^a U^\dagger(x) \\ &= (A^{\mu,a} - \partial^\mu \theta^a(x)) t^a \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (2.34b)$$

$$\chi_1(x) = \frac{\theta^3(x)}{2} + \frac{\theta^8(x)}{2\sqrt{3}} \quad , \quad \chi_2(x) = -\frac{\theta^3(x)}{2} + \frac{\theta^8(x)}{2\sqrt{3}} \quad . \quad (2.34c)$$

Diese eingeschränkten Abel'schen Transformationen mischen also weder die verschiedenen Komponenten der Farbvektoren untereinander noch die beiden Eich-

potentiale  $A^{\mu,3}$  und  $A^{\mu,8}$ . Die reduzierten Transformationen in Gl. (2.34) zerfallen also in zwei  $U(1)$ -Transformationen mit Eichfunktionen  $\chi_1(x)$  und  $\chi_2(x)$ .

Wie in der Maxwell-Theorie lassen solche Transformationen sowohl die elektromagnetischen Felder als auch die einzelnen Farbladungen invariant, d.h.

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu,a} &= \partial^\mu (A^{\nu,a} - \partial^\nu \theta^a) - \partial^\nu (A^{\mu,a} - \partial^\mu \theta^a) \\ &= F^{\mu\nu,a} \end{aligned} \quad (2.35a)$$

$$\begin{aligned} q'^a &= \langle c | U^\dagger t^a U | c \rangle \\ &= q^a \quad . \end{aligned} \quad (2.35b)$$

Damit bleibt auch der Strom  $j^{\mu,a}$  invariant. Da die Potentiale in  $\mathcal{L}_{qg}$  explizit auftreten, ist der Kopplungsterm selbst allerdings nicht forminvariant. Der zusätzlich auftretende Term lässt aber das Wirkungsintegral unverändert, da der Strom der Kontinuitätsgleichung (2.10) ( $\partial_\mu j^{\mu,a} = 0$ ) unterliegt:

$$\begin{aligned} S'_{qg} &= -g_s \int d^3x j_\mu^a (A^{\mu,a} - \partial^\mu \theta^a) \\ &= -g_s \int d^3x j_\mu^a A^{\mu,a} - g_s \int d^3x \partial^\mu j_\mu^a \theta^a \\ &= S_{qg} \quad . \end{aligned} \quad (2.36)$$

In den in dieser Arbeit untersuchten statischen Konfigurationen ist die Kontinuitätsgleichung trivial erfüllt ( $\partial \rho^a / \partial t = 0$  und  $\vec{j}^a = 0$ ). Die Maxwell-Gleichungen sind also ebenso unverändert unter den  $U(1) \times U(1)$  Transformationen.

## 2.5.2 Diskrete Farbroationen

Wenn die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene  $U(1) \times U(1)$ -Symmetrie die einzige Symmetrie des Modells wäre, dann wären die Farbladung und das elektromagnetische Feld beobachtbare Größen. In der QCD dagegen sind die Felder keine invarianten Größen, sondern transformieren sich unter  $SU(3)$ -Transformationen gemäß Gl. (B.15b). Damit verbunden ist auch der farbgeladene Quarkstrom aus Gl. (B.17) kein erhaltener Strom und die zugehörige Quarkladung keine Erhaltungsgröße (s. Gl. (B.18)). Die Invarianz im CDM auf Ebene der Felder bedeutet, dass ein System  $r\bar{r}$  aus einem roten und einem antiroten Quark von dem aus einem blauen und einem antiblauen Quark ( $b\bar{b}$ ) voneinander zu unterscheiden wären. Das  $b\bar{b}$ -System ist auf Grund seiner Ladungen (siehe Tab. 2.1) allein mit einem Feld  $\vec{E}^8$  verbunden, während das  $r\bar{r}$ -System sowohl das  $\vec{E}^3$ - als auch das  $\vec{E}^8$ -Feld enthält.

Es zeigt sich allerdings, dass es noch eine weitere Symmetrie in der Modell-Lagrange-Dichte gibt. Diese spiegelt einen Teil der Farb-Invarianz der QCD wider. Um die Farbsymmetrie des Modells leichter zu analysieren, ist es sinnvoll,

den Gluon-Term mit der Identität  $\text{Sp } t^a t^b = \delta_{ab}/2$  umzuschreiben auf

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{2}\kappa(\sigma) \text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (2.37)$$

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu,a} t^a \quad , \quad (2.38)$$

und den Strom-Kopplungs-Term mit

$$\mathcal{L}_{qg} = -g_s \sum_k \langle A^\mu \rangle_k u_\mu^k w_k(\vec{x}) \quad , \quad (2.39)$$

$$\langle A^\mu \rangle_k = \langle c_k | A^\mu | c_k \rangle = \langle c_k | A^{\mu,a} t^a | c_k \rangle \quad .$$

In unserem Modell hat jedes Quark eine wohldefinierte Farbe und lässt sich mit einem der Farbvektoren  $r, g, b$  beschreiben. Wir vermuten nun, dass das System eine Invarianz zeigt unter solchen Farbroationen, die entweder zwei Farben oder alle Farben zyklisch miteinander vertauschen. Solche Transformationen  $V$  lassen sich explizit finden:

$$\begin{aligned} V_1 &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \epsilon_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 \\ \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_1 \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon_1 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ -\epsilon_1 \epsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40) \\ V_5 &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \\ 0 & -\epsilon_1 \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_6 = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_1 \epsilon_2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Faktoren  $\epsilon_{1/2}$  haben die Werte  $\pm 1$ . Diese Transformations-Matrizen sind unitär, d.h.  $V^\dagger = V^{-1}$  und sind damit Elemente der  $SU(3)$ . Sie bilden selber eine vollständige Gruppe, die wir  $D$  nennen wollen. Die Wirkungsweise der Transformationen  $V_i$  ist in Abb. 2.4 dargestellt.  $V_1$  ist bis auf Phasenfaktoren  $\epsilon_{1/2}$  die Identität.  $V_2$  und  $V_3$  sind zyklische Vertauschungen der Farben in verschiedene Richtungen  $r \rightarrow b \rightarrow g$  bzw.  $r \rightarrow g \rightarrow b$ .  $V_4$  bis  $V_6$  wirken wie paarweise Vertauschungen zweier Farben  $r \leftrightarrow b$ ,  $b \leftrightarrow g$  und  $g \leftrightarrow r$ . Diese diskreten Transformationen  $V$  sind ein Relikt der ursprünglichen  $SU(3)$ -Symmetrie der QCD. Die  $SU(3)$ -Symmetrie ist verbunden mit dem Farbstrom und die in unserem Modell erhaltene Ladung ist weiterhin die Abel'sche Farbladung aus dem Farbstrom der Quarks in Gl. (2.9a).

Da die Transformationen  $V$  bis auf  $V_1$  nicht mehr diagonal sind, vertauschen sie auch nicht mit den Generatoren  $t^3$  und  $t^8$ . Die Gluonfelder  $A^{\mu,3}$  und  $A^{\mu,8}$  trans-

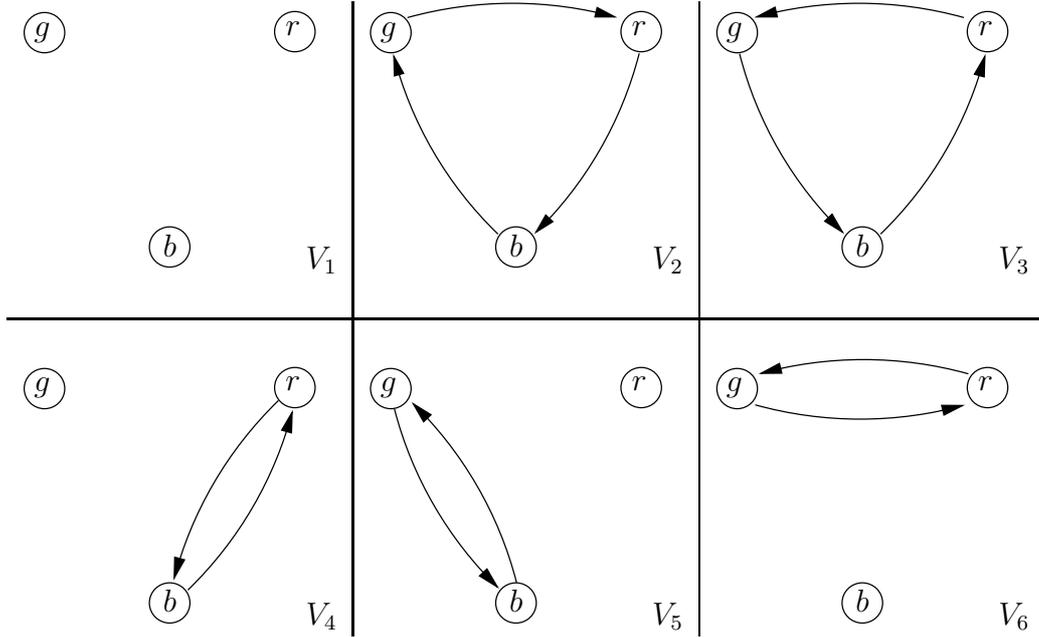


Abbildung 2.4: Die diskreten Farbroationen aus Gl. (2.40).  $V_1$  ist die Identität,  $V_2$  und  $V_3$  sind zyklische bzw. antizyklische Vertauschungen und  $V_4$  bis  $V_6$  paarweise Vertauschungen der Farben.

formieren sich also im Allgemeinen nicht mehr in sich selbst. Interessanterweise liegen die transformierten Felder aber wieder im durch  $t^3$  und  $t^8$  aufgespannten Raum:

$$|c\rangle \rightarrow V_i |c\rangle = |c'\rangle \quad (2.41a)$$

$$A^\mu = A^{\mu,3} t^3 + A^{\mu,8} t^8 \rightarrow V_i A^\mu V_i^\dagger = A_i^{\prime\mu,3} t^3 + A_i^{\prime\mu,8} t^8 \quad (2.41b)$$

$$A_i^{\prime\mu,3} = a_i^3 A^{\mu,3} + b_i^3 A^{\mu,8} \quad (2.41c)$$

$$A_i^{\prime\mu,8} = a_i^8 A^{\mu,3} + b_i^8 A^{\mu,8} \quad (2.41d)$$

Man beachte, dass der Ableitungsterm aus Gl. (2.32b) hier nicht mehr auftaucht, da die Ableitung  $\partial^\mu V^\dagger$  der globalen Transformationen  $V$  verschwindet. Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  der transformierten Felder lassen sich explizit berechnen und sind in Tabelle 2.2 angegeben.

Wie auch in der QCD sind die elektromagnetischen Felder nicht mehr invariant unter diesen Rotationen. Der Feldtensor  $F^{\mu\nu}$  transformiert sich wie das Vektorpotential selbst  $F^{\mu\nu} \rightarrow V F^{\mu\nu} V$ . Dagegen ist die CDM-Lagrange-Dichte invariant unter den Transformationen aus  $D$ ,

$$\text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rightarrow \text{Sp } (V F_{\mu\nu} V^\dagger V F^{\mu\nu} V^\dagger) = \text{Sp } F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (2.42a)$$

$$\langle A^\mu \rangle \rightarrow \langle c | V^\dagger V A^\mu V^\dagger V | c \rangle = \langle A^\mu \rangle \quad (2.42b)$$

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$V_5$	$V_6$
$a^3$	1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	-1
$b^3$	0	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0
$a^8$	0	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0
$b^8$	1	-1/2	-1/2	-1/2	-1/2	1

Tabelle 2.2: Die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  der transformierten Felder  $A^{\mu,a}$ . Die Koeffizienten sind unabhängig von den Vorzeichen  $\epsilon_i$  der Transformationen aus Gl. (2.40).

mit der Definition von  $\langle A^\mu \rangle$  in Gl. (2.39). Die skalaren Terme in der Lagrange-Dichte sind von den Transformationen  $V$  gar nicht betroffen. Der Energie-Impuls-Tensor und damit die Energiedichte ist dann genauso invariant und in diesem Sinne eine Beobachtungsgröße, die nicht von der expliziten Farbwahl abhängt. Die Energiedichte einer  $r\bar{r}$ -Konfiguration ist z.B. identisch mit der einer  $b\bar{b}$ -Konfiguration. In unserer numerischen Analyse werden wir besonderes Augenmerk auf die Energiedichte legen, obwohl wir zum besseren Verständnis auch die elektrischen Felder berechnen werden.

### 2.5.3 Invariante $q\bar{q}$ - und $qqq$ -Zustände

Wir wollen hier schematisch die Transformationen  $V$  an zwei Beispielen skizzieren, die wir später detailliert numerisch untersuchen werden, die  $q\bar{q}$ - und die  $qqq$ -Konfiguration. Wir nehmen hier an, dass die Felder zwischen den (Anti-)Quarks zu Strings mit verschwindender transversaler Ausdehnung zusammengeschnürt werden. Entlang dieser Strings gilt  $\kappa = 1$  und abseits der Strings  $\kappa = \kappa_{\text{vac}} = 0$ .

Im oberen Teil der Abb. 2.5 haben wir links den String zwischen einem blauen und einem antiblauen Quark. Auf Grund der Ladungen der blauen Quarks gibt es nur ein Feld  $\vec{E} = \vec{E}^8 t^8$  (angedeutet durch die gestrichelte Linie). Mit dem Gauß'schen Gesetz (2.14a) und  $g_s = 1$  ergibt sich  $\vec{E}^8 = q_b^8 \vec{e}_z$ , wobei  $\vec{e}_z$  ein Einheitsvektor vom  $b$ -Quark zum  $\bar{b}$ -Quark ist. Die Energiedichte entlang des Strings ergibt sich damit zu  $\mathcal{E} = (q_b^8)^2 = 1/3$ .

Die Farbrotaion  $V_3$  transformiert das  $b$ - und das  $\bar{b}$ -Quark in ein  $r$ - bzw. ein  $\bar{r}$ -Quark. Das elektrische Feld transformiert sich gemäß Gl. (2.41a) und den Koeffizienten aus Tab. 2.2 nach

$$\begin{aligned}
\vec{E}' &= b_3^3 \vec{E}^8 t^3 + b_3^8 \vec{E}^8 t^8 \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2} q_b^8 t^3 - \frac{1}{2} q_b^8 t^8 \\
&= q_r^3 \vec{e}_z t^3 + q_r^8 \vec{e}_z t^8 \quad ,
\end{aligned}$$

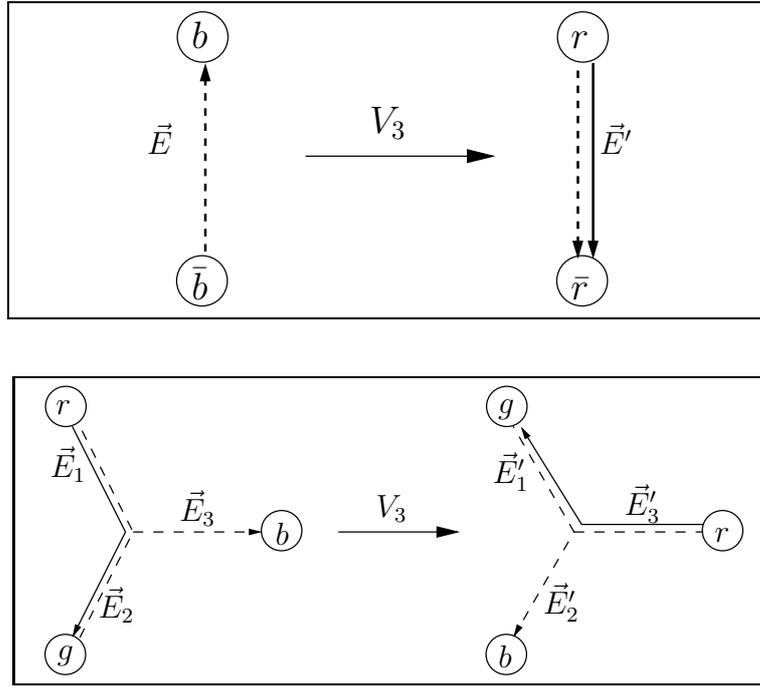


Abbildung 2.5: Die elektrischen Felder eines  $q\bar{q}$  Strings und einer  $qqq$  Konfiguration.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' &= (q_r^3)^2 + (q_r^8)^2 = (q_b^8)^2 = \frac{1}{3} \\ &= \mathcal{E} \quad . \end{aligned}$$

Durch die Transformation entsteht aus dem reinen  $\vec{E}^8$ -Feld ein zusätzliches Feld  $\vec{E}^3$  (durchgezogene Linie). Die 3- und die 8-Komponente des transformierten Felds  $\vec{E}$  erfüllen wieder das Gauß-Gesetz mit den transformierten Ladungen. Obwohl sich die Feldkonfiguration geändert hat, bleibt also die Energiedichte invariant. In unserem Modell spielt die explizite Wahl der Farben im  $q\bar{q}$ -String keine Rolle.

Ganz analog dazu können wir die Transformation auf einen  $rgb$ -Zustand anwenden. Im allgemeinen können die drei Quarks beliebig zueinander positioniert sein, aber zur Illustration betrachten wir die Anordnung aus Abb. 2.5 unten. Bei der  $qqq$ -Konfiguration gibt es verschiedene Möglichkeiten, die elektrischen Felder anzuordnen. Zwei mögliche sind die sog.  $Y$ - und die  $\Delta$ -Anordnung. Die erste haben wir im unteren Teil von Abb. 2.5 schematisch dargestellt. In dieser Anordnung ist die Feldkonfiguration in jedem String zwischen einem Quark und dem zentralen Punkt identisch mit einem  $q\bar{q}$  String.  $\vec{E}_1$  entspricht also einem  $r\bar{r}$  String,  $\vec{E}_2$  einem  $g\bar{g}$  String und  $\vec{E}_3$  einem  $b\bar{b}$  String. Die Felder transformieren sich beispielsweise unter  $V_3$  wie in der Abbildung angedeutet. Wieder bleibt die Energiedichte invariant unter  $V_3$  und hat den Wert  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = \mathcal{E} = 1/3$  in jedem der drei Schenkel.

In der  $\Delta$ -Konfiguration verlaufen die Felder wie in Abb. 2.6 oben links skizziert. Anstatt die Quarks über eine zentrale Verbindung in der Y-Konfiguration

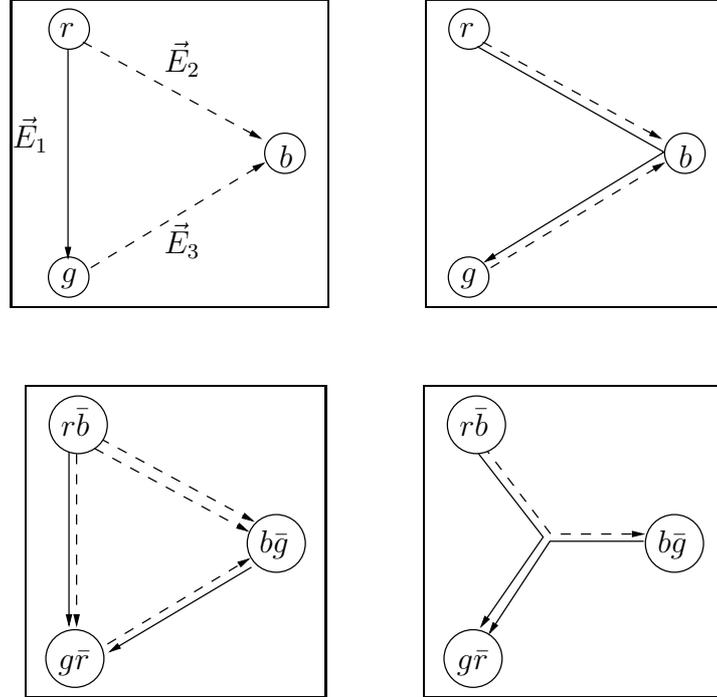


Abbildung 2.6: Alternative 3-Quark Feldkonfigurationen.

zu verbinden wie in Abb. 2.5 unten, verlaufen die Strings entlang der Seitenkanten des Dreiecks. An jedes Quark sind jetzt zwei Strings geknüpft, die jeweils einen Teil des elektrischen Flusses transportieren. Da das  $b$ -Quark keine Ladung bzgl. der 3-Komponente des Feldes enthält, verläuft diese Feldkomponente nur zwischen  $r$  und  $g$ -Quark (durchgezogener Pfeil).  $r$ - und  $g$ -Quark dagegen sind Quellen der 8-Komponente des Feldes, so dass dieses bei ihnen startet und beim  $b$ -Quark endet (gestrichelte Pfeile). Es zeigt sich allerdings, dass die elektrische Energiedichte mit den durch das Gauß-Gesetz bestimmten elektrischen Feldern in solch einer Feldanordnung nicht invariant unter den Transformationen  $V$ . Dies lässt sich leicht zeigen, in dem man die Energiedichte in den verschiedenen Teilstrings untersucht. Nach dem Gauß-Gesetz ist die Feldstärke  $|\vec{E}_1| = q_r^3$  und  $|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3| = q_r^8$ . Die Energiedichte in den Teilstrings ist demnach  $\mathcal{E}_1 = (q_r^3)^2 = 1/4$  und  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = (q_r^8)^2 = 1/12 \neq \mathcal{E}_1$ . Diese Feldkonfiguration kann demnach nicht invariant sein unter Transformationen, die die Farbe der Quarks permutiert, da die Energiedichten in den Teilstrings unterschiedlich groß sind.

Eine Variante dieser Konfiguration ist in der Abbildung oben rechts gezeigt, in der die Strings in einer geknickt linearen Anordnung vorliegen. Diese Konfiguration ist tatsächlich wieder invariant, denn sie geht einfach durch kontinuierliches Verschieben des Knotenpunktes vom Zentrum des Dreiecks bis zum  $b$ -Quark

aus der Y-Konfiguration hervor. Allerdings ist die Gesamtenergie im Vergleich zur Y-Geometrie höher, da die gesamte Stringlänge größer ist. Sind die Quarks im Abstand  $R$  voneinander, dann ist die Stringlänge in der Y-Konfiguration  $L_Y = 3R/\sqrt{3} \approx 1.7R$  und in der Konfiguration oben rechts in Abb. 2.6  $L_{>} = 2R$ . Für infinitesimal dünne Strings können wir also die  $\Delta$ -Konfiguration des  $qqq$ -Zustands ausschließen.

Die Situation wird etwas anders, wenn die Quarks in der adjungierten Darstellung gewählt werden. Jedes Teilchens besteht dann aus einer Farbe und einer Antifarbe. In dieser Darstellung können sowohl die Y- als auch die  $\Delta$ -Konfiguration invariant realisiert werden, wie in Abb. 2.6 unten links und rechts dargestellt. In der  $\Delta$ -Form sind alle Kanten identisch mit einem  $q\bar{q}$ -String, der wie oben gezeigt invariant unter den Farbroationen ist. Die Energiedichte in jedem String ist  $\mathcal{E} = 1/3$ , die elektrische Gesamtenergie ist  $E_{\Delta}^{\text{ad}} \propto 3R/3 = R$ .

Das elektrische Feld der Strings in der Y-Konfiguration ist z.B. in dem String am  $g\bar{r}$ -Quark  $|\vec{E}_{g\bar{r}}^3| = q_{g\bar{r}}^3 = 1$  mit der Quarkladung für das  $g\bar{r}$ -Quark aus Tab. 2.1. Die Energiedichte in diesem String ist  $\mathcal{E}^{\text{ad}} = (q_{g\bar{r}}^3)^2 = 1$ . Wie man sich mit den Ladungen aus Tab. 2.1 klarmacht, sind die Strings am  $r\bar{b}$ -Quark und am  $b\bar{g}$ -Quark zu diesem äquivalent. Für diese Konfiguration ist die elektrische Gesamtenergie  $E_Y^{\text{ad}} \propto 3R/\sqrt{3} \approx 1.7R > E_{\Delta}^{\text{ad}}$ . In der adjungierten Darstellung sind also beide Geometrien invariant. Zusätzlich ist die Dreiecks-Geometrie energetisch günstiger. Dieses unterschiedliche Verhalten der Y- und der  $\Delta$  Konfiguration bzgl. der Invarianz unter Farbroationen hat seine Entsprechung in der QCD, die zu denselben Ergebnissen kommt [Kuzmenko03].

Die obigen Überlegungen gelten allerdings nur für unendlich dünne Strings. Realistische Strings haben aber eine endliche transversale Ausdehnung. In unserem Modell müssten wir einen unendlich hohen Druck auf die Bags ausüben, um sie in 1-dimensionale Strings zu komprimieren. Dieses wäre mit einer unendlich hohen Energie verbunden. In unserer numerischen Untersuchung solcher Systeme, werden wir auch sehen, inwieweit die hier gemachten Überlegungen bei endlichen Stringbreiten modifiziert werden. Realistische  $qqq$ -Konfigurationen mit endlicher Stringbreite zeigen weder eine reine  $\Delta$ - noch eine reine Y-Geometrie, sondern eine Übergangsgeometrie.

## 2.6 Energie ausgedehnter Zustände

In der numerischen Analyse des Modells werden wir die Energien von Quark-Konfigurationen untersuchen. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, sind nur farbneutrale, hadronische Zustände  $|H\rangle$  sinnvoll. Unter farbneutralen Zuständen verstehen wir zunächst einmal eichinvariante Zustände wie sie in Anhang B.3 beschrieben werden. Diese sind nach Gl. (B.24) farblos. Gleichzeitig verschwindet sowohl ihre Gesamt-Farbladung  $\langle H|Q^a|H\rangle = 0$  als auch ihre Farbladungs-Dichte  $\langle H|\rho^a(x)|H\rangle$  (siehe Gln. (B.25) und (B.27)). Im CDM

sind solche Zustände allerdings trivial lösbar. Die Ladungsdichte ist nach dem Gauß-Gesetz in Gl. (2.14a) die Quelle für die elektrischen Felder. Wenn diese verschwindet, gibt es auch keine elektrischen Felder. Als sinnvolle, nicht-triviale Zustände kommen im CDM demnach nur Zustände mit nicht-verschwindender Ladungsdichte aber verschwindender Gesamtladung in Frage. Zu den eichinvarianten Zuständen  $|H\rangle$  suchen wir die analogen klassischen Zustände  $|h\rangle$ . Wir untersuchen solche Zustände hier explizit für  $q\bar{q}$ - und  $qqq$ - Konfigurationen. Wir verstehen unter der klassischen Ladungsdichte und der klassischen Energiedichte die jeweiligen Erwartungswerte der entsprechenden Operatoren. Die Energiedichte ist nach Gl. (2.31) proportional zum Quadrat des Farbladungsoperators  $\hat{\rho}^a(x)\hat{\rho}^a(y)$ . Der Übergang vom quantenmechanischen zum klassischen Zustand geschieht durch Projektion auf einen ausgewählten Farbzustand. Wie wir sehen werden, sind solche Zustände erst in der Abel'schen Näherung farblos. Wir werden jetzt zeigen, dass in der Abel'schen Näherung die Energiedichte für die quantenmechanischen Zustände  $|H\rangle$  und für deren klassische Äquivalente  $|h\rangle$ , die wir in unseren Simulationen verwenden, identisch ist.

### 2.6.1 Mesonische $q\bar{q}$ -Zustände

Einen klassischen  $q\bar{q}$ -Zustand erhält man mit

$$|q\bar{q}\rangle = |M\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|(c_i\psi)(\bar{c}_i\bar{\psi})\rangle \rightarrow |m\rangle = |(r\psi)(\bar{r}\bar{\psi})\rangle \quad , \quad (2.43)$$

wobei über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist. Die Festlegung auf die Farbe  $r$  in diesem Fall ist beliebig, da sich  $|r\bar{r}\rangle$  nur durch eine Farbrotaion von anderen Farbkombinationen unterscheidet.  $\psi$  bzw.  $\bar{\psi}$  sind die räumlichen Wellenfunktionen. Andere Quantenzahlen wie Spin und Flavor kommen in der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}_{\text{CDM}}$  nicht vor und spielen hier deshalb keine Rolle. Für  $|m\rangle$  gilt für beliebige Farbkombinationen  $(c_\alpha, c_\beta)$

$$\langle c_\alpha\bar{c}_\beta|Q^a|r\bar{r}\rangle = \langle c_\alpha|t^a|r\rangle\delta_{\beta 1} - \langle r|t^a|c_\beta\rangle\delta_{\alpha 1} \quad (2.44)$$

Die einzigen nicht-verschwindenden Matrixelemente erhält man für  $(\alpha = 1, \beta \neq 1)$  bzw.  $(\alpha \neq 1, \beta = 1)$ .

$$\begin{aligned} \langle c_\alpha\bar{c}_\beta|Q^a|r\bar{r}\rangle &= \begin{cases} -\langle r|t^a|c_\beta\rangle, & (\alpha = 1, \beta \neq 1) \\ \langle c_\alpha|t^a|r\rangle, & (\alpha \neq 1, \beta = 1) \end{cases} \quad , \quad (2.45) \\ &= \begin{cases} \neq 0, & a \in \{1 \dots 8\} \\ 0, & a \in \{3, 8\} \end{cases} \quad , \end{aligned}$$

was auf Grund der Diagonalgestalt der  $t^{3,8}$  sofort einsichtig ist.  $|m\rangle$  ist also erst in der Abel'schen Näherung farblos. Natürlich verschwindet die Gesamt-Ladung

$\langle m|Q^a|m\rangle = 0$ . Die Ladungs-Dichte ergibt sich zu

$$\langle (r\psi)(\bar{r}\bar{\psi}) | \rho^a(x) | (r\psi)(\bar{r}\bar{\psi}) \rangle = \langle r|t^a|r\rangle |\psi(x)|^2 - \langle \bar{r}|\bar{t}^a|\bar{r}\rangle |\bar{\psi}(x)|^2 \quad . \quad (2.46)$$

Die Ladungsdichte ist erst Null, wenn Quark und Antiquark die gleiche räumliche Verteilung haben. In unserem Modell also, wenn sie sich am selben Ort befinden.

Für die Energiedichte wollen wir hier den Vergleich in den beiden Zuständen  $|M\rangle$  und  $|m\rangle$  machen. Die Energiedichte ist proportional zu  $\langle \rho^a(x)\rho^a(y) \rangle$  und ergibt sich im Zustand  $|M\rangle$  zu

$$\begin{aligned} \langle M | \rho^a(x)\rho^a(y) | M \rangle &= \frac{1}{3} \langle (c_i\psi)(\bar{c}_i\bar{\psi}) | \rho^a(x)\rho^a(y) | (c_j\psi)(\bar{c}_j\bar{\psi}) \rangle \quad (2.47) \\ &= \frac{1}{3} \left( \langle c_i | t^a t^a | c_j \rangle \delta_{ij} |\psi(x)|^2 \delta(x-y) \right. \\ &\quad + \langle \bar{c}_i | \bar{t}^a \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle \delta_{ij} |\bar{\psi}(x)|^2 \delta(x-y) \\ &\quad + \langle c_i | t^a | c_j \rangle \langle \bar{c}_i | \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle |\psi(x)|^2 |\bar{\psi}(y)|^2 \\ &\quad \left. + \langle c_i | t^a | c_j \rangle \langle \bar{c}_i | \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle |\psi(y)|^2 |\bar{\psi}(x)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \text{Sp} (t^a t^a) \left( |\psi(x)|^2 \delta(x-y) + |\bar{\psi}(x)|^2 \delta(x-y) \right. \\ &\quad \left. - |\psi(x)|^2 |\bar{\psi}(y)|^2 - |\psi(y)|^2 |\bar{\psi}(x)|^2 \right) \end{aligned}$$

und im Zustand  $|m\rangle$  analog zu

$$\begin{aligned} \langle m | \rho^a(x)\rho^a(y) | m \rangle &= \langle (r\psi)(\bar{r}\bar{\psi}) | \rho^a(x)\rho^a(y) | (r\psi)(\bar{r}\bar{\psi}) \rangle \quad (2.48) \\ &= \langle r | t^a t^a | r \rangle \left( |\psi(x)|^2 \delta(x-y) + |\bar{\psi}(x)|^2 \delta(x-y) \right) \\ &\quad - \langle r | t^a | r \rangle^2 \left( |\psi(x)|^2 |\bar{\psi}(y)|^2 + |\psi(y)|^2 |\bar{\psi}(x)|^2 \right) \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Terme in beiden Gleichungen entsprechen den Selbstenergien der (Anti-)Quarks. Die anderen beiden Terme entsprechen der Wechselwirkungs-Energie der beiden Teilchen untereinander. Die Quark-Antiquark-Wechselwirkung ist also attraktiv.

Wir können die auftretenden Matrix-Elemente und Spuren im Farbraum sowohl in der vollen SU(3) ( $a \in \{1 \dots 8\}$ ) als auch in der Abel'schen Näherung ( $a \in \{3, 8\}$ ) auswerten:

$$\frac{1}{3} \text{Sp} t^a t^a = \begin{cases} C_F, & a \in \{1 \dots 8\} \\ C_F^{\text{ab}}, & a \in \{3, 8\} \end{cases} \quad , \quad (2.49a)$$

$$\langle r | t^a t^a | r \rangle = \begin{cases} C_F, & a \in \{1 \dots 8\} \\ C_F^{\text{ab}}, & a \in \{3, 8\} \end{cases} \quad , \quad (2.49b)$$

$$\langle r | t^a | r \rangle \langle r | t^a | r \rangle = \begin{cases} C_F/4, & a \in \{1 \dots 8\} \\ C_F^{ab}, & a \in \{3, 8\} \end{cases} . \quad (2.49c)$$

Hier haben wir die Definition des Casimir-Operators  $C_F$  aus Gl. (B.4) verwendet und gleichzeitig den Casimir-Operator  $C_F^{ab} = 1/3$  in der Abel'schen Näherung eingeführt, der durch  $t^a t^a = C_F^{ab} \mathbf{1}_3$  mit  $a \in \{3, 8\}$  definiert ist. Man sieht, dass die Erwartungswerte in den Zuständen  $|M\rangle$  und  $|m\rangle$  nur in der Abel'schen Näherung gleich sind:

$$\begin{aligned} \langle M | \rho^a(x) \rho^a(y) | M \rangle &= C_F^{ab} (|\psi(x)|^2 \delta(x-y) + |\bar{\psi}(x)|^2 \delta(x-y)) \quad (2.50) \\ &\quad - C_F^{ab} (|\psi(x)|^2 |\bar{\psi}(y)|^2 + |\psi(y)|^2 |\bar{\psi}(x)|^2) \\ &= \langle m | \rho^a(x) \rho^a(y) | m \rangle \quad \text{für } a \in \{3, 8\} \end{aligned}$$

### 2.6.2 Baryonische $qqq$ -Zustände

Genauso können wir 3-Quark-Zustände untersuchen. Analog zum  $q\bar{q}$ -Fall erhalten wir den klassischen Zustand für das CDM mit

$$|qqq\rangle = |B\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon_{ijk} |(c_i \psi_1)(c_j \psi_2)(c_k \psi_3)\rangle \rightarrow |b\rangle = |(r \psi_1)(g \psi_2)(b \psi_3)\rangle . \quad (2.51)$$

Wie zuvor ist dieser erst in der Abel'schen Näherung farblos, d.h.

$$\langle c_\alpha c_\beta c_\gamma | Q^a | rgb \rangle = \begin{cases} \neq 0, & a \in \{1 \dots 8\} \\ = 0, & a \in \{3, 8\} \end{cases}$$

für beliebige Kombinationen  $(c_\alpha, c_\beta, c_\gamma)$ . Die Gesamtladung ist wieder Null,  $\langle rgb | Q^a | rgb \rangle = 0$ , und die Ladungs-Dichte ist

$$\langle rgb | \rho^a(x) | rgb \rangle = \sum_{i=1}^3 \langle c_i | t^a | c_i \rangle |\psi_i(x)|^2 . \quad (2.52)$$

Auch hier verschwindet die Ladungsdichte erst, wenn alle Quarks am selben Ort sind. Für die quadratische Ladungsdichte erhält man für den quantenmechanischen Zustand  $|B\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle B | \rho^a(x) \rho^a(y) | B \rangle &= \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k'} \quad (2.53) \\ &\quad \left( \langle c_i | t^a t^a | c_{i'} \rangle \delta_{jj'} \delta_{kk'} \sum_{n=1}^3 (|\psi_n(x)|^2 \delta(x-y)) \right. \\ &\quad \left. + \langle c_i | t^a | c_{i'} \rangle \langle c_j | t^a | c_{j'} \rangle \delta_{kk'} \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}} |\psi_m(x)|^2 |\psi_n(y)|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \text{Sp } t^a t^a \left( \sum_{n=1}^3 (|\psi_n(x)|^2 \delta(x-y)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}} |\psi_m(x)|^2 |\psi_n(y)|^2 \right)
\end{aligned}$$

und für den entsprechenden klassischen Zustand

$$\begin{aligned}
\langle b | \rho^a(x) \rho^a(y) | b \rangle &= \sum_{n=1}^3 (\langle c_n | t^a t^a | c_n \rangle |\psi_n(x)|^2 \delta(x-y)) \\
&\quad + \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}} (\langle c_m | t^a | c_m \rangle \langle c_n | t^a | c_n \rangle |\psi_m(x)|^2 |\psi_n(y)|^2) \quad .
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Mit

$$\langle c_m | t^a | c_m \rangle \langle c_n | t^a | c_n \rangle = -\frac{1}{2} \begin{cases} C_F/4, & a \in \{1 \dots 8\} \\ C_F^{\text{ab}}, & a \in \{3, 8\} \end{cases} \tag{2.55}$$

sieht man wieder, dass die Erwartungswerte nur in der Abel'schen Näherung übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
\langle B | \rho^a(x) \rho^a(y) | B \rangle &= C_F^{\text{ab}} \left( \sum_{n=1}^3 (|\psi_n(x)|^2 \delta(x-y)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} C_F^{\text{ab}} \sum_{\substack{m,n \\ m \neq n}} |\psi_m(x)|^2 |\psi_n(y)|^2 \right) \\
&= \langle b | \rho^a(x) \rho^a(y) | b \rangle \quad .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Auch die Quark-Quark-Wechselwirkung ist attraktiv, allerdings ist sie nur halb so stark wie die Quark-Antiquark-Wechselwirkung. Wir halten hier zusammenfassend fest, dass in der gewählten Abel'schen Näherung eine klassische Rechnung, wie wir sie in unseren Simulationen für das CDM verwenden, dieselben Resultate für die Energiedichte liefert wie eine entsprechende quantenmechanische – zumindest was die Farbstruktur anbelangt. Wir wollen hier erwähnen, dass in der Gitter-QCD Rechnungen in Abel'scher Näherung durchgeführt wurden. Diese Analysen zeigen im Vergleich mit den nicht-Abel'schen Rechnungen eine *Abel'sche Dominanz*, d.h. dass beobachtbare Größen, wie z.B. die Energie des Systems zum größten Teil von den Abel'schen Freiheitsgraden bestimmt werden [Ezawa82, Bali96, Amemiya99, Bornyakov04].

## 2.7 Phänomenologie des Modells

In diesem Abschnitt werden wir die Eigenschaften des Chromo-Dielektrischen Modells qualitativ beschreiben. Dazu werden wir zwei prinzipiell verschiedene Konfigurationen hervorheben: Jene mit nicht-verschwindender Gesamtladung und farbneutrale Zustände im Sinne von Abschnitt 2.5.3 und 2.6. Die besten Beispiele dafür sind ein einzelnes Quark für die erste Klasse von Systemen bzw. ein Quark-Antiquark-Paar für die zweite. Wie wir weiter oben schon erwähnt haben, bilden sich um die Farbladungen Bags mit Volumen  $V$  aus. Diese Bags haben eine relativ scharf definierte Oberfläche  $\vec{S}$ , an denen der Wert des Dielektrikums von seinem perturbativen auf seinen nicht-perturbativen Wert abfällt, d.h.  $\kappa = 1 \rightarrow \kappa = \kappa_{\text{vac}}$  bei  $\vec{x} = \vec{S}$ . Jedem Punkt im Raum ist also eindeutig eine Dielektrizitäts-Konstante  $\kappa(\vec{x})$  zugeordnet. Mit diesen dielektrischen Eigenschaften wird das Medium gleichzeitig polarisierbar, und wir erwarten entsprechende Polarisations-Ladungen  $\rho_{\text{pol}}$  auf den Bag-Oberflächen. Führen wir die elektrische Suszeptibilität  $\chi = \kappa - 1$  ein, ergeben sich die Polarisation  $\vec{P}^a$  und die Polarisations-Ladungen mit

$$\begin{aligned} \vec{D}^a &= (1 + \chi)\vec{E}^a \\ &= \vec{E}^a + \vec{P}^a \quad \text{mit} \quad \vec{P}^a = \chi\vec{E}^a \end{aligned} \quad (2.57a)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a &= \vec{\nabla} \cdot \vec{D}^a - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}^a \\ &= \rho^a + \rho_{\text{pol}}^a \quad \text{mit} \quad \rho_{\text{pol}}^a = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}^a \quad . \end{aligned} \quad (2.57b)$$

Die elektrischen Felder und die Polarisation lassen sich in einem Bag-Modell analytisch bestimmen. In diesem Modell nehmen wir an, dass der Bag einen infinitesimal scharfen Rand hat. In seinem Inneren ist  $\kappa = 1$  und in seinem Äußeren  $\kappa = \kappa_{\text{vac}}$ , d.h.  $\kappa(\vec{x}) = \Theta(|\vec{S} - \vec{x}|) + \kappa_{\text{vac}}\Theta(|\vec{x} - \vec{S}|)$ . Wir werden für ein einzelnes Quark sowie für ein Quark-Antiquark-Paar die Felder in diesem Bag-Modell bestimmen und anschließend mit Ergebnissen aus dem CDM für diese Konfigurationen vergleichen. Dieses wird uns ein qualitatives Verständnis für die CDM-Ergebnisse liefern. Diese Art von Bag-Modell wurde bereits diskutiert in [Johnson76, Casher79, Casher79].

### 2.7.1 Bag-Modell

Ein einzelnes Quark mit Farbe  $c$  hat eine sphärisch symmetrische Ladungsdichte  $\rho(\vec{x})$ . Wir nehmen hier an, das Quark sei punktförmig, also gilt  $\rho^a(\vec{x}) = q_c^a \delta(\vec{x})$ . Auf Grund der Symmetrie sind sowohl die elektrischen Felder als auch das Confinement-Feld  $\sigma$  sowie die dielektrische Funktion radialsymmetrisch. Diese Situation ist in Abb. 2.7 auf der linken Seite dargestellt. Das Quark (mit positiver Ladung) ist im Zentrum des Bags mit Radius  $R$  und mit  $\kappa = 1$ , der vom dielektrischen Medium mit  $\kappa = \kappa_{\text{vac}}$  umgeben ist. In der zweiten Situation

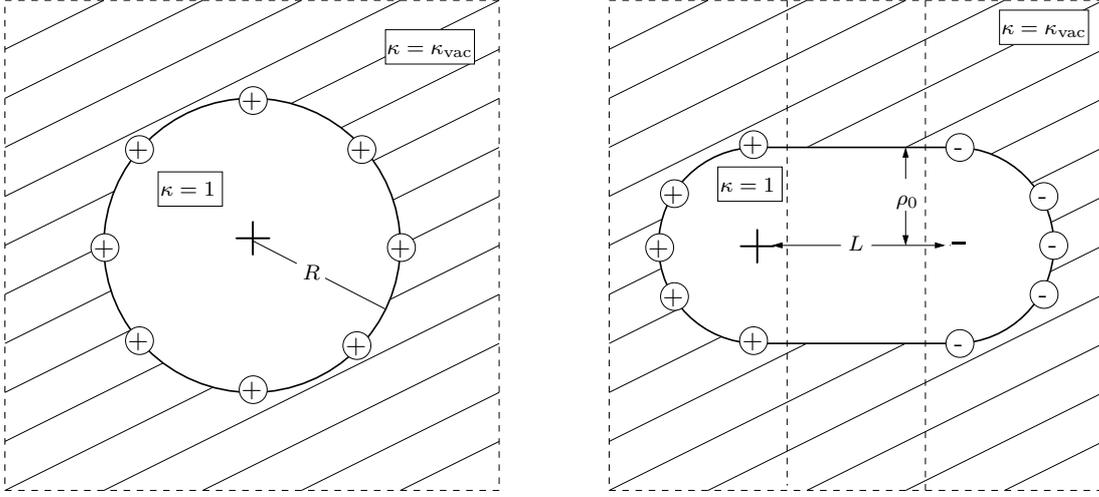


Abbildung 2.7: Sphärisch symmetrischer Bag für eine einzelne (positive) Quarkladung (links) und axial-symmetrischer Bag für Quark-Antiquark-Ladung. Das Dielektrikum hat den Wert  $\kappa = 0$  im Inneren und  $\kappa = \kappa_{\text{vac}}$  im Äußeren. An der Bagoberfläche bilden sich Polarisationsladungen. Beim Einzelquark wird die zentrale Ladung nach außen verstärkt (Antiscreening), beim Dipol ist die Netto-Ladung weiterhin gleich Null.

(in der Abbildung rechts) hat der Bag nur noch Zylinder Symmetrie mit radialer Ausdehnung  $\rho_0$ . Quark und Antiquark befinden im Abstand  $R$  zueinander auf der Symmetrie-Achse, die wir hier als  $x$ -Achse wählen.

Das elektrische Feld hat im ersten Fall allein eine radiale Komponente. Durch das Gauß-Gesetz in Gl. (2.14a) ist die transversale Komponente der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}^a$  beim Durchgang durch eine Grenzfläche zwischen Bereichen mit verschiedenen Dielektrizitäts-Konstanten stetig (siehe [Jackson75]), also

$$\vec{D}^a(r) = \frac{g_s q_c^a}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad , \quad \vec{E}^a(r) = \begin{cases} \vec{D}^a & , \quad r < r_0 \\ \frac{\vec{D}^a}{\kappa_{\text{vac}}} & , \quad r > r_0 \end{cases} \quad , \quad \vec{P}^a(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < r_0 \\ -\left|\frac{\chi}{\kappa}\right| \vec{D}^a & , \quad r > r_0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Entsprechend macht die radiale Komponente von  $\vec{E}$  einen Sprung um das  $1/\kappa_{\text{vac}}$ -fache an der Grenzfläche (siehe auch Abb. 2.8, links). Die Polarisation ist dem elektrischen Feld entgegengerichtet und auf der Grenzfläche bildet sich eine Polarisations-Ladungsdichte

$$\rho_{\text{pol}} = + \left| \frac{\chi}{\kappa} \right| \frac{g_s q_c^a \delta(r - r_0)}{4\pi r_0^2} \quad . \quad (2.59)$$

Im Grenzübergang  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$  divergieren das elektrische Feld  $\vec{E}^a$  und die Polari-

sation  $\vec{P}^a$  sowie die Polarisations-Ladungsdichte  $\rho_{\text{pol}}$  an der Bagoberfläche. Der magnetische Strom  $\vec{j}^a = \vec{\nabla} \kappa \times \vec{E}^a$  verschwindet auf Grund der Symmetrie des Problems.

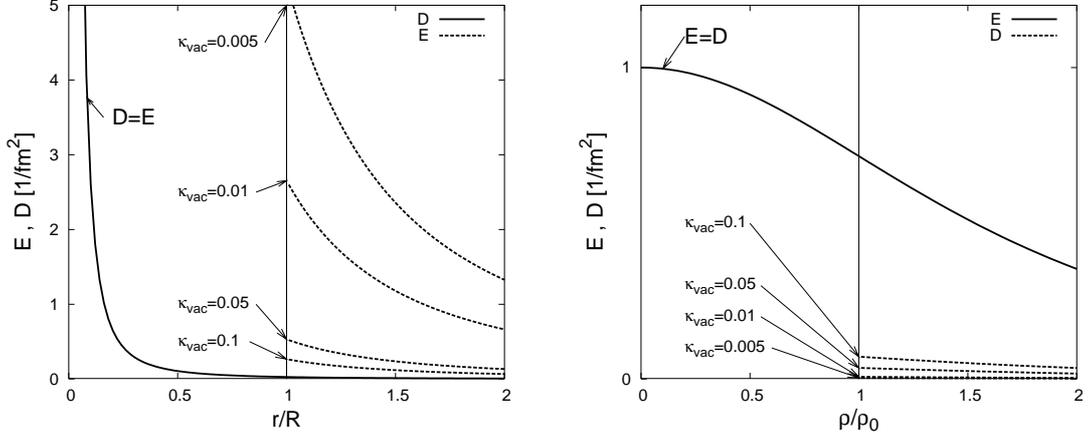


Abbildung 2.8: Elektrische Felder des einzelnen Quarks (links) und der  $q\bar{q}$ -Konfiguration (rechts). An der Bagoberfläche springt beim Einzelquark das elektrische Feld  $\vec{E}$  proportional zu  $1/\kappa_{\text{vac}}$  und die Verschiebung  $\vec{D}$  verläuft stetig. Beim Dipol verläuft das elektrische Feld stetig und die Verschiebung fällt auf einen Wert proportional zu  $\kappa_{\text{vac}}$ .

Im  $q\bar{q}$ -Fall können wir die Felder bereits nur noch im Grenzfall sehr weit entfernter Teilchen analytisch bestimmen, also für  $R \rightarrow \infty$ . Da die parallele Komponente des  $\vec{E}$ -Feldes stetig an der Bag-Oberfläche ist, können wir annehmen, dass das elektrische Feld in der zentralen Ebenen zwischen den Quarks die Dipol-Form des freien Feldes ( $\kappa = 1$ ) annimmt:

$$\vec{E}^a(\rho) = \frac{g_s q_c^a}{\pi \rho_0^2} \frac{\vec{e}_x}{\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 + 1\right]^{3/2}}, \quad (2.60a)$$

$$\vec{D}^a(\rho) = \begin{cases} \vec{E}^a, & \rho < \rho_0 \\ 0, & \rho > \rho_0 \end{cases}, \quad (2.60b)$$

$$\vec{P}^a(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < \rho_0 \\ -\vec{E}^a, & \rho > \rho_0 \end{cases}, \quad (2.60c)$$

mit  $a = R/2$ . Hier haben wir bereits  $\kappa_{\text{vac}} = 0$  ausgenutzt und das Gauß-Gesetz verwendet. Die Polarisations-Ladungsdichte verschwindet aufgrund der Homogenität der Felder in der zentralen Ebene zwischen den Teilchen. An den Polen der  $q\bar{q}$ -Konfiguration werden sich analog zum 1-Teilchen-Fall Polarisations-Ladungen auf einer Kugel-Halbschale bilden mit entgegengesetzten Ladungen auf den beiden Polkappen. Die dazugehörige Polarisierung ist außerhalb des Bags dem elek-

trischen Feld  $\vec{E}$  entgegengesetzt und löscht dieses bis auf Terme  $\vec{D}^a = \mathcal{O}(\kappa_{\text{vac}})$  aus (s. Abb. 2.8 rechts). Der magnetische Strom  $\vec{j}^a = j^a \delta(\rho - \rho_0) \vec{e}_\phi$  hat lediglich eine azimutale Komponente und ist damit ein reiner Oberflächenstrom. Dieses ist dual zu einer Spule, in der der Spulenstrom ein nahezu homogenes magnetisches Feld erzeugt. Im Modell des dualen Supraleiters [Nielsen73, Wyld76, Baker91] ist genau wie hier das elektrische Feld im Flussschlauch durch einen magnetischen Strom eingeschlossen. Man nennt diesen Flussschlauch auf Grund des Stroms auch einen Wirbel bzw. *Vortex*. Dieser Wirbel wird uns später bei den CDM-Ergebnissen wieder begegnen.

Die stabilen Konfigurationen erhalten wir aus einer Energiebilanz. So wie im CDM sind auch im Bag-Modell die verschiedenen Phasen des Systems ( $\kappa = 1$  und  $\kappa = \kappa_{\text{vac}}$ ) mit unterschiedlichen Energiedichten verbunden. Die Energiedifferenz ist durch die Bag-Konstante  $B$  festgelegt. Bei Vernachlässigung der Oberflächenenergie (siehe Gl. (2.29)) besteht die Energie allein aus dem Volumenanteil und dem elektrischen Anteil.

Die elektrische Feldenergie des einzelnen Quarks lässt sich mit den Gln. (2.58) bestimmen. Wie in der freien Maxwell-Theorie für Punktladungen divergiert die elektrische Energie (Gl. (2.29b)) auf Grund der Selbstwechselwirkung. Dieses regulieren wir, indem wir nur die Energiedifferenz zum rein perturbativen Fall ( $\kappa = 1$  überall) betrachten.

$$\begin{aligned}
 E_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^a \cdot \vec{D}^a - \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^a \cdot \vec{D}^a \Big|_{\kappa=1} & (2.61) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dr \frac{g_s^2 C_F}{\kappa(r) r^2} - \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dr \frac{g_s^2 C_F}{r^2} \\
 &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi} \left( \frac{1}{\kappa_{\text{vac}}} - 1 \right) \int_R^\infty dr \frac{1}{r^2} \\
 &= \frac{g_s^2 C_F}{8\pi R} \left( \frac{1}{\kappa_{\text{vac}}} - 1 \right) .
 \end{aligned}$$

Die Volumenenergie des Einzel-Quarks bestimmt sich ganz einfach aus dem Volumen des Bags und der Bag-Konstanten zu  $E_{\text{vol}} = (4/3\pi)r^3 B$  und man erhält für die Gesamtenergie

$$E_{\text{tot}}(r) = E_{\text{el}} + E_{\text{vol}} = \frac{g_s^2 C_F}{8\pi r} \left( \frac{1}{\kappa_{\text{vac}}} - 1 \right) + \frac{4}{3} \pi r^3 B . \quad (2.62)$$

Wie man sieht, sinkt die elektrische Energie mit zunehmendem Volumen und man erhält den stabilen Quark-Bag durch Variation der Energie nach dem Bag-Radius,

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{dr} = 0 \xrightarrow{\kappa_{\text{vac}} \ll 1} r_0^4 = \frac{1}{32\pi^2} \frac{g_s^2 C_F}{B \kappa_{\text{vac}}} \quad , \quad (2.63a)$$

$$E_{\text{el}}^0 = 3E_{\text{vol}}^0 = \frac{1}{4} \left[ \frac{2B}{\pi^2} \left( \frac{g_s^2 C_F}{\kappa_{\text{vac}}} \right)^3 \right]^{1/4} \quad , \quad (2.63b)$$

$$E_{\text{tot}}^0 = \frac{1}{3} \left[ \frac{2B}{\pi^2} \left( \frac{g_s^2 C_F}{\kappa_{\text{vac}}} \right)^3 \right]^{1/4} \quad . \quad (2.63c)$$

Man sieht bereits, dass der Radius mit steigender Bag-Konstante sinkt und mit wachsender Kopplungskonstante  $g_s$  anwächst. Aus diesem Grund interpretiert man die Bag-Konstante auch als Vakuumsdruck, gegen den sich die elektrischen Felder aufbauen müssen. Außerdem divergieren sowohl der Bagradius als auch die Energie der Einzelladung für  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$ . In einem perfekt dielektrischen perturbativen Vakuum gibt es also keine stabilen Quark-Bags mit endlicher Energie. Für typische Werte  $g_s = 2$  und  $B^{1/4} = 260 \text{ MeV}$  sowie  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-2}$  bzw.  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$  erhalten wir einen Bagradius  $r_0 = 0.6 \text{ fm}$  bzw.  $r_0 = 1.9 \text{ fm}$  und eine Gesamt-Energie  $E_{\text{tot}} = 2.3 \text{ GeV}$  bzw.  $E_{\text{tot}} = 72 \text{ GeV}$ .

Bei der  $q\bar{q}$ -Konfiguration ist dies anders. Für sehr große Quarkabstände  $R/2 \gg \rho_0$  (s. Abb. 2.7, rechts) hat der Bag Zylinder-Geometrie. Die Feldkonfiguration an den Pol-Kappen des Bags beeinflusst die Felder im Zentrum des Zylinders nicht mehr. Die Energie in der zentralen Scheibe der Dicke  $\Delta R$  lässt sich mit Gl. (2.60a) bestimmen:

$$\Delta E_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{g_s^2 C_F}{\pi \rho^2} \Delta R + \mathcal{O}(\kappa_{\text{vac}}) \quad , \quad (2.64a)$$

$$\Delta E_{\text{vol}} = \pi \rho^2 B \Delta R \quad . \quad (2.64b)$$

Der zweite Term in Gl. (2.64a) entsteht aus der elektrischen Energiedichte außerhalb des Bags und verschwindet für  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$ . Der stabile Bagradius  $\rho_0$  ergibt sich wieder durch Variation:

$$\frac{dE_{\text{tot}}}{d\rho} = 0 \xrightarrow{\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0} \rho_0^4 = \frac{g_s^2 C_F}{2\pi^2 B} \quad , \quad (2.65a)$$

$$\Delta E_{\text{el}}^0 = \Delta E_{\text{vol}}^0 = \sqrt{\frac{g_s^2 C_F B}{2}} \Delta R \quad , \quad (2.65b)$$

$$\Delta E_{\text{tot}}^0 = \sqrt{2g_s^2 C_F B} \Delta R \quad , \quad (2.65c)$$

$$\tau = \frac{dE_{\text{tot}}}{dR} = \sqrt{2g_s^2 C_F B} \quad . \quad (2.65d)$$

Hier haben wir die sog. *Stringspannung*  $\tau$  eingeführt. In diesem einfachen Bag-

Modell ist die Strings Spannung identisch mit der Energie pro Länge im Flussschlauch,  $dE_{\text{tot}}/dR = \Delta E_{\text{tot}}/\Delta R$ . Sowohl der Bagradius als auch die Felder im Flussschlauch ändern sich nicht bei weiter zunehmendem  $R$ . Dieses gilt im CDM nicht für endliche Quark-Abstände mit  $R \approx 1$  fm, wie wir später sehen werden. Im  $q\bar{q}$ -Fall sind Volumenenergie und elektrische Energie gleich groß. Außerdem skaliert die Strings Spannung linear mit der Kopplung  $g_s\sqrt{C_F}$ , was typisch ist für alle Bag-Modelle [Johnson76, Hansson86, Lucini01]. Mit denselben Werten für  $g_s$  und  $B$  wie zuvor aber mit  $\kappa_{\text{vac}} = 0$  erhalten wir  $\rho_0 = 0.4$  fm und  $\tau = 560$  MeV/fm. Der Radius des Flussschlauches hat ungefähr dieselbe Größe wie sie in Gitterrechnungen [Bali95] bestimmt wurde. Allerdings liegt die Strings Spannung weit unter dem phänomenologischen Wert von 980 MeV. Wir werden später sehen, dass die Beschreibung des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches mit stetiger Bagoberfläche im CDM realistische ausfällt.

### 2.7.2 CDM-Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden wir für dieselben Konfigurationen wie zuvor die CDM-Gleichungen (2.28b) und (2.28c) lösen und die Ergebnisse mit dem Bag-Modell vergleichen. Für diese numerischen Ergebnisse verwenden wir, soweit nicht anders angegeben, den Parametersatz PS-I aus Abschnitt 3.2, d.h.  $B^{1/4} = 260$  MeV,  $m_g = 1000$  MeV,  $\sigma_{\text{vac}} = 1.29$  fm<sup>-1</sup>,  $g_s = 2$  und  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$ . Für eine gegebene Anordnung der Quarks lösen wir die Bewegungsgleichungen (2.28) mit den numerischen Methoden, die wir im Anhang A vorstellen. Aus den so erhaltenen Lösungen für die Potentiale  $\phi^a$  und das Confinement-Feld  $\sigma$  bestimmen wir sowohl die elektrischen Felder  $\vec{E}^a$ , als auch die dielektrische Funktion und die Energie des Systems. In Abb. 2.9 zeigen wir die Vektorfelder  $\vec{E}$  (oben) und  $\vec{D}$  (Mitte) für ein einzelnes Quark (links) und einen Dipol der Länge  $R = 1$  fm (rechts) zusammen mit den Konturlinien für das Dielektrikum. Das einzelne Quark ist durch eine sphärische Symmetrie ausgezeichnet, das  $q\bar{q}$ -Paar zeigt Zylindersymmetrie. Die Vektorbilder können natürlich nur einen semi-quantitativen Eindruck der Felder vermitteln.

Im Quark-Fall sieht man, dass das  $\vec{E}$ -Feld außerhalb des Quarks, d.h. außerhalb der  $\kappa = 0.8$ -Linie, noch einmal ansteigt. Dies ist qualitativ wie bereits im Bag-Modell in Abb. 2.8 (links) beschrieben. Im Dipol Fall nimmt das  $\vec{E}$ -Feld nahezu die Form eines freien Dipol-Feldes an. Das  $\vec{D}$ -Feld dagegen wird im Quark-Fall gar nicht vom Dielektrikum beeinflusst, während es für den Dipol außerhalb von  $\kappa = 0.8$  fast vollständig unterdrückt ist.

Im unteren Teil von Abb. 2.9 zeigen wir einen Schnitt für die beiden verschiedenen Konfigurationen für die elektrischen Felder zusammen mit der dielektrischen Funktion  $\kappa(r)$ . Links sieht man für das einzelne Quark die radiale Komponente des elektrischen Feldes entlang der radialen Koordinate  $r$ .  $\kappa(r)$  ist nahezu 1 bei  $r = 0$  und fällt nach  $r = 0.2 - 0.3$  fm sehr schnell auf  $\kappa_{\text{vac}}$  zurück. Hier ist

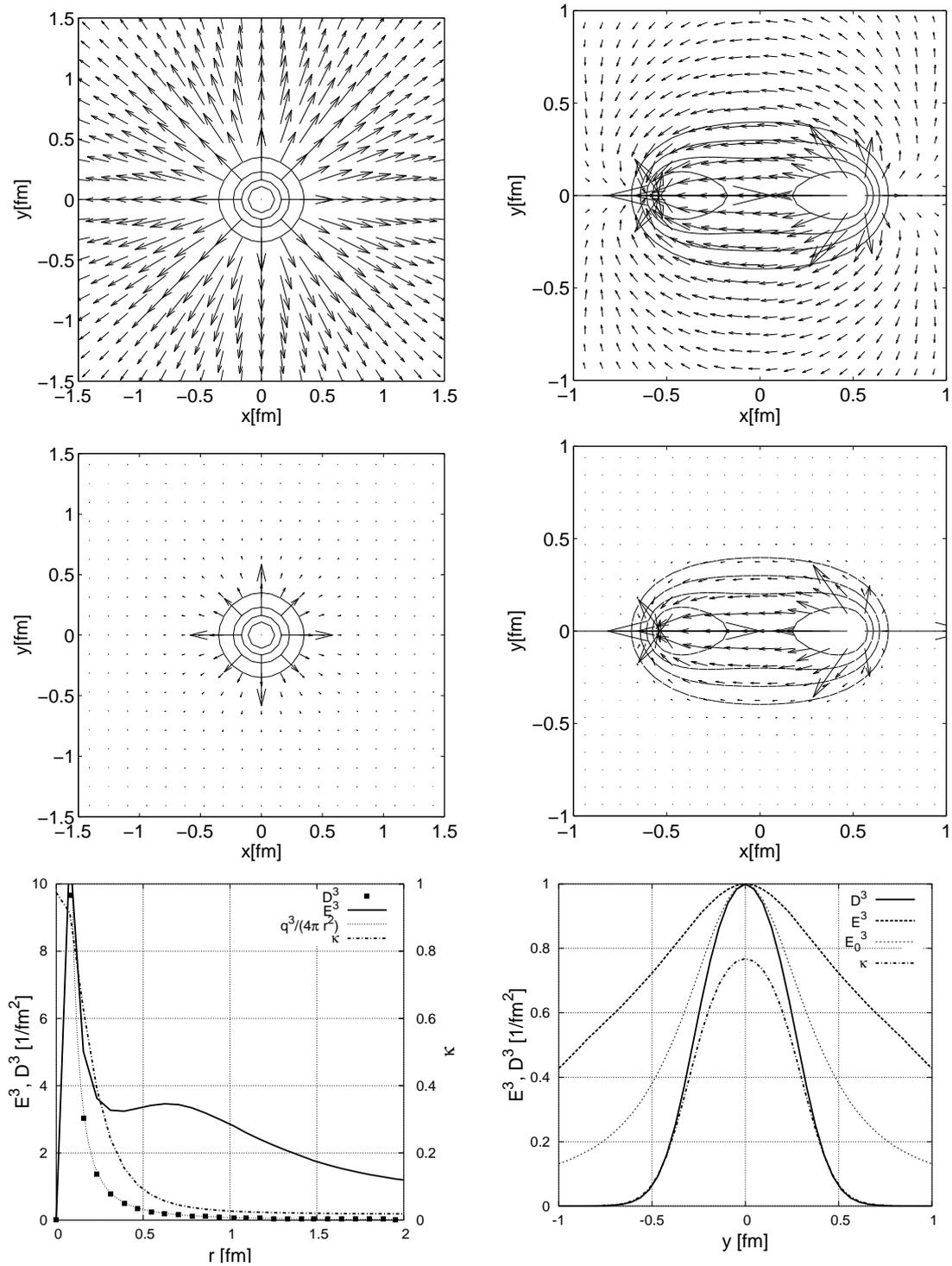


Abbildung 2.9: Die elektrischen Felder  $\vec{E}$  (oben) und  $\vec{D}$  (Mitte) und die radialen Schnitte (unten) für die Quark- (links) und die  $q\bar{q}$ -Konfiguration (rechts). Die Konturlinien beschreiben die dielektrische Funktion bei  $\kappa = (0.2, 0.4, 0.6, 0.8)$ . Im Quark-Fall gilt  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-2}$  und im Dipol-Fall  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$ .

$\kappa_{\text{vac}} = 0.01$ . Für kleinere Werte von  $\kappa_{\text{vac}}$  bilden sich auf Grund der Dirichlet'schen Randbedingungen (s. Anhang A) Spiegelladungen zu jeder Seite des kubischen Rechengitters. Zu diesen Spiegelladungen ziehen sich unphysikalische farbelektrische Flussschläuche wie im Dipol-Fall, so dass die sphärische Symmetrie der Konfiguration durch numerische Artefakte gebrochen ist. Das  $\vec{E}$ -Feld macht wie im Bag-Modell (s. Abb. 2.8) einen Sprung an der Bag-Oberfläche, der durch die Polarisationsladungen induziert wird. Da  $\kappa$  stetig ist, ist der Sprung aber nicht mehr unstetig, sondern zeigt sich nur noch an dem Maximum bei  $r = 0.6$  fm. Das  $\vec{D}$ -Feld (Quadrate) zeigt die mit Gl. (2.58) erwartete  $1/r^2$ -Abhängigkeit (feine gestrichelte Linie). Man sieht auch das für ausgedehnte Ladungsverteilungen typische Verschwinden der Felder für  $r \rightarrow 0$ .

Rechts unten in Abb. 2.9 sieht man die  $x$ -Komponente der Felder für den Dipol entlang der radialen Koordinate  $\rho$  bei  $x = 0$ , normiert auf den zentralen Wert bei  $\rho = 0$ .  $\kappa$  (strich-punktierte Linie) fällt bei  $\rho = 0.25$  fm auf die Hälfte ab. Dieser Wert lässt sich als Definition der Bag-Oberfläche auffassen. Später werden wir eher den Verlauf der Energiedichte zur Definition der Bag-Oberfläche heranziehen. Auf der gleichen Skala fällt auch das  $\vec{D}$ -Feld (durchgezogene Linie) ab und verschwindet danach sehr schnell mit wachsendem Abstand von der String-Achse  $\rho = 0$ . Das  $\vec{E}$ -Feld (gestrichelte Linie) verläuft glatt durch die Bag-Oberfläche. Man sieht aber, dass durch die dielektrische Kopplung das  $\vec{E}$ -Feld vom freien Fall  $\vec{E}_0$  (dünne gestrichelte Linie) abweicht. Das  $\vec{E}$ -Feld wird an den Pol-Kappen in Richtung des Strings gebogen und fällt daher in der zentralen Ebene langsamer ab.

Für das  $q\bar{q}$ -Systems zeigen wir die Energiedichte in der  $x$ - $y$ -Ebene in Abb. 2.10. In der Abbildung sieht man dreimal denselben Fluss Schlauch, allerdings für verschiedene Skalen der Energiedichte. Im obersten Teil der Abbildung sieht man das vollständige Ergebnis der numerischen Rechnung. Die Energiedichte wird in der Nähe der Teilchen von der Coulomb-artigen Divergenz der Selbstenergie dominiert. Lediglich auf Grund des diskreten Gitters, auf dem wir die numerische Lösung darstellen, sind die Energiespitzen nur groß und nicht unendlich. Man sieht aber bereits den Fluss Schlauch als hellen, scharf begrenzten Bereich zwischen den Coulomb-Peaks. In der mittleren und der untersten Reihe schränken wir den dargestellten Bereich auf  $\varepsilon \leq 40 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  bzw.  $\varepsilon \leq 2.5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  ein. Erst in der untersten Reihe wird die Struktur des Fluss Schlauches zwischen den Quarks sichtbar. In den folgenden Kapiteln werden wir die Struktur dieses Fluss Schlauches und seinen energetischen Inhalt detailliert untersuchen.

Die Polarisations-Ladungsdichte aus Gl. (2.57b) zeigen wir in Abb. 2.11. Da in beiden Konfigurationen nur in der Nähe der Ladungen ungefähr  $\kappa = 1$  gilt und  $\kappa$  in deren Nähe schnell auf kleinere Werte abfällt, erhält man zunächst einmal starke Peaks bei den Ladungen selbst, obwohl man hier nur die Polarisationsladung betrachtet. Die Oberflächenladung ist dann am eigentlichen Bagrand lokalisiert, wo  $\kappa$  endgültig auf  $\kappa_{\text{vac}}$  abfällt. Die Polarisationsladung hat beim Quark

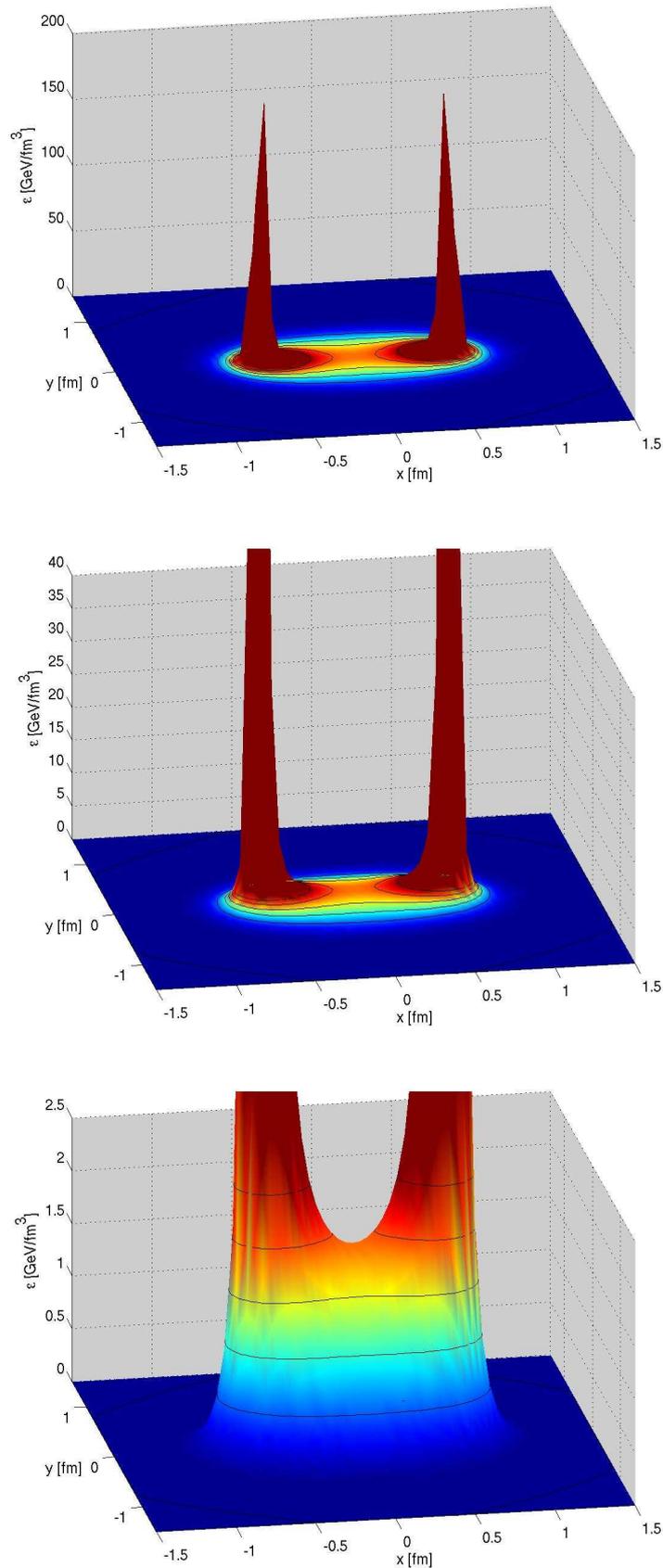


Abbildung 2.10: Die Energiedichte eines  $q\bar{q}$ -Flussschlauches. Von oben nach unten wurde die Skala der Energiedichte immer weiter reduziert. Oben sieht man sehr schön die Coulomb-Spitzen und unten die Struktur des Flussschlauches.

(links) dasselbe Vorzeichen wie die Quarkladung und verursacht den Anstieg des  $\vec{E}$ -Feldes am Bagrand. Beim Dipol (rechts) hat die Polarisationsladung an den Pol-Kappen ebenfalls dasselbe Vorzeichen wie das jeweilige (Anti-)Teilchen. Man sieht sehr schön die Schale der Polarisations-Ladungen an den Pol-Kappen und wie sie in Richtung der zentralen Ebene bei  $x = 0$  verschwindet. Diese schalenartige Ladungsverteilung verursacht das weitgehende Verschwinden der Polarisation ( $\vec{D} \approx \vec{E}$  und  $\vec{P} \approx 0$ ) im Inneren des Bags und das Verschwinden des  $D$ -Feldes im Äußeren ( $\vec{P} \approx -\vec{E}$  und  $\vec{D} \approx 0$ ).

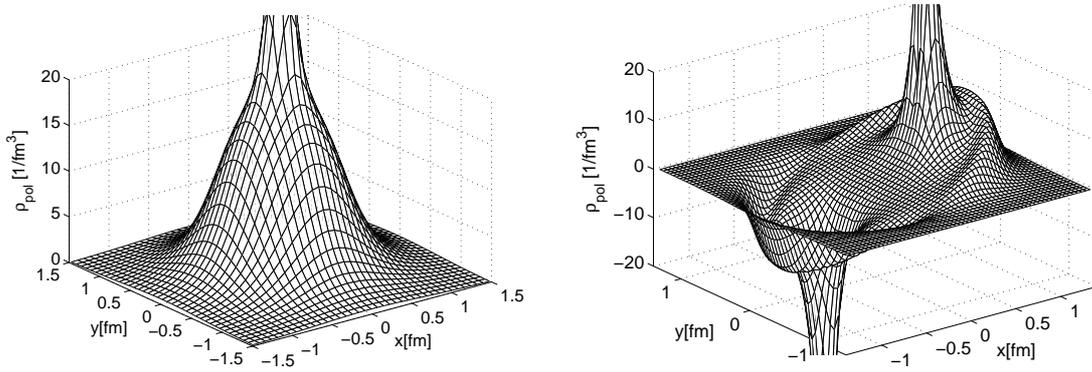


Abbildung 2.11: Die Polarisations-Ladungsdichte für die  $q$ - (links) und die  $q\bar{q}$ -Konfiguration (rechts).

In Abb. 2.12 ist der magnetische Strom nach Gl. (2.15) dargestellt. Links zeigen wir den Strom in der zentralen Ebenen bei  $x = 0$ . Die Wirbelstruktur ist klar zu erkennen. Das Profil entlang der radialen Richtung ist rechts zu sehen. Der Strom ist stark auf der Oberfläche bei  $r = 0.2 - 0.3$  fm lokalisiert und fällt schnell nach außen hin ab.

Für sehr große Quark-Abstände  $R$  mit den Quarks auf der  $x$ -Achse können wir eine Lösung für die Feldgleichungen (2.28) in der zentralen Ebene angeben. Auf Grund der Zylinder-Symmetrie können wir folgenden Ansatz machen:

$$\phi^a(\vec{r}) = \phi^a(x) = c_a x \quad , \quad (2.66)$$

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma(\rho) \quad . \quad (2.67)$$

Das Potential  $\phi^a$  ist unabhängig von  $\rho$ , weil  $E(\rho)$  nahezu konstant ist. Die Konstante  $c_a$  ist durch das Gauß'sche Gesetz bestimmt. In diesem Fall besteht zwischen der dielektrischen Verschiebung und der dielektrischen Funktion der einfache Zusammenhang

$$\vec{D}^a(\rho) = -c_a \kappa(\rho) \vec{e}_x \quad . \quad (2.68)$$

Das elektrische Feld ist parallel zur Verbindungsachse der Quarks, und sein Profil ist direkt proportional zum Profil der dielektrischen Funktion  $\kappa(\rho) = \kappa(\sigma(\rho))$ .

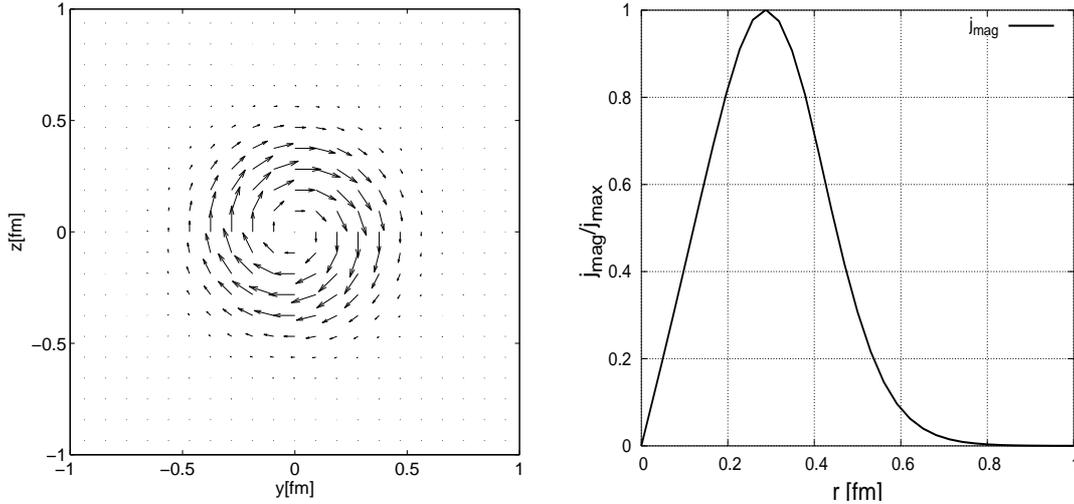


Abbildung 2.12: Der magnetische Strom des  $q\bar{q}$  Fluss Schlauches in der zentralen Ebene bei  $x = 0$ . Der Strom zeigt eine Wirbelstruktur und ist stark an der Oberfläche des Fluss Schlauches lokalisiert.

Wir werden in Kapitel 4 diskutieren, ob und ab welchen Abständen  $R$  dieses asymptotische Verhalten erreicht wird.

Wir schließen die qualitative Diskussion ab, indem wir die Gesamtenergie (2.29a) der beiden Konfigurationen als Funktion von  $\kappa_{\text{vac}}$  in Abb. 2.13 zeigen. Bei der Dipol-Konfiguration (Dreiecke) sieht man, dass die Energie sehr schnell für kleiner werdende  $\kappa_{\text{vac}}$  gegen einen konstanten Wert läuft. Für  $\kappa_{\text{vac}} < 0.01$  ändert sich die Energie praktisch nicht mehr. Im Quark-Fall können wir wieder nur Konfigurationen mit  $\kappa_{\text{vac}} \geq 0.01$  numerisch sinnvoll berechnen, bevor sich die unphysikalischen Fluss Schlauche zu den Spiegelladungen ausbilden. Bis dahin hat die Energie aber, genau wie im Bag-Modell (s. Gl. (2.63b)) in der doppelt logarithmischen Darstellung einen linearen Verlauf. Im Quark-Fall haben wir die doppelte Energie dargestellt. Diese muss aufgewendet werden, um einen  $q\bar{q}$ -Zustand in zwei isolierte Teilchen zu trennen. Wir haben die Energie mit der Funktion

$$E_{\text{tot}} = \frac{a}{\kappa_{\text{vac}}^p}$$

parametrisiert und die Parameter  $a$  und  $p$  durch einen Fit an die numerischen Ergebnisse bestimmt. Wir erhalten  $p \approx 0.36$  im Gegensatz zu  $p = 3/4$  im Bag-Modell. Der Fit ist durch die gestrichelte Linie dargestellt. Wir vermuten, dass die kleinere Potenz mit den glatten Feldverläufen an der Bagoberfläche zusammenhängt. Wenn wir den Fit zu kleineren Werten extrapolieren, erhalten wir  $E_{\text{tot}}(10^{-4}) = 15 \text{ GeV}$  und  $E_{\text{tot}}(10^{-6}) = 82 \text{ GeV}$  im Gegensatz zu  $E_{\text{tot}}(10^{-4}) = 72 \text{ GeV}$  im Bag-Modell. Im CDM zeigen die Bags gegenüber dem naiven Bag-Modell keine scharfen Bag-Grenzen, sondern eine charakteristische

Übergangsdicke, in der die elektrischen Felder abfallen und das Confinement-Feld auf seinen Vakuumswert  $\sigma_{\text{vac}}$  steigt.

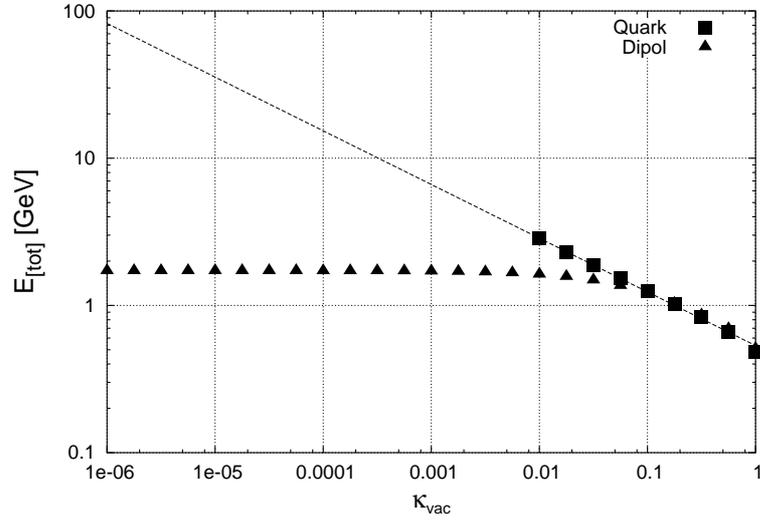


Abbildung 2.13: Die Energie eines Quarks und eines Dipols als Funktion von  $\kappa_{\text{vac}}$ . Die Dipol-Energie (Dreiecke) ist praktisch konstant für  $\kappa_{\text{vac}} \leq 0.01$ . Die Quark-Energie (Quadrate) lässt sich durch ein Potenz-Gesetz beschreiben mit einer Abhängigkeit  $E_{\text{tot}} \propto \kappa_{\text{vac}}^{-0.36}$ .



# Kapitel 3

## Die Parameter des Modells

In diesem Kapitel werden wir das Modell bezüglich seiner Parameter untersuchen. Dazu studieren wir die Reaktion eines  $q\bar{q}$ -Flussschlauches auf die Variation der Parameter. Genauer gesagt analysieren wir das Profil eines Strings fester Länge  $R$  und das  $q\bar{q}$ -Potential, also die Energie des Strings als Funktion seiner Länge. Das Profil wurde in Gitterrechnungen in verschiedenen Eichtheorien untersucht [Bali95, Matsubara94]. Das Potential wurde durch das Quarkonia-Spektrum bestimmt [Eichten75, Quigg79, Eichten80]. Das  $q\bar{q}$ -Potential  $V_{q\bar{q}}(R)$  lässt sich durch das Cornell-Potential [Eichten78]

$$V_c(R) = 2C_F^{\text{ab}} E_0 - C_F^{\text{ab}} \frac{\alpha}{R} + \tau R \quad (3.1)$$

parametrisieren. In Gitterrechnungen sowohl in  $SU(2)$  [Bornyakov04] als auch in  $SU(3)$  [Bali97] wurde die qualitative Form des  $q\bar{q}$ -Potentials reproduziert. Der unphysikalische, konstante Term  $E_0$  beschreibt die Selbstenergie der Ladungsverteilungen, die durch die Definition der elektrischen Energie in Gl. (2.29b) explizit in der Gesamtenergie enthalten ist. Wir haben hier den Faktor 2 für die Zahl der Teilchen im String und den Farbfaktor  $C_F^{\text{ab}}$  isoliert, die in die Berechnung der Selbstenergie explizit eingehen. Den Farbfaktor haben wir bereits in der für unser Modell angemessenen Abel'schen Form gewählt. Für Punktteilchen, also für  $r_0 \rightarrow 0$  (s. Gl. (2.19b)), divergiert diese Selbstenergie.

Der Coulomb-Term beschreibt die  $q\bar{q}$ -Wechselwirkung für kleine Abstände  $R$ . Auch hier haben wir den Abel'schen Casimir-Faktor aus der effektiven Kopplungskonstanten  $\alpha$  isoliert. In der QCD lässt sich für kleine Abstände die Störungstheorie anwenden. Der 1-Gluon-Austausch führt ähnlich wie der 1-Photon-Austausch in der QED zum  $1/r$ -Potential. Im CDM erwarten wir für kleine Quark-Abstände einen fast sphärischen Bag. Wenn der Bag groß ist gegen  $R$ , dann ist die elektrische Wechselwirkung nahezu unbeeinflusst vom Bag. Wir erwarten also auch im CDM ein Coulomb-Potential für kleine Abstände, das durch die Bag-Bildung modifiziert wird. Diese Modifizierung wird in der effektiven Kopplung  $\alpha$  absorbiert. Der lineare Term ist das sog. *Confinement*-Potential. Für lange,

dünne Flussschläuche skaliert die Energie mit der Länge  $R$  des Flussschlauches. Die Stringspannung  $\tau$ , die wir bereits in Abschnitt 2.7.1 im Rahmen des Bag-Modell eingeführt haben, gibt die Stärke des Confinements an.

Die Qualität des Cornell-Fits an das  $q\bar{q}$ -Potential  $V_{q\bar{q}}$  zeigen wir in Abb. 3.1. In dieser und allen folgenden Abbildungen in diesem Abschnitt verwenden wir, sobald wir nichts angegeben, die Modellparameter des Parametersatzes PS-I aus Tab. 3.2 in Abschnitt 3.2. Nur für sehr kleine Quarkabstände  $R \lesssim r_0$  weicht  $V_{q\bar{q}}(R)$  von  $V_c(R)$  ab. In diesem Bereich überlappen die Ladungsverteilungen der beiden Quarks und löschen sich gegenseitig aus. Das  $q\bar{q}$ -Potential bleibt auch für  $r \rightarrow 0$  endlich.

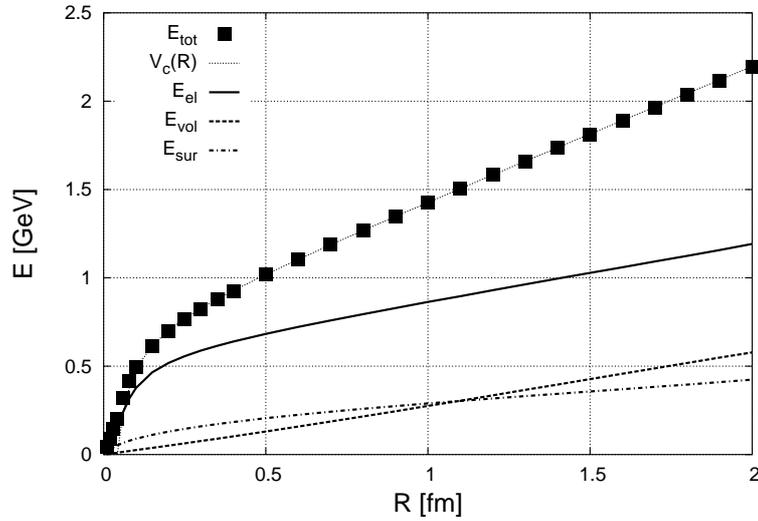


Abbildung 3.1: Das CDM- $q\bar{q}$ -Potential (Kästchen) zusammen mit der Cornell-Parametrisierung (feine Linie). Zu sehen sind auch die verschiedenen Energieanteile gemäß Gl. (2.29).

Das Profil des Flussschlauches wird durch die Energiedichte in der zentralen Ebene zwischen den Quarks beschrieben. Für kleine Abstände erwarten wir entsprechend zum Coulomb-Potential, dass sich die Felder wie im perturbativen Fall ( $\kappa = 1$ ) verhalten. Die elektrischen Felder haben dann eine Dipolform. Für große Abstände dagegen wird das Profil sehr viel schärfer durch den Bag begrenzt und fällt schneller als Dipol-artig ab. Wir parametrisieren das Profil deshalb mit

$$f_d(\rho) = N_d(\rho^2 + \rho_d^2)^{-3} \quad , \quad R \leq 1\text{fm} \quad , \quad (3.2a)$$

$$f_g(\rho) = N_g \exp[-\ln 2 (\rho/\rho_g)^n] \quad , \quad R \geq 1\text{fm} \quad . \quad (3.2b)$$

Für große Abstände  $R$  wählen wir ein verallgemeinertes Gauß-Profil. Durch den Faktor  $\ln 2$  ist  $\rho_g$  identisch mit dem Halbwertsradius. Neben dem absoluten Wert  $N_g$  bei  $\rho = 0$  können wir damit nicht nur den Halbwertsradius  $\rho_g$  angeben, son-

dern auch die Steilheit des Profils bei  $\rho = \rho_g$ , ausgedrückt durch den Parameter  $n$ . Im Bag-Modell wäre dieser Parameter unendlich groß,  $n \rightarrow \infty$ . Auch hier zeigen wir die Güte der Fits an die Energiedichte  $\varepsilon(\rho)$ . In Abb. 3.2 sieht man tatsächlich, dass die Energiedichte für kleine  $R$  (links) besser durch den Dipol-Fit in Gl. (3.2a) und für große  $R$  (rechts) besser durch den generalisierten Gauß-Fit in Gl. (3.2b) beschrieben wird. Der Fit ergibt  $n = 2.1$ , das Profil der Energiedichte ist also nahezu Gauß-artig. Der extrahierte Wert für den Halbwertsradius liegt bei  $\rho_g = 0.33$  fm.

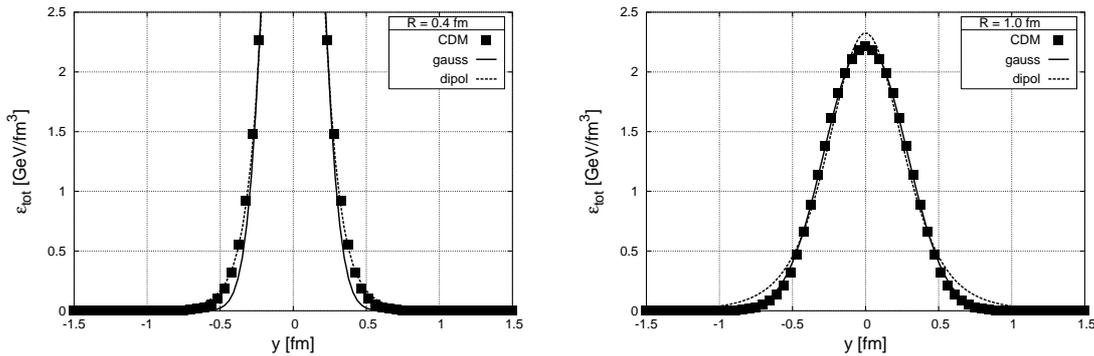


Abbildung 3.2: Das Profil der Energiedichte zusammen mit dem besten Fit der Parametrisierung (3.2) an das  $q\bar{q}$ -Potential für kleine (links) und große  $R$  (rechts). Der Fit läuft über den gesamten Bereich von  $-1.5 \text{ fm} \leq y \leq 1.5 \text{ fm}$ . Links haben wir den Peak abgeschnitten, um das charakteristische Dipol-Verhalten  $\varepsilon_{\text{tot}} \propto \rho^{-6}$  besser zu zeigen.

In Abb. 3.3 zeigen wir die Profile der Felder  $\sigma$  und  $D_x^3$ , sowie der dielektrischen Funktion  $\kappa$  für den 1fm langen String (links). Das Profil von  $\kappa$  und  $D_x^3$  sind optisch bereits sehr ähnlich, und der String hat seine asymptotische Form fast erreicht (vgl. Diskussion bei Gl. (2.68)).  $\kappa$  fällt bei  $\rho \approx 0.30$  fm auf die Hälfte des zentralen Werts zurück. Das Profil von  $\kappa$  ist damit geringfügig schmaler als das der Energiedichte. Für denselben String zeigen wir im rechten Teil der Abbildung das Profil der Energiedichte für die verschiedenen Anteile der Energie nach Gl. (2.29). Die elektrische Energie (gestrichelte Linie) bildet den größten Teil der Energiedichte. Sie ist stark lokalisiert im Inneren des Strings mit einem Halbwertsradius von 0.26 fm. Die Volumenenergie (strich-punktierte Linie) nimmt deutlich kleinere Werte an und ist dafür etwas breiter mit einem Halbwertsradius von 0.35 fm. Die Oberflächenenergie (gepunktete Linie) ist nur am Bagrand bei  $\rho \approx 0.35$  fm lokalisiert, was ihren Namen anschaulich macht.

Im Folgenden werden wir die Abhängigkeit des  $q\bar{q}$ -Potentials  $V_{q\bar{q}}$  und des Profils der Energiedichte  $\varepsilon(\rho)$  von den CDM-Parametern untersuchen. Dazu werden wir systematisch die Parameter  $B$ ,  $m_g$ ,  $\sigma_{\text{vac}}$  und  $g_s$  variieren und sowohl das Potential als auch das Profil durch die Parametrisierungen (3.1) und (3.2b) be-

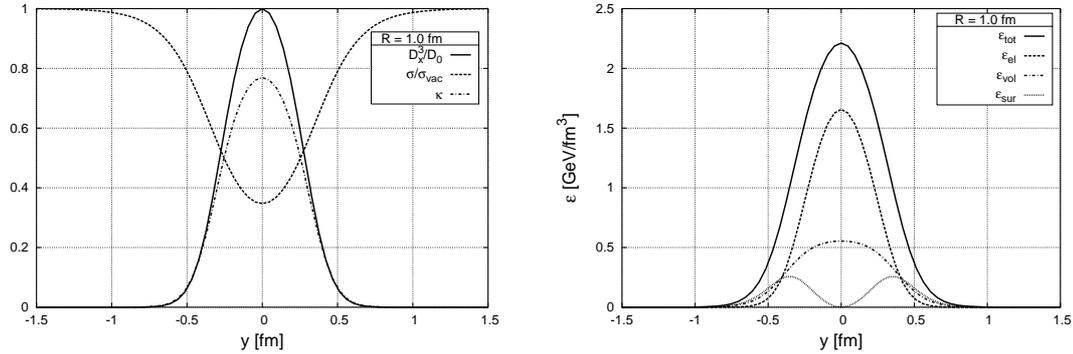


Abbildung 3.3: Die Profile der Felder (links) und die verschiedenen Energiedichten (rechts) des 1 fm langen Strings. Das elektrische Feld  $D^3$  ist normiert auf den zentralen Wert auf der Stringachse und das Confinement-Feld  $\sigma$  auf seinen Vakuumwert.

schreiben. Durch die Fit-Parameter  $E_0$ ,  $\alpha$  und  $\tau$  sowie  $N_g$ ,  $\rho_g$  und  $n$  können wir die Reaktion dann auch quantitativ beschreiben. In Abschnitt 2.7.1 haben wir gezeigt, dass die im Bag-Modell eingeführte Stringspannung  $\tau$  zu gleichen Teilen von der elektrischen und von der Volumenenergie gebildet wird (s. Gl. (2.65b)). Wir werden im Rahmen dieser Analyse deshalb auch untersuchen, ob diese Gleichheit im CDM auch gilt und welchen Anteil die im Bag-Modell vernachlässigte Oberflächenenergie an der Stringspannung ausmacht. Dazu machen wir je einen separaten Cornell-Fit an die verschiedenen Energieanteile  $E_{\text{el}}$ ,  $E_{\text{vol}}$  und  $E_{\text{sur}}$  mit entsprechenden Parametern  $\tau_{\text{el}}$ ,  $\tau_{\text{vol}}$  und  $\tau_{\text{sur}}$  etc. In Abb. 3.1 haben wir bereits die einzelnen Energien als Funktion der String-Länge mit eingezeichnet. Die Gesamtenergie wird von der elektrischen Energie dominiert. Dies liegt im Wesentlichen an der hohen elektrischen Selbstenergie der beiden Farbladungen. Man sieht auch, dass die Volumenenergie rein linear über den gesamten Bereich ist und somit der Parameter  $\alpha$  im Cornell-Fit verschwindet. Wir werden deshalb die Volumenenergie ohne den Coulomb-Anteil beschreiben, also  $\alpha_{\text{vol}} = 0$ .

## 3.1 Variation der Parameter

### 3.1.1 Die Bag-Konstante $B$

Aus dem Bag-Modell erwarten wir mit Gl. (2.65), dass der Stringradius proportional ist zu  $B^{-1/4}$  und die Stringspannung quadratisch mit  $B^{1/4}$  anwächst. Im CDM hat die Bag-Konstante nicht mehr die zentrale Bedeutung, wie sie es im Bag-Modell noch hat. Im CDM wird sie ersetzt durch das skalare Potential  $U(\sigma)$ . Da  $\sigma$  keine Stufenfunktion mehr ist, mit  $\sigma = 0$  im Inneren und  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$  im Äußeren des Bags, sondern kontinuierlich von innen nach außen ansteigt, nimmt auch das skalare Potential eine kontinuierliche Form an. Höchstens auf der Stringach-

se, wo  $\sigma$  seinen minimalen Wert annimmt, kann  $U(\sigma)$  noch den perturbativen Wert  $U(0) = B$  erreichen. Wir müssten  $B$  also durch ein radial gemittelt  $U(\rho)$  ersetzen. Insofern ist das effektive  $B$ , das man mit dem  $B$  aus dem Bag-Modell vergleichen könnte, nicht unbedingt mit  $U(0)$  identisch. Wir variieren im Folgenden die Bag-Konstante von  $B^{1/4} = 0$  bis zum maximal durch Gl. (2.4) gegebenen Wert  $B^{1/4} = 240$  MeV (vergl. Abb. 2.1, gestrichelte Linien). Bei  $B = 0$  hat  $U(\sigma)$  zwei entartete Minima bei  $\sigma = 0$  und bei  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$ . Bei  $B^{1/4} = 240$  MeV hat  $U(\sigma)$  bei  $\sigma = 0$  nur noch einen Wendepunkt (wie die durchgezogene Linie in Abb. 2.1). In Abb. 3.4 sieht man, dass mit wachsendem  $B$  das Profil der dielektrischen Funktion (links) zwar nur geringfügig schmaler und kleiner wird, die Energiedichte (rechts) allerdings mit  $B^{1/4}$  anwächst. Dieses liegt zum einen an der mit  $B$  anwachsenden Volumenenergie. Zum anderen wird der Radius des Flusschlauchs mit anwachsendem  $B$  leicht verkleinert, was zum Anwachsen auch der elektrischen Energiedichte führt. In Abb. 3.5 (links) sieht man das

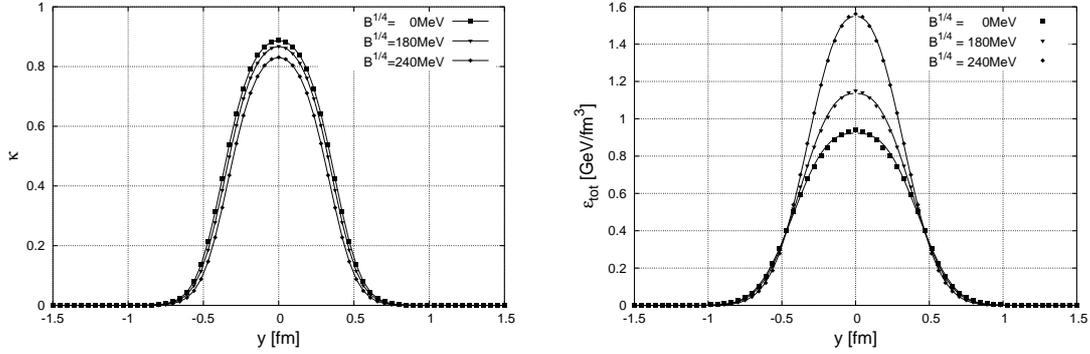


Abbildung 3.4: Die dielektrische Funktion (links) und die Energiedichte (rechts) für verschiedene Werte  $B$  der Bag-Konstanten und  $R = 0$ . Im rechten Teil der Abbildung sind die gezeigten Linien die besten Fits des verallgemeinerten Gauß-Profiles gezeigt, um die Güte der Fits darzustellen.

Schrumpfen des Radius nochmal als Funktion von  $B^{1/4}$ . Der Halbwertsradius sinkt von  $\rho_g = 0.43$  fm bei  $B^{1/4} = 0$  auf  $\rho_g = 0.35$ . Gleichzeitig wird das Profil etwas flacher für größer werdende  $B$  und ist nahezu Gauß-förmig ( $n = 2.25$ ) für  $B^{1/4} = 240$  MeV. Obwohl die Energiedichte mit wachsendem  $B$  zunimmt, ist die Stringspannung  $\tau$  (rechts in Abb. 3.5, Quadrate) nahezu unbeeinflusst von der Änderung in  $B$ . Hier wird der Unterschied zu den Ergebnissen im Bag-Modell für asymptotisch lange Strings deutlich. Die Stringspannung ist mit Gl. (2.65d)  $\tau = dE_{\text{tot}}/dR$ . Dies ist nur im Bag-Modell identisch mit der Energie in der zentralen Scheibe des Flusschlauches. Im CDM wächst der Radius des Strings mit zunehmendem  $q\bar{q}$ -Abstand  $R$  für  $R \approx 1$  fm. Dadurch nimmt die elektrische Energiedichte bei  $x = 0$  (2.64a) ab und es gilt  $dE_{\text{tot}}/dR|_{x=0} \neq \Delta E_{\text{tot}}/\Delta R|_{x=0}$ . Obwohl das asymptotische Profil für  $R < 1$  fm noch nicht erreicht ist, setzt das lineare Verhalten des  $q\bar{q}$ -Potentials bereits für  $R > 0.3$  fm ein. Der elektrische Teil

und der Volumenteil der Stringspannung sind wie im Bag-Modell fast identisch. Der Oberflächenanteil nimmt mit wachsendem  $B$  ab, da der String-Radius mit  $B$  schrumpft.

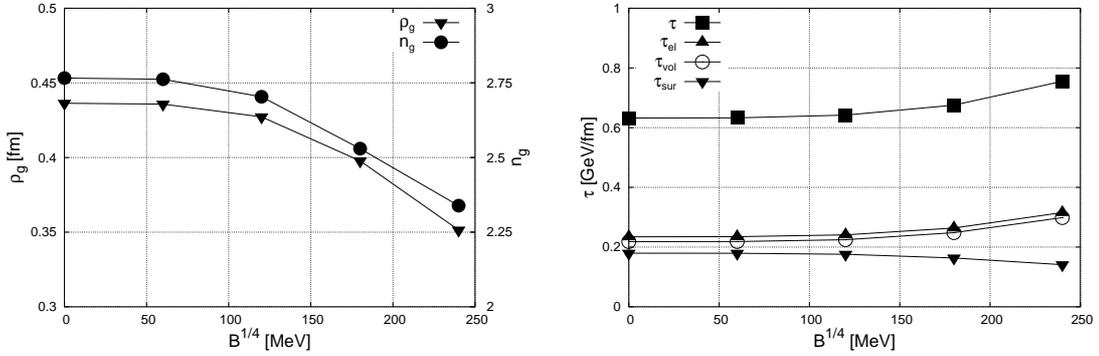


Abbildung 3.5: Die Parameter  $\rho_g$  und  $n$  für das Profil der Energiedichte (links) und die Stringspannung  $\tau$  (rechts) als Funktion der Bag-Konstanten  $B$ .

### 3.1.2 Die Glueball-Masse $m_g$

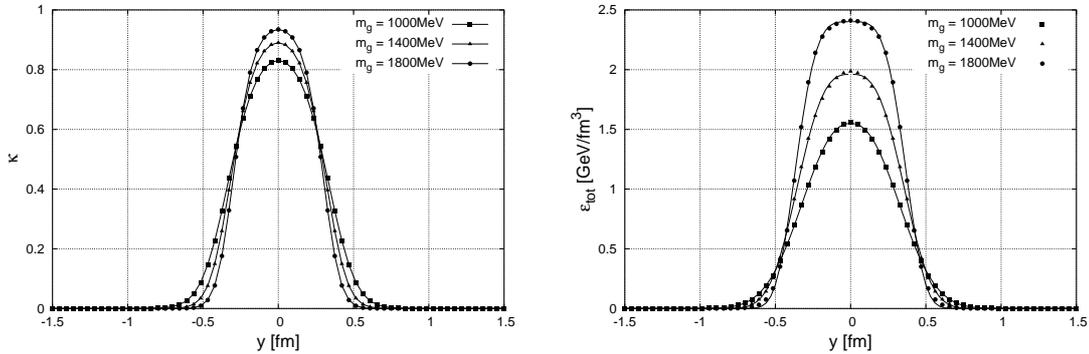
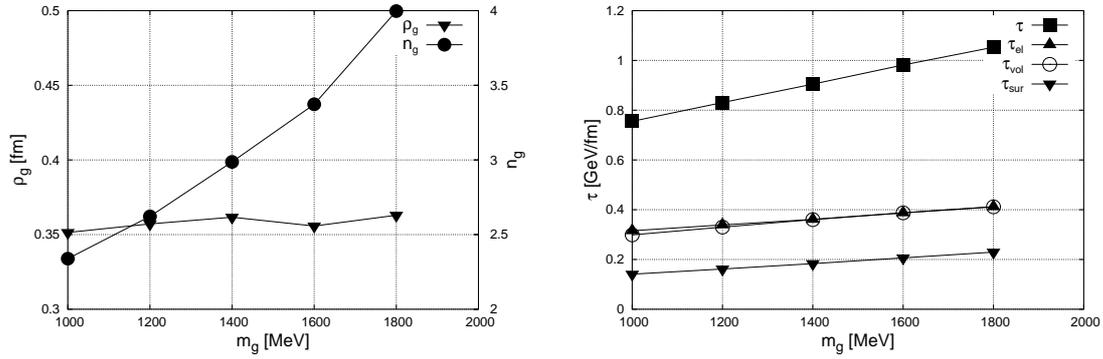


Abbildung 3.6: Das gleiche wie in Abb. 3.4, aber für verschiedene Werte der Glueball-Masse  $m_g$ .

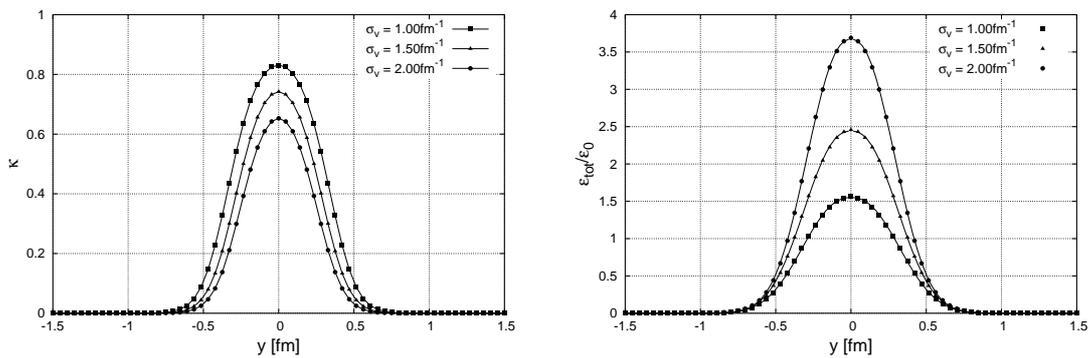
Der Parameter  $m_g$  gibt die Krümmung des skalaren Potentials  $U(\sigma)$  bei  $\sigma = 0$  an. Er taucht im Bag-Modell nicht auf und ist mit der Dynamik des  $\sigma$ -Feldes verbunden. Für wachsende  $m_g$  wird das relative Maximum von  $U$  zwischen den beiden stabilen Punkten  $\sigma = 0$  und  $\sigma = \sigma_{vac}$  immer ausgeprägter (vgl. strichpunktierte Linien in Abb. 2.1). Der Übergang im String von  $\sigma = \sigma_{vac} \rightarrow \sigma = 0$  von außen nach innen ist mit einer immer größer werdenden Volumenenergie verbunden und ein schmaler Übergangsbereich ist energetisch günstiger. Andererseits wird dann das Profil im Übergangsbereich immer steiler und die Oberflächenenergie nimmt zu. Da  $\kappa$  sehr schnell auf  $\kappa_{vac}$  abfällt, wird die elektrische

Abbildung 3.7: Wie Abb. 3.5, aber als Funktion der Glueball-Masse  $m_g$ .

Energie aus dem Außenraum des Strings verdrängt und die zentrale Dichte nimmt ebenfalls zu. Im Grenzfall  $m_g \rightarrow \infty$  erwarten wir, dass  $\sigma$  und damit auch  $\kappa$  am Bagrand von 0 bzw. 1 auf den jeweiligen Vakuumswert springen und somit das Bag-Modell reproduziert wird. Das Ergebnis der Variation von  $m_g$  ist in Abb. 3.6 zu sehen. Das Profil von  $\kappa$  (links) wird mit zunehmendem  $m_g$  immer steiler und der zentrale Wert nimmt zu. Das Profil wird also immer kastenförmiger. Die Energiedichte (rechts) zeigt dasselbe Verhalten.

In Abb. 3.7 (links) sieht man, dass der Bagradius unverändert bleibt, aber die Steilheit des Profils am Bagradius stark zunimmt, das Profil also tatsächlich immer kastenförmiger wird. Gleichzeitig nimmt die Stringspannung (rechts) in allen Energieanteilen gleichförmig zu. Für hohe  $m_g$  ist die Gleichheit  $\tau_{el} = \tau_{vol}$  perfekt, und wir reproduzieren das Bag-Modell.

### 3.1.3 Der Vakuumswert $\sigma_{vac}$

Abbildung 3.8: Wie in Abb. 3.4, aber für verschiedene Werte des Vakuumswertes  $\sigma_{vac}$ .

Der Vakuumswert des Confinement-Feldes  $\sigma_{vac}$  hat wie  $m_g$  keine Entsprechung

im Bag-Modell. Er hat direkten Einfluss über den Gradienten-Term in Gl. (2.29d) auf die Oberflächenenergie. Da sich mit zunehmendem  $\sigma_{\text{vac}}$  im skalaren Potential  $U(\sigma)$  wie bei der Variation in  $m_g$  ein großes relatives Maximum entwickelt, nimmt auch die Volumenenergie entsprechend zu. Für wachsendes  $\sigma_{\text{vac}}$  steigt der zentrale Wert des Confinement-Feldes und entsprechend sinkt der zentrale Wert von  $\kappa$  (s. Abb. 3.8, links). Als Ergebnis steigt die Energiedichte (rechts), allerdings bleibt ihr Profil (bis auf den absoluten Wert) weitestgehend stabil. Der Radius sinkt nur leicht und die Steilheit  $n$  verändert sich so gut wie gar nicht. Die Stringspannung (Abb. 3.9 rechts) nimmt mit wachsendem  $\sigma_{\text{vac}}$  zu.

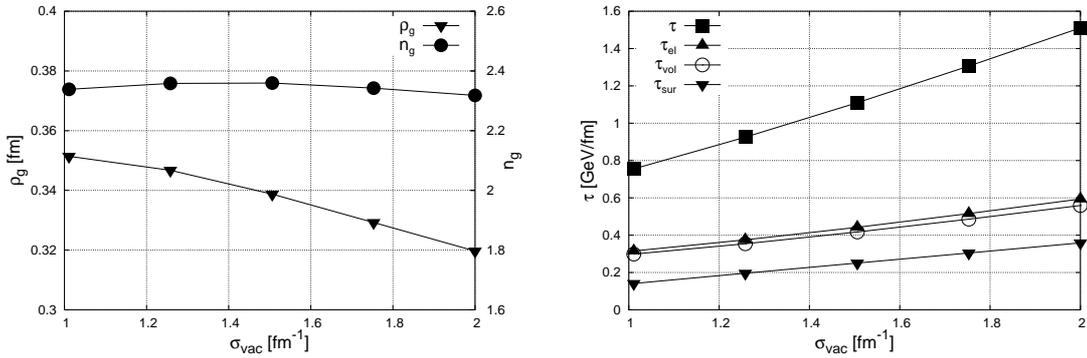


Abbildung 3.9: Das gleiche wie in Abb. 3.5, aber als Funktion des Vakuumswertes  $\sigma_{\text{vac}}$ .

### 3.1.4 Die Kopplungs-Konstante $g_s$

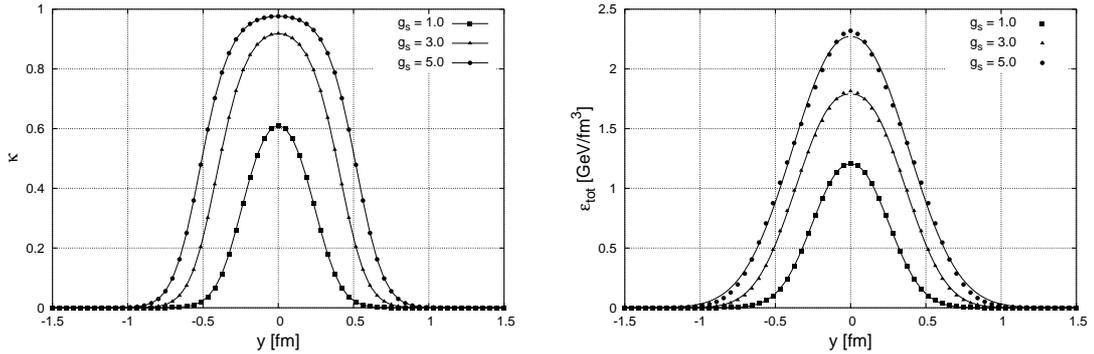


Abbildung 3.10: Wie in Abb. 3.4, aber für verschiedene Werte der Kopplungs-Konstanten  $g_s$

Die Kopplungskonstante hat im CDM dieselbe Bedeutung wie im Bag-Modell. Sie bestimmt den totalen elektrischen Fluss im Flussschlauch. Wie im Bag-Modell muss sich das elektrische Feld gegen den Vakuumsdruck  $B$  aufbauen.

Wir erwarten also ein ähnliches Verhalten des Strings wie im Bag-Modell. In Abb. 3.10 (links) sieht man, dass für kleine  $g_s$  das skalare Feld und damit auch  $\kappa$  nur wenig von seinem Vakuumswert abweicht. Das elektrische Feld ist nicht stark genug, um das skalare Feld in sein perturbatives Vakuum zu drücken. Für größer werdende Werte von  $g_s$  steigt der zentrale Wert von  $\kappa$  an und erreicht fast den perturbativen Wert  $\kappa = 1$ . Die Energiedichte (rechts) wächst rasch mit  $g_s$  an, und das Profil wird breiter.

Der String-Radius verhält sich fast wie im Bag-Modell ( $\rho_g \propto \sqrt{g_s}$ , Gl. (2.65a)). Die Form des Profils schwankt nur wenig und besitzt nahezu Gauß-Gestalt  $n \approx 2$  (Abb. 3.11, links). Auch die Stringspannung steigt genau wie im Bag-Modell linear mit  $g_s$ . Die Gleichheit von  $\tau_{el}$  und  $\tau_{vol}$  ist fast erfüllt.

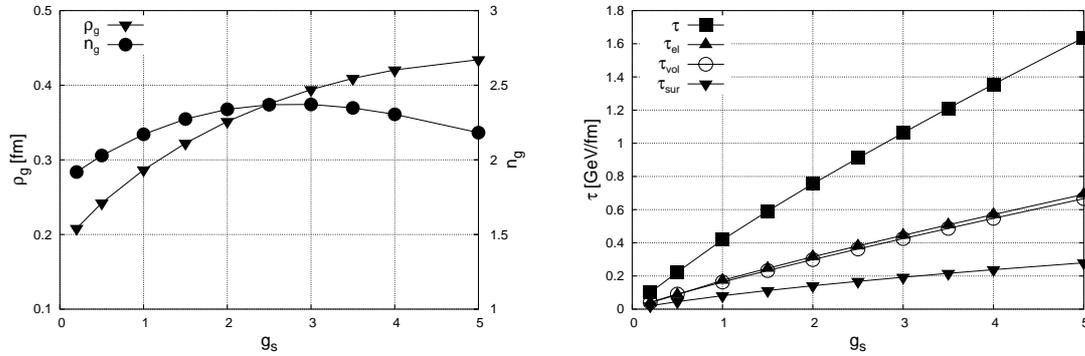


Abbildung 3.11: Wie in Abb. 3.5, aber als Funktion der Kopplungs-Konstanten  $g_s$ .

Für die Kopplungs-Konstante  $g_s$  untersuchen wir auch noch das Verhalten des Coulomb-Parameters  $\alpha$  des Cornell-Fits an das  $q\bar{q}$ -Potential. Der perturbative Coulomb-Term dominiert das Potential für kleine Quark-Abstände  $R$ . Im rein perturbativen Fall,  $\kappa = 1$  überall, ist  $\alpha = \alpha_{el} = g_s^2/(4\pi)$ . Wir erwarten, dass der elektrische Teil  $\alpha_{el}$  weiterhin diese  $g_s$ -Abhängigkeit zeigt,  $\alpha$  aber durch den Oberflächenterm modifiziert wird. Die Volumenenergie von  $V_{q\bar{q}}$  ist rein linear und der entsprechende Coulomb-Parameter ist verträglich mit  $\alpha_{vol} = 0$ . In Abb. 3.12 sieht man, dass der elektrische Coulomb-Parameter (Kreise) dem perturbativen, quadratischen Verlauf folgt (durchgezogene Linie).  $\alpha_{sur}$  liefert nur einen kleinen Beitrag zur effektiven Kopplung und sättigt für große Werte von  $g_s$  bei  $\alpha_{sur} \approx 0.1$  ab. Die effektive Kopplung hängt also nahezu quadratisch von  $g_s$  ab, modifiziert durch kleine Beiträge von der Oberflächenenergie.

### 3.1.5 Der dielektrische Vakuumswert $\kappa_{vac}$

Der dielektrische Vakuumswert  $\kappa_{vac}$  ist im eigentlichen Sinne kein Parameter des Modells. Im Rahmen des Modells ist das nicht-perturbative Vakuum ein perfektes Dielektrikum, d.h.  $\kappa_{vac} = 0$ . Aus den in Anhang A genannten Gründen ist uns

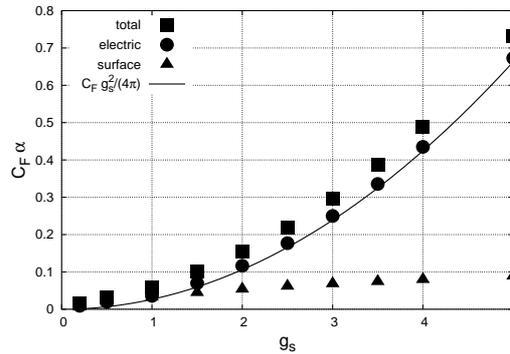


Abbildung 3.12: Die effektive Kopplungs-Konstante  $\alpha$ , extrahiert aus dem Cornell-Fit.

dieser Grenzwert allerdings numerisch nicht zugänglich. Wir können trotzdem die Abhängigkeit der physikalischen Größen wie String-Profil und  $q\bar{q}$ -Potential von diesem Parameter studieren. Das Ergebnis zeigen wir in Abb. 3.13 und Abb. 3.14. Sowohl das Profil der dielektrischen Funktion  $\kappa$  und der Energiedichte als auch die Stringspannung verändern sich praktisch nicht mehr, sobald  $\kappa_{\text{vac}}$  einen Wert von  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-3}$  unterschritten hat. Besonders auffällig ist es, wie schnell der

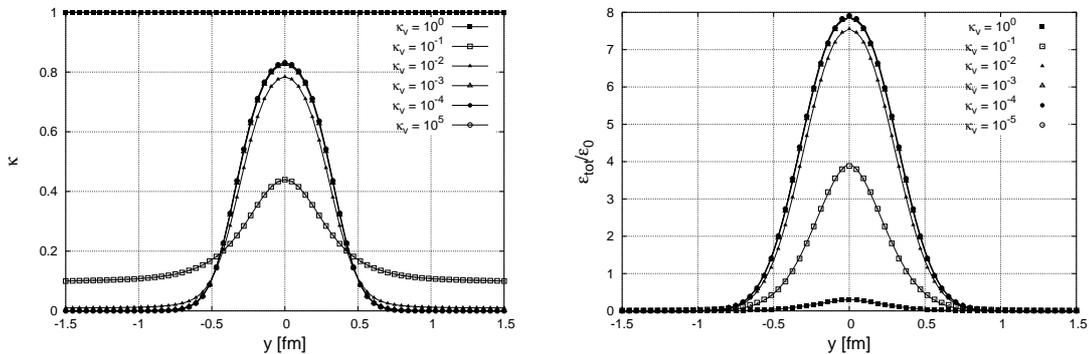


Abbildung 3.13: Das gleiche wie in Abb. 3.4, aber für verschiedene Werte des dielektrischen Vakuumswert  $\kappa_{\text{vac}}$ .

elektrische Teil der Stringspannung seinen asymptotischen Wert erreicht. Bereits für  $\kappa_{\text{vac}} \leq 0.1$  ändert sich  $\tau_{\text{el}}$  nur noch wenig, während sich die beiden Anteile  $\tau_{\text{vol}}$  und  $\tau_{\text{sur}}$  sehr viel langsamer ihrem asymptotischen Wert annähern. Demnach wird das elektrische Feld bereits in einen Flusschlauch gedrängt, auch wenn das skalare Feld noch keine Flusschlauch-Struktur hat.

Wir wählen in der genannten Parametrisierung für die dielektrische Funktion in Gl. (2.6)  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$  für alle weiteren Rechnungen von physikalischen Konfigurationen. Dieser Wert ist klein genug, dass sich die beobachtbaren Größen nur unwesentlich ändern und groß genug, dass unser numerischer Algorithmus

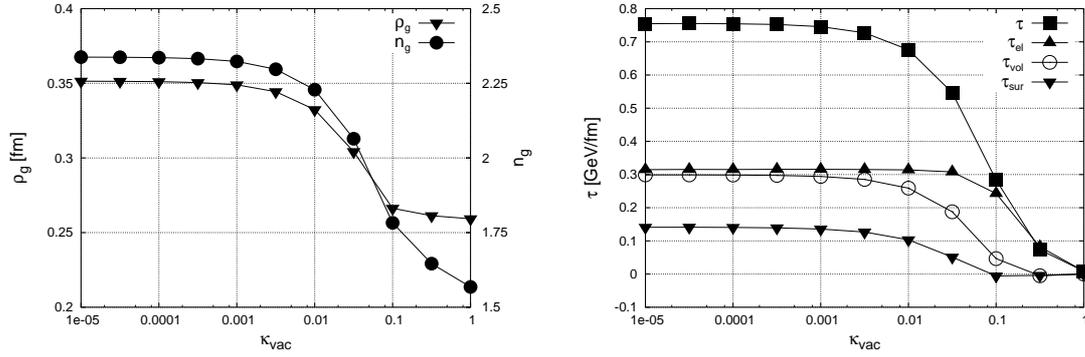


Abbildung 3.14: Das gleiche wie in Abb. 3.5, aber als Funktion des dielektrischen Vakuumswertes  $\kappa_{\text{vac}}$ .

noch schnell und stabil arbeitet. Alle Ergebnisse sind damit nahezu identisch mit dem Grenzfall  $\kappa_{\text{vac}} = 0$ . Diese Aussage ist allerdings nicht uneingeschränkt gültig. Wie wir in Abb. 2.13, Abschnitt 2.7.2 gesehen haben, ist für jeden Wert  $\kappa_{\text{vac}} > 0$  auch die Energie des Einzelquarks endlich. Es gibt also immer eine maximale String-Länge  $L_{\text{max}}$  bei der die Energie eines  $q\bar{q}$ -Strings größer ist als die zweier isolierter Quarks, und der String wäre dann instabil. Man erwartet, dass sehr lange Strings durch Paarerzeugung, die nicht im CDM beschrieben wird, zerfallen. Deshalb erachten wir die Fragestellung nach Strings mit  $L \geq 4$  fm als unphysikalisch. Bis zu dieser Länge sind die im CDM beschriebenen Strings mit  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$  stabil.

Die Eigenschaft, dass die beobachtbaren Größen sehr schnell ihren asymptotischen Grenzwert annehmen, ist auch eine Eigenschaft der gewählten Parametrisierung der dielektrischen Funktion. Wir haben alternativ eine andere Parametrisierung versucht [Martens03], die bis auf logarithmische Korrekturen die Bedingungen in Gl. (2.5) erfüllt:

$$\kappa(\sigma) = \begin{cases} \kappa_{\text{vac}}^{(\sigma/\sigma_{\text{vac}})^3}, & \sigma \geq 0 \\ 1, & \sigma < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Es zeigt sich, dass für diese Parametrisierung sowohl das Profil, als auch die Stringspannung sogar für sehr kleine Werte von  $\kappa_{\text{vac}}$  abhängen (Abb. 3.15). Das Profil wird mit abnehmendem  $\kappa_{\text{vac}}$  immer eckiger ( $n$  wird immer größer) und die Stringspannung nimmt selbst für so kleine Werte wie  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-6}$  noch stetig zu. Diese Parametrisierung von  $\kappa(\sigma)$  ist nicht so formstabil wie die Polynom-Parametrisierung in Gln. (2.6) und (2.7). Für  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$  geht auch die Halbwertsbreite von  $\kappa(\sigma)$  gegen Null. Die Eigenschaften der Polynom-Parametrisierung sind dem Modell daher weitaus angemessener.

Wir fassen die Wirkungsweise der Modellparameter noch einmal in Tab. 3.1 zusammen. Die Bag-Konstante hat nur moderaten Einfluss auf die Stringspan-

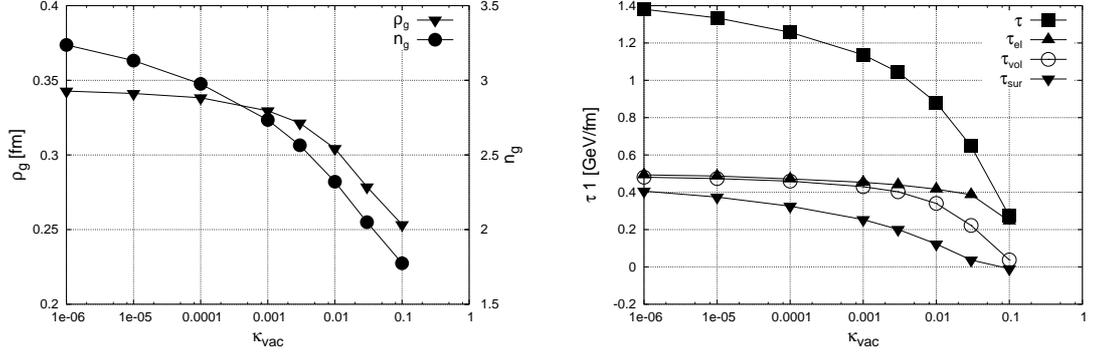


Abbildung 3.15: Das gleiche wie in Abb. 3.5, aber als Funktion des dielektrischen Vakuumswert  $\kappa_{\text{vac}}$  und mit der alternativen Parametrisierung für die dielektrische Funktion  $\kappa(\sigma)$  in Gl. (3.3).

nung, die Breite des Strings ist nahezu unabhängig von der Glueball-Masse und die Steilheit des Profils ist fast unabhängig vom  $\sigma$ -Vakuumswert und von der Kopplungs-Konstanten.

	$B$	$m_g$	$\sigma_{\text{vac}}$	$g_s$	$\kappa_{\text{vac}} < 10^{-3}$
$\tau$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	—
$\rho_g$	$\downarrow$	—	$\downarrow$	$\uparrow$	—
$n$	$\downarrow$	$\uparrow$	—	—	—

Tabelle 3.1: Die Reaktion der Strings-spannung  $\tau$ , sowie der Profil-Breite  $\rho_g$  und der Profil-Steilheit  $n$  auf die Zunahme der einzelnen Modellparameter.

## 3.2 Wahl der Parameter

Nachdem wir den Einfluss der Modellparameter auf einen  $q\bar{q}$ -String studiert haben, wollen wir in diesem Abschnitt jetzt die einzelnen Parameter festlegen. Wie wir oben schon festgestellt haben, ist der Vakuumswert  $\kappa_{\text{vac}}$  des Dielektrikums kein eigentlicher Modellparameter. Er soll nur so klein gewählt werden, dass die beobachtbaren Größen nicht mehr von ihm abhängen. Wir wählen einen Wert für alle weiteren Rechnungen von  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$ . Die anderen 4 Parameter legen wir durch einen Fit der CDM-Rechnungen an Gitterergebnisse fest. Nur sehr wenige und nicht sehr präzise Rechnungen für die Energie- bzw. Wirkungs-dichte des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches existieren für die SU(3)-Theorie [Matsubara94]. Wir nehmen hier an, dass die Energiedichte nicht stark von der Art der Eichtheorie abhängt und greifen deshalb auf SU(2)-Gitterrechnungen zurück. Das Profil des Flussschlauches wurde in [Cea95, Trottier93, Trottier95] in SU(2) bestimmt. Eine sehr detaillierte Analyse des Flussschlauch-Profiles für verschiedene Quark-Abstände  $R$

findet man bei Bali et al. [Bali95, Bali01]. Dort wurde sowohl die Energiedichte als auch die Wirkungsdichte eines  $q\bar{q}$ -Zustandes bestimmt. Für statische Systeme ist im CDM die Energiedichte gerade das Negative der Wirkungsdichte.

Um die Parameter des Modells festzulegen, wählen wir folgende Methode: Für einen gegebenen Parametersatz ( $B, m_g, \sigma_{\text{vac}}, g_s$ ) bestimmen wir das  $q\bar{q}$ -Potential  $V_{q\bar{q}}$  für  $R = 1.0 \text{ fm}$  und  $R = 1.5 \text{ fm}$  und das Profil der Energiedichte  $\varepsilon(\rho)|_{x=0}$  eines  $1 \text{ fm}$  langen Strings. Aus dem Potential bestimmen wir die Stringspannung  $\tau = [V_{q\bar{q}}(R = 1.5 \text{ fm}) - V_{q\bar{q}}(R = 1.0 \text{ fm})]/(0.5 \text{ fm})$ . Das Profil  $\varepsilon(\rho)$  vergleichen wir mit dem entsprechenden Gitterprofil  $\bar{\varepsilon}_{\text{lat}}(\rho_i)$  (vgl. Abb. 24 in [Bali95]). Die Übereinstimmung des CDM-Profiles mit dem Gitterprofil lässt sich durch

$$(\Delta\bar{\varepsilon})^2 = \sum_i [\bar{\varepsilon}(\rho_i) - \bar{\varepsilon}_{\text{lat}}(\rho_i)]^2 \quad (3.4)$$

quantifizieren. Die  $\rho_i$  sind die aus der oben genannten Abbildung extrahierten axialen Abstände und die  $\bar{\varepsilon}$  die auf den zentralen Wert normierten Werte der Profildfunktion. Anschließend variieren wir die Modellparameter in einem großen Bereich und bestimmen für jeden Parametersatz sowohl  $\tau$  als auch  $\Delta\epsilon$ . Wir wählen die Parameter so, dass die Stringspannung dem phänomenologischen Wert  $\tau = 980 \text{ MeV}$  entspricht und die Abweichung  $\Delta\epsilon$  minimal wird.

Das Ergebnis dieser Variation zeigen wir in Abb. 3.16. Dabei ist links jeweils die Stringspannung und rechts die Abweichung des Profils für verschiedene Parameter aufgetragen. In der ersten Zeile zeigen wir die Variation für festes  $m_g = 1000 \text{ MeV}$  und festes  $g_s = 2.0$  als Funktion von  $\sigma_{\text{vac}}$  und für verschiedene Werte von  $B$ . Man sieht die erwartete schwache Abhängigkeit der Stringspannung von  $B$  und die fast lineare Abhängigkeit von  $\sigma_{\text{vac}}$  (links). Die Kurven links beginnen für jedes  $B$  bei einem anderen  $\sigma_{\text{vac}}$ , da das minimale  $\sigma_{\text{vac}}$  mit Gl. (2.4) von  $B$  und  $m_g$  abhängt. In diesem Fall führt  $\tau = 980 \text{ MeV/fm}$  zu  $\sigma_{\text{vac}} = (1.2 - 1.3) \text{ fm}^{-1}$  (links).  $\Delta\epsilon$  wird klein mit immer größer werdendem  $B$  (rechts). Allerdings hat das skalare Potential für  $B^{1/4} \gtrsim 260 \text{ MeV}$  kein lokales Minimum bei  $\sigma = 0$  mehr.  $B$  darf deshalb nicht zu groß gewählt werden. Das sieht man auch links, wo die Linien für großes  $B$  die gewünschte Marke  $\tau = 980 \text{ MeV/fm}$  nicht mehr schneiden. In der zweiten und dritten Reihe von Abb. 3.16 zeigen wir die Variation bei festgehaltenem  $B^{1/4} = 240 \text{ MeV}$  für zwei verschiedene Glueball-Massen  $m_g = 1000 \text{ MeV}$  (2. Reihe) bzw.  $m_g = 1500 \text{ MeV}$  (3. Reihe) als Funktion von  $\sigma_{\text{vac}}$  und für verschiedene Werte  $g_s$ . Man sieht, dass das Profil mit wachsendem  $m_g$  schlechter beschrieben wird ( $\Delta\bar{\varepsilon} = 0.2-0.5$  bei  $m_g = 1000 \text{ MeV}$  und  $\Delta\bar{\varepsilon} = 0.3-0.7$  bei  $m_g = 1500 \text{ MeV}$ ). Wir haben noch eine weitere Variation durchgeführt, bei der wir die Kopplungs-Konstante  $g_s = 3.2$  festgehalten und  $B$  und  $m_g$  verändert haben.  $\sigma_{\text{vac}}$  haben wir entsprechend Gl. (2.4) bestimmt (letzte Reihe in Abb. 3.16). Für festes  $B$  sieht man scheinbar, dass die Stringspannung mit zunehmendem  $m_g$  abnimmt, was im Gegensatz zu dem Ergebnis in Abschnitt 3.1.2 steht. Durch die Verknüpfung von  $\sigma_{\text{vac}}$  mit Gl. (2.4) wird für zunehmendes  $m_g$   $\sigma_{\text{vac}}$  immer

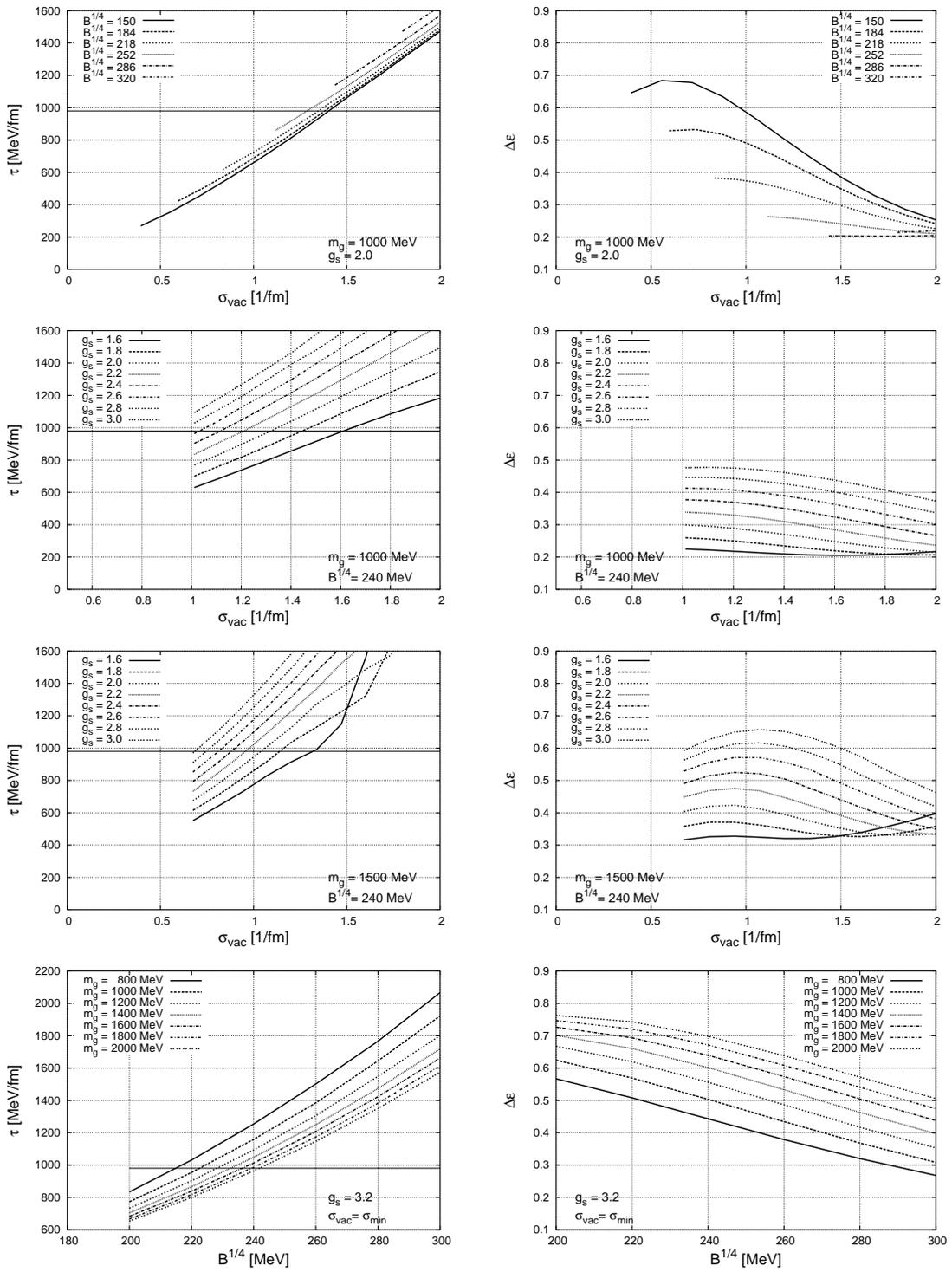


Abbildung 3.16: Variation der Parameter zur Bestimmung der optimalen Parametersätze. Erläuterungen dazu siehe Text.

kleiner. Die Stringspannung nimmt mit abnehmendem  $\sigma_{\text{vac}}$  ab. Diese beiden gegenläufigen Effekte führen zu dem Verhalten in Abb. 3.16 unten.

Durch die in Abb. 3.16 gezeigte Studie können wir einen optimalen Parametersatz bestimmen. Zusätzlich werden wir zwei weitere Parametersätze ermitteln, indem wir sukzessive die Parameter auf Literatur-Werte einschränken. Wir erhalten so durch folgende Strategien drei Parametersätze PS-I, PS-II und PS-III.

**Strategie 1:** Wir lassen alle Parameter weitestgehend frei und wählen den Parametersatz, der die Stringspannung reproduziert und gleichzeitig  $\Delta\epsilon$  minimiert. Die Tendenz, dass das Profil für kleine Werte von  $m_g$  besser reproduziert wird, setzt sich bis zu sehr kleinen Werten der Glueball-Masse fort. Wir beschränken aber diese Variation auf  $m_g \geq 1000 \text{ MeV}$ . Der mit dieser Einschränkung erhaltene Parametersatz ist PS-I in Tab. 3.2. Der Wert der Bag-Konstanten  $B = (260 \text{ MeV})^4$  ist 10fach höher im Vergleich zum Standardwert des Bag-Modells von  $B = (146 \text{ MeV})^4$  [DeGrand75], der auch in vorangegangenen Analysen im CDM verwendet wurde [Loh96, Loh97b, Traxler99b]. Die String-Breite war in diesen Analysen allerdings relativ groß mit  $\rho = 1 \text{ fm}$ . Die Bag-Konstante ist dagegen vergleichbar (nur 50% höher) mit anderen Analysen im Bag-Modell mit  $B = (235 \text{ MeV})^4$  [Hasenfratz80a, Hasenfratz80b] und mit den QCD-Summenregeln mit  $B = (240 \text{ MeV})^4$  [Shifman79b, Shifman79a]. Der Wert der Glueball-Masse  $m_g = 1000 \text{ MeV}$  ist klein im Vergleich zu Gittervorhersagen für die skalare Glueball-Masse zwischen  $m_g = (1500 - 1700) \text{ MeV}$  [Morningstar97, Michael99], nimmt aber den in [Loh97b] verwendeten Wert an. Das entsprechende skalare Potential  $U(\sigma)$  zeigen wir in Abb. 3.17 (durchgezogene Linie). In dieser Parametrisierung gibt es nur ein sehr kleines relatives Maximum zwischen den Minima.

**Strategie 2:** Wir schränken sowohl die Bag-Konstante als auch die Glueball-Masse auf Literatur-Werte ein. Dabei nehmen wir für die Bag-Konstante den aus den QCD-Summenregeln bestimmten Wert  $B^{1/4} = 240 \text{ MeV}$  und wählen die Glueball-Masse aus dem Bereich  $m_g = 1500 \text{ MeV}$  [Morningstar97] bis  $m_g = 1700 \text{ MeV}$  [Michael99]. Mit diesen Einschränkungen ergibt sich der Parametersatz PS-II in Tab. 3.2. Sowohl die Kopplungs-Konstante als auch der Vakuumswert des Confinement-Feldes sind etwas kleiner als bei PS-I. Durch die höhere Glueball-Masse entwickelt sich ein ausgeprägtes relatives Maximum für  $U(\sigma)$  (gestrichelte Linie).

**Strategie 3:** In einem letzten Schritt schränken wir zusätzlich noch den Wert der Kopplungs-Konstanten ein. In den beiden Parametersätzen PS-I und PS-II ist der elektrische Coulomb-Term — und damit auch der gesamte Coulomb-Term (s. Abschnitt 3.1.4) — relativ klein,  $a_F^{\text{el}} = C_F \alpha_{\text{el}} = 0.11$  (PS-I) bzw.  $a_F^{\text{el}} = 0.09$  (PS-II). In SU(3)-Gitterrechnungen wurde der Coulomb-Parameter mit  $a_F = 0.29$

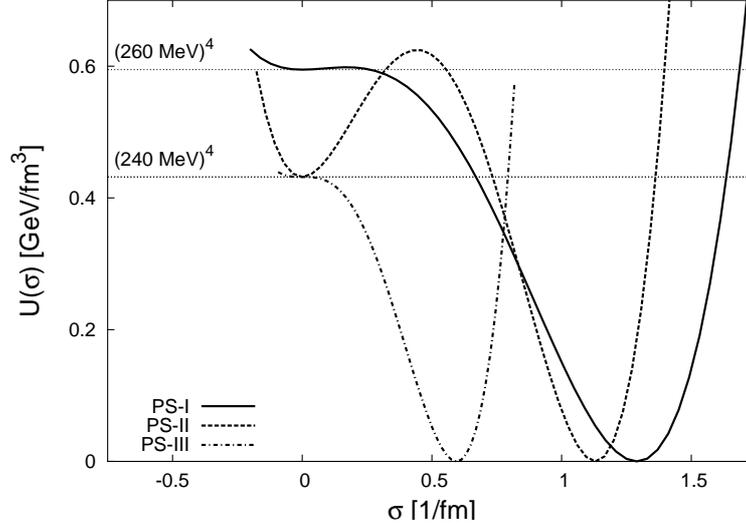


Abbildung 3.17: Das skalare Potential  $U(\sigma)$  für die drei Parametersätze aus Tab. 3.2.

bestimmt [Bali93, Bali97, Bali01]. Wir fixieren im letzten Parametersatz PS-III deshalb zusätzlich die Kopplungs-Konstante bei  $g_s = 3.3$  ( $a_F^{\text{el}} = 0.29$ ). Mit dieser weiteren Einschränkung der Parameter bleibt nur noch  $\sigma_{\text{vac}}$  als letzter freier Parameter. Diesen justieren wir allein an der Stringspannung und akzeptieren das resultierende Profil des  $q\bar{q}$ -Strings ohne weitere Fein-Justierung. Das skalare Potential  $U(\sigma)$  ist ebenfalls in Abb. 3.17 (strich-punktierte Linie) dargestellt.

	I	II	III	Gitter
$B^{1/4}$ [MeV]	260	240	240	–
$m_g$ [MeV]	1000	1500	1700	–
$\sigma_{\text{vac}}$ [ $\text{fm}^{-1}$ ]	1.29	1.13	0.59	–
$g_s$	2.0	1.8	3.3	–
$\kappa_{\text{vac}}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	–
$\tau$ [MeV/fm]	979	982	980	980
$\rho_g$ [fm]	0.33	0.34	0.44	0.30
$n$	2.3	3.1	3.2	1.8

Tabelle 3.2: Optimale CDM-Parametersätze zur realistischen Beschreibung von farbneutralen Quark-Konfigurationen. Der Wert von  $\tau = 980 \text{ MeV}/\text{mf}$  bei den Gitterrechnungen dient als Skala der ansonsten skalenfreien Gittertheorie.

Zum Abschluss zeigen wir in Abb. 3.18 das Profil der Energiedichte für die drei Parametersätze zusammen mit dem SU(2)-Gitterprofil [Bali95]. Wie zu erwarten ist, ist die Übereinstimmung des Profils mit PS-I (durchgezogene Linie)

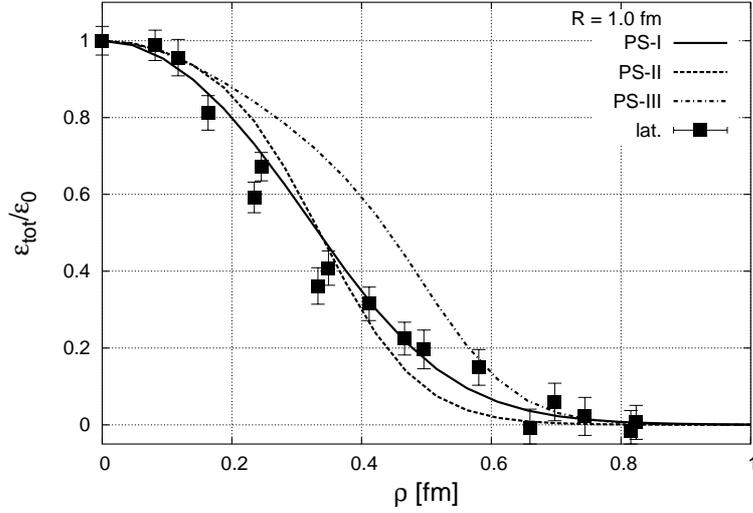


Abbildung 3.18: Die Energiedichte eines 1 fm langen Strings. Parametersatz PS-I beschreibt das Profil am besten mit einem Halbwertsradius von 0.31 fm. PS-II hat denselben Halbwertsradius, hat aber ein steileres Profil. PS-III beschreibt aufgrund der Einschränkungen das Potential am schlechtesten mit  $\rho_g = 0.44$  fm.

am besten. Sowohl die Breite als auch die Form folgen sehr gut dem Verlauf der Gitterdaten. Das Profil für PS-II (gestrichelte Linie) ist steiler als das für PS-I, aber der Halbwertsradius ist nahezu derselbe mit  $\rho_g = 0.34$  fm. Aufgrund der in Strategie 3 gemachten Einschränkungen der Modellparameter ist die Übereinstimmung des Profils für PS-III (strichpunktierte Linie) am schlechtesten. Der Halbwertsradius ist  $\rho_g = 0.39$  fm und überschießt das Gitterprofil damit um 25%. Bei allen Parametersätzen ist das Profil nahezu Gauß-förmig mit  $n \approx 2$ .

Wir werden im folgenden Kapitel  $q\bar{q}$ - und  $qqq$ -Systeme für alle drei Parametersätze betrachten. Die unterschiedlichen Varianten bieten damit einen quantitativen Eindruck für die möglichen Schwankungen in den Modellergebnissen.



# Kapitel 4

## Zwei- und Drei-Quark-Systeme

Nachdem wir die Parameter des Modells in Kapitel 3 festgelegt haben, wollen wir in diesem Kapitel zunächst die damit verbundenen  $q\bar{q}$ -Flussschläuche untersuchen und später die Analyse auf 3-Quark- ( $qqq$ -)Systeme ausweiten.

### 4.1 $q\bar{q}$ -Flussschläuche

#### 4.1.1 Profile von Feldern und Energien

Wir beginnen mit den zu Grunde liegenden Feldern  $\vec{D}^a$  und  $\sigma$ . Die elektrischen Felder sind nach Abschnitt 2.5.2 zwar keine invarianten Größen bzgl. diskreten Farbroationen, aber in einer gewählten Farb-Eichung sind sie natürlich bestimmbar. Darüber hinaus geben sie ein Verständnis für den zu Grunde liegenden Confinement-Mechanismus. Im Folgenden zeigen wir die Profile der Felder und der Energiedichten jeweils für die drei Parametersätze aus dem vorangegangenen Kapitel.

In Abb. 4.1 zeigen wir die Profile des Confinement-Felds  $\sigma$  (gestrichelte Linie) sowie der dielektrischen Funktion  $\kappa$  (strich-punktierte Linie) und des elektrischen Felds  $D^a$  (durchgezogene Linie).  $\sigma$  ist skaliert auf den Vakuumswert  $\sigma_{\text{vac}}$  und das elektrische Feld auf seinen axialen Wert  $D_0 = D^a(\rho = 0)$ . Bei keinem der gewählten Parametersätze fällt  $\sigma$  bis auf seinen perturbativen Wert  $\sigma = 0$  zurück. Auf Grund der höheren Glueball-Masse in PS-II und PS-III und der höheren Kopplungs-Konstanten  $g_s$  in PS-III ist der axiale Wert von  $\sigma$  in den letzten beiden Parametersätzen etwas kleiner. Da  $\sigma$  nie Null wird, ist auch  $\kappa$  kleiner als 1, erreicht aber in PS-III fast diesen perturbativen Wert. Für das elektrische Feld zeigen wir hier exemplarisch  $D^3$ . Im speziellen Fall der  $q\bar{q}$ -Konfiguration unterscheiden sich die Felder  $D^3$  und  $D^8$  nur durch die verschieden starken Ladungen der Quarks, es gilt also  $D^8 = q^8/q^3 D^3$ . Dieses ist auf den gemeinsamen Bag zurückzuführen, in dem sich beide elektrischen Felder befinden. In dem speziell gezeigten Fall hat das  $q\bar{q}$ -Paar die Farben  $r$ - $\bar{r}$  und beide elektrischen Felder sind

nicht-verschwindend. Im Fall eines Quark-Paares mit Farben  $b\bar{b}$  würde das 3-er Feld komplett verschwinden ( $q_b^3 = 0$ , s. Abb. 2.3).

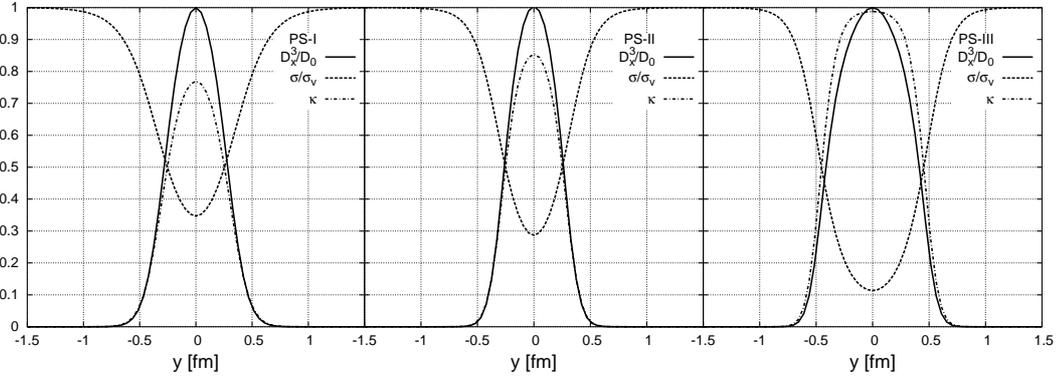


Abbildung 4.1: Die skalierten Profile von  $D^a$ ,  $\sigma$  und  $\kappa(\sigma)$  eines 1 fm langen Strings. Die Profile von  $\kappa$  und  $D^a$  haben wie für lange Flussschläuche erwartet (Gl. 2.68) ungefähr dieselbe Form.  $\kappa$  erreicht nur für PS-III fast den perturbativen Wert  $\kappa = 1$  und ist deutlich kleiner als 1 für PS-I und PS-II. Die zentralen Werte für das elektrische Feld sind von links nach rechts  $D_0 = (3.1, 3.4, 3.0) \text{ fm}^{-2}$ .

Die Profile von  $\kappa$  und  $D^a$  haben in PS-I und PS-II rein optisch ähnliche Gestalt. Nach Gl. (2.68) erwarten wir, dass die beiden Profile für sehr große Quark-Abstände bis auf einen Faktor identisch sind. Bei gegebener Parametrisierung der dielektrischen Funktion  $\kappa(\sigma)$  stellt sich das  $\sigma$ -Feld so ein, dass die Gl. (2.68) erfüllt ist. Deshalb zeigen wir in Abb. 4.2 das Verhältnis  $\tilde{c}_3 = (\kappa/\kappa_0)/(D^3/D_0)$  der beiden Profile — jedes normiert auf seinen axialen Wert — für verschiedene Abstände  $R$ . Für große Abstände ist nach Gl. (2.68)  $\tilde{c}_a = \text{const} = 1$ . Für kleine Abstände  $R = 0.5 \text{ fm}$  sehen wir noch starke Abweichungen vom asymptotischen Wert, die aber für größer werdende Abstände systematisch kleiner werden. Das asymptotische Profil eines  $q\bar{q}$ -Flussschlauches ist also schon für Abstände  $R \geq 1.0 \text{ fm}$  so gut wie erreicht und das String-Bild ist innerhalb des Modells für solche Abstände gerechtfertigt.

Als Nächstes analysieren wir die (invariante) Energiedichte. Wir beginnen, indem wir die Energie in ihre Energieanteile entsprechend Gl. (2.29) zerlegen. Das Ergebnis zeigen wir in Abb. 4.3. In allen drei Fällen wird die Gesamtenergie von der elektrischen Energie dominiert. Dieses steht nicht im Widerspruch zum obigen Ergebnis, dass der elektrische Anteil und der Volumenanteil der Stringspannung  $\tau_{\text{el}}$  und  $\tau_{\text{vol}}$  gleich groß sind. Die Stringspannung ist per Definition  $\tau = \frac{dE_{\text{tot}}}{dR}$  und nicht die Energie in der zentralen Scheibe des Strings (s. Diskussion in Abschnitt 3.1.1).

Mit PS-I erreicht die Volumenenergie nirgends den Wert  $B = U(0)$ , während für PS-III die Volumenenergie über einen weiten Bereich im Inneren des Strings den konstanten Wert  $B$  annimmt. Zur Deutlichkeit haben wir den jeweiligen

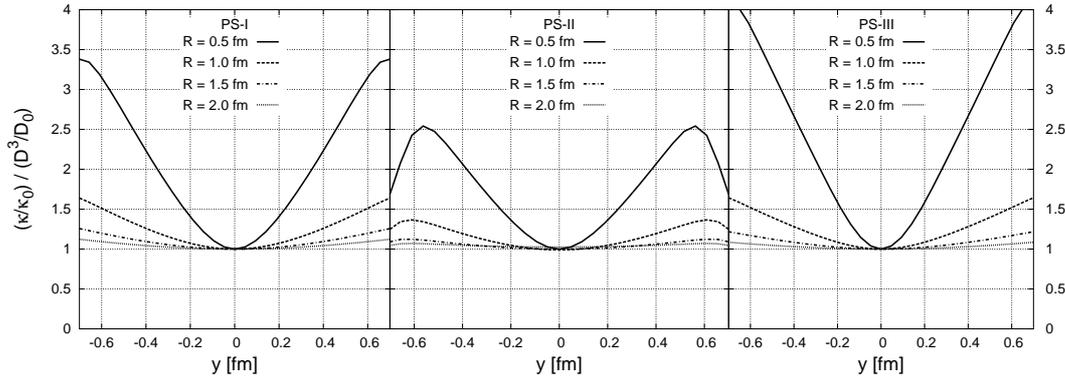


Abbildung 4.2: Das Verhältnis des elektrischen Feldes  $D^3$  zur dielektrischen Funktion  $\kappa$ , beide normiert auf ihren axialen Wert. Das asymptotische Verhalten nach Gl. (2.68) ist schon erreicht für  $R \geq 1.2$  fm.

Wert von  $B$  mit eingezeichnet. Für PS-II kommt die Volumenenergie in die Nähe des lokalen Minimums bei  $\sigma = 0$ , wie man an dem lokalen Minimum in  $U$  erkennen kann. Für PS-II entwickelt die Oberflächenenergie zwei scharfe Peaks und für PS-III sind die beiden Peaks deutlich voneinander getrennt. Im letzten Fall bildet sich das Volumen des Bags klarer heraus als in den anderen beiden Fällen.

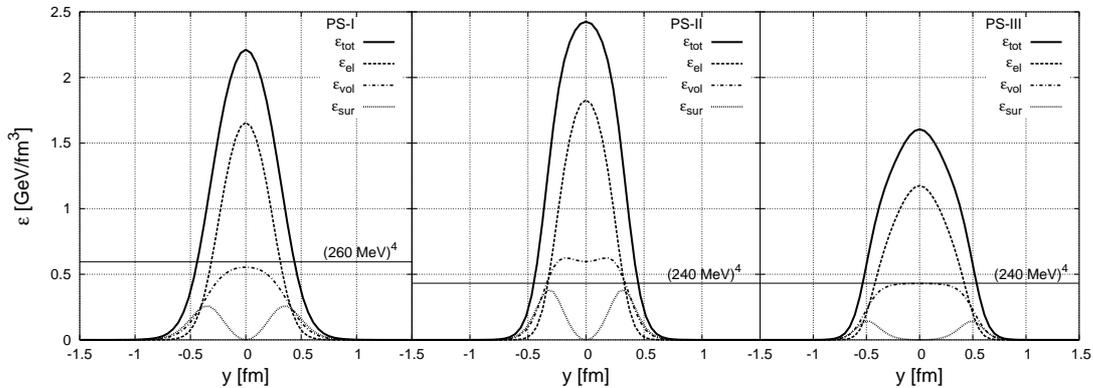


Abbildung 4.3: Die Zerlegung der Energie in die verschiedenen Energieanteile für  $R = 1$  fm.

Wie schon für die Felder  $\sigma$  und  $D$  erwarten wir auch für die Energiedichte, dass das Profil für große Quark-Abstände eine stabile Form annimmt. Dieses untersuchen wir in Abb. 4.4. Man sieht auch hier, dass sich für  $R < 1.0$  fm das Profil noch verändert. Für sehr kleine Abstände  $R = 0.4$  fm sind zuerst noch die Ausläufer der Coulomb-Peaks zu sehen (durchgezogene Linien) und erst für  $R > 1.0$  fm nimmt auch die Energiedichte allmählich ihre asymptotische Form

an und verändert sich nur noch schwach. Mit PS-III nimmt das Profil für große Abstände ( $R = 2.0$  fm) eine eher eckige Form an.

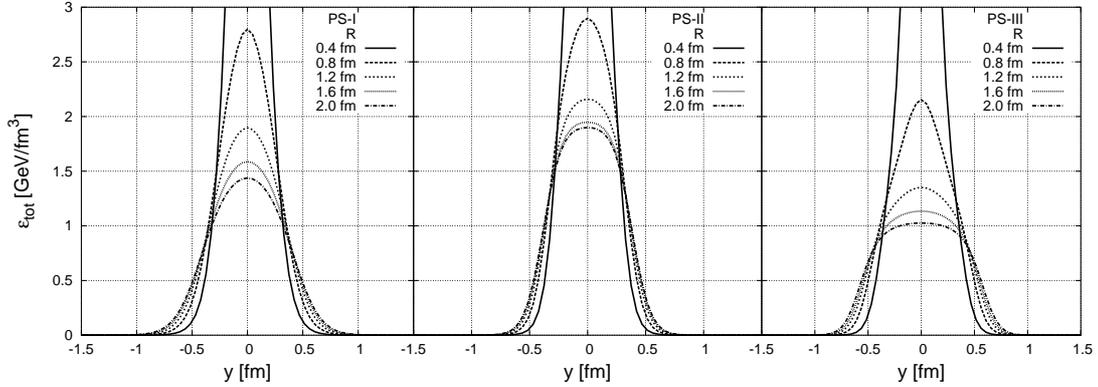


Abbildung 4.4: Das Profil der Energiedichte für verschiedene  $q\bar{q}$ -Abstände  $R$ , wie in der Abbildung gezeigt. Die asymptotische Form ist fast erreicht für  $R \geq 1.2$  fm.

Dieses Verhalten spiegelt sich auch in der String-Breite  $\rho_g$  wider. In [Bali95] wurde die Breite des Strings für verschiedene Quark-Abstände bestimmt. Die Autoren bestimmten dort die Breite durch einen Gauß-Fit an die Energiedichte bzw. Wirkungsichte. Wir folgen zur besseren Vergleichbarkeit diesem Verfahren und legen in der Profil-Funktion (3.2b) den Parameter mit  $n = 2$  fest. Damit beschreiben wir das Profil durch eine reine Gauß-Funktion und extrahieren aus dem Fit wie zuvor die Breite des Strings. In Abb. 4.5 zeigen wir die volle Halbwertsbreite des Strings  $\Delta = 2\rho_g$  im Vergleich mit den SU(2)-Gitterrechnungen. Man sieht bei allen Parametersätzen ein schnelles Anwachsen der Breite. Für  $q\bar{q}$ -Abstände ab  $R \approx 0.8$  fm verlangsamt sich dieses Anwachsen und für PS-II saturiert die Breite bei einem Wert von  $\Delta = 0.68$  fm bei  $R = 2.0$  fm. Für die Parametersätze PS-I und PS-III sieht man selbst für solch großen Quark-Abstände noch nicht diese Sättigung. Stattdessen nimmt die Breite noch leicht zu und erreicht bei  $R = 2$  fm die Werte  $\Delta = 0.78$  fm für PS-I bzw.  $\Delta = 0.97$  fm für PS-III. Dieses leichte Anwachsen zeigt, dass das Bag-Modell, in dem der Radius des Strings konstant bleibt, erst für sehr große Quark-Abstände wirklich gültig ist. Andererseits ist dieses Verhalten von PS-I und PS-III verträglich mit dem String-Bild auf dem Gitter [Kogut75, Kogut81, Lüscher81]. In diesen Arbeiten wird ein logarithmisches Anwachsen der Stringbreite vorhergesagt, das durch mögliche Quanten-Fluktuationen des Strings verursacht wird.

### 4.1.2 CDM und der duale Supraleiter

In diesem Abschnitt werden wir unsere Ergebnisse des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches mit denen im Modell des *dualen Farb-Supraleiters* bzw. dem *dualen Ginzburg-Landau-Modell* vergleichen. In diesem Modell bilden sich elektrische Flussschläuche

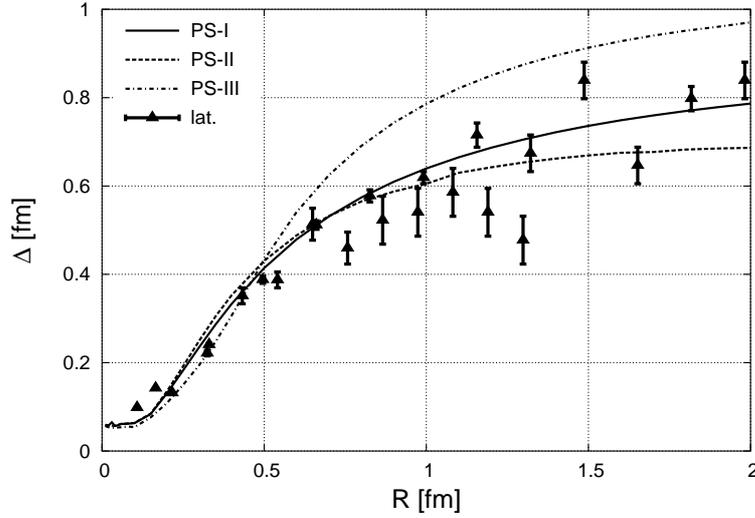


Abbildung 4.5: Die volle Halbwertsbreite  $\Delta = 2\rho_g$  eines Strings als Funktion des Quark-Abstands. Für PS-I saturiert der Wert bei  $\Delta \approx 0.7$  fm. Für PS-II und PS-III nimmt die Breite für Werte bis zu  $R = 2$  fm noch leicht zu. Gitterresultate aus [Bali95].

ganz analog zu den magnetischen Flussschläuchen im herkömmlichen Supraleiter [Abrikosov57]. Der Flussschlauch ist umgeben von einem zirkularen magnetischen Strom, dual zum magnetischen Feld einer Spule, in der das magnetische Feld durch einen elektrischen (Spulen-)Strom erzeugt wird. Die Profile von diesen *Abrikosov-Nielsen-Olesen-Wirbeln* [Nielsen73] sind in den Arbeiten [Maedan90] und [Shoshi03, Baker98] bestimmt worden. Wir vergleichen hier unsere Ergebnisse mit denen des Supraleiters indirekt über einen Vergleich mit SU(2)-Gitterergebnissen. In [Bali98] wurde in der sog. *maximal Abel'schen Projektion* der Gitter-SU(2) das elektrische Feld<sup>1</sup> und der magnetische Strom bestimmt. In einer weiteren Auswertung derselben Gitterergebnisse [Gubarev99, Koma03a] wurde die Übereinstimmung dieser Resultate mit dem dualen Supraleiter gezeigt.

Im dualen Supraleiter hängt der magnetische Strom direkt mit dem elektrischen Feld  $\vec{E}_{\text{DCS}}$  zusammen, also

$$\vec{j}_{\text{mag}} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{DCS}} \quad . \quad (4.1)$$

In diesem Modell gibt es kein Dielektrikum und elektrisches Feld und elektrische Verschiebung sind identisch. Da hier das  $\vec{E}$ -Feld eingeschlossen ist, vergleichen wir unser  $\vec{D}$ -Feld mit  $\vec{E}_{\text{DCS}}$  bzw. mit dem elektrischen Feld auf dem SU(2)-Gitter. In Abb. 4.6 zeigen wir das elektrische Profil für die drei Parametersätze im Ver-

<sup>1</sup>In der SU(2) mit Rang 1 wird die größte Abel'sche Untergruppe von nur einem Generator gebildet, entsprechend einem elektrischen Feld.

gleich mit den Gitterergebnissen (Dreiecke). Wie zu erwarten, beschreibt auch hier PS-I die Gitterergebnisse am besten. Allerdings ist die Übereinstimmung hier nur noch qualitativ. Das Profil im CDM fällt deutlich schneller ab für große Abstände von der String-Achse, als auf dem Gitter und damit auch als im Modell des dualen Supraleiters. Wir erinnern uns (Tab. 3.2), dass das Profil der Energiedichte im CDM nahezu Gauß-artig abfällt. Das gleiche Verhalten vermuten wir auch für das elektrische Feld ( $\varepsilon_{\text{el}} \propto \vec{E}_a^2$ ), während das elektrische Feld im dualen Supraleiter nur exponentiell abfällt.

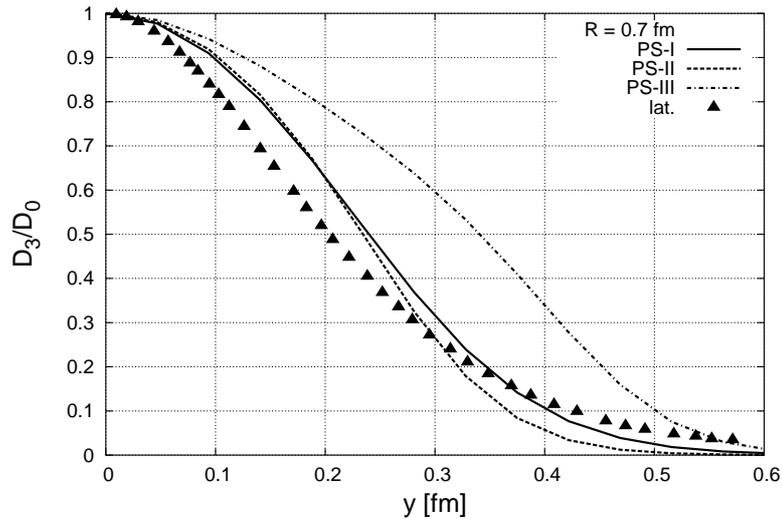


Abbildung 4.6: Vergleich der elektrischen Verschiebung  $D$  im CDM mit dem elektrischen Feld aus Gitterrechnungen. Gitterresultate (Dreiecke) aus [Bali98].

Der entsprechende magnetische Strom ist in Abb. 4.7 abgebildet. Die Ströme für PS-I und PS-II unterscheiden sich nur wenig. In PS-III bildet sich sehr deutlich ein Oberflächenstrom heraus. Dies liegt im Wesentlichen am größeren Radius des Flussschlauches in PS-III. In diesem Parametersatz unterscheidet sich der magnetische Strom sogar qualitativ von den Gitterergebnissen, da er viel langsamer anwächst. Wir finden auf der Basis der elektrischen Felder und des magnetischen Stroms also bestenfalls eine qualitative Übereinstimmung zwischen dem CDM und dem Modell des dualen Supraleiters. Von einer weiteren Anpassung der CDM-Modellparameter sehen wir ab, da nach dem oben Gesagten nur die Energiedichte eine Beobachtungsgröße ist.

### 4.1.3 Das $q\bar{q}$ Potential

Nachdem wir die Profile der Energiedichten und der Felder analysiert haben, kommen wir jetzt zum  $q\bar{q}$ -Potential  $V_{q\bar{q}}$ . Das Potential ist natürlich nach Abschnitt 3.2 auf die Stringspannung  $\tau = 980 \text{ MeV/fm}$  eingestellt. In Abb. 4.8 zeigen wir

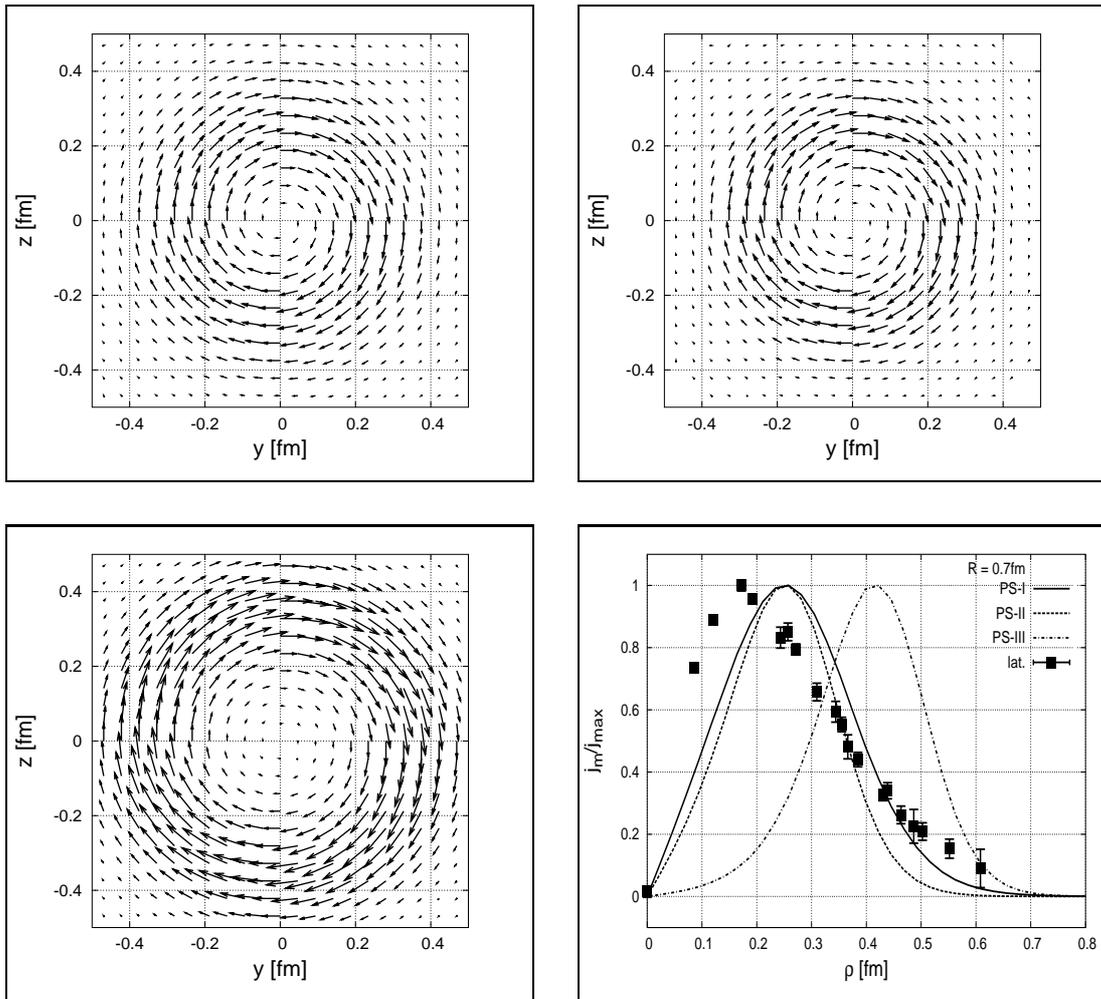


Abbildung 4.7: Der magnetische Kreisstrom  $\vec{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \vec{D}^a$  für PS-I (oben links), PS-II (oben rechts) und PS-III (unten links) und dessen skaliertes Profil (unten rechts). Gitterresultate (Quadrate) aus [Bali98].

$V_{q\bar{q}}$  als Funktion des Abstandes  $R$ , aufgespalten in die verschiedenen Energieanteile. Wir zeigen auch den besten Fit des Cornell-Potentials (3.1) an das Potential (durchgezogene Linie). Die Übereinstimmung mit der Cornell-Parametrisierung ist augenscheinlich sehr gut.

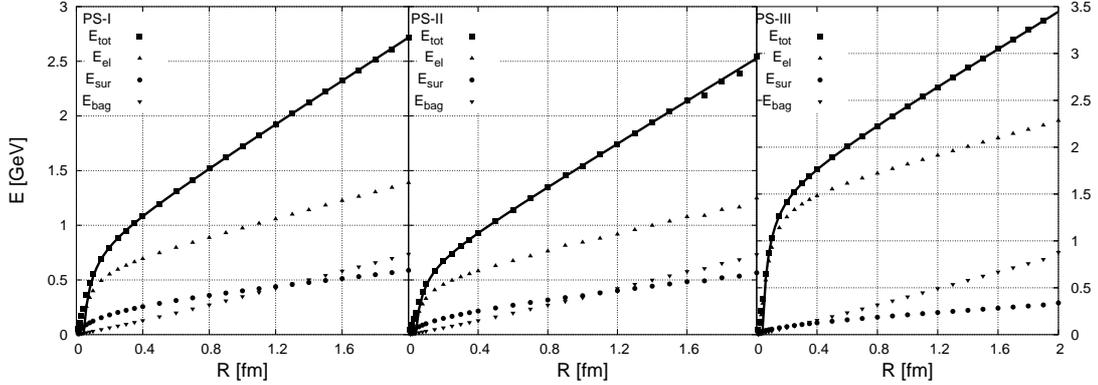


Abbildung 4.8: Das  $q\bar{q}$ -Potential  $E = V_{q\bar{q}}(R)$  zusammen mit den verschiedenen Energieanteilen und dem Cornell-Fit an die Gesamtenergie.

Die Güte des Fits sieht man in Abb. 4.9. Dort zeigen wir die relative Abweichung  $(E_{\text{tot}} - V_c)/V_c$  des  $q\bar{q}$ -Potentials von der Cornell-Parametrisierung. Die CDM-Ergebnisse weichen für  $R > 0.2 \text{ fm}$  nur um bis zu 2% von der Parametrisierung ab. Für kleinere Werte von  $R$  kommt in der Parametrisierung das  $1/R$ -Verhalten zum Tragen, das durch die endliche Quark-Ausdehnung  $r_0 = 0.02 \text{ fm}$  für sehr kleine  $R$  unterdrückt ist. Die leichten Abweichungen des Potentials von der Parametrisierung für  $R > 0.2 \text{ fm}$  beruhen auf kleinen numerischen Ungenauigkeiten, die bei dieser Darstellung besonders stark zum Tragen kommen.

Auffällig ist, dass das Potential schon für Abstände  $R \gtrsim 0.2 \text{ fm}$  vom linearen Term in Gl. (3.1) dominiert wird. Dieses ist insofern interessant, als dass das Profil seine asymptotische Form erst für  $R \geq 1.0 \text{ fm}$  annimmt. Auf der Ebene des Potentials setzt das Confinement-Verhalten also schon sehr viel früher ein, obwohl sich die lineare Flussschlauch-Struktur noch gar nicht vollständig herausgebildet hat. Wir folgern daraus, dass man aus der Form des Potentials nicht direkt auf die Feld-Geometrie schließen kann. Ein lineares Potential kann also vorhanden sein, auch wenn die Felder noch keine lineare Geometrie haben.

Der absolute Wert des Potentials wird dominiert von der elektrischen Energie. Dieses ist auf die nahezu punktförmigen Teilchen, verbunden mit der großen elektrischen Selbstenergie, zurückzuführen. Dieses sieht man am deutlichsten bei PS-III, wo die elektrische Kopplung mit  $g_s = 3.3$  am größten ist. Wir haben auch hier wieder einen Cornell-Fit an die einzelnen Energien durchgeführt. Die aus dem Fit extrahierten Werte fassen wir in Tab. 4.1 zusammen (erster Satz von 3 Spalten). Der von  $R$  unabhängige Term  $e_F = C_F E_0$  spiegelt die Selbstenergie der Quarks wider und ist natürlich von der Breite  $r_0$  der Quark-Ladungsverteilung

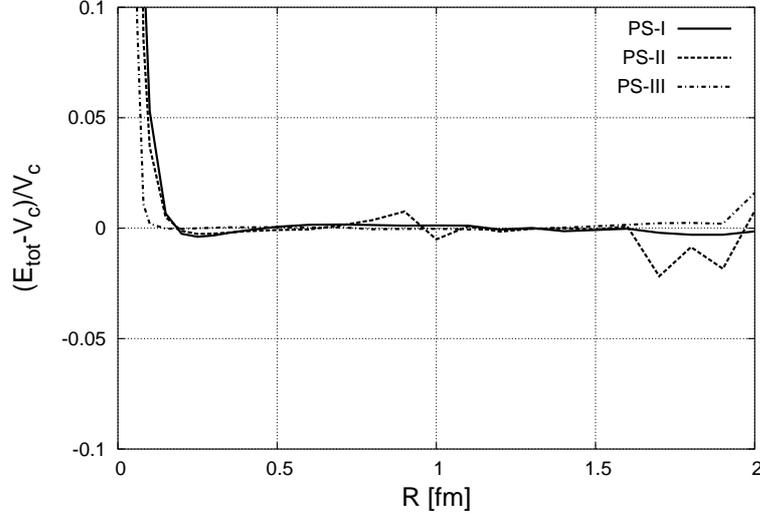


Abbildung 4.9: Die relative Abweichung des  $q\bar{q}$ -Potentials von der Cornell-Parametrisierung  $V_c$ . Die Abweichung ist im Bereich  $0.2 \text{ fm} \leq R \leq 2.0 \text{ fm}$  kleiner als 2%.

$w(\vec{r})$  (2.19b) abhängig. Hier wie in allen anderen Rechnungen haben wir  $r_0 = 0.02 \text{ fm}$  gewählt, so dass sich die Gauß-Verteilung  $w(\vec{r})$  auf dem gewählten Gitter noch auflösen lässt.

Die Stringspannung nimmt den phänomenologischen Wert  $\tau = 980 \text{ MeV}$  an. Die kleinen Abweichungen davon nehmen wir im Rahmen der Genauigkeit in Kauf. Wie im Bag-Modell (s. Gl. (2.63)) nehmen der elektrische Teil  $\tau_{\text{el}}$  und der Volumenteil der Stringspannung  $\tau_{\text{vol}}$  nahezu denselben Wert an. Der Coulomb-Parameter  $a_F = C_F \alpha$  nimmt für PS-I und PS-II relativ kleine Werte  $a_F = 0.18$  bzw.  $a_F = 0.12$  an. PS-III dagegen produziert den Wert  $a_F = 0.30$ , der auch in SU(3)-Gitterrechnungen erhalten wurde [Bali93, Bali97, Morningstar97]. Durch optimale Fits des Cornell-Potentials an das beobachtete  $q\bar{q}$ -Meson-Spektrum schwerer Quarks ( $q \in \{\text{charm, bottom}\}$ ) wurden Werte von  $a_F = 0.25$  [Eichten77] bis  $a_F = 0.5$  [Quigg79] erhalten. Im MIT-Bag-Modell [Chodos74b, Chodos74a] wurde ein sehr viel höherer Wert mit  $a_F = 3.0$  benutzt, der in derselben Größenordnung auch in den CDM-Hadronisierungsstudien von Traxler et al. [Traxler99b] verwendet wurde ( $a_F = 2.6$ ). Dieser hohe Wert für die Kopplung, zusammen mit dem niedrigen Wert für die Bag-Konstante  $B = (146 \text{ MeV})^4$  hat dort zu sehr breiten Flussschläuchen geführt [Loh96]. In einer anderen Bag-ähnlichen Analyse wurde dagegen ein sehr viel kleinerer Wert bevorzugt mit  $a_F = 0.38$  [Hasenfratz80b].

	fundamental			adjungiert			ad/fund		
	PS-I	PS-II	PS-III	PS-I	PS-II	PS-III	PS-I	PS-II	PS-III
$e_D$ [MeV]	388	294	757	961	763	2202	2.5	2.6	2.9
$a_D$	0.18	0.12	0.30	0.41	0.31	0.87	2.3	2.7	2.9
$\tau$ [MeV/fm]	979	982	980	1548	1502	1586	1.6	1.5	1.6
$e_D^{\text{el}}$ [MeV]	297	235	726	833	679	2163	2.8	2.9	3.0
$a_D^{\text{el}}$	0.12	0.09	0.29	0.34	0.28	0.86	2.7	3.1	3.0
$\tau_{\text{el}}$ [MeV/fm]	404	390	424	640	585	695	1.6	1.5	1.6
$\tau_{\text{vol}}$ [MeV/fm]	381	380	435	610	588	717	1.6	1.5	1.7
$e_D^{\text{sur}}$ [MeV]	108	78	47	151	108	63	1.4	1.4	1.4
$a_D^{\text{sur}}$	0.07	0.05	0.03	0.10	0.07	0.04	1.4	1.4	1.4
$\tau_{\text{sur}}$ [MeV/fm]	195	212	122	299	328	174	1.5	1.5	1.4

Tabelle 4.1: Die Parameter  $e_D = C_D E_0$ ,  $a_D = C_D \alpha$  und  $\tau$  nach dem Cornell-Fit an das  $q\bar{q}$ -Potential, sowie an die einzelnen Energieanteile. Der erste Satz von 3 Spalten beschreibt das Potential mit Quarks in der Fundamental-Darstellung ( $D = F$ ), der zweite entsprechend mit Quarks in der adjungierten Darstellung ( $D = A$ ) und der dritte zeigt das Verhältnis von beiden.

#### 4.1.4 Casimir Scaling

Im vorigen Abschnitt haben wir Quarks in der fundamentalen Darstellung betrachtet. In dieser Darstellung haben die Quarks Farb-Ladungen entsprechend der ersten 3 Zeilen in Tab. 2.1 (s. auch Abb. 2.3). In diesem Abschnitt werden wir kurz die Abhängigkeit des  $q\bar{q}$ -Potential von der Darstellung der Quarks diskutieren. In der QCD erwartet man für Quarks in der Darstellung  $D$  und für kleine Quark-Abstände, dass das Potential störungstheoretisch beschrieben werden kann. Das 1-Gluon-Austauschpotential ist dann das typische Coulomb-Potential mit Coulomb-Parameter  $a_D = C_D \alpha$ , wobei  $C_D$  der Casimir-Operator der SU(3) in der Darstellung  $D$  ist. Das kurzreichweitige Potential skaliert also mit dem Wert des Casimir-Operators. In Abschnitt 3.1.4 haben wir gezeigt, dass auch der CDM-Coulomb-Parameter quadratisch mit der Kopplung  $g_s$  und damit linear mit dem quadratischen Ladungs-Operator  $C_D$  skaliert, also  $a_D \propto C_D g_s^2$ .

Ambjørn et al. haben zuerst die nicht-perturbative SU(2)-Stringspehnung in (3+1) Dimensionen [Ambjørn84a] und (2+1) Dimensionen [Ambjørn84b] untersucht und dabei festgestellt, dass auch die Stringspehnung näherungsweise mit dem Casimir-Operator skaliert, d.h.  $\tau_D = (C_D/C_F)\tau_F$  und damit

$$V_{q\bar{q}}^D(R) = \frac{C_D}{C_F} V_{q\bar{q}}^F \quad . \quad (4.2)$$

Hier ist  $C_D$  der  $SU(3)$ -Casimir-Operator in der Darstellung  $D$  und  $\tau_F = \tau$  die Stringsannung in der fundamentalen Darstellung. In der adjungierten Darstellung gilt  $C_A^{\text{ab}} = 3$ . Diese als *Casimir Scaling* bekannte Hypothese ist nur durch die numerische Analyse auf dem Gitter verifizierbar. Trotz der verbesserten numerischen Techniken der Gitter-Eichtheorie und der größeren Rechenkapazität moderner Computer ist diese Hypothese bis heute nicht zweifelsfrei bestätigt. Während Bali in  $SU(3)$ -Gitterrechnungen [Bali00] Casimir Scaling mit Abweichungen von nur 2-5% für verschiedene Darstellungen bestätigt, finden sich in [Deldar00] Abweichungen bis zu 15%. In der numerisch leichter zugänglichen  $SU(2)$  wurde ein klares Signal für eine Abweichung vom Casimir Scaling von 15% für das adjungierte Potential festgestellt [Kratovichla03], also für den Fall  $D = A$ , wo die Ladungen in der adjungierten Darstellung sind.

Das adjungierte  $q\bar{q}$ -Potential unterscheidet sich allerdings bereits qualitativ vom fundamentalen Potential. Selbst in der sog. *quenched* (erstarrten) Näherung der Gitterrechnungen, in denen keine dynamischen Quarks enthalten sind, können die adjungierten Quarks mit den dynamischen Gluonen einen Singulett-Zustand bilden. Sowohl adjungiertes Quark und Gluonen sind beide Oktett-Zustände  $\mathbf{8}$ , die mit  $\mathbf{8} \otimes \mathbf{8} = (\mathbf{1} \oplus \text{Multipletts in höheren Dimensionen})$  zu einem Singulett koppeln können [Jones90]. Man erwartet, dass ab einem kritischen Quark-Abstand  $R_c$  der String reißt und in zwei Gluelumps zerfällt [Michael98, Kratochvila03]. Das adjungierte Potential ist also nur bis zu  $R = R_c$  linear ansteigend und konstant für größere Quark-Abstände.

Im CDM können wir Ladungen in der adjungierten Darstellung beschreiben, indem wir den Quarks die adjungierten Ladungen aus Tab. 2.1 zuweisen, die sich aus den Ladungen je einer Farbe und einer Antifarbe zusammensetzen. Alternativ könnten wir die Kopplungskonstante  $g_s$  entsprechend reskalieren. Im Rahmen des CDMs gibt es keine Teilchen-Erzeugung, so dass in diesem Modell auch das adjungierte Potential linear ansteigend sein wird für alle Quark-Abstände  $R$ . Dies ist dann eben nur für  $R \leq R_c$  mit Gitterrechnungen vergleichbar. Das adjungierte Potential zeigen wir in Abb. 4.10. In Abschnitt 3.1.4 haben wir gezeigt, dass die Stringsannung im CDM linear mit  $g_s$  und damit linear mit dem quadratischen Abel'schen Casimir-Operator  $\sqrt{C_D^{\text{ab}}}$  skaliert. In der Abel'schen Näherung gilt  $C_F^{\text{ab}} = 1/3$  und  $C_A^{\text{ab}} = 1$ . Wir erwarten also, dass die adjungierte Stringsannung den Wert  $\tau_A = \sqrt{C_A^{\text{ab}}/C_F^{\text{ab}}} \tau_F = \sqrt{3} \tau_F \approx 1.7 \tau_F$  annimmt anstatt des Wertes  $\tau_A = C_A/C_F \tau_F = (9/4) \tau_F = 2.25 \tau_F$ .

Wir haben wieder einen Cornell-Fit an das adjungierte Potential durchgeführt und die entsprechenden Cornell-Parameter in Tab. 4.1 zusammengestellt (zweiter Satz von 3 Spalten). Ebenso zeigen wir das Verhältnis der jeweiligen Parameter in der adjungierten und der fundamentalen Darstellung in derselben Tabelle. Nur der konstante Term und der Coulomb-Term der elektrischen Energie zeigen das Casimir Scaling, zu einem geringeren Maße auch noch die entsprechenden Parameter der Gesamt-Energie. Die Stringsannung entspricht in allen Fällen der CDM-Vorhersage  $\tau_A/\tau_F = 1.7$ . Da wir mit unserem Modell die

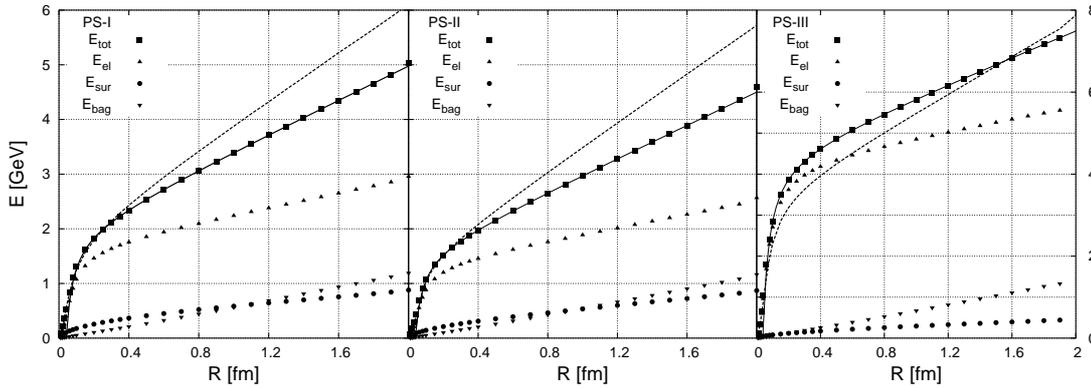


Abbildung 4.10: Das adjungierte  $q\bar{q}$ -Potential für alle Parametersätze. Die gestrichelte Linie entspricht der Vorhersage des Casimir Scaling. Der absolute Anteil der elektrischen Energie an der Gesamtenergie ist hier auf Grund der höheren Ladung und der damit höheren elektrischen Selbstenergie stark dominant.

nicht-Abel'sche QCD beschreiben wollen, müssen wir diesen Wert vergleichen mit  $C_A/C_F = 9/4 = 2.25$ . Im CDM-Modell weicht die adjungierte Strings Spannung  $\tau_A$  also um 25% von der Casimir-Hypothese ab. Allerdings wurden auch in SU(3)-Gitterrechnungen Abweichungen von dieser Aussage um 15% mit  $\tau_A = 1.97\tau_F$  gefunden [Deldar00]. Darüber hinaus ist dieses Verhalten im CDM in qualitativer Übereinstimmung mit der Tendenz, dass Gitterrechnungen das Casimir Scaling systematisch unterschätzen. Wir folgern, dass Casimir Scaling im CDM, genau wie in allen anderen Bag-Modellen [Johnson76, Lucini01, Hansson86], nicht enthalten ist. Wir bemerken hier außerdem, dass im Modell des dualen Farb-Supraleiters die Strings Spannung ebenfalls nicht durch das Casimir Scaling beschrieben wird [Koma03b, Ball88].

Die Abweichung vom Casimir Scaling hätten wir bereits aus der Analyse der Modellparameter her erwarten können. In Abschnitt 3.1.4 haben wir festgestellt, dass die Strings Spannung nahezu linear mit  $g_s$  skaliert und gleichzeitig die Stringbreite mit der Kopplung zunimmt. Der Fluss Schlauch weicht dem höheren elektrischen Feld also durch eine Zunahme der String-Querschnittsfläche aus. Für das Casimir Scaling ist ein String mit konstanter Querschnittsfläche notwendig, was wir im CDM nicht erreichen können.

## 4.2 $qqq$ -Zustände

Die Parameter des Modells haben wir durch das Profil und das Potential der  $q\bar{q}$ -Konfiguration festgelegt und diese im vorangegangenen Abschnitt ausführlich beschrieben. Im Folgenden wollen wir die Analyse auf einen Baryon-artigen  $qqq$ -Zustand ausdehnen. Während sich bei einer  $q\bar{q}$ -Konfiguration die 3- und die

8-Komponente des elektrischen Feldes und auch der Ladungsdichte nur durch das Verhältnis der Ladungen  $q^3/q^8$  unterscheiden. Bei der 3-Quark-Anordnung dagegen sind die Ladungen auch räumlich unterschiedlich verteilt. Die entsprechenden elektrischen Felder  $\vec{E}^3$  und  $\vec{E}^8$  haben also im Allgemeinen nicht dieselbe räumliche Verteilung.

In Abb. 4.11 haben wir eine spezielle  $qqq$ -Konfiguration dargestellt. Die 3 Quarks sitzen auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge  $R$ . Nach Tab. 2.1 auf Seite 25 trägt das  $b$ -Quark z.B. nur eine (negative) 8-Komponente der Ladung, während das  $r$ - und das  $g$ -Quark jeweils eine (positive) 8-Komponente und eine entgegengesetzt gleiche 3-Komponente der Ladung tragen. In dieser speziellen Konfiguration mit der 3-zähligen, räumlichen Symmetrie können wir auf Grund der globalen Farbsymmetrie aus Abschnitt 2.5.2 bereits vorhersagen, dass auch die invariante Energiedichte diese räumliche 3-zählige Symmetrie hat. Die elektrischen Felder müssen sich also so anordnen, dass die räumliche Symmetrie des Systems erhalten bleibt.

Die Energiedichte und das zugehörige  $qqq$ -Potential  $V_{qqq}$  gibt seit langem Anlass zur Diskussion. In der QCD lassen sich drei Quarkfelder an verschiedenen Orten eichinvariant nur über Eichstrings verbinden, die sich an einem gemeinsamen Punkt treffen [Peskin95, Kuzmenko03]. Diese Form, einen ausgedehnten 3-Quark-Zustand zu beschreiben, nennt man die Y-Konfiguration (in Abb. 4.11 links). Wir hatten bereits in Abschnitt 2.5.3 erwähnt, dass auch im CDM nur die Y-Geometrie invariant ist unter den diskreten Farbroationen  $V_i$  aus Gl. (2.40). Man erwartet also auf der Ebene der Felder eine Y-artige Geometrie. Im CDM kann dies über die Wechselwirkung der elektrischen Felder mit dem Confinement-Feld  $\sigma$  erreicht werden. Die Topologie der Eichstrings legt allerdings nicht zwingend die räumliche Verteilung der Energie fest. Nur im Extremfall infinitesimal dünner Flussschläuche lässt sich die Geometrie der Eichstrings auf die Geometrie des 3-Quark-Zustandes übertragen. Für ausgedehnte Flussschläuche, wie sie auf dem Gitter und auch im CDM bestätigt wurden, ist die Vorhersage über die  $qqq$ -Geometrie nicht mehr so eindeutig. Da sich die Energiedichte also nicht direkt aus der Eichstring-Konfiguration ableiten lässt, werden im Folgenden zwei mögliche Alternativen diskutiert, die dann im Modell oder auf dem Gitter entschieden werden müssen.

Diese beiden Alternativen werden am besten auf der Ebene des  $qqq$ -Potentials deutlich. Das Potential in einer Cornell-ähnlichen Parametrisierung spaltet sich wieder in einen perturbativen und einen nicht-perturbativen Teil auf. Für kleine  $qq$ -Abstände  $R$  lässt sich wie im  $q\bar{q}$ -Fall Störungstheorie anwenden. Das 1-Gluon-Austauschpotential ergibt die typische 2-Teilchen-Coulomb-Wechselwirkung. Im  $qqq$ -System ist diese 2-Teilchen-Wechselwirkung eine  $qq$ -Wechselwirkung und diese ist auf Grund des begleitenden Farbfaktors  $\frac{1}{3!}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\sigma\tau\gamma}t_{\alpha\sigma}^a t_{\beta\tau}^a = -C_F^{ab}/2$  gegenüber der  $q\bar{q}$ -Wechselwirkung um den Faktor  $1/2$  reduziert (siehe Gln. (2.53) bis (2.56)). Das perturbative  $qqq$ -Potential für kleine Abstände  $R$  lässt sich also

durch

$$V_{qqq}^{\text{pert}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = 3C_F^{\text{ab}} E_0 - \frac{1}{2} C_F^{\text{ab}} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \frac{\alpha}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (4.3)$$

parametrisieren. Hier sind die  $\vec{r}_i$  die Positionen der Quarks und  $E_0$  und  $\alpha$  sind der konstante Term bzw. der effektive Coulomb-Parameter aus dem Cornell-Fit in Gl. (3.1) an das  $q\bar{q}$  Potential, die in Tab. 4.1 gegeben sind.

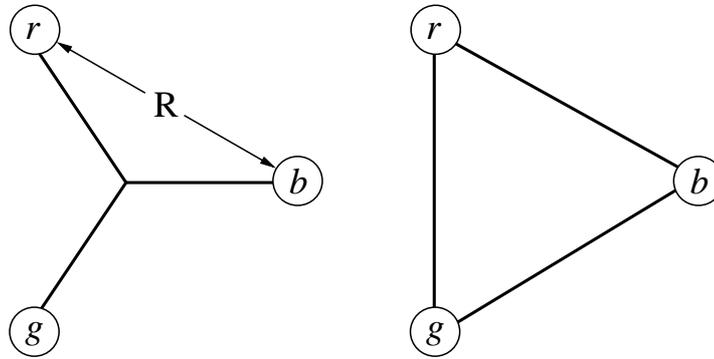


Abbildung 4.11: Y-Form (links) und  $\Delta$ -Form (rechts) der  $qqq$ -Konfiguration. In der Y-Geometrie ist jedes Quark über einen  $q\bar{q}$ -String mit einem zentralen Punkt verbunden. In der  $\Delta$ -Geometrie sind je zwei Quarks über einen  $qq$ -String miteinander verbunden.

Wenn die Felder die Y-Konfiguration annehmen und sich auch im  $qqq$ -Fall relativ dünne Flussschläuche ausbilden, dann liegt es nahe, dass die Gesamtenergie des Systems mit der totalen Flussschlauch-Länge  $L_Y$  skaliert. In jeder beliebigen Dreiecks-Konfiguration lässt sich ein Punkt finden, der sog. *Fermat'sche* bzw. *Steiner'sche* Punkt, der die Länge der drei Y-Schenkel minimiert [Schreiber86]. Für eine detaillierte Beschreibung, wie sich dieser Punkt konstruieren lässt, siehe [Börchers96]. Der Knotenpunkt trägt formal drei Antifarben, mit denen die Farben der drei Quarks wechselwirken. Für ein beliebiges Dreieck mit allen Innenwinkel kleiner als  $120^\circ$  schließen die drei Y-Schenkel paarweise einen Winkel von genau  $120^\circ$  ein. Für ein gleichseitiges Dreieck ist der Fermat'sche Punkt gerade der Schwerpunkt. Für Dreiecke mit einem Winkel größer als  $120^\circ$  ist der Fermat'sche Punkt identisch mit dem Eckpunkt an diesem Winkel. Im entarteten Fall, dass zwei der drei Quarks aufeinander liegen und ein Diquark bilden, ist der Fermat'sche Punkt identisch mit dem Diquark. Das Potential lässt sich dann mit

dem sog. Y-Ansatz für das  $qqq$ -Potential

$$V_Y(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = V_{qqq}^{\text{pert}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + L_Y \tau \quad , \quad (4.4a)$$

$$L_Y = \sum_{i=1}^3 |\vec{r}_i - \vec{r}_Y| \quad (4.4b)$$

parametrisieren. Hier ist  $\vec{r}_Y$  die Position des Fermat'schen Punkts und  $\tau$  die  $q\bar{q}$ -Stringsplannung.

Eine alternative Beschreibung des 3-Quark-Potentials wurde von Cornwall [Cornwall79, Cornwall96] vorgeschlagen. Im sog. *Zentrums-Vortex*-Modell erhält man für den langreichweitigen linearen Term des Potentials ein Skalieren nicht mit der minimalen Y-Länge  $L_Y$ , sondern ein Skalieren mit der Kantenlänge  $L_\Delta$  des durch die drei Quarks aufgespannten Dreiecks (Abb. 4.11, rechts). Aus topologischen Gründen erhält man in diesem Modell einen zusätzlichen Faktor  $1/2$ , so dass sich das  $qqq$ -Potential mit dem  $\Delta$ -Ansatz

$$V_\Delta(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = V_{qqq}^{\text{pert}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) + \frac{1}{2} L_\Delta \tau \quad (4.5a)$$

$$L_\Delta = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (4.5b)$$

beschreiben lässt. Diese  $\Delta$ -Parametrisierung lässt sich so interpretieren, als ob die 3-Quark-Wechselwirkung von einer paarweisen 2-Teilchen-Wechselwirkung dominiert wird mit einer um die Hälfte reduzierten Stringsplannung. In diesem Fall wären die Quarks paarweise mit einem  $qq$ -String verbunden, wie im rechten Teil von Abb. 4.11 dargestellt. Diese Hypothese über das  $qqq$ -Potential wurde von mehreren Gruppen auf dem Gitter mit unterschiedlichen Ergebnissen überprüft. Interessanterweise hat Cornwall in einer jüngsten Veröffentlichung [Cornwall04] die  $\Delta$ -Vorhersage im Vortex-Modell widerrufen, so dass der Anlass für die kontroversen Ergebnisse auf dem Gitter verschwunden ist.

Wir weisen hier darauf hin, dass im Vergleich mit dem  $q\bar{q}$ -Potential keine weiteren Parameter zur Beschreibung des  $qqq$ -Potentials benötigt werden. Wenn die Parameter  $E_0$ ,  $\alpha$  und  $\tau$  festgelegt sind, ist auch das 3-Quark-Potential festgelegt. Beide Parametrisierungen des  $qqq$ -Potentials sind in zwei Grenzfällen identisch, die wir in Abb. 4.12 dargestellt haben. Wenn zwei Quarks sehr nahe beieinander sind und im Grenzfall aufeinander liegen, wirken sie wie ein Antiquark mit einer Antifarbe. Dies ist im linken Teil der Abbildung gezeigt. Wenn sich z.B. das  $r$ - und das  $g$ -Quark annähern und der Abstand  $\overline{r\bar{b}} = R$  fixiert bleibt, dann gilt

$$L_Y = R = \frac{1}{2} L_\Delta \quad \text{für } r \rightarrow g \quad . \quad (4.6)$$

In diesem Fall wird das  $q\bar{q}$ -Potential aus dem vorangegangenen Abschnitt reproduziert. Im anderen Grenzfall bilden die drei Quark eine lineare Anordnung wie im rechten Teil der Abbildung dargestellt. Der Fermat'sche Punkt liegt in diesem Fall direkt auf dem  $b$ -Quark. Der Knotenpunkt hat zusammen mit dem  $b$ -Quark formal die Farben  $\bar{r}$  und  $\bar{g}$ . Vom  $r$ - und vom  $g$ -Quark zieht sich dann jeweils ein  $q\bar{q}$ -String. Wenn die Abstände  $\bar{r}b = \bar{g}b = R$  sind, dann gilt hier

$$L_Y = 2R = \frac{1}{2} L_\Delta \quad \text{für einen Winkel von } 180^\circ \text{ bei } b \quad . \quad (4.7)$$

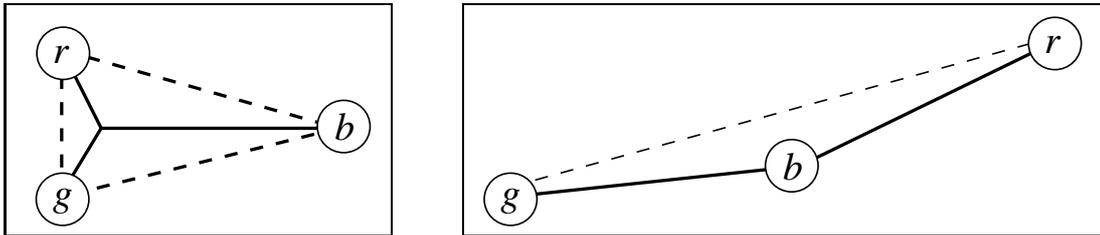


Abbildung 4.12: Die beiden Grenzfälle der  $qqq$ -Konfiguration, in der die  $Y$ - und die  $\Delta$ -Parametrisierung identisch sind. Links:  $r$ - und  $g$ -Quark nähern sich an und man erhält einen Quark-Diquark-Flussschlauch, der mit dem  $q\bar{q}$ -Flussschlauch identisch ist. Rechts: Die drei Quarks bilden eine gestreckt lineare Konfiguration.

Der Unterschied in den beiden Parametrisierungen liegt allein im Vorfaktor des linearen Terms. Für ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge  $R$  ist dieser Unterschied am größten. Die einzelne  $Y$ -Schenkellänge ist  $R/\sqrt{3}$  und die beiden Parametrisierungen nehmen dann die folgende Form an

$$V_Y(R) = 3C_F^{ab} E_0 - \frac{3}{2} C_F^{ab} \frac{\alpha}{R} + \sqrt{3} R \tau \quad , \quad (4.8a)$$

$$V_\Delta(R) = 3C_F^{ab} E_0 - \frac{3}{2} C_F^{ab} \frac{\alpha}{R} + \frac{3}{2} R \tau \quad . \quad (4.8b)$$

Das 3-Quark-Potential wurde von einigen Gruppen auf dem Gitter gemessen [Sommer84, Alexandrou02, Takahashi02]. Allerdings gibt es auch hier noch keine endgültige Aussage, welche der beiden Parametrisierungen das  $qqq$ -Potential besser beschreibt. In den Arbeiten [Alexandrou02] und [Bali01] wurde ein  $\Delta$ -artiges Verhalten gefunden, während die Autoren in [Takahashi02, Bornyakov04] ein  $Y$ -artiges Skalieren des Potentials angeben. In einer weiteren Arbeit [Alexandrou03] dagegen wurde ein Übergang des Potentials von der  $\Delta$ -Parametrisierung für kleine Abstände  $R$  zur  $Y$ -Parametrisierung für große Abstände ab  $R = 1\text{-}2\text{ fm}$  angegeben. Nachdem mit der Arbeit von Cornwall [Cornwall04] die Motivation für das  $\Delta$ -Potential verschwunden ist, stellt sich die Frage, warum in Gitterrechnungen trotzdem eine Übereinstimmung mit diesem Potential gefunden wurde. Wir werden im Folgenden sehen, dass eine Erklärung dafür in der nicht-verschwindenden

Breite der Flussschläuche zu finden ist.

Wir werden hier im Rahmen unseres Modells die *qqq*-Konfiguration in mehreren Schritten analysieren. Zunächst beschränken wir uns auf Quarks, die auf einem gleichseitigen Dreieck angeordnet sind. Für einzelne Quark-Konfigurationen zeigen wir die Felder und Energiedichten. Danach geben wir das Potential an und vergleichen es mit den beiden Parametrisierungen in Gl. (4.8). Unabhängig davon machen wir wieder einen Cornell-Fit an das *qqq*-Potential und geben anschließend das Potential für beliebige Quark-Anordnungen an. Alle 3-Quark-Konfigurationen wurden auf demselben numerischen Gitter bestimmt, um numerische Unsicherheiten auf Grund variierender Gittergeometrien zu verhindern.

### 4.2.1 Felder und Energiedichten

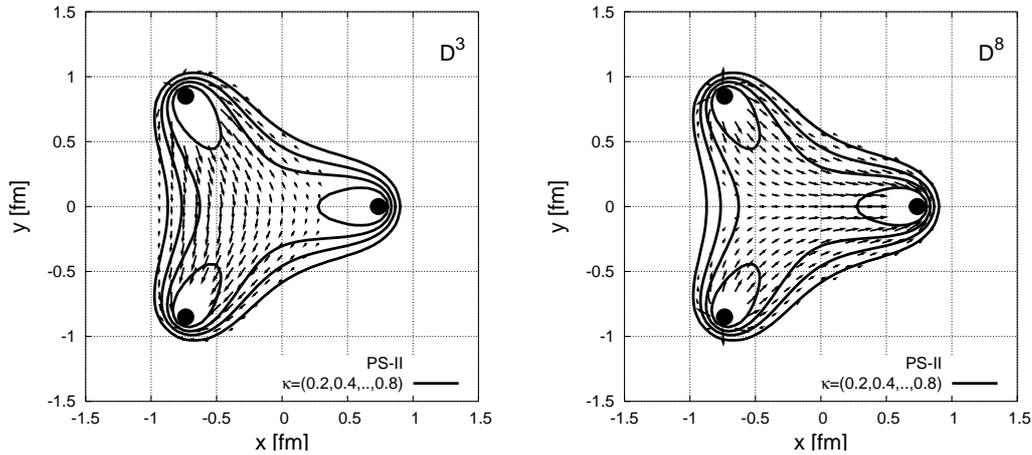


Abbildung 4.13: Die elektrischen Farbfelder des *qqq*-Zustands. Das rote/grüne/blaue Quark befindet sich oben/unten/links. Der  $\vec{D}^3$ -Fluss (links) verbindet nur das rote und das grüne Quark, und der  $\vec{D}^8$ -Fluss (rechts) verbindet all drei Quarks. Die Konturlinien bezeichnen  $\kappa$  bei den angegebenen Werten.

In Abb. 4.13 zeigen wir die elektrischen Felder  $\vec{D}^3$  (links) und  $\vec{D}^8$  (rechts) für  $R = 1.7$  fm zusammen mit den Konturlinien für das Dielektrikum  $\kappa$ . Das rote, das grüne und das blaue Quark sind ganz oben, ganz unten bzw. ganz rechts. Die gewählten Modellparameter entsprechen dem Parametersatz PS-II aus Tab. 3.2. Das Dielektrikum zeigt eine Y-Struktur, die Konturlinien sind von der direkten Verbindungslinie zwischen den Quarks nach innen deformiert. Von außen nach innen nehmen die Konturlinien die Werte  $\kappa = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  an. Da das *b*-Quark keine 3-Komponente der Ladung trägt, verbindet das Feld  $\vec{D}^3$  nur das *r*- und das *b*-Quark. Allerdings ist die Struktur des Feldes gegenüber der *q\bar{q}*-Konfiguration stark verändert (vergl. Abb. 2.9). Das  $\sigma$ -Feld nimmt durch das *b*-Quark auch

weit rechts von der Verbindungsachse  $\overline{r\bar{g}}$  einen Wert  $\sigma < \sigma_{\text{vac}}$  an. Dadurch kann der elektrische Fluss  $\vec{D}^3$  weiter nach rechts ausweichen, wird also in Richtung des Zentrums verschoben. Das Feld  $\vec{D}^8$  entspringt symmetrisch dem  $r$ - und dem  $q$ -Quark, und läuft in das  $b$ -Quark hinein. Auch hier wird der maximale Fluss in Richtung des Zentrums verschoben.

Die elektrischen Felder sind natürlich von der expliziten Wahl der Farben abhängig. Die Symmetrie der Quark-Anordnung erfordert aber dieselbe Symmetrie in den beobachtbaren Größen wie der Energiedichte in der durch die Quarks aufgespannten Ebenen. Die Energiedichte zeigen wir in Abb. 4.14. Dabei haben

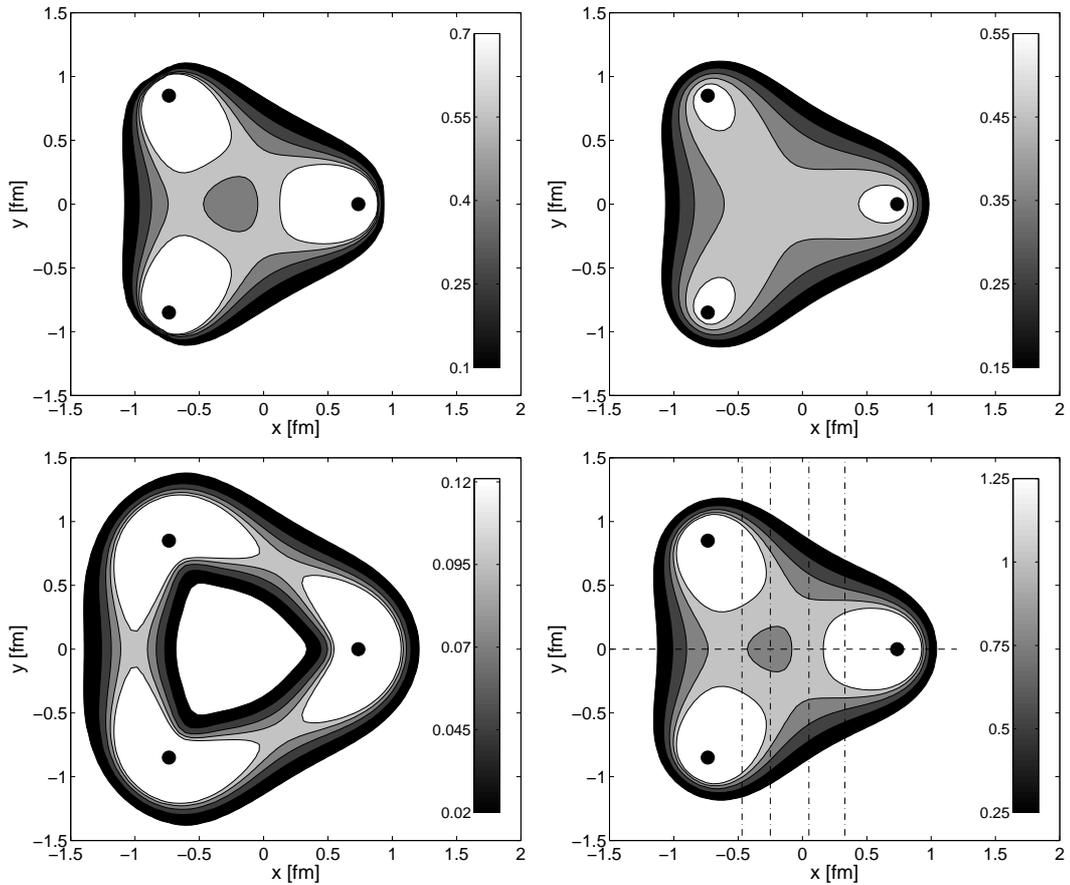


Abbildung 4.14: Die Energiedichte der  $qqq$ -Konfiguration. Die schwarzen Punkte sind die Positionen der Quarks. Die Coulomb-Spitzen bei den Teilchen haben wir ausgelassen (weiße Freiflächen). Oben links:  $\epsilon_{\text{el}}$ , oben rechts:  $\epsilon_{\text{vol}}$ , unten links:  $\epsilon_{\text{sur}}$ , unten rechts:  $\epsilon_{\text{tot}}$ . Die durchgezogenen Linien entsprechen den Konturlinien mit den angegebenen Werten auf der jeweiligen Skala. Die gestrichelte und die strichpunktierten Linien deuten die Lage der Schnitte durch diese Konfiguration an, die wir in den folgenden Abbildungen zeigen.

wir die Energiedichte in die verschiedenen Energieanteile zerlegt. Oben links zei-

gen wir die elektrische Energie, oben rechts die Volumenenergie, unten links die Oberflächenenergie und unten rechts die Gesamtenergie. Die Quark-Verteilung ist dieselbe wie in Abb. 4.13. Die Energiespitzen, verursacht durch die starken Coulomb-Felder der Teilchen, haben wir ausgelassen, damit die Flussschlauch-Struktur besser zu erkennen ist. Man sieht deutlich, dass die Energiedichte dieselbe drei-zählige räumliche Symmetrie aufweist wie die Quark-Verteilung.

Man erkennt verschiedene Geometrien in den verschiedenen Energieanteilen. Die elektrische Energie hat im Zentrum der Anordnung ein relatives Minimum. Der maximale elektrische Fluss geht also nicht direkt durch den Fermat'schen Punkt, sondern daran vorbei. Die Energiedichte zeigt dadurch eher eine, wenn auch nach innen verbogene,  $\Delta$ -artige Struktur als eine Y-Geometrie.

Ganz anders dagegen die Volumen-Energiedichte. Sie zeigt die gleiche Y-Form wie schon das Dielektrikum in Abb. 4.13. Die Oberflächenenergie ist wieder nur ungleich Null an den Flanken des Bags. Da die Flussschläuche eine charakteristische Breite haben, folgt  $\varepsilon_{\text{sur}}$  nicht dem Y-Verlauf der Volumenenergie, sondern ist verschmiert zu einem klaren  $\Delta$ . Allerdings ist der absolute Beitrag zur gesamten Energiedichte klein im Vergleich zu  $\varepsilon_{\text{el}}$  und  $\varepsilon_{\text{vol}}$ .

Die gesamte Energiedichte zeigt somit eine Überlagerung des Y-artigen Plateaus der Volumenenergie und der  $\Delta$ -artigen Verteilung der elektrischen Energie. Es bleibt auch hier ein lokales Minimum beim Fermat'schen Punkt.

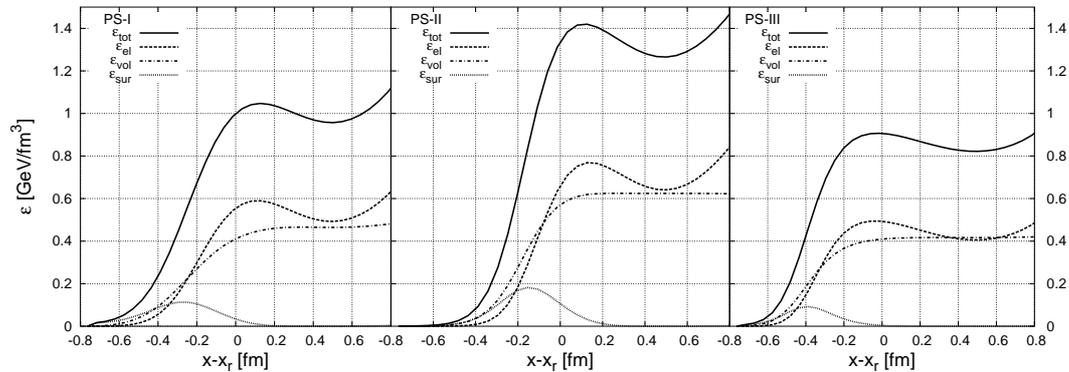


Abbildung 4.15: Schnitt durch die *qqq*-Konfiguration entlang der *x*-Achse.

Für einen quantitativen Einblick zeigen wir in den folgenden Abbildungen Schnitte in *x*- und in *y*-Richtung. In Abb. 4.15 zeigen wir für dieselbe Konfiguration wie zuvor die verschiedenen Energiedichten für die drei Parametersätze. Dabei haben wir die Skala der *x*-Achse so verschoben, dass die Verbindungsachse  $\overline{r\bar{g}}$  zwischen *r*- und *g*-Quark bei 0 fm liegt. Das *b*-Quark liegt jeweils rechts außerhalb des gezeigten Bereichs.

Das relative Maximum der Gesamtenergiedichte ist von dieser Verbindungsachse nach rechts, also in das Zentrum verschoben. Nur bei PS-III liegt das Maximum der Energieverteilung noch genau auf der Verbindungsachse. Das relative

Minimum ist allein durch die elektrische Energie (gestrichelte Linie) verursacht. Die Volumenenergie (strich-punktierte Linie) steigt für  $x - x_r > 0$  fm schnell auf den maximalen Wert an. Die Oberflächenenergie hat in allen Parametersätzen das Maximum links der Verbindungsachse.

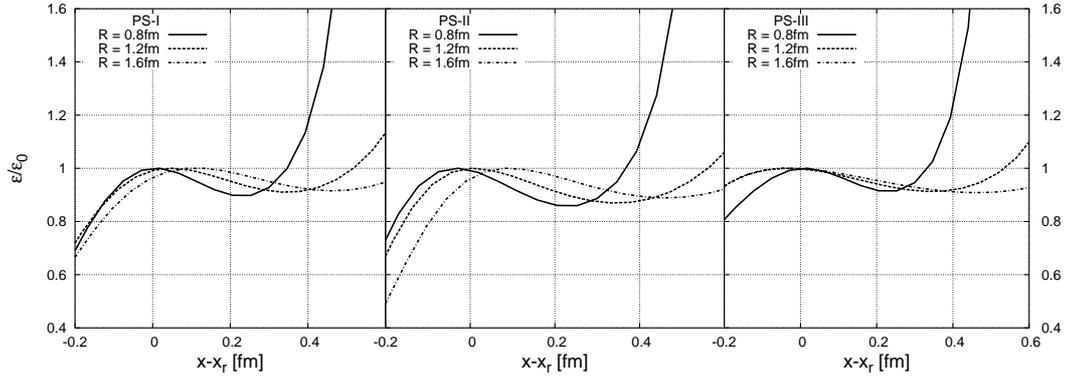


Abbildung 4.16: Energiedichte für verschiedene  $qq$ -Abstände  $R$  entlang eines Schnitts durch die  $qqq$ -Konfiguration entlang der  $x$ -Achse. Der schnelle Anstieg der Energiedichte für große Werte von  $x - x_r$  liegt am Coulombfeld des rechten Quark (des  $b$ -Quarks).

In Abb. 4.16 zeigen wir für denselben Schnitt die gesamte Energiedichte für drei verschiedene  $qq$ -Abstände  $R$ . Hier lassen sich bei den drei Parametersätzen verschiedene Tendenzen beobachten. Bei PS-I fängt das Verschieben der Energie in Richtung des Zentrums schon für kleine Abstände  $R = 0.8$  fm an. Bei PS-II wird das Maximum der Energiedichte und damit der Flussschlauch für Abstände  $R \leq 1.2$  fm zuerst nach außen gedrückt und knickt erst dann nach innen ab. Bei PS-III bleibt die Lage des Flussschlauches relativ beständig auf der Verbindungsachse  $\overline{r\bar{q}}$ .

In Abb. 4.17 zeigen wir für die Konfiguration aus Abb. 4.14 mit  $R = 1.7$  fm Schnitte in  $y$ -Richtung an verschiedenen Positionen  $x$ . Für Schnitte relativ nahe am rechten  $b$ -Quark ( $x = 0.38$  fm, durchgezogene Linie) hat das Profil des Flussschlauches nahezu die Form des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches, das wir zum Vergleich mit eingezeichnet haben (Dreiecke). Für Schnitte näher in Richtung des Fermat'schen Punktes (gestrichelte Linie) wird das Profil breiter im Vergleich zum  $q\bar{q}$ -Flussschlauch und spaltet sich dann deutlich in 2 Flussschläuche auf (strich-punktierte und gepunktete Linien). Die strich-punktierte Linie entspricht einem Schnitt genau durch den Fermat'schen Punkt. Bis auf die charakteristische Breite der Flussschläuche finden wir keine qualitativen Unterschiede für die Parametersätze PS-I bis PS-III.

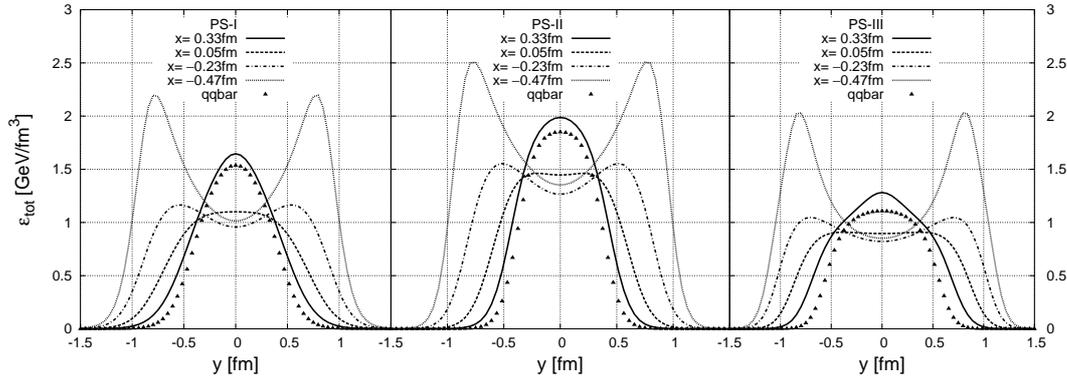


Abbildung 4.17: Profil der  $qqq$ -Energiedichte entlang der in Abb. 4.14 (unten, rechts) angedeuteten Schnitte. Die durchgezogene Linie entspricht einem Schnitt durch einen der drei Y-Schenkel zwischen Fermat-Punkt und Quark. Das Profil gleicht in diesem Fall dem  $qq\bar{q}$ -Profil (Dreiecke, s. Abb. 4.4).

### 4.2.2 Das $qqq$ -Potential

Nachdem wir die Struktur der  $qqq$ -Felder gezeigt haben, untersuchen wir in diesem Abschnitt das Skalieren der Gesamtenergie für verschiedene Quarkabstände. Zunächst konzentrieren wir uns wieder auf Konfigurationen, in denen die drei Quarks auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sitzen. Wie schon zuvor gesagt, ist hier der Unterschied zwischen der Y- und der  $\Delta$ -Parametrisierung des  $qqq$ -Potentials am größten und ein mögliches Skalieren des Potentials  $V_{qqq} = E_{tot}^{qqq}(R)$  mit der einen oder der anderen Vorhersage lässt sich hier am besten beobachten.

Das Potential zeigen wir in Abb. 4.18 (Quadrate), zusammen mit den Parametrisierungen  $V_Y$  (gestrichelte Linie) und  $V_\Delta$  (durchgezogenen Linie) aus Gl. (4.8). Wir weisen noch einmal darauf hin, dass in diesem Fall die Parameter  $E_0$ ,  $\alpha$  und  $\tau$  nicht neu adjustiert wurden, sondern direkt aus dem Cornell-Fit an das  $qq\bar{q}$ -Potential übernommen wurden (s. Tab. 4.1). Das Potential folgt augenscheinlich einem linearen Verlauf für  $R \geq 0.5$  fm. Die absoluten Werte der CDM-Ergebnisse stimmen in dem gezeigten Bereich  $R \leq 2$  fm bis auf sehr kleine Abweichungen mit der  $\Delta$ -Parametrisierung überein. Dieses wurde auch in SU(3)-Gitterrechnungen beobachtet [Bali01, Alexandrou02].

Die Gesamtenergie folgt in guter Näherung also der  $\Delta$ -Parametrisierung. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir festgestellt, dass die verschiedenen Energieanteile verschiedene geometrische Strukturen aufweisen, nämlich  $\Delta$ -förmige bei der elektrischen Energie und der Oberflächenenergie und Y-förmige in der Volumenenergie. Um dieses auch auf der Ebene des Potentials zu analysieren,

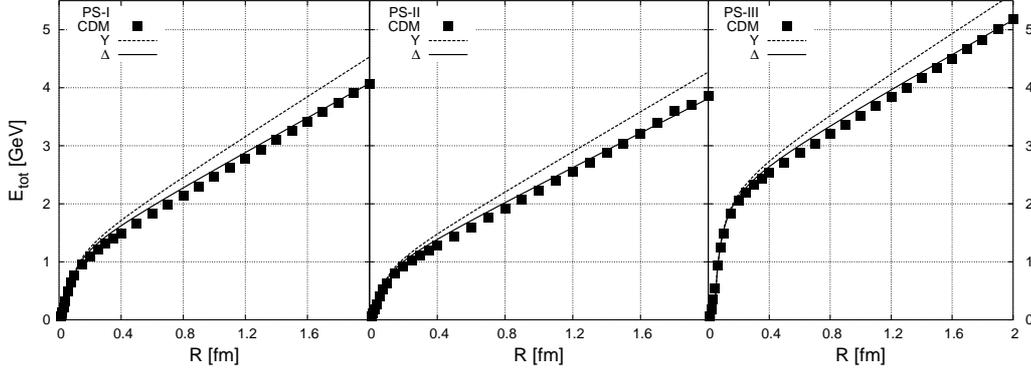


Abbildung 4.18: Das  $qqq$ -Potential im CDM (Quadrate) im Vergleich mit der  $\Delta$ - und der  $Y$ -Form der Cornell-Parametrisierung.

machen wir hier wieder einen Cornell-Fit mit dem Ansatz

$$V_{qqq}(R) = 3C_F^{ab} E_0^{qqq} - \frac{3}{2} C_F^{ab} \frac{\alpha^{qqq}}{R} + \tau_{qqq} R \quad . \quad (4.9)$$

Dieses Verfahren wurde auch in der  $SU(3)$ -Gitteranalyse in [Takahashi02] angewendet. Auch hier zerlegen wir die Energie wieder in elektrische Energie sowie Volumen- und Oberflächenenergie und bestimmen für jeden Energieanteil die Parameter  $E_0^{qqq}$ ,  $\alpha^{qqq}$  und  $\tau_{qqq}$ . Da sich die beiden Parametrisierungen für das  $qqq$ -Potential  $V_Y$  und  $V_\Delta$  nur in der  $qqq$ -Stringspannung unterscheiden, geben wir nur das Ergebnis des Fits für  $\tau_{qqq}$  in Tab. 4.2 an. Außerdem definieren wir noch die Abweichung

$$\delta\tau = \frac{\tau_{qqq} - \tau_\Delta}{\tau_Y - \tau_\Delta} \quad (4.10)$$

von den zu testenden Stringspannungen  $\tau_Y = \sqrt{3}\tau_{q\bar{q}}$  und  $\tau_\Delta = (3/2)\tau_{q\bar{q}}$ . Wenn  $\tau_{qqq}$  perfekt mit dem  $Y$ - ( $\Delta$ -)Bild übereinstimmt ist  $\delta\tau = 1$  ( $0$ ). In der Tat bestätigt sich das zuvor Gesagte. Bei der elektrischen Energie (zweite Reihe) finden sich Werte um Null mit Schwankungen von bis zu 29%. Die größte Abweichung bei PS-III ist sogar negativ, so dass die Stringspannung sogar noch kleiner ist als im  $\Delta$ -Bild vorhergesagt. Dieselbe Tendenz zeigt sich in der Oberflächenenergie (letzte Reihe). Die größte Abweichung findet sich hier bei PS-I mit  $\delta\tau = -0.3$ . Auch hier wächst die Stringspannung also schwächer als im  $\Delta$ -Bild.

Anders verhält sich dagegen die Volumenenergie. Hier finden wir Werte für  $\delta\tau$  um eins mit Schwankungen bis zu 28%. Bei PS-II sieht man sogar ein Überschießen der Erwartung von 11%, d.h. dass die Stringspannung größer ist als im  $Y$ -Bild vorhergesagt. Die Gesamtenergie zeigt sich wieder als Überlagerung dieser beiden idealisierten Szenarien. Die Abweichungen  $\delta\tau$  sind hier systematisch größer als bei der elektrischen Energie und kleiner als bei der Volumenenergie. Allerdings sind die Abweichungen auch systematisch kleiner als  $\delta\tau = 0.5$ . Nach dieser

	PS-I	PS-II	PS-III
$\tau_{qqq} [\text{MeV}/\text{fm}]$	1544	1568	1517
$\delta\tau$	0.33	0.41	0.21
$\tau_{qqq}^{\text{el}} [\text{MeV}/\text{fm}]$	616	588	607
$\delta\tau_{\text{el}}$	0.11	0.05	-0.29
$\tau_{qqq}^{\text{vol}} [\text{MeV}/\text{fm}]$	650	670	725
$\delta\tau_{\text{vol}}$	0.88	1.11	0.72
$\tau_{qqq}^{\text{sur}} [\text{MeV}/\text{fm}]$	278	311	184
$\delta\tau_{\text{sur}}$	-0.3	-0.016	0.01

Tabelle 4.2: Die  $qqq$ -Stringspannung des baryonischen Cornell-Potentials zusammen mit der Abweichung  $\delta\tau$  von den Vorhersagen im  $Y$ -Bild ( $\delta\tau = 1$ ) bzw. im  $\Delta$ -Bild ( $\delta\tau = 0$ ).

Analyse finden wir demnach eher ein  $\Delta$ -artiges Verhalten des  $qqq$ -Potentials. In [Takahashi02] dagegen favorisieren die Fits an das  $qqq$ -Potential eher das  $Y$ -Bild.

Die vorangegangene Analyse des Potentials bezog sich primär auf die Absolutwerte des Potentials. Der absolute Wert des Potentials ist allerdings erheblich durch die große (konstante) Selbstwechselwirkung  $E_0$  der Quarks bestimmt. Für große Abstände  $R$  dagegen ist das Potential von der 3-Quark-Stringspannung  $\tau_{qqq}$  dominiert, also von der Steigung des Potentials. Erst die verschiedenen effektiven  $qqq$ -Stringspannungen  $\tau_Y = \sqrt{3}\tau$  bzw.  $\tau_\Delta = (3/2)\tau$  unterscheiden auch die beiden Parametrisierungen. Um das Verhalten für große  $R$  detaillierter zu studieren, zeigen wir in Abb. 4.19 die Differenz des Potentials sowohl zur  $Y$ -Parametrisierung ( $\Delta V_Y = V_Y - V_{qqq}$ , unten) als auch zur  $\Delta$ -Parametrisierung ( $\Delta V_\Delta = V_\Delta - V_{qqq}$ , oben). Bei einer Übereinstimmung mit einer der beiden Parametrisierungen erwarten wir für die entsprechende Differenz ein lineares Verhalten für große  $R$  mit einer verschwindenden Steigung, ähnlich wie in Abb. 4.9 im  $q\bar{q}$ -Fall. Die gute Übereinstimmung mit  $V_\Delta$  aus Abb. 4.18 wiederholt sich hier nicht. Nur für  $R \approx 0.5 \text{ fm}$  verläuft  $\Delta V_\Delta$  konstant, knickt dann allerdings ab und verläuft für große  $R$  linear mit einer *nicht-verschwindenden* Steigung.

Dies ist anders bei  $\Delta V_Y$ . Die Differenz steigt zunächst an, flacht dann aber für große  $R$  rasch ab. Das völlige Abflachen ist für  $R \leq 2 \text{ fm}$  noch nicht zu sehen, lässt sich aber vermuten. Demnach zeigen die Differenzen in Abb. 4.19, dass es einen Übergang gibt von der  $\Delta$ -Form für kleine Abstände zur asymptotischen  $Y$ -Form für große Abstände. Für die Differenz  $\Delta V_Y$  haben wir einen Ansatz

$$\Delta V_Y = c_1 + c_2 e^{-R/c_3} \quad (4.11)$$

probiert und die Parameter  $c_1$  bis  $c_3$  an der Differenz gefittet. Der Parameter

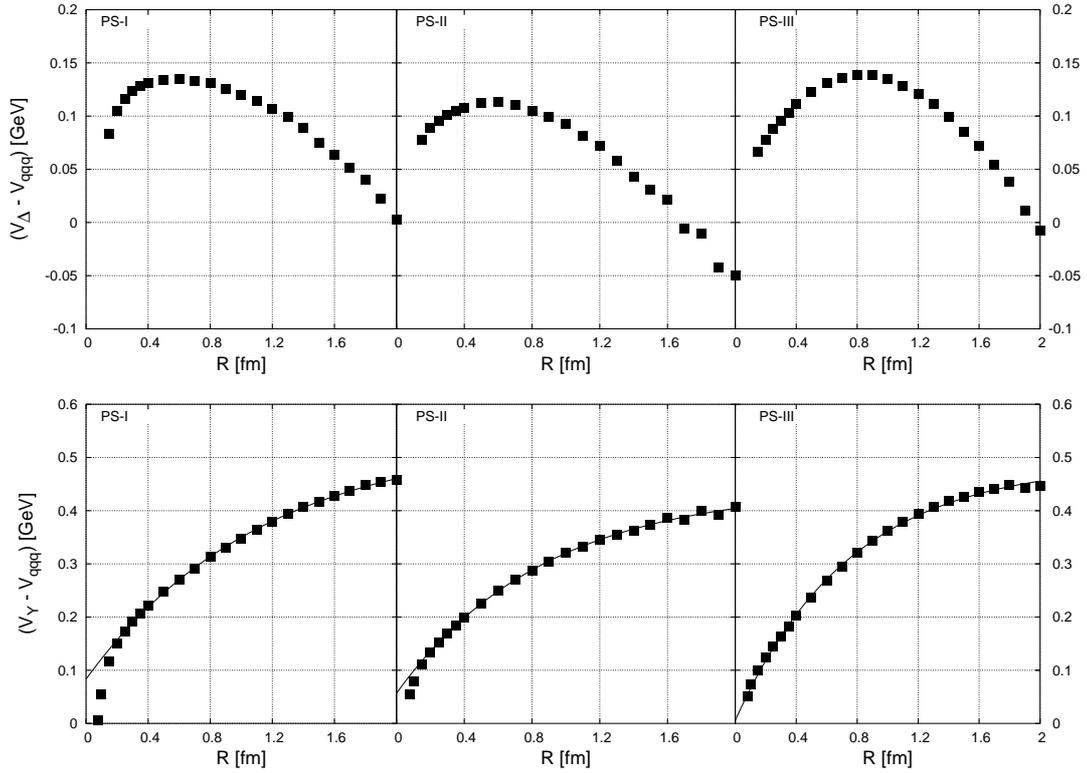


Abbildung 4.19: Abweichung des  $qqq$ -Potentials von der  $\Delta$ -Parametrisierung (oben) und von der  $Y$ -Parametrisierung (unten). Für große  $R$  flacht die Differenz im  $Y$ -Fall ab, und die  $qqq$ -Stringspannung wird besser durch  $\tau_Y$  beschrieben.

$c_3$  gibt hier die Skala an, auf der sich dieser Übergang  $\Delta \rightarrow Y$  vollzieht. Wir erhalten hier Werte von  $c_3 = 1.1$  fm für PS-I,  $c_3 = 0.9$  fm für PS-II und  $c_3 = 0.8$  fm für PS-III. Diese Übergangslängen  $c_3$  sind von derselben Größenordnung wie der Durchmesser des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches mit  $\Delta = (0.7 - 1.0)$  fm. In SU(3)-Gitterrechnungen [Alexandrou03] wurde ein ähnliches Verhalten für das 3-Quark-Potential beobachtet, allerdings mit einer größeren Übergangslänge von  $c_3 = 2$  fm.

Eine etwas andere Analyse wurde von [Bornyakov04] vorgeschlagen. Dort wurde das Baryon-Potential analysiert für beliebige Quark-Konfigurationen, also nicht nur für gleichseitige Dreiecke. Gemäß der Gln. (4.4) und (4.5) skaliert das Potential mit der minimalen Länge  $L_Y$  im  $Y$ -Fall bzw. mit der Dreieckslänge  $L_\Delta$  im  $\Delta$ -Fall. Trägt man demnach das Potential gegen die jeweilige Länge  $L_Y$  bzw.  $L_\Delta$  auf, ergibt sich bei perfekter Übereinstimmung mit einer der beiden Parametrisierungen ein einfacher linearer Zusammenhang und ansonsten streuen die Werte stärker um solch eine Gerade.

Wir haben deshalb für 500 zufällig angeordnete 3-Quark-Anordnungen jeweils die Längen  $L_Y$ ,  $L_\Delta$  und die Gesamtenergie berechnet. Um systematische Störungen auszuschließen, haben wir keine extremen Konfigurationen verwendet, bei

denen entweder einer der drei  $qq$ -Abstände kleiner ist als 0.5 fm, oder bei denen einer der drei Winkel des Quark-Dreiecks größer ist als  $120^\circ$ . Das Ergebnis dieser Rechnung zeigen wir in Abb. 4.20. Zur besseren Übersicht haben wir im  $\Delta$ -Fall (jeweils untere Punktemenge) die Länge  $L_\Delta$  mit dem Faktor  $1/\sqrt{3}$  skaliert und das Potential um 0.5 GeV nach unten verschoben. Das Potential korreliert sehr viel stärker mit der Dreieckslänge  $\Delta$  als mit der  $Y$ -Länge. Eine Länge  $L_Y = 3$  fm entspricht im gleichseitigen Dreieck  $R = \sqrt{3}$  fm  $\approx 1.7$  fm. Diese Beobachtung stützt unsere vorangegangene Aussage, dass zumindest für mittlere Quarkabstände das  $qqq$ -Potential besser durch die  $\Delta$ -Parametrisierung beschrieben wird.

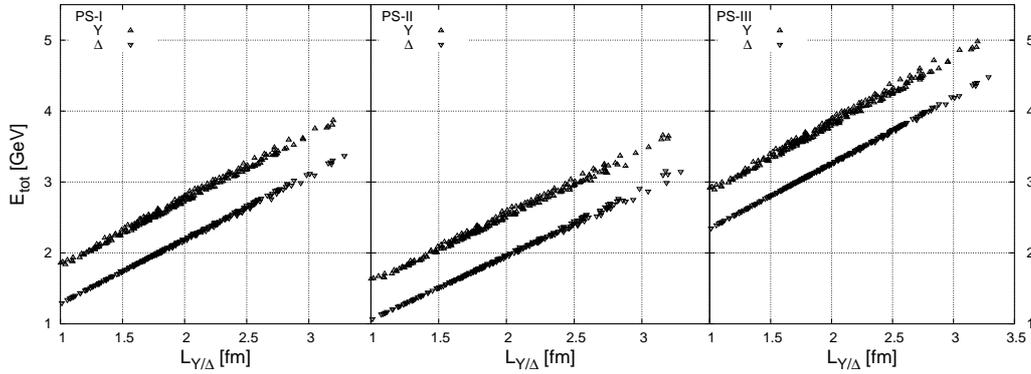


Abbildung 4.20: Das  $qqq$ -Potential für beliebige Dreiecks-Konfigurationen als Funktion der jeweiligen minimalen Stringlänge  $L_Y$  bzw. der  $\Delta$ -Stringlänge  $L_\Delta$ .  $L_\Delta$  ist mit  $1/\sqrt{3}$  skaliert und das entsprechende Potential um -0.5 GeV zur besseren Sichtbarkeit verschoben.

### 4.2.3 Diskussion des $qqq$ -Zustands

Wir haben jetzt das 3-Quark-Potential auf verschiedene Art und Weise untersucht. Das Hauptaugenmerk lag dabei auf der Gestalt der Felder und Energiedichten sowie auf dem 3-Quark-Potential. Ausgehend von der schematischen Beschreibung infinitesimal dünner Strings in Abschnitt 2.5.3 und der Invarianz der  $Y$ -Konfiguration hätte man erwartet, dass die Rechnungen im CDM die  $Y$ -Konfiguration widerspiegeln. Stattdessen beobachten wir in einigen Teilaspekten eine  $\Delta$ -Struktur. Das sind die eher  $\Delta$ -förmige Verteilung der elektrischen Energie in Abb. 4.14, sowie die Tendenz des Potentials, besser durch die  $\Delta$ -Parametrisierung beschrieben zu werden (s. Abbn. 4.18 und 4.20). Es gibt aber auch Hinweise auf die  $Y$ -Struktur, die sich allerdings erst für relativ große Quarkabstände zeigen. In Abb. 4.17 z.B. sieht man, dass für  $R = 1.7$  fm Flussschläuche entstehen, deren Profil dem  $q\bar{q}$ -Profil gleicht und die sich am Fermat'schen Punkt in zwei Flussschläuche aufspalten. Das Potential entwickelt auch erst für sehr große  $R$  die  $Y$ -Stringspannung (s. Abb. 4.19). Dieser sehr späte Übergang zum  $Y$

lässt sich wie folgt erklären: Die elektrischen Felder breiten sich im Vergleich zu einer  $q\bar{q}$ -Konfiguration durch die Existenz des dritten Quarks in einem größeren Bag aus. Dadurch dass der gesamte elektrische Fluss, der von einem Quark ausgeht, wegen des Gauß'schen Gesetzes konstant ist, nimmt die lokale Feldstärke und damit auch die Energiedichte ab. Die Stringspannung, also die Veränderung der Gesamtenergie bei Systemvergrößerung ist daraufhin ebenfalls geringer, was den zunächst  $\Delta$ -artigen Verlauf in Abb. 4.19 erklärt. Erst wenn die paarweisen  $qq$ -Abstände sehr viel größer werden als die charakteristische Stringbreite bilden sich die  $Y$ -artigen Flussschläuche mit dem Fermat'schen Punkt deutlich heraus. Die aus dem Fit (4.11) erhaltenen Werte der Skala für den Übergang  $\Delta \rightarrow Y$  von  $c_3 \approx 1$  fm stimmen darüber hinaus damit überein, dass auch das  $q\bar{q}$ -Profil erst ab einem  $q\bar{q}$ -Abstand von 1 fm seine asymptotische Form erreicht. Es ist aber interessant zu sehen, dass das  $q\bar{q}$ -Potential schon für Quark-Abstände  $R \geq 0.3$  fm vom linearen Term dominiert wird. Wir schlussfolgern daher, dass Quarks in einem typischen Hadron der Größenordnung von 1 fm eher von einem  $\Delta$ -artigen Potential beeinflusst werden.

# Kapitel 5

## Stabilität von Flussschläuchen

Im letzten Kapitel haben wir die Eigenschaften von zwei- und drei-Quark-Systemen im Vakuum untersucht. Für  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$  sind solche Systeme stabil. Die Energie eines einzelnen Quarks ist unendlich groß und es können sich unendlich lange Flussschläuche ausbilden. Für jedes endliche  $\kappa_{\text{vac}} > 0$  ist die Energie eines einzelnen Quarks zwar nicht mehr unendlich groß, aber für realistische Stringlängen von wenigen Fermi ist mit dem in dieser Arbeit verwendeten Wert  $\kappa_{\text{vac}} = 10^{-4}$  die Energie noch sehr groß, und die mesonischen und baryonischen Flussschläuche sind stabil (siehe auch Abschnitt 2.7.2 und Abb. 2.13).

In diesem Kapitel werden wir die Stabilität von  $q\bar{q}$ -Flussschläuchen untersuchen, die einer äußeren Anregung ausgesetzt sind. Wir werden hier zwei verschiedene Arten von Anregungen studieren. Zunächst werden wir die Flussschläuche in einem äußeren farbelektrischen Feld untersuchen und anschließend ihre Reaktion auf die Erzeugung eines zusätzlichen Quark-Antiquark-Paares im Flussschlauch testen. Da der Parametersatz PS-I aus Tab. 3.2 die Struktur der elementaren  $q\bar{q}$ -Flussschläuche am besten reproduziert hat, werden wir hier ausschließlich Rechnungen mit diesem Parametersatz zeigen.

### 5.1 Flussschläuche in äußeren Feldern

Starke farbelektrische Felder können z.B. bei hochenergetischen Schwerionen-Kollisionen auftreten [Kajantie85]. Die Kerne durchdringen sich, bei den einzelnen Nukleon-Nukleon-Reaktionen kommt es durch Gluonaustausch zu farbgeladenen Kernen, und im ersten Moment nach dem Durchdringen hinterlassen die Kerne in der Reaktionszone einen Flussschlauch mit einer transversalen Ausdehnung in der Größenordnung der Kerne selber. Die Erzeugung von geladenen Teilchen-Antiteilchen-Paaren wurde zuerst von Schwinger in [Schwinger51] für homogene elektrische Felder der QED bestimmt. Dieser sog. *Schwinger-Mechanismus* wurde auf farbgeladene  $q\bar{q}$ -Paare in farbelektrischen Feldern der QCD übertragen [Casher79, Kluger92, Lampert00]. Die transversale Ausdehnung des von den

Kernen produzierten Flussschlauches von einigen Fermi ist groß gegenüber dem elementaren  $q\bar{q}$ -Flussschlauch mit einem Halbwertsradius von  $\rho \approx 0.3 - 0.4$  fm. Die (Lorentz-kontrahierten) Kerne wirken dann so wie die Platten eines farbeladenen Plattenkondensators [Lampert00]. Das farbelektrische Feld der Kerne ist somit das äußere Hintergrundfeld, in dem  $q\bar{q}$ -Paare mit den entsprechenden  $q\bar{q}$ -Flussschläuchen entstehen können. Alternativ wurde die Formierung von sog. *Farbseilen* im *Color-Rope-Model* vorgeschlagen [Biro84], die durch den Überlapp von elementaren Strings entstehen.

In [Magas01] wurden für den Anfangszustand einer Schwerionen-Kollision sehr starke farbelektrische Felder bis zu  $\vec{E} = (5 - 12) \text{ GeV/fm}$  angenommen. Nach [Soff03, Soff04] verändert sich das Verhältnis der gemessenen Baryon- und Antibaryonen-Multiplizitäten mit zunehmendem Hintergrundfeld. Dort wurde für Gold-Gold Stöße bei RHIC-Energien, d.h. bei Nukleon-Nukleon-Schwerpunktsenergien  $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ , eine effektive Stringsannung des homogenen Hintergrundfeldes von bis zu  $\tau_{AA} = 3 \text{ GeV/fm}$  angenommen. Bei einem Goldkern ergibt sich der Radius mit  $A = 197$  und  $r_0 = 1.0 \text{ fm}$  zu  $r_{Au} = A^{1/3} r_0 = 5.8 \text{ fm}$ . Mit der effektiven Kern-Kern-Stringsannung entspricht das einer Energiedichte des äußeren Feldes von  $\varepsilon_{\text{ext}} = \tau_{AA}/(\pi r_{Au}^2) = 28 \text{ MeV/fm}^3$ .

Die quellenfreien ( $\rho^a = 0$ ) CDM-Bewegungsgleichungen (2.28) lassen eine einfache Lösung für solch ein Hintergrundfeld zu:

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi^a \right) = 0 \quad , \quad (5.1a)$$

$$\Delta \sigma - U'(\sigma) = -\frac{1}{2} \frac{\kappa'(\sigma)}{\kappa^2(\sigma)} \vec{D}^a \cdot \vec{D}^a \quad . \quad (5.1b)$$

Diese ist durch ein räumlich konstantes Confinement-Feld  $\sigma(\vec{r}) = \text{const}$  und ein ebenso räumlich konstantes elektrisches Feld  $\vec{E}^a(\vec{r}) = \text{const}$  gegeben, d.h.

$$\sigma(\vec{r}) = \text{const} \rightarrow \kappa(\vec{r}) = \text{const} \quad , \quad (5.2a)$$

$$\vec{E}^a(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi^a(\vec{r}) = \text{const} \quad , \quad (5.2b)$$

$$\rightarrow \vec{D}^a(\vec{r}) = \kappa \vec{E}^a = \text{const} \quad . \quad (5.2c)$$

Die Laplace-Gleichung (5.1a) ist damit trivial gelöst und Gl. (5.1b) reduziert sich auf die algebraische Gleichung

$$U'(\sigma) - \frac{1}{2} \frac{\kappa'(\sigma)}{\kappa^2(\sigma)} \vec{D}^a \cdot \vec{D}^a = 0 \quad . \quad (5.3)$$

Diese Gleichung ist die Extremalbedingung zur Minimierung der Gesamtenergie bei räumlich konstanten Feldern bzgl.  $\sigma$ , d.h. des effektiven Potentials  $\varepsilon_{\text{eff}}$

$$\varepsilon_{\text{eff}} = U(\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\vec{D}^a \cdot \vec{D}^a}{\kappa(\sigma)} \quad , \quad (5.4a)$$

$$\frac{d\varepsilon_{\text{eff}}}{d\sigma} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Gl. (5.3)} \quad . \quad (5.4b)$$

Dieses effektive Potential haben wir für verschiedene äußere Feldstärken  $D_{\text{ext}}^2 = \vec{D}^a \cdot \vec{D}^a$  in Abb. 5.1 dargestellt. Für das skalare Potential  $U(\sigma)$  haben wir hier die Parameter aus PS-I aus Tab. 3.2 gewählt. Für  $D_{\text{ext}}^2 = 0$  reduziert sich das effektive Potential auf  $U(\sigma)$  (durchgezogene Linie). Für  $D_{\text{ext}}^2 > 0$  entwickelt sich auf Grund des Terms  $1/\kappa(\sigma)$  in  $\varepsilon_{\text{eff}}$  eine große Barriere (für  $\kappa_{\text{vac}} \rightarrow 0$  eine Divergenz) für  $\sigma \rightarrow \sigma_{\text{vac}}$ . Gleichzeitig wandert das absolute Minimum des effektiven Potentials von  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$  zu kleineren Werten  $\sigma < \sigma_{\text{vac}}$  (gestrichelte Linie). Bei einer kritischen äußeren Feldstärke sind dieses Minimum und das bei  $\sigma = 0$  entartet (strichpunktierte Linie) und für jedes größere äußere Feld ist das absolute Minimum bei  $\sigma = 0$ .

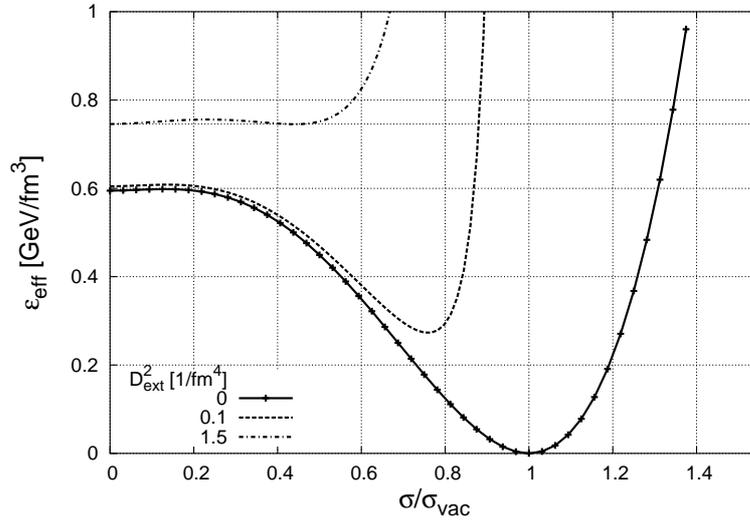


Abbildung 5.1: Das effektive Potential für verschiedene äußere Felder. Für verschwindende äußere Anregung reduziert sich  $\varepsilon$  auf  $U(\sigma)$  (durchgezogene Linie). Für Anregungen  $D_{\text{ext}} > 0$  verschiebt sich das Minimum zu Werten  $\sigma < \sigma_{\text{vac}}$ . Ab einer kritischen Anregung ist das absolute Minimum bei  $\sigma = 0$ .

Die Lage des absoluten Minimums  $\sigma_{\text{min}}$  sowie den entsprechenden Wert des Dielektrikums  $\kappa_{\text{min}}$  und den dazugehörigen minimalen Wert des effektiven Potentials haben wir in Abb. 5.2 dargestellt. Bei  $D_{\text{ext}}^2 = D_c^2 \approx 1.5/\text{fm}^4$  springt  $\sigma_{\text{min}}$  (durchgezogene Linie) auf  $\sigma_{\text{min}} = 0$  und  $\kappa_{\text{min}}$  auf eins (gestrichelte Linie). Das effektive Potential verläuft kontinuierlich bei  $D_c^2$  hat dort aber einen sehr kleinen Knick.

In der Situation konstanter Felder reduziert sich die Lösung der CDM-Gleichungen also auf ein Extremalproblem. Das elektrische Feld ist nicht mehr die

Folge einer Farbladung, sondern wird von außen vorgegeben.<sup>1</sup> Das Confinement-Feld nimmt dann nur noch die Rolle eines Ordnungsparameters an, der die Confinement-Phase des Systems charakterisiert. In der perturbativen Deconfinement-Phase ist er  $\sigma_{\min} = 0$  und  $\sigma_{\min} > 0$  in der nicht-perturbativen Confinement-Phase. Der Sprung des Ordnungsparameters beim kritischen äußeren Feld  $D_c^2$  deutet auf einen Phasenübergang erster Ordnung hin. Dasselbe Verhalten findet sich auch mit den anderen Parametersätzen PS-II und PS-III des skalaren Potentials. Mit der alternativen Form der dielektrischen Funktion in Gl. (3.3) [Martens03] finden sich allerdings auch Phasenübergänge zweiter Ordnung, d.h. der Ordnungsparameter  $\sigma_{\min}$  selbst verschwindet kontinuierlich bei  $D_c^2$ . Wir weisen hier darauf hin, dass die kritische Feldstärke  $D_c$  und die damit verbundene äußere Energie sehr viel kleiner sind als die Werte, die typischerweise im Inneren eines  $q\bar{q}$ -Flussschlauches auftreten (vgl. Abbn. 4.1 und 4.3).

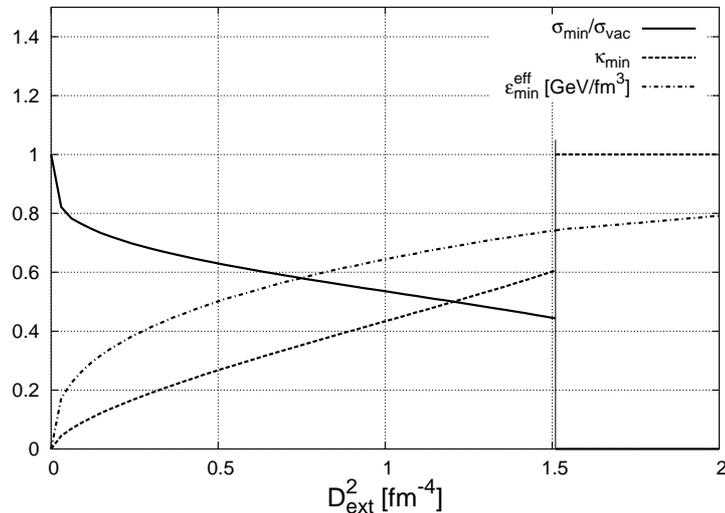


Abbildung 5.2: Erwartungswert des skalaren Feldes (durchgezogene Linie) und des Dielektrikums (gestrichelte Linie) sowie der entsprechende Wert des effektiven Potentials (strich-punktierte Linie) als Funktion des externen elektrischen Feldes  $D_{\text{ext}}$ .

Wir untersuchen im Folgenden  $q\bar{q}$ -Flussschläuchen in solch einem äußeren Medium. Da die CDM-Gleichungen nicht-linear sind, gilt nicht das Superpositions-Prinzip, und man kann nicht einfach die Lösungen der  $q\bar{q}$ -Konfiguration und des homogenen, konstanten Mediums addieren, um eine vollständige Lösung zu bekommen. Stattdessen integrieren wir das äußere Feld über die Randbedingungen in unsere numerischen Rechnungen (vgl. Anhang A.1). Wir geben eine äußere Feldstärke  $\vec{D}_{\text{ext}}^a$  vor, bestimmen mit Gl. (5.3) das minimierende  $\sigma_{\min}$  und

<sup>1</sup>Z.B. durch die farbelektrischen Felder im ersten Moment einer Kern-Kern-Kollision.

damit auch  $\kappa_{\min}$ . Mit diesen Werten bestimmt sich das elektrische Feld mit  $\vec{E}_{\text{ext}}^a = \vec{D}_{\text{ext}}^a / \kappa_{\min}$ .  $\sigma_{\min}$  und  $\vec{E}_{\text{ext}}^a$  bestimmen die Randbedingungen am Rand des numerischen Volumens für das elektrische Potential  $\phi^a$  und das Confinement-Feld  $\sigma$ .

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_{\min} \quad (5.5a)$$

$$\frac{\partial \phi^a(\vec{r})}{\partial n} = -\vec{E}_{\text{ext}}^a \quad , \quad (5.5b)$$

für  $\vec{r} \in \partial\Omega$ . Hier ist  $\partial\Omega$  der Rand des numerischen Volumens und  $\partial/\partial n$  die Normalableitung auf  $\partial\Omega$ . Wir erreichen damit, dass am Rand des numerischen Volumens die äußeren Felder vorliegen. Im Allgemeinen wird das äußere Feld eine 3- und eine 8-Komponente besitzen. Wir wählen aus Gründen der Einfachheit eine Eichung, in der das äußere Feld nur eine 8-Komponente besitzt. Dieses ist zumindest eine mögliche Wahl, und das äußere Feld kann man sich durch blau/antiblaue geladene Kerne erzeugt vorstellen. Auf Grund der Invarianz unter diskreten Farbroationen in Gl. (2.41a) ist dieses äquivalent zu möglichen anderen Farbkombinationen, in denen dann auch eine 3-Komponente des elektrischen Feldes vorkommt. Das äußere Feld  $\vec{D}_{\text{ext}}^8$  orientieren wir entlang der  $x$ -Achse, d.h.  $\vec{D}_{\text{ext}}^8 = D_{\text{ext}}^8 \vec{e}_x$ .

Bei Anwesenheit eines äußeren Feldes ist die spezielle Farbwahl des zu untersuchenden  $q\bar{q}$ -Flussschlauches sensitiv auf das äußere Feld. Ein  $b\bar{b}$ -String mit nur einer 8-Komponente der Ladung wird anders auf das äußere  $D_{\text{ext}}^8$ -Feld reagieren, als ein  $r\bar{r}$ -String mit beiden Ladungskomponenten. Bei unserer Wahl des äußeren Feldes  $\vec{D}_{\text{ext}}^8$  verhält sich ein  $g\bar{g}$ -String genauso wie ein  $r\bar{r}$ -String. Diese beiden Farbkonfigurationen unterscheiden sich nur durch die Transformation  $V_6$  der diskreten Farbroationen aus Gl. (2.40). Dadurch unterscheiden sich zwar die elektrischen Felder (in diesem Fall nur das 3-Feld), die Energiedichte ist allerdings invariant unter dieser Transformation. Außerdem sind die Felder des  $q\bar{q}$ -Strings abhängig von der relativen Orientierung des äußeren Feldes. Wir wählen im Folgenden nur die beiden extremen Orientierungen, dass das  $q\bar{q}$ -interne Feld  $D^8$  in dieselbe Richtung zeigt wie das äußere Feld (parallele Ausrichtung), bzw. genau entgegengesetzt (antiparallele Ausrichtung).

Die Stärke des äußeren Feldes  $D_{\text{ext}}^2$  variieren wir in einem sehr viel kleineren Bereich als in Abb. 5.2. D.h. die äußeren Felder sind so klein, dass das System noch klar in der Confinement-Phase sind. In Abb. 5.3 zeigen wir den Bereich von  $D_{\text{ext}}^2 < 0.1 \text{ fm}^{-4}$ , innerhalb dem wir die äußere Feldstärke variieren. Gleichzeitig sieht man dort die äquivalente äußere Anregungsenergie  $\varepsilon_{\text{ext}}$  (durchgezogene Linie), aufgespalten in den elektrischen Anteil  $\varepsilon_{\text{ext}}^{\text{el}}$  (gestrichelte Linie) und den Volumenanteil  $U_{\text{ext}}$  (strich-punktierte Linie). Die Anregungsenergie variiert hier von 0 auf  $270 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ .

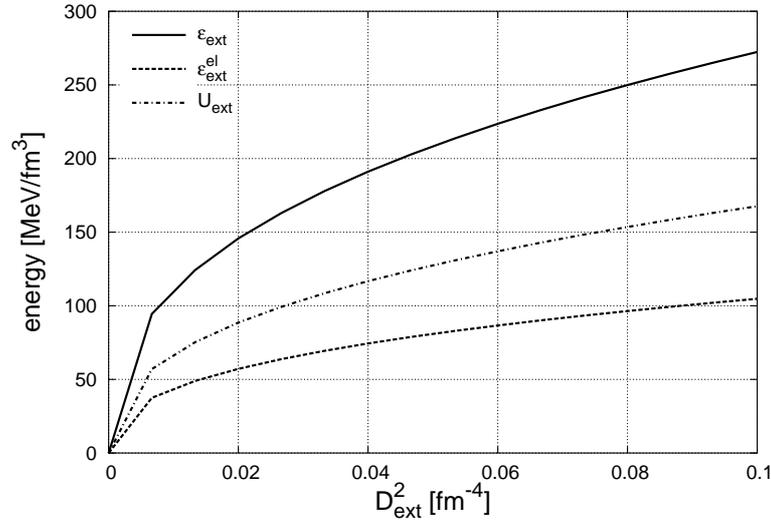


Abbildung 5.3: Die Hintergrundenergie aufgeteilt in den elektrischen und den Volumenanteil. Der Knick bei  $D_{\text{ext}}^2 \lesssim 0.01 \text{ fm}^4$  liegt nur an der endlichen Zahl der Stützstellen und hat keinen physikalischen Inhalt.

### 5.1.1 Felder und Energiedichten

Zunächst zeigen wir wieder in den Abbildungen 5.4 bis 5.8 die Felder und die dazugehörigen Energiedichten. Wir beginnen mit einem  $b\bar{b}$ -Flussschlauch der Länge  $R = 1 \text{ fm}$  in Abb. 5.4, in der wir das elektrische Feld  $\vec{D}^8$  zeigen. Hier haben wir jeweils das äußere Feld  $\vec{D}_{\text{ext}}^8$  subtrahiert. Außerdem zeigen wir eine Konturlinie des Dielektrikums für  $\kappa = 0.2$ . Das  $b$  ( $\bar{b}$ )-Quark ist bei  $x = 0.5$  ( $-0.5$ ) fm und das stringeigene 8-Feld zeigt in positive  $x$ -Richtung. In der linken Hälfte der Abbildung ist das äußere Feld parallel und in der rechten antiparallel zum  $b\bar{b}$ -String gerichtet. In der parallelen Konfiguration wirken auf die Quarks demnach Kräfte, die den String verkürzen (oder aber auch drehen), und in der antiparallelen solche, die den String auseinanderziehen würden.

Von oben nach unten wird die Anregungsenergie vergrößert und die Strings in den beiden Orientierungen verändern sich auf unterschiedliche Art und Weise. In der parallelen Anordnung verbreitert sich der String und in der antiparallelen schnürt er sich allmählich ein. Hier wird die Wirkungsweise des äußeren Feldes deutlich. Das äußere Feld verschiebt das Confinement-Feld zu Werten  $\sigma_{\text{min}} < \sigma_{\text{vac}}$  und das angeregte Vakuum hat dadurch einen größeren dielektrischen Wert  $\kappa_{\text{min}} > \kappa_{\text{vac}}$  als das ungestörte Vakuum. Das Vakuum verliert dadurch seine nahezu perfekte dielektrische Eigenschaft und das elektrische Feld ist nicht mehr so stark nach außen abgeschirmt. In der parallelen Konfiguration kommt es so zur Stringverbreiterung. Bei der antiparallelen Konfiguration nimmt das Feld  $\vec{D}^8$  im  $q\bar{q}$ -String allmählich ab und im Gegenzug dazu an den Stringenden zu. Dadurch wird der String nahezu aufgelöst und das Quark und das Antiquark

bilden quasi einen String zu den äußeren jeweils entgegengesetzt geladenen Kondensatorplatten aus. Der  $b\bar{b}$ -Flussschlauch ist nicht mehr in einem gebundenen Zustand.

In den Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen wir dieselben Situationen für einen  $r\bar{r}$ -String. In der parallelen Konfiguration (Abb. 5.5) verhalten sich die Felder  $\vec{D}^3$  (links) und  $\vec{D}^8$  (rechts) qualitativ wie im  $b\bar{b}$ -Fall. Das 8-Feld wird von außen verstärkt, der Wert des Dielektrikum im Vakuum steigt, und der String breitet sich in transversaler Richtung aus. Im antiparallelen Fall (Abb. 5.6) dagegen kommt es im Gegensatz zum  $b\bar{b}$ -String nicht zum Einschnüren des Strings. Das 3-Feld (links) wird nur indirekt über den vergrößerten Bag beeinflusst, ändert aber nicht seine qualitative Ausrichtung. Das 3-Feld hat weiterhin einen bindenden Charakter. Das Feld  $\vec{D}^8$  (rechts) dagegen ändert im Inneren des Strings seine Richtung. Bei fehlender äußerer Anregung zeigt das 8-Feld vom Quark (rechts) zum Antiquark (links). Bei einer Anregungsenergie von  $\varepsilon_{\text{ext}} = 146 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  verschwindet das 8-Feld im Inneren des Strings fast vollständig und für größere Anregungsenergien kehrt sich die Richtung des 8-Feldes um. Beim  $r\bar{r}$ -String konkurrieren also die Felder  $\vec{D}^3$  und  $\vec{D}^8$  um einen bindenden Zustand.

Wir halten hier schon einmal fest, dass ein äußeres, parallel gerichtetes Feld den Flussschlauch unabhängig von der Farbkomponente des Strings verbreitert. Ein antiparalleles Feld dagegen reduziert die Feldstärke im Inneren des Strings und führt damit je nach der Wahl der Stringfarbe zu einem vollständigen Zerreißen des Strings, bzw. nur zur teilweisen Auslöschung des Feldes im Inneren des Flussschlauches.

parallel

antiparallel

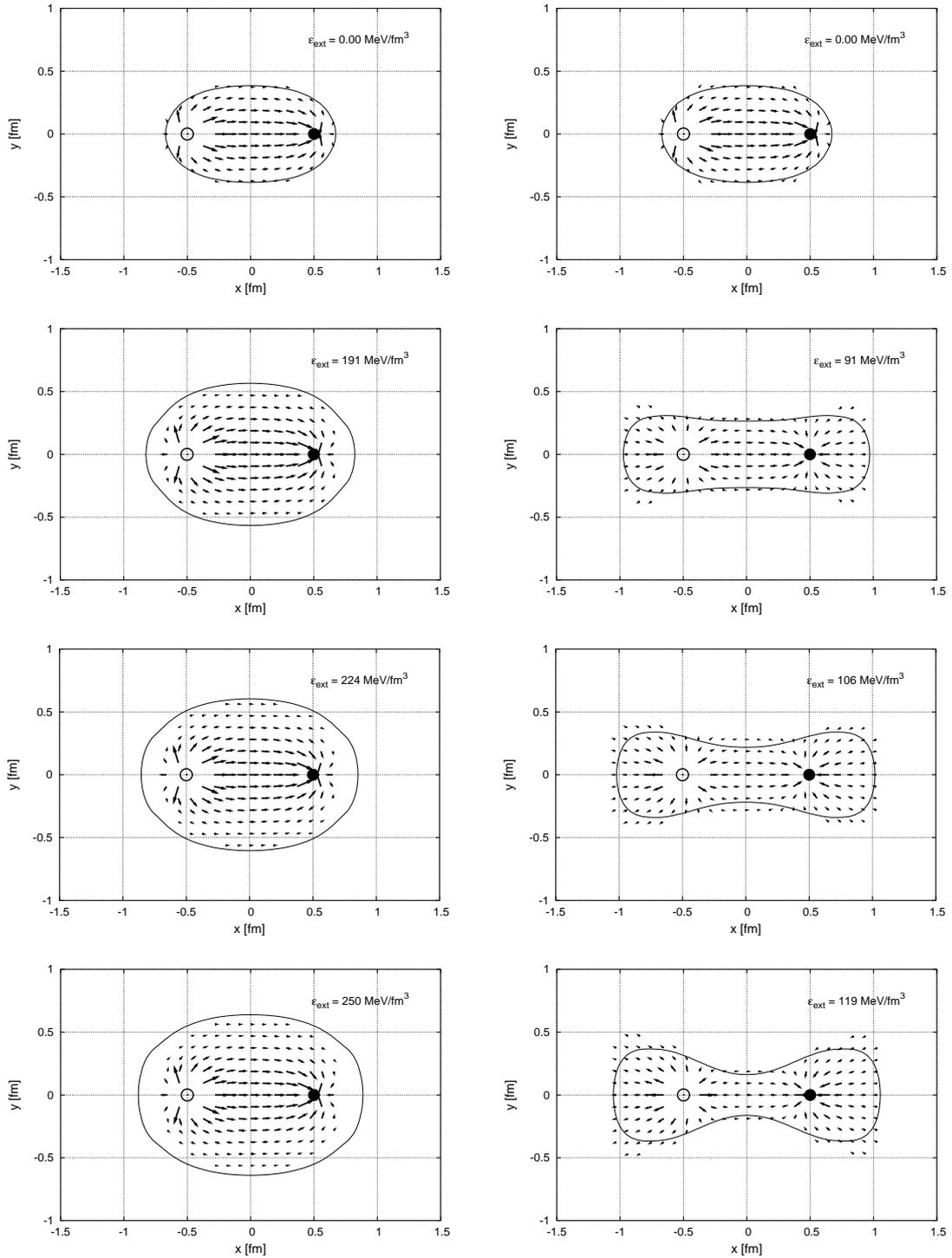


Abbildung 5.4: Elektrisches Feld  $\vec{D}^8$  eines  $b\bar{b}$ -Strings im parallelen (links) bzw. im antiparallelen (rechts) Hintergrundfeld.

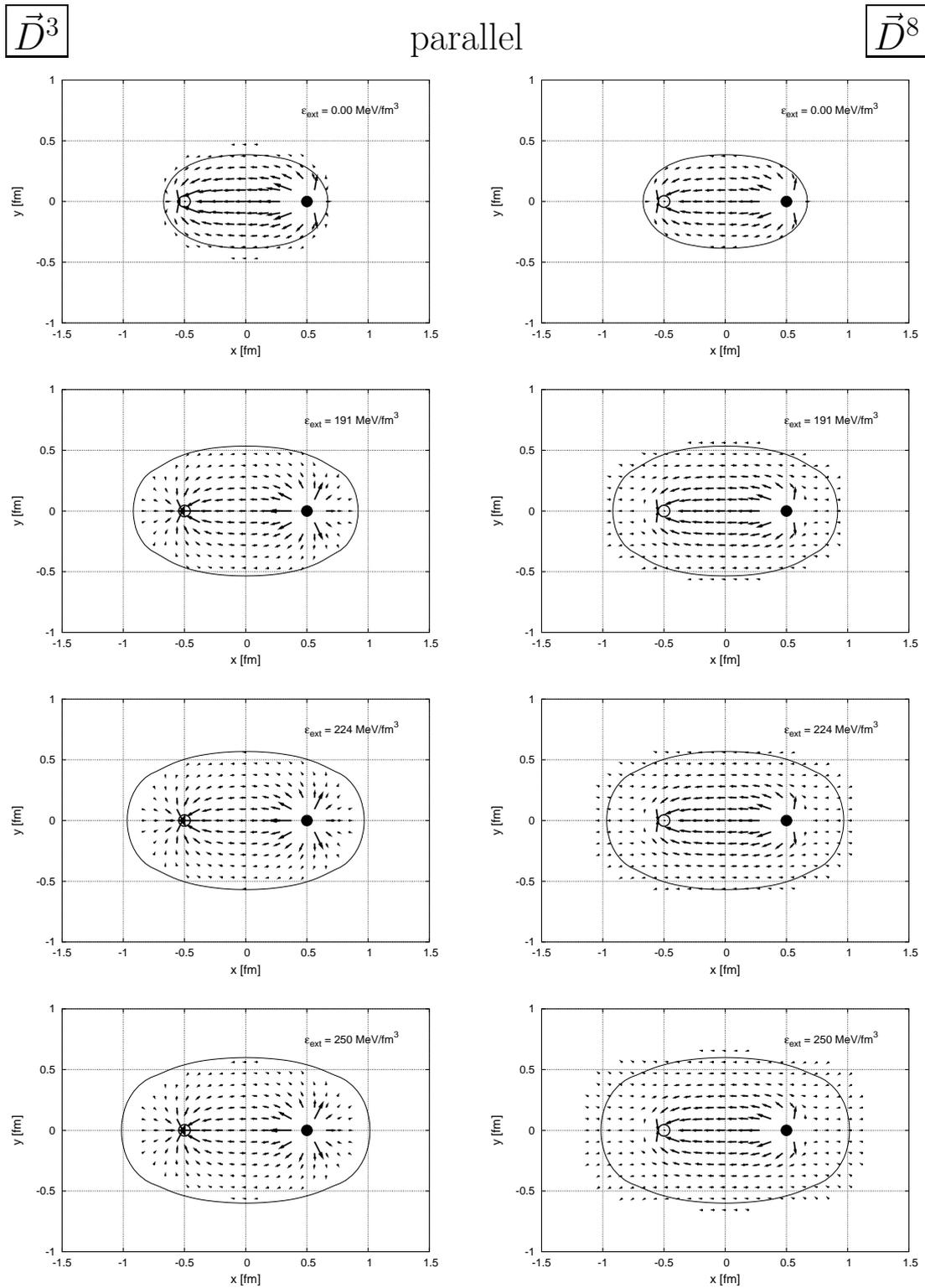


Abbildung 5.5: Elektrische Felder  $\vec{D}^3$  und  $\vec{D}^8$  eines  $r\bar{r}$ -Strings im parallelen Hintergrundfeld.

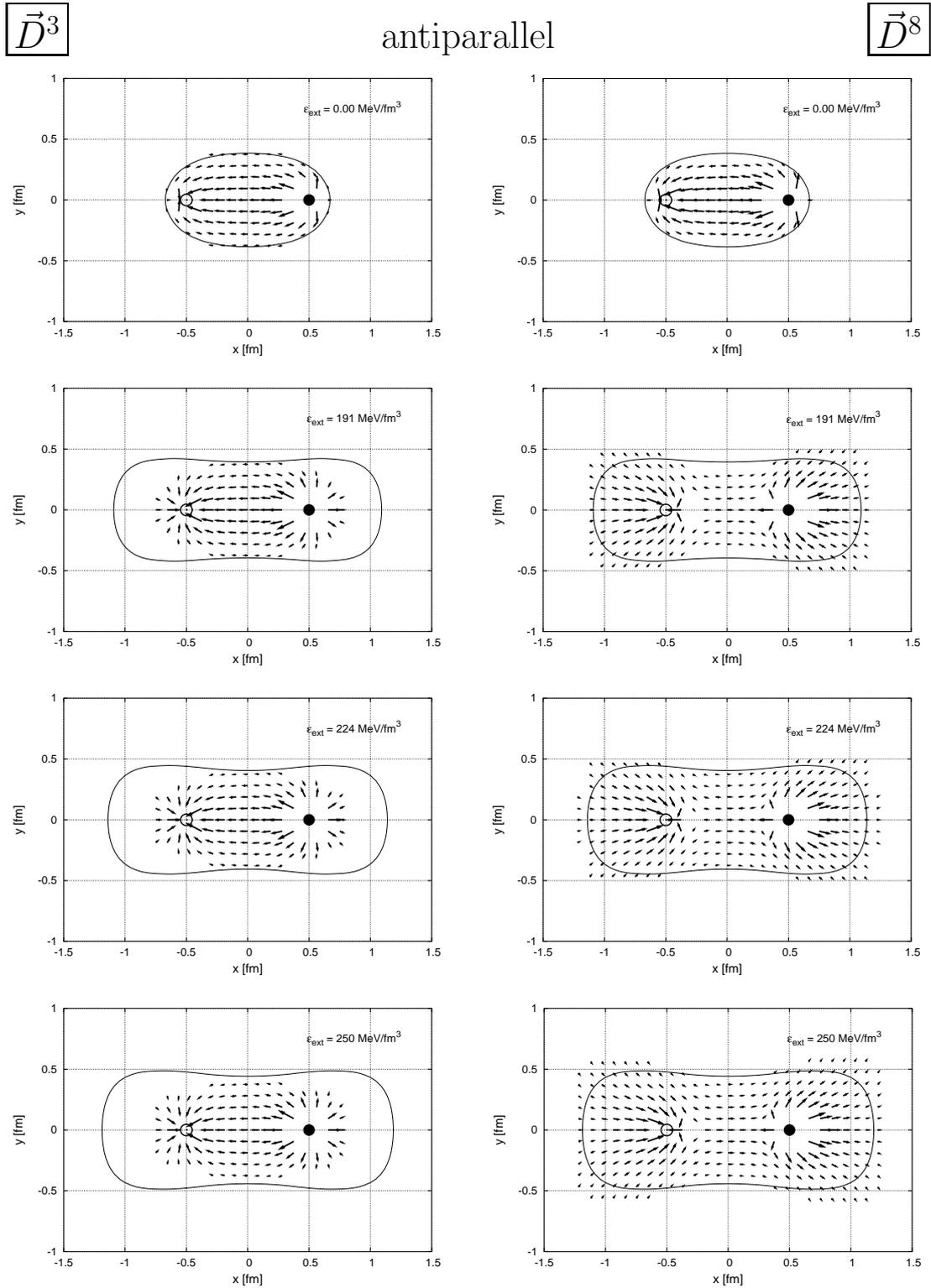


Abbildung 5.6: Elektrisches Felder  $\vec{D}^3$  und  $\vec{D}^8$  eines  $r\bar{r}$ -Strings im antiparallelen Hintergrundfeld.

In den Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen wir an Hand der Energiedichte das Verhalten des Strings, wenn wir den  $q\bar{q}$ -Abstand  $R$  verändern. Wir wählen dazu eine feste Anregungsenergie  $\varepsilon_{\text{ext}} = 191 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  und variieren den Quarkabstand von  $R = 0.5 \text{ fm}$  (ganz oben) bis  $R = 2.0 \text{ fm}$  (ganz unten). Für die parallele String-Konfiguration (Abb. 5.7) erwarten wir nach der vorangegangenen Diskussion der elektrischen Felder, dass sich weiterhin Strings mit einer homogenen Energiedichte entlang der Stringachse ergeben. Die Energiedichte im Zentrum des Strings bei  $r = 0$  nimmt wie im Vakuum leicht ab, aber die homogene Energieverteilung ist weiterhin zu sehen. Die  $b\bar{b}$ - (links) und die  $r\bar{r}$ -Konfiguration (rechts) verhalten sich qualitativ gleich.

Bei der antiparallelen Konfiguration (Abb. 5.8) sieht man das Einschnüren des  $b\bar{b}$ -Strings (links) und die Abnahme im Zentrum des Strings sehr deutlich. Bei der  $r\bar{r}$ -Konfiguration (rechts) bleibt auf Grund der weiterhin vorhandenen  $\vec{D}^3$ -Komponente des elektrischen Feldes der String zwar erhalten, aber die Energiedichte im Inneren ist auch hier drastisch reduziert im Vergleich zum String im Vakuum. Im antiparallelen Fall haben wir für die  $b\bar{b}$ -Konfiguration eine kleinere Anregungsenergie von  $\varepsilon_{\text{ext}} = 106 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  verwendet, weil das Einschnüren des  $b\bar{b}$ -String schon bei relativ kleinen Anregungen einsetzt.

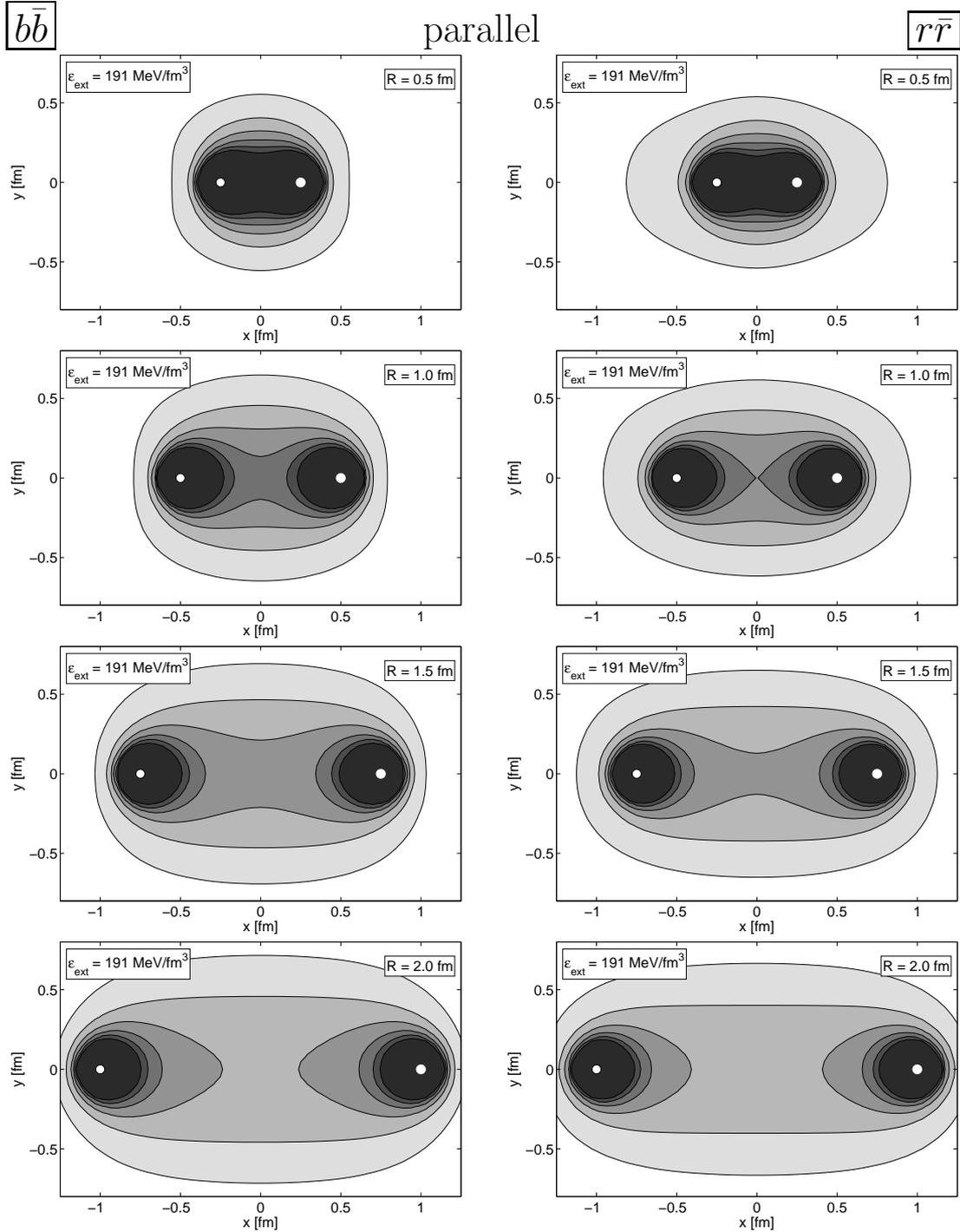


Abbildung 5.7: Die Energiedichte eines  $b\bar{b}$ - (links) und eines  $r\bar{r}$ -Flussschlauches in einem parallel orientierten Hintergrundfeld. Die Konturlinien sind äquidistant mit einer Schrittweite von  $\Delta\varepsilon = 0.4 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  beginnend bei  $0.4 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ . In der Energiedichte ist der Beitrag des externen Hintergrundfeldes enthalten.

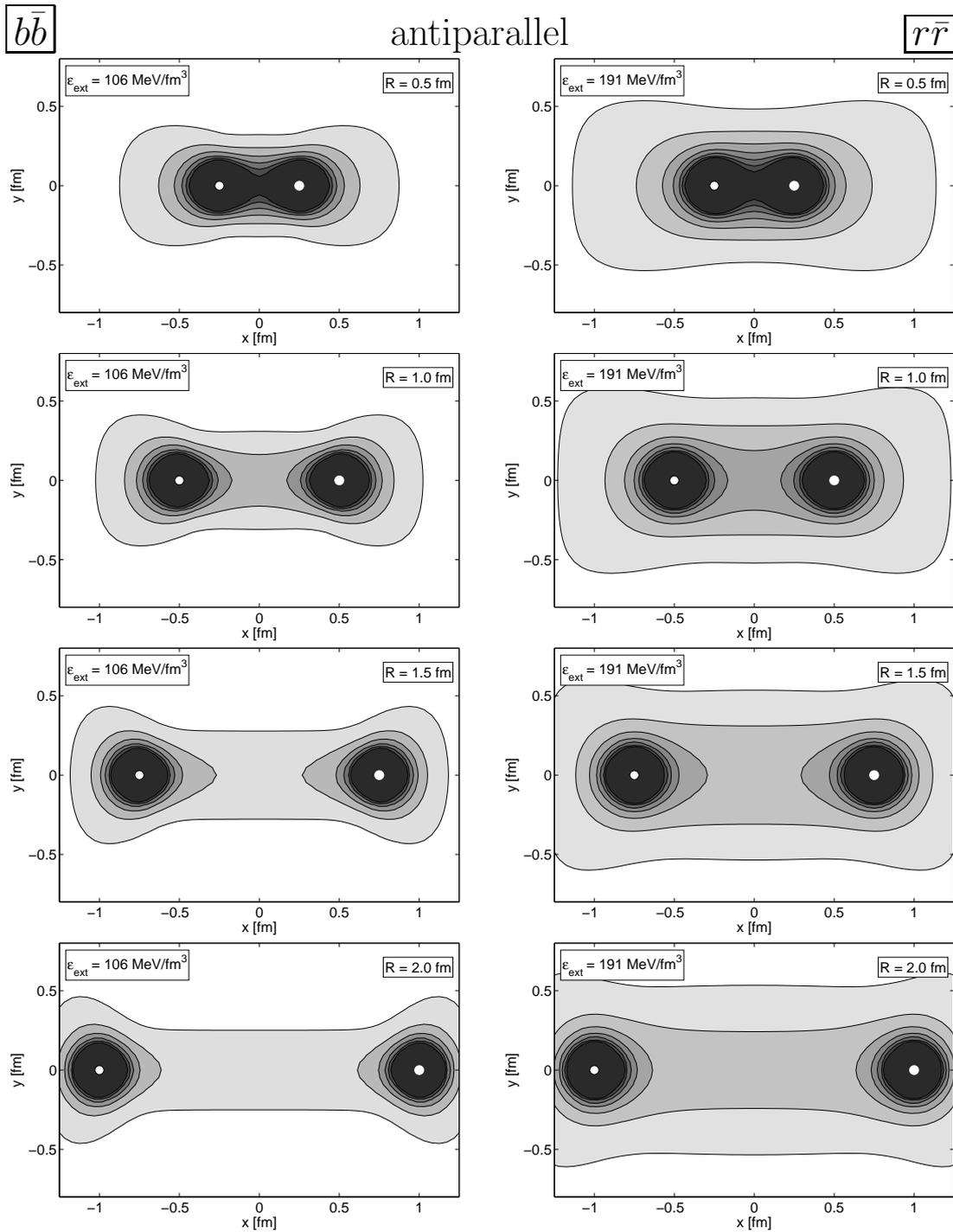


Abbildung 5.8: Wie in Abb. 5.7 für ein antiparalleles Hintergrundfeld. Beim  $b\bar{b}$ -String schnürt sich der String ein und die Energiedichte zwischen den Quarks nimmt stark ab.

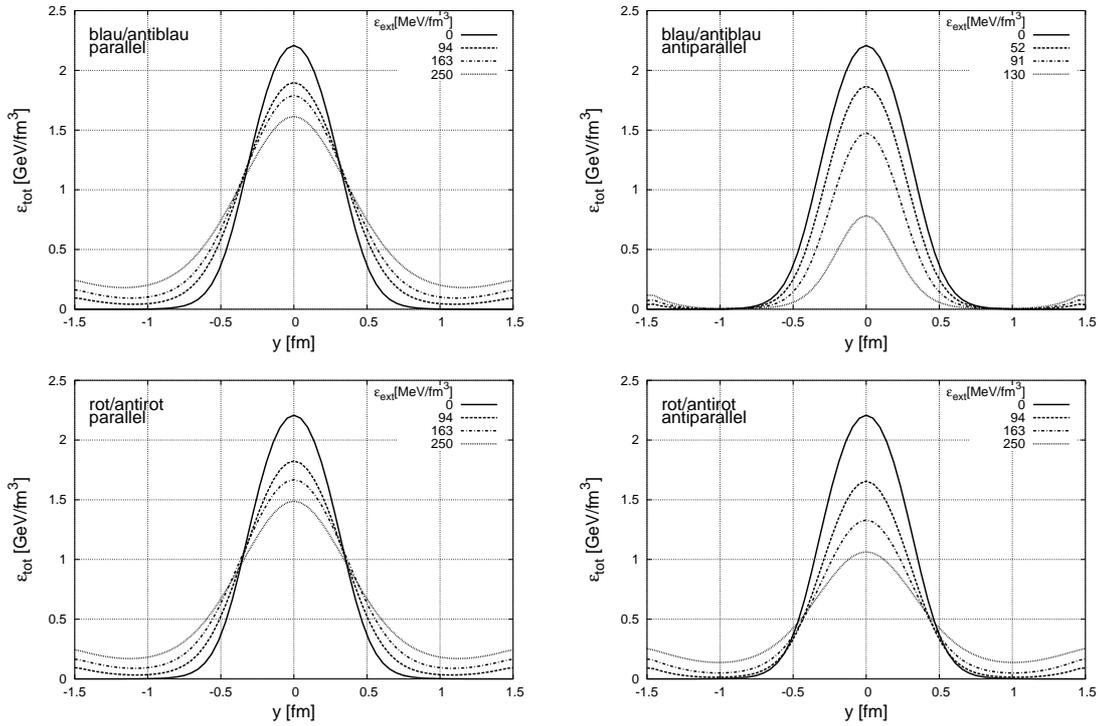


Abbildung 5.9: Das Profil der Energiedichte für einen  $b\bar{b}$ - (oben) bzw.  $r\bar{r}$ -String (unten) im parallelen (links) bzw. antiparallelen Hintergrundfeld (rechts). Die Anregungsenergien sind in der Abbildung gegeben.

Die Profile der Energiedichte in der zentralen Ebenen zwischen den Quarks zeigen wir in Abb. 5.9. Der  $q\bar{q}$ -Abstand beträgt in diesem Fall  $R = 1$  fm. Der  $b\bar{b}$ - und der  $r\bar{r}$ -String ist in den oberen bzw. den unteren beiden Teilbildern für die parallele (links) und die antiparallele Ausrichtung (rechts) des Hintergrundfeldes dargestellt. In der Energiedichte ist der Beitrag des externen Feldes  $\varepsilon_{\text{ext}}$  enthalten. Bei Abwesenheit des  $q\bar{q}$ -Paares wäre die Energiedichte konstant und würde den jeweiligen Randwert annehmen. Das Feld des  $q\bar{q}$ -Flussschlauches überlagert sich nicht-linear dem äußeren Feld und führt in allen Fällen zu einer Abschwächung in der Randzone des dargestellten Bereichs. Der zentrale Wert der Energiedichte nimmt in allen Fällen mit zunehmendem  $\varepsilon_{\text{ext}}$  ab. Bei den antiparallelen Ausrichtungen ist dieser Effekt allerdings weit aus größer. Beim  $b\bar{b}$ -String nimmt das Feld entsprechend dem beobachteten Einschnüren in den Abbn. 5.4 und 5.8 am deutlichsten ab (oben rechts). Man beachte in diesem Fall auch die niedrigeren Werte von  $\varepsilon_{\text{ext}}$ .

Die Profile werden nicht nur in ihrer maximalen Höhe reduziert, sondern haben auch eine höhere Halbwertsbreite. Den Halbmaximumsradius  $\Delta$  zeigen wir in Abb. 5.10 als Funktion des  $q\bar{q}$ -Abstands  $R$  für verschiedene Anregungsenergien  $\varepsilon_{\text{ext}}$ . In den oberen beiden Teilbildern sieht man  $\Delta$  für einen  $b\bar{b}$ -String und

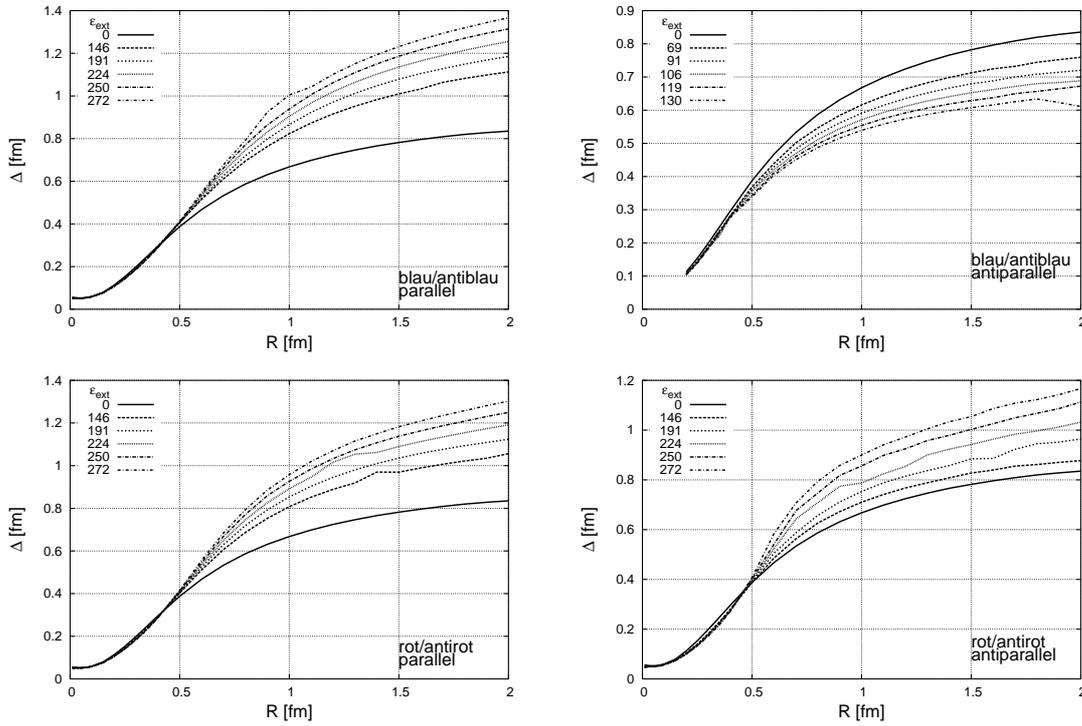


Abbildung 5.10: Der Halbwertsdurchmesser  $\Delta$  für einen  $b\bar{b}$ - (oben) bzw.  $r\bar{r}$ -String (unten) im parallelen (links) bzw. antiparallelen Hintergrundfeld (rechts).

in den unteren beiden für einen  $r\bar{r}$ -String. Jeweils links und rechts zeigen wir die beiden Konfigurationen für ein paralleles bzw. für ein antiparalleles Hintergrundfeld. Die durchgezogene Linie steht in allen Fällen für  $\varepsilon_{\text{ext}} = 0$  MeV, d.h. für einen String im Vakuum und ist deshalb in allen 4 Fällen identisch (vgl. auch Abb. 4.5).

Bei den beiden parallelen Ausrichtungen nimmt der Durchmesser kontinuierlich mit der äußeren Anregung zu. Für große Anregungen wächst der Durchmesser nahezu linear mit dem Abstand  $R$  und ein Absättigen der Stringbreite ist immer weniger zu sehen. Dieses deutet auf eine Dissoziation des Strings hin. Im perturbativen Fall, in dem es nur eine Coulomb-artige Bindung zwischen dem Quark und dem Antiquark gibt und das Profil der Energiedichte durch Gl. (3.2a) mit  $\rho_d = R/2$  gegeben ist, nimmt der Halbwertsradius gemäß  $\Delta \approx 0.5R$  linear zu. Für große Anregungen nimmt der Wert des Dielektrikums zu (s. Abb. 5.2) und das Vakuum verliert nach und nach seine Confinement-Eigenschaft. Der Durchmesser sollte demnach für hinreichend große  $R$  linear anwachsen.

Beim  $r\bar{r}$ -Flussschlauch sehen wir auch bei der antiparallelen Ausrichtung ein stetiges Anwachsen der Breite, allerdings ist das Anwachsen etwas reduziert. In diesem Fall wirkt das Feld  $\vec{D}^8$  dem inneren 8-Feld entgegen, wodurch im Vergleich zur parallelen Ausrichtung der elektrische Druck auf die Bagwand reduziert

wird, und der Durchmesser  $\Delta$  etwas langsamer mit dem Abstand  $R$  wächst.

Bei der antiparallelen Ausrichtung des  $b\bar{b}$ -Flussschlauches finden wir tatsächlich eine Abnahme der Breite mit zunehmender Anregung. Verbunden mit der starken Abnahme der Energiedichte (Abb. 5.9 oben rechts) sieht man damit sehr schön das Einschnüren und allmähliche Durchtrennen des Strings.

### 5.1.2 Das $q\bar{q}$ -Potential im Hintergrundfeld

Wenn die Energiedichte zwischen den beiden Quarks mit zunehmender Anregung abnimmt und sich der String einschnürt und im Extremfall sogar trennt, sollte damit auch ein nicht mehr bindendes  $q\bar{q}$ -Potential verbunden sein. Wir erwarten also ein Potential, das nicht mehr monoton mit der  $q\bar{q}$ -Stringspannung des Vakuums von  $\tau = 980 \text{ MeV/fm}$  ansteigt, sondern für große  $q\bar{q}$ -Abstände  $R$  abflacht oder sogar wieder abnimmt. Für ein flaches Potential mit  $\tau = 0$  — wie man es auch im perturbativen Coulomb-Fall erhält — geht das Confinement vollständig verloren, und für ein Potential mit  $\tau < 0$  ist das Potential sogar abstoßend, d.h. die Quarks würden sich voneinander trennen.

Wir zeigen das Potential  $V_{q\bar{q}}$  in Abb. 5.11. Die Symbole stehen für die CDM-Ergebnisse, die durchgezogenen Linien sind die dazugehörigen Cornell-Fits nach Gl. (3.1). Die Cornell-Fits ergeben weiterhin eine gute Übereinstimmung mit den Rechnungen. Es gilt wieder dieselbe Anordnung, d.h. das  $b\bar{b}$ - und das  $r\bar{r}$ -Potential ist in den oberen bzw. den unteren Teilbildern dargestellt und die parallele und die antiparallele Ausrichtung jeweils links bzw. rechts. Wir sind hier nur an dem Verhalten für große  $R$  interessiert und haben der Deutlichkeit halber die Graphen durch verschiedene additive Konstanten gegeneinander verschoben.

Das Potential im parallelen Hintergrundfeld ändert sich (bis auf die additive Konstante) nur gering. Nur ein leichtes Abflachen des linearen Verlaufs lässt sich hier vermuten. Bei der antiparallelen Anordnung (rechts) sehen wir aber das für das Spalten der Strings vermutete Abflachen bzw. Abknicken des Potentials. Das Umschlagen zu einem abnehmend linearen Verlauf ist bei der  $b\bar{b}$ -Konfiguration natürlich deutlicher als bei der  $r\bar{r}$ -Anordnung, da bei der letzteren immer noch das bindende 3-Feld wirkt. Bei der  $b\bar{b}$ -Anordnung finden wir, dass für Quarkabstände  $R > 0.5 \text{ fm}$  ab einer Anregungsenergie von  $\varepsilon_{\text{ext}} = 91 \text{ MeV/fm}^3$  (geschlossene Dreiecke) das Potential abflacht und die Strings nicht mehr stabil sind. Bei dem  $r\bar{r}$ -Flussschlauch gilt dieses erst für Quarkabstände  $R > 0.8 \text{ fm}$  und ab einer Anregungsenergie von  $\varepsilon_{\text{ext}} = 163 \text{ MeV/fm}^3$  (wieder geschlossene Dreiecke).

Wir haben aus den jeweiligen Cornell-Fits die Stringspannung  $\tau$  extrahiert und in Abb. 5.12 als Funktion der Anregungsenergie für die beiden verschiedenen Farbkombinationen und die beiden Orientierungen aufgetragen. Für den  $b\bar{b}$ -String (links) in der parallelen Orientierung (Quadrate) nimmt die Stringspannung zunächst leicht ab, stabilisiert sich dann aber bei  $\tau \approx 700 \text{ MeV/fm}$ . Der antiparallel orientierte Flussschlauch zeigt dagegen schon für  $\varepsilon_{\text{ext}} \geq 100 \text{ MeV/fm}^3$  eine negative Stringspannung, die mit einer absoluten Instabilität verbunden ist.

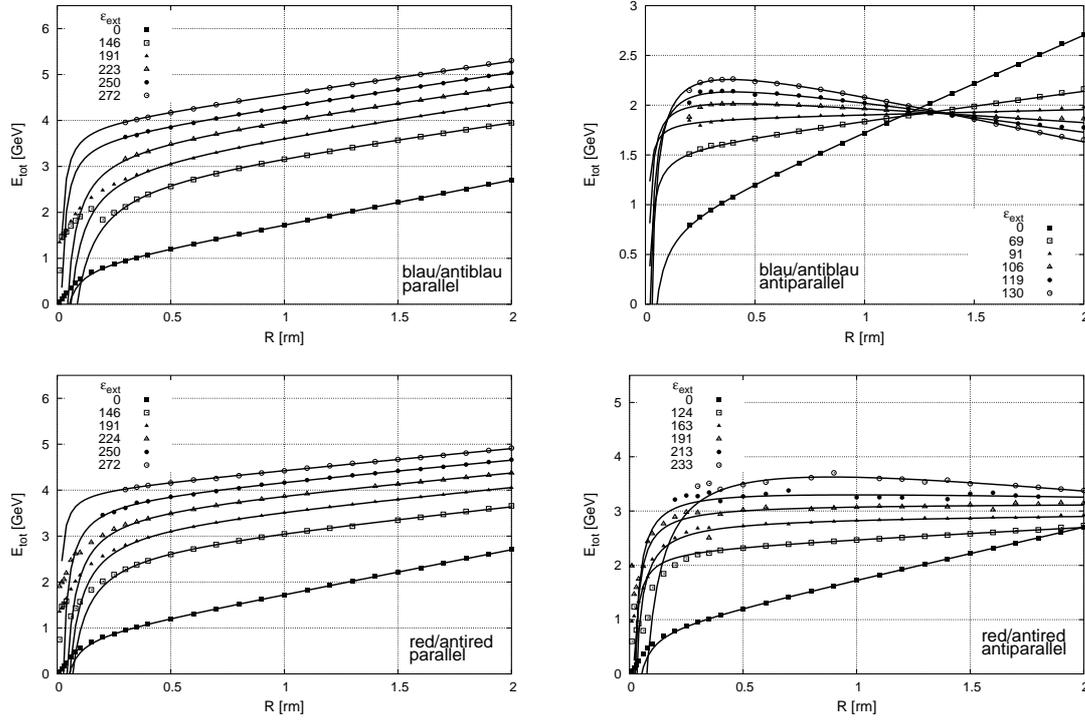


Abbildung 5.11: Das  $q\bar{q}$ -Potential für verschiedene äußere Anregungen. Das Potential für den  $b\bar{b}$ -String zeigen wir oben und für den  $r\bar{r}$ -String unten, beide für eine parallele (links) und eine antiparallele Ausrichtung (rechts).

Beim  $r\bar{r}$ -String sehen wir das gleiche qualitative Verhalten. Die Stringspannung im parallelen Fall sinkt hier auf einen Wert von  $\tau = 420 \text{ MeV/fm}$ , der etwas geringer ist als im  $b\bar{b}$ -Fall. Wir erinnern uns wieder, dass das äußere Feld vom 8-Typ ist und nur das Feld  $\vec{D}^8$  des  $r\bar{r}$ -Strings direkt verstärkt. Die Komponente  $\vec{D}^3$  wird vom äußeren Feld nur indirekt über die Modifikation des skalaren Felds  $\sigma$  beeinflusst. Dafür wirkt das Feld  $\vec{D}^3$  in der antiparallelen Ausrichtung weiterhin bindend und die Stringspannung sinkt folglich erst bei einer äußeren Anregung von  $\varepsilon_{\text{ext}} \approx (190 - 200) \text{ MeV/fm}^3$  auf einen Wert  $\tau < 0$ .

Wir stellen fest, dass ein äußeres farbelektrisches Feld das absolute Confinement eines  $q\bar{q}$ -Paares aufhebt. Das äußere Feld verschiebt den Erwartungswert des Confinement-Feldes von  $\sigma = \sigma_{\text{vac}}$  im Vakuum zu kleineren Werten. Damit steigt der dielektrische Wert des angeregten Vakuums. Die elektrischen Felder werden zu einem geringeren Maße in den Fluss Schlauch gedrängt und können sich in einem größeren räumlichen Bereich ausdehnen. Das äußere farbelektrische Feld bricht sowohl die Isotropie des Vakuums als auch die Invarianz unter Farbroationen. Deshalb finden wir unterschiedliche Reaktionen des  $q\bar{q}$ -Strings je nach seiner relativen Orientierung zum äußeren Feld und seinem Farb-Antifarbinhalt. Es ist zu vermuten, dass in einer dynamischen Beschreibung des Strings

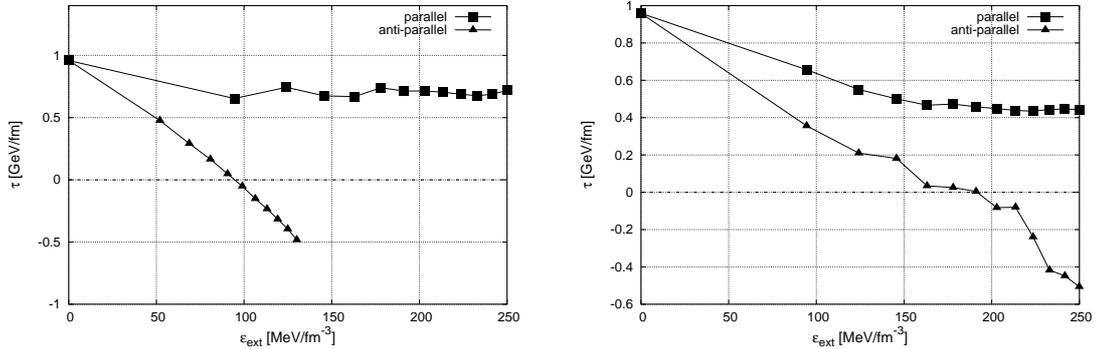


Abbildung 5.12: Die Stringspannung als Funktion der Anregungsenergie  $\varepsilon_{\text{ext}}$ . Links für das  $b\bar{b}$ -Potential und rechts für das  $r\bar{r}$ -Potential.

die Quarks des Strings entsprechend ihrer Farbladung  $q^8$  im äußeren Feld beschleunigt werden. Der Fluss Schlauch richtet sich auf diese Weise selbständig in paralleler Richtung aus. Bis zu einer kritischen Stärke des äußeren Feldes ist das  $q\bar{q}$ -Paar weiterhin gebunden. Wir fassen die obigen Ergebnisse in Tab. 5.1 zusammen. Dort geben wir die Feldstärken der äußeren elektrischen Verschiebung  $\vec{D}_{\text{ext}}$  und des elektrischen Feldes  $\vec{E}_{\text{ext}}$  an, bei der die Stringspannung  $\tau$  für eine gegebene Farbkombination verschwindet. Die kritische elektrische Feldstärke  $\vec{E}_{\text{ext}}$ , die zum Zerreißen des Strings notwendig ist, ist mit  $E_{\text{ext}} \lesssim 1 \text{ GeV/fm}$  sehr viel geringer als die oben zitierten Feldstärken von  $5\text{-}12 \text{ GeV/fm}$  [Magas01].

Ebenfalls in der Tabelle aufgeführt sind der Wert des angeregten  $\sigma$ -Feldes und des dielektrischen Wertes, sowie die entsprechende Anregungsenergie bei der der String instabil wird. Wir finden stark unterschiedliche Werte für die beiden Kombinationen  $b\bar{b}$  und  $r\bar{r}$ , nämlich  $\varepsilon_{\text{ext}} = 90 \text{ MeV/fm}^3$  für den  $b\bar{b}$ -Fall und  $\varepsilon_{\text{ext}} = 200 \text{ MeV/fm}^3$  im  $r\bar{r}$ -Fall. In unserer Formulierung der Farbladungen in der CDM-Lagrangendichte (2.1) ist die Ladung der Quarks zeitlich konstant. In einer transporttheoretischen Beschreibung der Quarks kann man dagegen eine Dynamik auch im Farbraum generieren, so dass der Farbvektor im Farbraum präzediert [Wong70, Elze89]. Die Farbe des Fluss Schlauches wäre dann nicht mehr zeitlich konstant. Die Werte  $\varepsilon_{\text{ext}} = 90 \text{ MeV/fm}^3$  und  $\varepsilon_{\text{ext}} = 200 \text{ MeV/fm}^3$  für die kritische Energiedichte, bei der der String reißt, sind deshalb als untere und obere Abschätzung zu verstehen für einen  $q\bar{q}$ -String mit beliebiger Farborientierung.

## 5.2 Fragmentation durch Paarerzeugung

Eine andere Ursache für eine Instabilität des Strings ist durch den Mechanismus der Paarerzeugung gegeben. Die zentrale Energiedichte eines elementaren Fluss Schlauches ist mit  $\varepsilon \lesssim 2.5 \text{ GeV/fm}^3$  (s. Abb. 4.3) im Vergleich zu den kritischen Anregungsenergien aus dem vorangegangenen Abschnitt sehr viel größer. In diesem

	$D_{\text{ext}}^8$ [MeV/fm]	$\sigma_{\text{ext}}$ [fm <sup>-1</sup> ]	$\kappa_{\text{ext}}$ [10 <sup>-2</sup> ]	$E_{\text{ext}}^8$ [MeV/fm]	$\varepsilon_{\text{ext}}$ [MeV/fm <sup>3</sup> ]
$b\bar{b}$	16	1.13	1.7	940	90
$r\bar{r}$	40	1.0	5.5	730	200

Tabelle 5.1: Die Werte des angeregten Mediums an der Schwelle zum ungebundenen  $q\bar{q}$ -Flussschlauch, an der die Strings Spannung  $\tau$  gerade verschwindet. Ein  $g\bar{g}$ -String verhält sich in dem gewählten Hintergrundfeld wie der  $r\bar{r}$ -String. Die externe Anregungsenergie  $\varepsilon_{\text{ext}}$  enthält sowohl die Volumenenergie als auch die elektrische Energie.

starken Feld können ebenfalls über den Schwinger-Mechanismus [Schwinger51] zusätzliche Quark-Antiquark-Paare entstehen. Dieses wird z.B. im Lund-Modell verwendet [Andersson83, Andersson87, Andersson98], in dem ein hochangeregter String durch  $q\bar{q}$ -Paarbildung oder durch Quark-Diquark-Bildung in Mesonen und Baryonen zerfällt. Im CDM-Modell können wir dieses Szenario eingeschränkt beschreiben. Wir betrachten einen Quark-Antiquark-Flussschlauch  $Q\bar{Q}$  mit fester Länge  $R$ . Die Erzeugung eines zusätzlichen  $q\bar{q}$ -Paares können wir im Rahmen des Modells nicht dynamisch beschreiben. Wir könnten im Rahmen des Schwinger-Mechanismus auf Grund des  $Q\bar{Q}$ -Feldes die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Volumenelement abschätzen, mit der solch ein Prozess stattfindet. Für Flussschläuche mit festgehaltenem Querschnitt und für konstantes elektrisches Feld des Flussschlauches auch während der Paarproduktion wurde dieses z.B. in [Vasak83, Pavel91, Schönfeld90, Warke92, Wilets95] durchgeführt.

Da wir in dieser Arbeit aber nur an statischen Konfigurationen interessiert sind, nehmen wir die Existenz des zusätzlichen Paares als gegeben an. Für dieses  $q\bar{q}$  können wir das Potential bei Anwesenheit des  $Q\bar{Q}$ -Flussschlauches berechnen. Dazu platzieren wir die Quarks wie in Abb. 5.13 gezeigt in einer linearen Anordnung. Allerdings werden wir die Reaktion des elektrischen Feldes des  $Q\bar{Q}$ -Flussschlauches auf die Existenz explizit mitberechnen, d.h. wir bestimmen die Feldkonfiguration für den so konstruierten 4-Teilchen-Zustand. Den  $Q\bar{Q}$ -Abstand  $R$  halten wir fest und variieren den  $q\bar{q}$ -Abstand  $d$ . Der Einfachheit halber liegt der  $q\bar{q}$ -Schwerpunkt immer im Zentrum des  $Q\bar{Q}$ -Strings. Wir nennen den inneren String parallel zum äußeren orientiert, wenn  $d < 0$ , d.h. wenn das Quark  $q$  zum Quark  $Q$  und das Antiquark  $\bar{q}$  zum Antiquark  $\bar{Q}$  zeigt. Umgekehrt nennen wir den inneren String antiparallel orientiert, wenn  $d > 0$ . Bei dieser 4-Quark-Konfiguration gibt es verschiedene Farbkombinationen, die wir schematisch in den folgenden *Reaktions*-Gleichungen dargestellt haben.

$$(r - \bar{r} - r - \bar{r}) \rightarrow (r\bar{r}) + (r\bar{r}) \quad , \quad (5.6a)$$

$$(r - r - \bar{r} - \bar{r}) \rightarrow (r\bar{r}) - (r\bar{r}) \quad , \quad (5.6b)$$

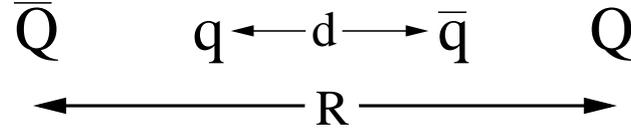


Abbildung 5.13: Die Quark Anordnung bei der  $q\bar{q}$ -Erzeugung. Das äußere  $Q\bar{Q}$ -Paar hat einen festen Abstand  $R$ , der  $q\bar{q}$ -Abstand  $d$  wird variiert. Bei  $d = 0$  liegen Quark  $q$  und Antiquark  $\bar{q}$  direkt aufeinander und löschen sich gegenseitig aus, so dass nur der  $Q\bar{Q}$ -String reproduziert wird.

$$(r - \bar{g} - g - \bar{r}) \rightarrow (r\bar{g}) - (g\bar{r}) \quad , \quad (5.6c)$$

$$(r - g - \bar{g} - \bar{r}) \rightarrow (rg) - (\bar{g}\bar{r}) = (\bar{b} - b) \quad , \quad (5.6d)$$

$$(r - g - \bar{g} - \bar{r}) \rightarrow (r - g - b - \bar{b} - \bar{g} - \bar{r}) \rightarrow (rgb) + (\bar{b}\bar{g}\bar{r}) \quad . \quad (5.6e)$$

Ausgehend von einem  $Q\bar{Q}$ -String mit beliebiger Farbe, hier ein  $r\bar{r}$ -String, kann entweder ein  $q\bar{q}$ -String gleicher Farbe, wie in den Gln. (5.6a) und (5.6b) oder ein String mit anderem Farbinhalt, hier ein  $g\bar{g}$ -Paar wie in den Gln. (5.6c) und (5.6d) entstehen. In der ersten Gleichung von (5.6) zerfällt das 4-Quark-System in zwei mesonische  $r\bar{r}$ -Strings. Mit entgegengesetzter Orientierung des  $q\bar{q}$ -Paares, also für  $d < 0$ , überlagern sich die beiden  $r\bar{r}$ -Strings konstruktiv.

Haben die Quarks  $Q$  und  $q$  verschiedene Farben, z.B.  $c_Q = r$  und  $c_q = g$  löschen sie sich nicht mehr aus, und der  $Q\bar{Q}$ -String kann nicht mehr zerfallen. Vielmehr ergibt sich für  $d > 0$  wie in Gl. (5.6c) ein adjungierter  $(r\bar{g}) - (g\bar{r})$ -String wie in Abschnitt 4.1.4. Für  $d < 0$  erhält man einen  $(rg) - (\bar{r}\bar{g})$ -String, der genau einem  $b\bar{b}$ -String entspricht (Gl. (5.6d)). Ein  $q\bar{q}$ -Paar mit blauem Farbinhalt gibt wegen der Invarianz unter Farbtransformation  $g \leftrightarrow b$  nichts neues. In [Casher79] wird darüber hinaus eine sukzessive Erzeugung von Farb-Antifarb-Paaren wie in Gl. (5.6e) zur Erzeugung eines Baryon-Antibaryon-Paares diskutiert.

In den folgenden Abbildungen 5.14 und 5.15 zeigen wir die Energiedichte für solch einen 4-Teilchen-Zustand. Die Quarks werden hier durch einen weiß gefüllten Punkt dargestellt und die Antiquarks durch einen schwarzen Punkt mit weißem Umkreis. In Abb. 5.14 hat der innere String denselben Farbinhalt wie der äußere (hier  $R\bar{R}$  und  $r\bar{r}$ ) und in Abb. 5.15 einen davon verschiedenen (hier  $R\bar{R}$  und  $g\bar{g}$ ). Jeweils in der linken Spalte ist der innere  $q\bar{q}$ -String parallel zum äußeren orientiert und in der rechten Spalte antiparallel.

In Abb. 5.14 variiert links der  $q\bar{q}$ -Abstand von  $d = -R$  (oberste Zeile) bis  $d = -0.2\text{fm}$  (unterste Zeile), d.h. zuerst liegen die Quarks  $Q$  und  $q$  und die Antiquarks  $\bar{Q}$  und  $\bar{q}$  übereinander und zum Schluss liegen die Teilchen des inneren Paares dicht nebeneinander. Für  $d = -R$  erhalten wir so die Überlagerung von

zwei identischen  $q\bar{q}$ -Strings. Man sieht sehr schön wie hier innerhalb des  $Q\bar{Q}$ -Flussschlauches ein  $q\bar{q}$ -String eingebettet ist. Die Energiedichte zwischen den beiden inneren Teilchen ist ab  $d \geq -0.6$  fm größer als zwischen den inneren und äußeren Quarks. Die beiden roten und die beiden antiroten Quarks stoßen sich ab, so dass der elektrische Fluss aus dem jeweiligen Zwischenbereich bei  $|x| \approx 0.5$  fm herausgedrängt wird.

Rechts variiert der Abstand von  $d = 0$  bis  $d = 0.9$  fm. Bei  $d = 0$  löschen sich die beiden inneren Teilchen gerade gegenseitig aus und hinterlassen das Feld des äußeren  $Q\bar{Q}$ -Flussschlauches. Wie man sieht, ist das Feld der konstruktiv überlagerten Strings (oben links) breiter als dieser einfache Flussschlauch. Ab  $d = 0.2$  fm beginnt sich der String einzuschnüren und für größere  $q\bar{q}$ -Abstände spaltet sich das System in zwei unabhängige mesonische Flussschläuche. Wir haben hier den Fall  $d = R$  ausgelassen, da sich dann alle Teilchen gegenseitig neutralisieren und überhaupt kein Feld erzeugt wird.

In Abb. 5.15 haben wir bis auf das Bild unten rechts, bei dem hier  $d = R$  gilt, die Quarkabstände genauso gewählt wie in Abb. 5.14. Die Anordnung entspricht jetzt den Gleichungen (5.6d) (links) und (5.6c) (rechts). Auf der linken Seite oben überlagern sich ein  $r$ - und ein  $g$ -Quark zu einem  $\bar{b}$ -Quark bei  $x = 0.75$  fm und entsprechend die Antiquarks bei  $x = -0.75$  fm und bilden einen  $b\bar{b}$ -String. Bei Abständen  $-R < d < 0$  sieht man hier im Gegensatz zu Abb. 5.14, dass die Energiedichte im Bereich  $|x| \approx 0.5$  fm höher ist. Dies liegt daran, dass das  $r$ - und das  $g$ -Quark eine entgegengesetzt gleiche Ladung  $q^3$  haben, und sich somit teilweise anziehen.

Für Abstände  $d \geq 0$  (rechts) sieht man wie erwartet kein Auseinanderbrechen des Flussschlauches. Für  $d = 0$  erhält man wieder einen einfachen  $q\bar{q}$ -String und die Energiedichte in den beiden obersten Bildern ist somit identisch. Für  $d = R$  (unten rechts) erhält man den adjungierten String. Dieser ist etwas breiter als der fundamentale String (also der in beiden oberen Bildern), aber etwas schmaler als die direkte Überlagerung zweier fundamentaler Strings (wie in Abb. 5.14 oben links).

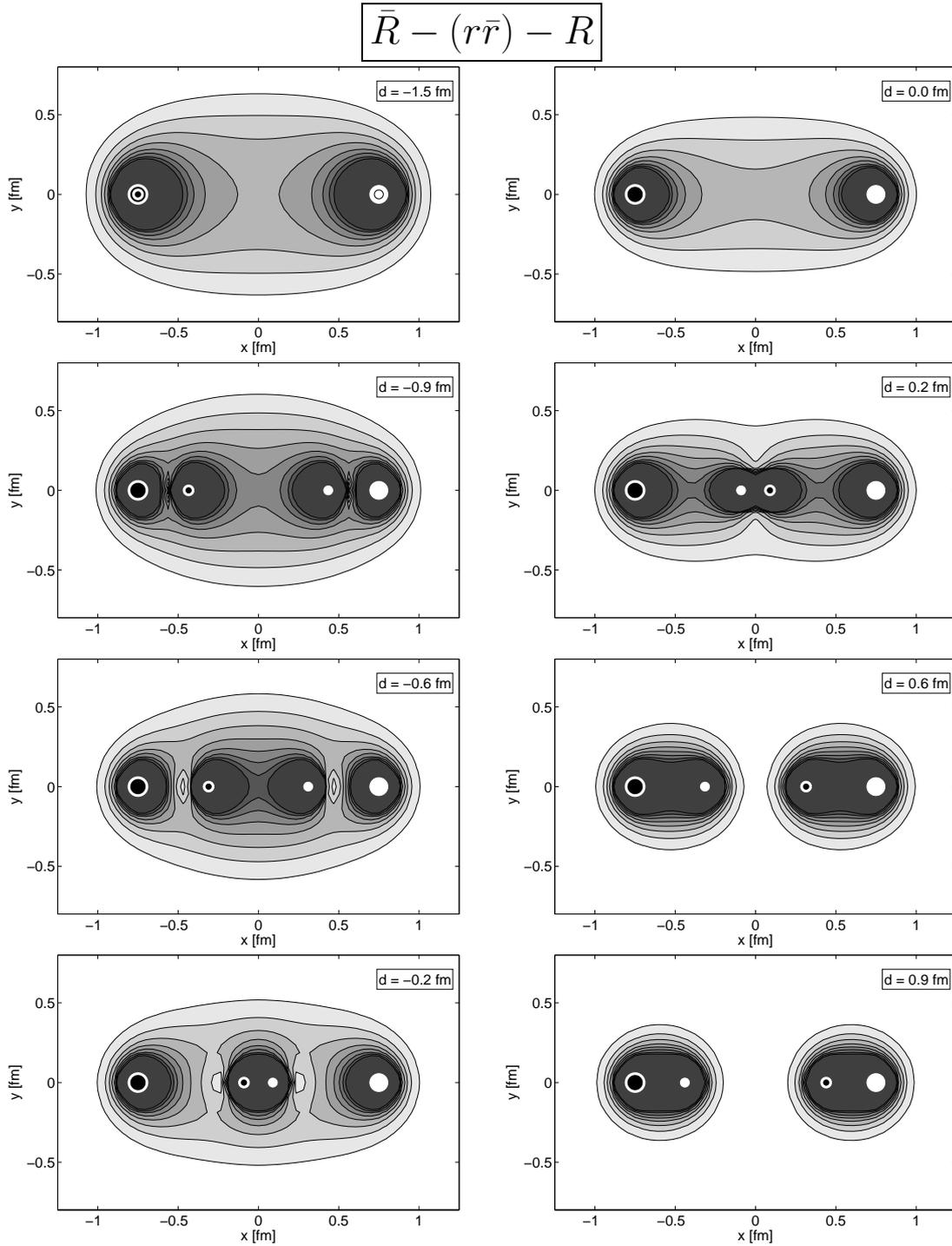


Abbildung 5.14: Ein 1.5 fm langer Fluss Schlauch  $Q\bar{Q}$  mit einem zusätzlichen  $q\bar{q}$ -Paar mit verschiedenen Abständen  $d < 0$  (linke Spalte) und  $d \geq 0$  (rechte Spalte). Quarks (Antiquarks) sind hier durch weiße Punkte (weiße Kreise) dargestellt. Die Konturlinien der Energiedichte sind äquidistant mit  $\Delta\varepsilon = 0.5 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  beginnend bei  $\varepsilon = 0.5 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ . Die Farben des inneren und des äußeren Quarkpaares sind vom selben Typ, hier jeweils  $r\bar{r}$ . Für  $d = 0$  erhält man einen einfachen  $Q\bar{Q}$ -Fluss Schlauch. Für  $d \geq 0.2$  fm schnürt sich der Fluss Schlauch ein und zerfällt für größere  $d$ .

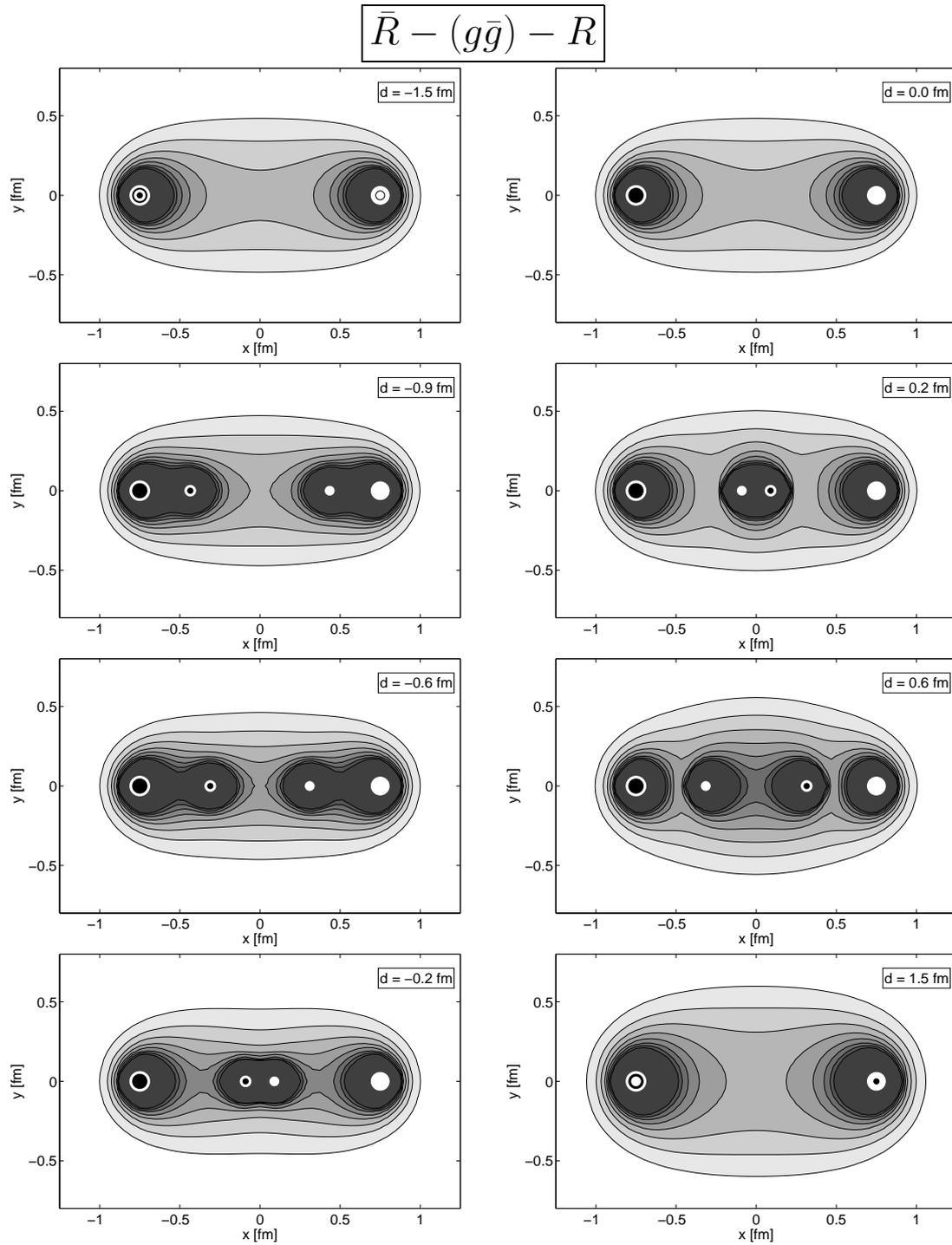


Abbildung 5.15: Wie Abb. 5.14, allerdings für verschiedene Farbkombinationen von innerem und äußerem Quarkpaar. Hier gilt  $Q\bar{Q} = r\bar{r}$  und  $q\bar{q} = g\bar{g}$ .

Wir schließen dieses Kapitel wieder ab, indem wir das Potential für die Paarbildung in Abb. 5.16 diskutieren. Unter dem Potential verstehen wir hier die Differenz  $V_{\text{paar}} = E_{\text{tot}} - E_R$  zwischen der Gesamtenergie  $E_{\text{tot}}$  des 4-Teilchen-Zustands und der Energie des ungestörten äußeren  $Q\bar{Q}$ -Strings  $E_R$  mit der Länge  $R$  als Funktion des  $q\bar{q}$ -Abstandes  $d$ . Der  $Q\bar{Q}$ -Abstand beträgt  $R = 1.5 \text{ fm}$  und wir zeigen das Potential für die beiden angesprochenen Farbkombinationen. Für ungleiche Farben von innerem und äußerem String (offene Quadrate) verschwindet wie erwartet das Potential bei  $x = -R$  und bei  $x = 0$ , da bei diesen beiden Abständen lediglich ein einfacher  $Q\bar{Q}$ -String bleibt. Für Werte  $d \gtrsim -R$  und  $d \lesssim R$ , sowie  $|d| \lesssim 0.2 \text{ fm}$  verändert sich das Potential auf Grund der Coulomb-Wechselwirkung zwischen den eng beieinander platzierten Teilchen relativ schnell. Im Bereich  $-1.3 \text{ fm} < d < -0.2 \text{ fm}$  ist das Potential nahezu konstant. Man sieht auch in Abb. 5.15, linke Spalte, dass sich der Flussschlauch in der Breite kaum verändert. Im Wesentlichen wird somit die Selbstenergie der neu produzierten Teilchen zum Potential addiert. Der Energiegewinn durch Verringerung des  $q\bar{q}$ -Abstandes wird durch den Energieverlust durch die Vergrößerung des  $Qq$ - bzw. des  $\bar{Q}\bar{q}$ -Abstandes nahezu aufgewogen. Für die parallele Orientierung und  $0.2 \text{ fm} < d < 1.3 \text{ fm}$  nimmt das Potential linear zu. Zum Vergleich zeigen wir das Cornell-Potential  $V_C(d)$  aus Gl. (3.1) mit den Cornell-Parametern von Parametersatz PS-I aus Tab. 4.1 (durchgezogene Linie). Das Potential  $V_{\text{paar}}$  steigt mit einer etwas geringeren Steigung als der  $q\bar{q}$ -Stringspannung  $\tau = 980 \text{ MeV/fm}$ .

Für die Anordnung mit denselben Farben für den inneren und den äußeren String (geschlossene Quadrate) sehen wir wieder die schnellen Veränderungen des Potentials durch die Coulomb-Wechselwirkung bei jeder Teilchen-Annäherung wie zuvor, also bei  $d \gtrsim -R$ ,  $d \lesssim R$  und  $|d| \lesssim 0.2 \text{ fm}$ . Für  $d < 0$ , also wenn das innere  $q\bar{q}$ -Paar parallel zum äußeren orientiert ist, nimmt das Potential ungefähr mit der  $q\bar{q}$ -Stringspannung zu. Zum Vergleich haben wir das an der  $y$ -Achse gespiegelte Cornell-Potential  $V_C(-d)$  mit eingezeichnet (gestrichelte Linie). Das äußere Feld gibt demnach nur einen konstanten Beitrag zum Paarpotential  $V_{\text{paar}}$ . Für  $d > 0.2 \text{ fm}$  kommt es zur Aufspaltung des Strings. Bis zu  $d = 0.6 \text{ fm}$ , nimmt das Potential nahezu linear mit einer ähnlichen Steigung wie der Stringspannung  $\tau$  ab. Für größere Abstände  $d$  knickt das Potential spürbar ab und fällt ungefähr mit der doppelten Stringspannung  $\tau$ . Die strich-punktierte Linie entspricht dem Cornell-Potential, wobei die Stringspannung durch ihr negatives ersetzt wurde. Wenn der Flussschlauch erst in zwei Teilstrings zerfallen ist, dann entspricht das Potential  $V_{\text{paar}}$  tatsächlich dem Potential zweier *unabhängiger* sich verkürzenden Strings.

Da das Paarpotential ab einem kritischen Wert  $d_c$  negativ wird, ist der  $Q\bar{Q}$ -String instabil gegenüber einer  $q\bar{q}$ -Erzeugung gleicher Farbe. Dieser Mechanismus wird gerade vom Lund-Modell [Andersson83, Andersson87, Andersson98] verwendet. Allerdings wird dort angenommen, dass das Potential  $V_{\text{paar}}$  für  $d > 0$  sofort rein linear mit der Stringspannung  $\tau$  abnimmt. Dem liegt die Hypothese eines sehr dünnen Strings konstanter Breite zu Grunde, der in longitudinaler Ausrich-

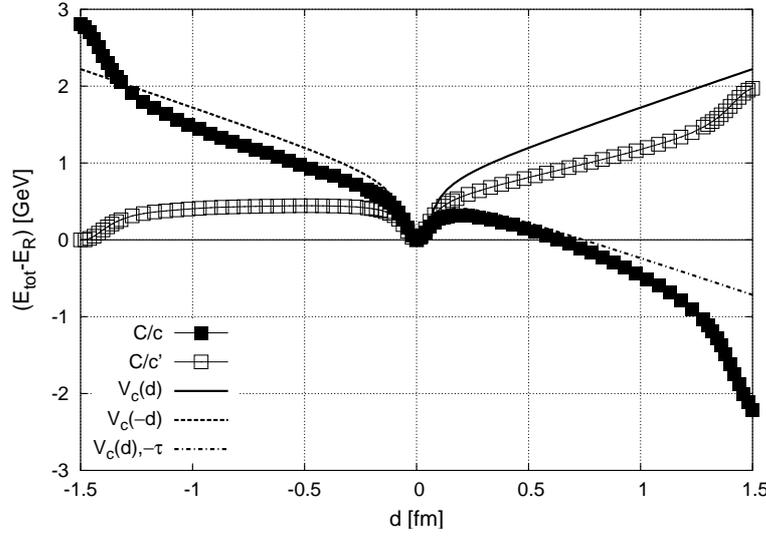


Abbildung 5.16: Das Potential des zusätzlichen  $q\bar{q}$  Quarkpaares im äußeren  $Q\bar{Q}$ -Feld. Das Potential misst die Differenz zwischen der Gesamtenergie und der Energie des reinen  $Q\bar{Q}$ -Strings. Die geschlossenen Quadrate stehen für gleiche Farben und die offenen Quadrate für verschiedene Farben von innerem und äußerem String. Zusätzlich zeigen wir das Cornell-Potential  $V_C(d)$  mit den Werten von PS-I aus Tab. 4.1 (durchgezogene Linie), das an der  $y$ -Achse gespiegelte Cornell-Potential  $V_C(-d)$  (gestrichelte Linie) und  $V_C(d)$  mit  $\tau \rightarrow -\tau$  (strichpunktierte Linie).

tion absolut homogen ist. Coulomb-Effekte für kleine Quarkabstände sowie eine Verbreiterung des Strings bei Verlängerung des Strings, wie wir sie im CDM sehen, werden dort vernachlässigt. Das neue  $q\bar{q}$ -Paar wird bei  $x = 0$  mit einem Abstand  $d = 0$  mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit produziert, der  $Q\bar{Q}$ -String zerfällt sofort in einen  $Q\bar{q}$ - und einen  $q\bar{Q}$ -String und die beiden Teilstrings unterliegen einer Yoyo-artigen Dynamik.

Im CDM sehen wir aber, dass ein mit einem Abstand  $d = 0$  produziertes  $q\bar{q}$ -Paar durch die starke Coulomb-Anziehung in einem gebundenen Zustand ist. Im Paarpotential  $V_{\text{paar}}$  für den Fall gleicher Farben sieht man dementsprechend ein Minimum bei  $d = 0$  (geschlossene Quadrate in Abb. 5.16). Erst wenn diese Coulomb-Barriere überwunden ist, zerfällt der String wirklich. Wir können das Potential als ein Tunnelpotential interpretieren. In Abb. 5.17 betrachten wir dieses Tunnelpotential etwas genauer. Wir beschränken uns hier auf den Fall, in dem der Stringaufbruch möglich ist, also für gleiche Farbkombinationen von innerem und äußerem Quarkpaar und  $d > 0$ . In der Abbildung zeigen wir dieses Potential für verschiedene äußere Quarkabstände  $R$ . Wir sehen, dass mit zunehmendem Abstand  $R$ , der kritische  $q\bar{q}$ -Abstand  $d_c$  zunimmt. In einem naiven Flussschlauch-Modell mit konstantem Querschnitt wäre dieses nicht der Fall. Erst für relativ

große Quarkabstände  $R \geq 1.5 \text{ fm}$  ändert sich die Form und die Ausdehnung des Paarpotentials nur noch langsam (geschlossene Quadrate und offene nach unten zeigende Dreiecke). Wir weisen in diesem Zusammenhang darauf hin, dass auch der einfache Fluss Schlauch noch seine Breite ändert bei Vergrößerung des  $Q\bar{Q}$ -Abstandes  $R$  (vgl. Abb. 4.5). Die Höhe des Paarpotentials dagegen ändert sich bereits für Abstände  $R \geq 1.0 \text{ fm}$  nur noch unwesentlich.

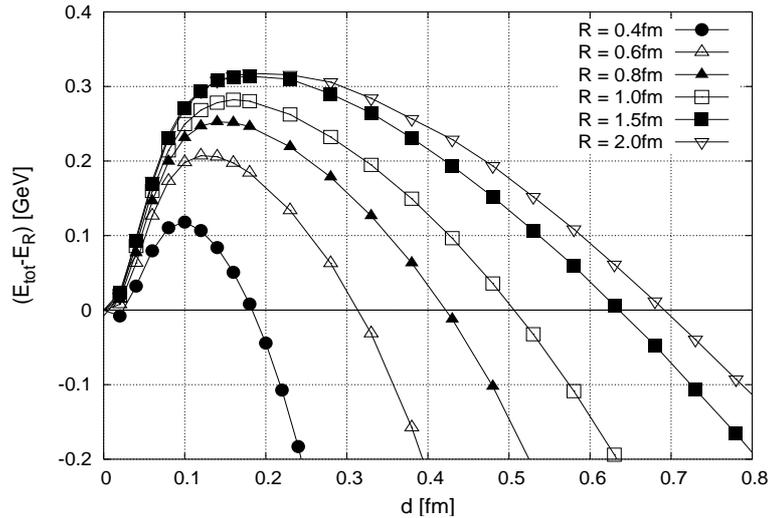


Abbildung 5.17: Das Potential des zusätzlichen  $q\bar{q}$  Quarkpaares im äußeren  $Q\bar{Q}$ -Feld. Das Potential misst die Differenz zwischen der Gesamtenergie und der Energie des reinen  $Q\bar{Q}$ -Strings.

Es erscheint verwirrend, dass das Paarpotential sowohl in Höhe als auch Breite zunimmt mit der äußeren Länge  $R$ . Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein mit  $d = 0$  produziertes  $q\bar{q}$ -Paar durch das Potential tunnelt immer kleiner und damit ebenso die Wahrscheinlichkeit, dass der String reißt. Allerdings haben wir hier zwei Aspekte nicht berücksichtigt. Zum einen wird die Wahrscheinlichkeit, überhaupt ein zusätzliches  $q\bar{q}$ -Paar zu produzieren mit zunehmender Fluss-schlauchlänge immer größer. Und zum anderen wird im Allgemeinen der Prozess der Paarbildung dynamisch ablaufen. Das heißt, dass sich der äußere  $Q\bar{Q}$ -String selbst verändert mit der Zeit. Im Lund-Modell z.B. wird angenommen, dass sich die äußeren Quarks nahezu mit Lichtgeschwindigkeit voneinander fortbewegen bis ihre kinetische Energie vollständig in die Energie des Strings umgewandelt wird. Anschließend bewegen sie sich wieder aufeinander zu und führen die schon oben erwähnte Yoyo-Bewegung aus. Der String durchläuft deshalb dynamisch die in Abb. 5.17 dargestellten Längen und entsprechend ändert sich auch das Paarpotential mit der Zeit. Die absolute Wahrscheinlichkeit für einen Paaraufbruch ist somit durch eine dynamische, zeitlich integrierte Tunnelwahrscheinlichkeit und die von der äußeren Stringlänge gegebene Produktionswahrscheinlichkeit des inneren Paares gegeben.

# Kapitel 6

## Multiquark-Systeme

In diesem letzten Kapitel werden wir uns mit einer Klasse von Konfigurationen mit einer neuen Eigenschaft beschäftigen. Sowohl  $q\bar{q}$ -Mesonen als auch  $qqq$ -Baryonen sind die elementaren Cluster, die innerhalb des Modells möglich sind. Bis auf die im vorigen Kapitel diskutierten Möglichkeiten der Paarbildung und der äußeren Anregung sind diese Cluster absolut stabil. Jedes global farbneutrale Quarksystem mit mehr als drei Teilchen dagegen kann in kleinere Subsysteme zerfallen, die ebenfalls farbneutral sind (s. auch Diskussion von farbneutralen Clustern in [Traxler99b]). Wir haben damit also die Gelegenheit, sowohl die Hadronenbildung aus einem Quarksystem heraus zu studieren, als auch die Wechselwirkung zwischen diesen elementaren Clustern zu untersuchen. Wir werden in diesem Kapitel ausschließlich Modellparameter aus dem Parametersatz PS-I aus Tab. 3.2 verwenden.

### 6.1 Wechselwirkung zwischen Strings

Wir beginnen hier mit dem einfachsten System mit der Möglichkeit des Zerfalls in farbneutrale Subcluster. Dieses besteht aus je zwei Quarks und zwei Antiquarks mit den entsprechenden Antifarben. Wie bereits beim Stringaufbruch durch Paarbildung in Abschnitt 5.2 besprochen, gibt es die beiden Möglichkeiten, dass die beiden Strings von derselben Farbe sind und dass sie verschiedene Farben haben. Wir werden im Folgenden die Struktur der Flussschläuche und das entsprechende String-String-Potential untersuchen. Dabei beschränken wir uns auf solche Systeme, in denen nur eine Farbe und die entsprechende Antifarbe auftreten.

Dazu wollen wir zunächst die räumlichen Freiheitsgrade diskutieren. Das String-String-System ist schematisch in Abb. 6.1 dargestellt. Die beiden Strings haben die Längen  $R = |\vec{R}|$  bzw.  $r = |\vec{r}|$ , wobei  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  die Orientierung der Farbdipole angeben. Der Abstand der Schwerpunkte der beiden Strings ist durch die Verschiebung  $\vec{D}$  gegeben. Der Vektor  $\vec{R}$  definiert die  $x$ -Richtung und die

$xy$ -Ebene wird durch die beiden Vektoren  $\vec{R}$  und  $\vec{D}$  aufgespannt (linker Teil von Abb. 6.1). Die relative Orientierung der Strings lässt sich dann vollständig durch die Angabe der Längen der Strings  $R$  und  $r$ , sowie des Abstands  $D = |\vec{D}|$  und drei Winkel festlegen. Der erste Winkel ist der zwischen  $\vec{R}$  und  $\vec{D}$ , also  $\Theta = \angle(\vec{R}, \vec{D})$ . Der zweite Winkel ist der polare Winkel zwischen  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$ , d.h.  $\vartheta = \angle(\vec{R}, \vec{r})$ . Der dritte Winkel ist dann der azimutale Winkel  $\varphi$  bei Drehungen von  $\vec{r}$  um die Richtung von  $\vec{R}$  (rechter Teil von Abb. 6.1). Für  $\varphi = 0$  liegen also alle Teilchen in der  $xy$ -Ebene. Für  $\vartheta = 0$  bzw.  $\vartheta = \pi$  sind die beiden Strings parallel bzw. entgegengesetzt parallel zueinander. Für  $\vartheta = \pi/2$  sind die beiden Strings orthogonal zueinander. In den folgenden Rechnungen betrachten wir nur die Wechselwirkung zwischen gleich langen Strings  $R = r$  von derselben Farbe.

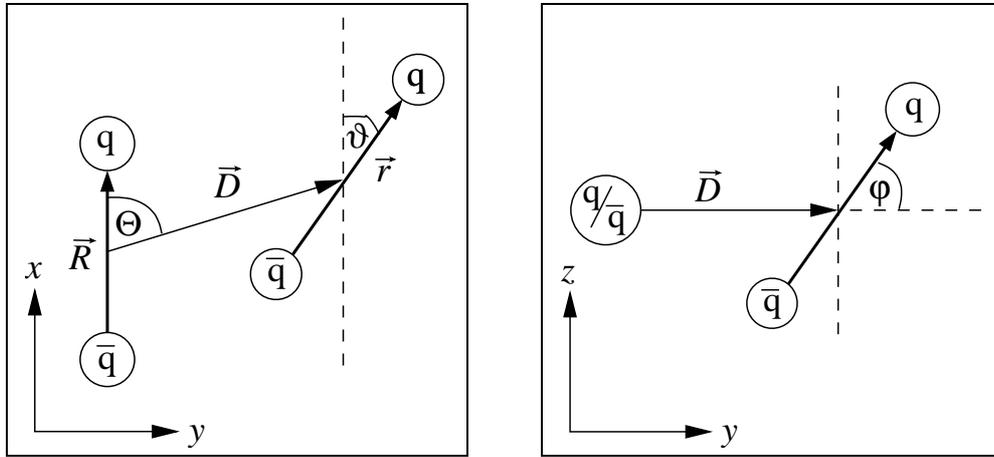


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Koordinaten im String-String-System. Projektion auf die  $xy$ -Ebene (links) und auf die  $yz$ -Ebene (rechts). Zwei Strings sind um  $\vec{D}$  gegeneinander verschoben. Der Verschiebungsvektor  $\vec{D}$  und die Stringachse  $\vec{R}$  liegen in der  $xy$ -Ebene. Der zweite String ist bzgl. der Richtung  $\vec{R}$  um den polaren Winkel  $\vartheta$  und den azimutalen Winkel  $\varphi$  verdreht.

### 6.1.1 4-Teilchen Flussschläuche

Die Wechselwirkung zwischen den  $q\bar{q}$ -Flussschläuchen wird am deutlichsten in Konfigurationen mit ausgewählter hoher Symmetrie. Wir zeigen zunächst die Flussschläuche für  $\vartheta = (0, \pi)$  und  $\varphi = 0$ , also für zwei parallel und zwei antiparallele Flussschläuche. Diese Rechnung wurden mit anderen Modellparametern bereits von [Loh96] und [Traxler99b] durchgeführt. In [Loh96] war allerdings die Numerik noch nicht auf 3-dimensionale Rechnungen ausgelegt, und hat dadurch die Feldgleichungen nur in einer sehr groben Näherung gelöst. Die verwendeten Parameter in [Loh96] und [Traxler99b] führten darüber hinaus zu Flussschläuchen mit einem Radius von (1-2) fm und einer charakteristischen Reichweite der String-

Wechselwirkung von bis zu 4 fm. Diese Reichweite liegt in der Größenordnung von mittelgroßen Kernradien und überschreitet bei weitem den mittleren Nukleonabstand in einem Atomkern. Wir werden sehen, dass auch in unseren Rechnungen die Reichweite zwischen Strings in der Größenordnung des Flussschlauchradius  $\rho \approx 0.35$  fm liegt, allerdings von der Stringlänge und besonders von der relativen Orientierung der Strings abhängt.

In Abb. 6.2 zeigen wir die Energiedichte des Systems von zwei jeweils  $R = 1.0$  fm langen Strings. In der linken Spalte sind die Strings parallel orientiert und in der rechten antiparallel. Die Quarks (Antiquarks) sind durch weiße Punkte (weiße Kreise) dargestellt. Für große Stringabstände  $D > R = 1.0$  fm ist die Energiedichte unabhängig von der relativen Orientierung und man erhält zwei unabhängige  $q\bar{q}$ -Strings. Nähern sich die beiden Strings aneinander an, dann verhalten sich die beiden Konfigurationen unterschiedlich. In der parallelen Ausrichtung überlappen sich die beiden Bags allmählich. Für  $D \approx 1.0$  fm findet der erste Kontakt statt und man sieht (mittleres Bild links), dass sich die Energiedichte über einen größeren Bereich verteilt und gleichzeitig die Energiedichte in der Mitte eines jeden  $q\bar{q}$ -Paares leicht absinkt. Für Abstände  $D < 0.5$  fm befinden sich alle Quarks in einem gemeinsamen Bag. Für  $D \rightarrow 0$  nähert sich die Konfiguration der in Abb. 5.14 oben links an.

In der antiparallelen Ausrichtung richten sich die Flussschläuche ab einem Abstand  $D \leq R$  transversal zu ihrer ursprünglichen Ausrichtung aus. Dann sind sich die Quarks und Antiquarks aus den ursprünglich getrennten Strings näher als die Stringlänge  $R$  und es bilden sich zwei neue Strings mit der Länge  $D$ . Für die symmetrische Situation  $D = R$  ist das System vollständig unentschieden bzgl. der Ausrichtung seiner Strings und die Flussschläuche transportieren jeweils die Hälfte des elektrischen Flusses einer Quarkladung zu beiden Antiquarks. Für kleinere Abstände  $D$  verkürzen sich die neu ausgerichteten Strings mit  $D$  und für  $D \rightarrow 0$  verschwindet die Energiedichte überall. Dieses Phänomen des String-Flips wird im sog. String-Flip-Modell angenommen [Lenz86]. Wir weisen darauf hin, dass sich die Ausrichtung der Strings automatisch aus der Lösung der CDM-Feldgleichungen ergibt. Eine analoge Rechnung wurde von Suzuki et al. [Kodama97] im Modell des dualen Supraleiters durchgeführt. In diesem Modell benötigt man noch als zusätzliche Information die Lage des Dirac-Strings [Dirac31, Dirac48], der die Ausrichtung der Flussschläuche bestimmt. Im dualen Supraleiter ergibt sich die Ausrichtung demnach nicht automatisch.

Die symmetrische Anordnung aus Abb. 6.2 (Mitte, rechts) untersuchen wir in Abb. 6.3 noch etwas eingehender. Dazu halten wir  $D = R$  fest und variieren die Stringlänge  $R$ , d.h. wir verändern die Länge des Quadrats, das aus den Teilchen gebildet wird. Für  $R = 0.5$  fm hat das System noch gar keine separaten Flussschläuche ausgebildet, da sich alle Flussschläuche noch weitgehend überlappen. Aus Symmetriegründen verschwindet die elektrische Energiedichte bei  $(x, y) = 0$ , womit sich das Minimum im Zentrum der Konfiguration erklärt. Für Längen  $R \geq 1.0$  fm sieht man sehr schön die Quadratsymmetrie der Flussschläuche und

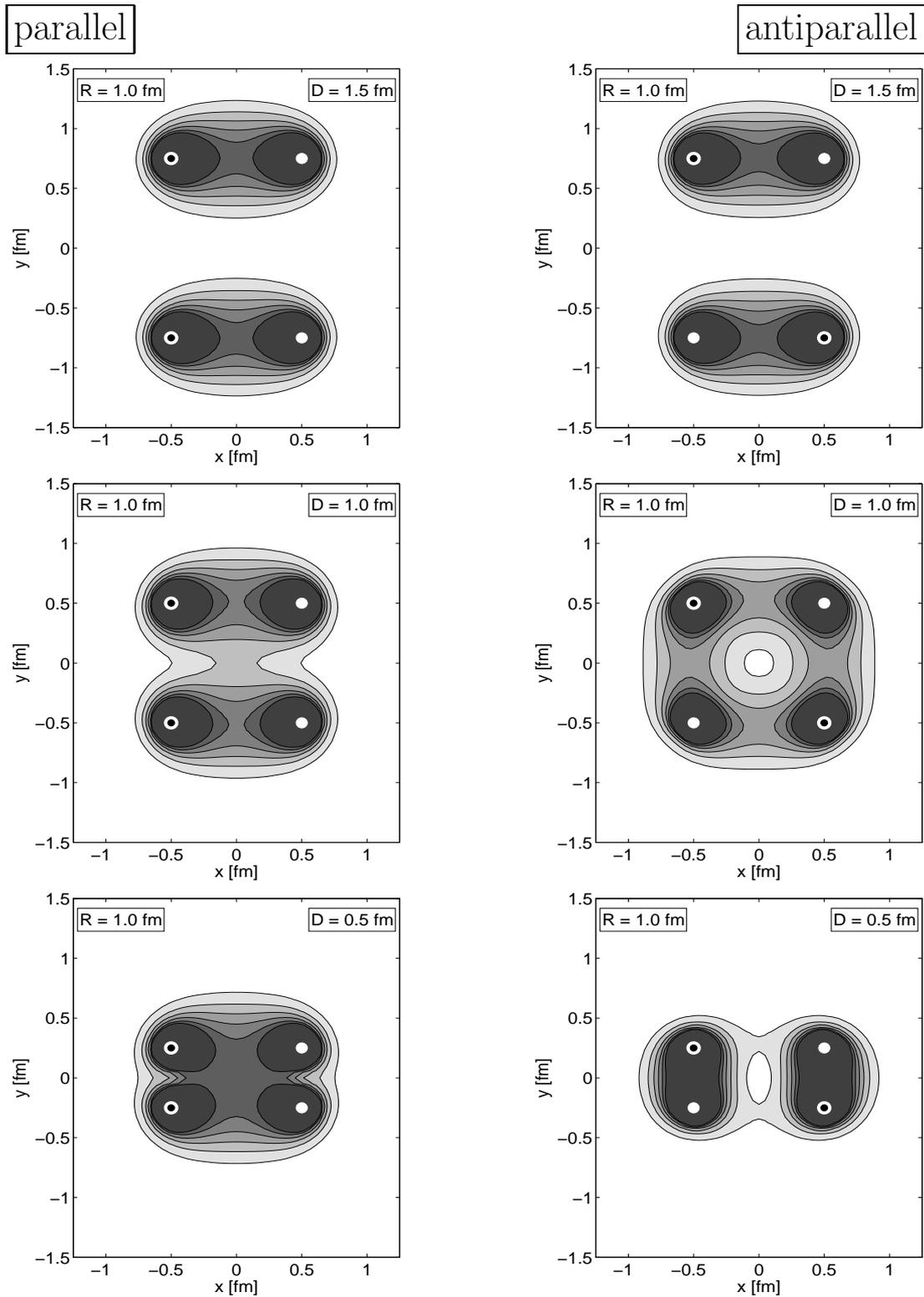


Abbildung 6.2: Zwei Strings der Länge  $R = 1$  fm für verschiedene Abstände  $D$ . Links: parallel orientiert, rechts: entgegengesetzt parallel orientiert.

für  $R \geq 1.5$  fm sind die Flussschläuche so weit voneinander entfernt, dass im 4-Teilchen Zentrum die Energiedichte vollständig verschwindet.

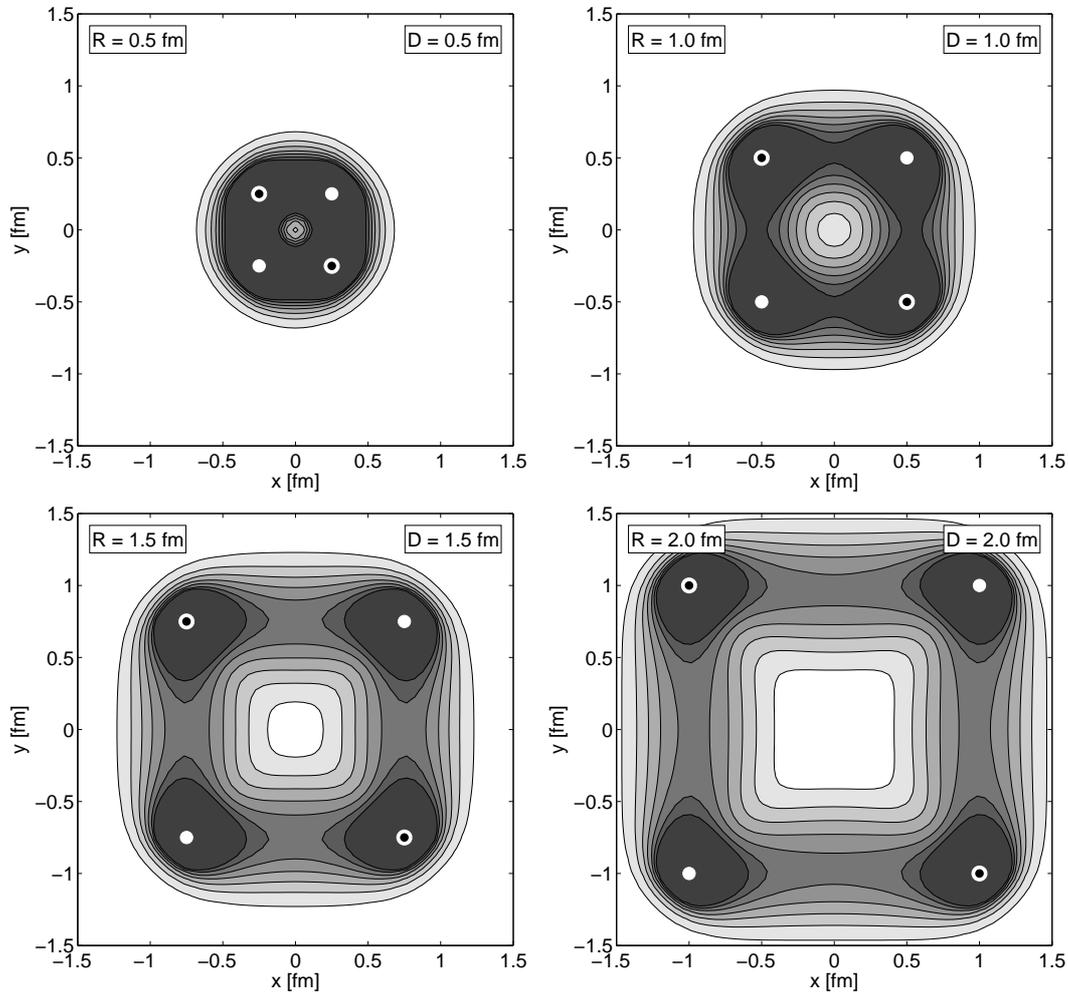


Abbildung 6.3: Die Energiedichte zweier entgegengesetzt parallel orientierter Flussschläuche. Abstand und Länge der Strings sind gleich,  $D = R$ . Von oben links nach unten rechts:  $R = (0.5 \text{ fm}, 1.0 \text{ fm}, 1.5 \text{ fm}, 2.0 \text{ fm})$ . Die Konturlinien sind äquidistant im Abstand von  $0.2 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ , beginnend bei  $0.2 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ .

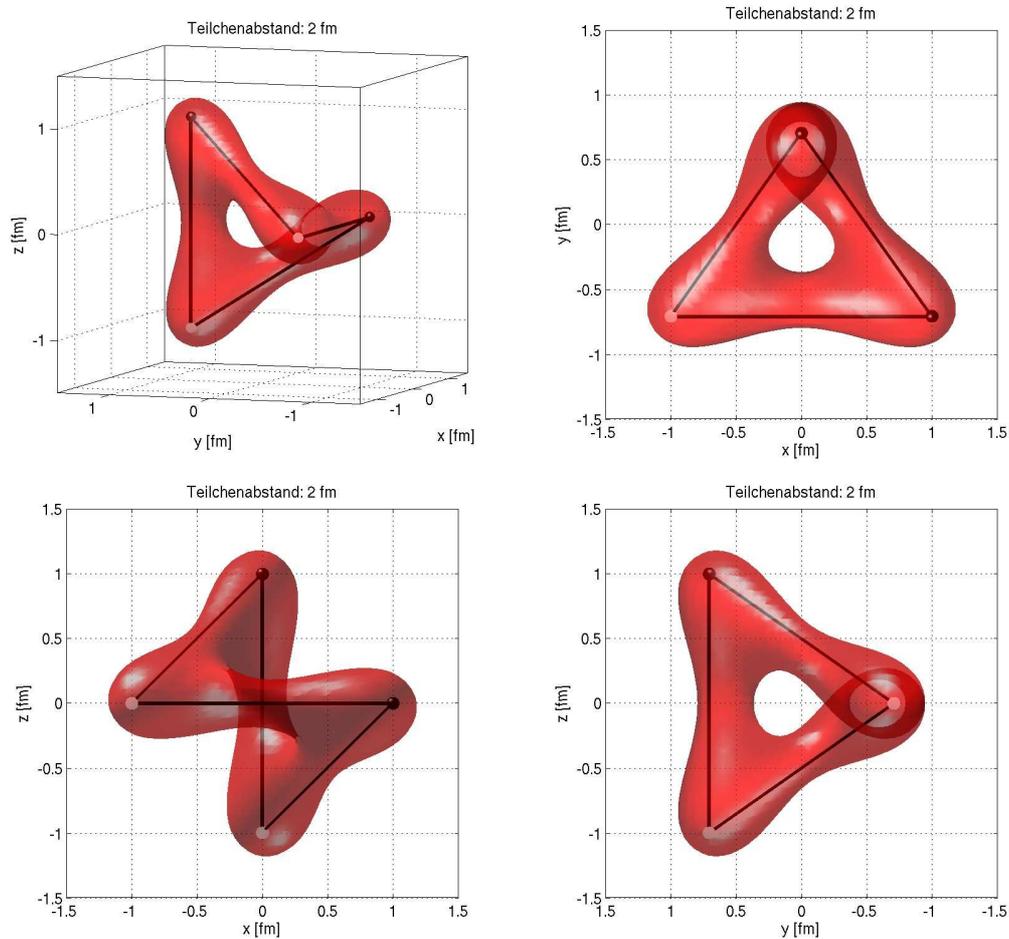


Abbildung 6.4: Zwei 2.0 fm lange Strings, die senkrecht zueinander orientiert sind. Die Teilchen bilden ein regelmäßiges Tetraeder, so dass alle Teilchenabstände identisch sind. Zu sehen ist die Äquipotentialfläche des Dielektrikums bei  $\kappa = 0.3$ . Der Fluss jedes Quarks (dunkle Kugeln) verteilt sich gleichmäßig auf zwei getrennte Flussschläuche zu je einem Antiquark (weiße Kugeln). Die Abbildungen zeigen dieselbe Konfiguration in verschiedenen Ansichten. Die Linien geben die gedachte direkte Verbindung der Teilchen an.

Eine noch symmetrischere Situation ergibt sich, wenn wir die Teilchen auf den Ecken eines regelmäßigen Tetraeders verteilen. Wir wählen also  $\Theta = \vartheta = \varphi = \pi/2$ , sowie  $D = R/\sqrt{2}$ . In dieser Situation sind alle Teilchen gleich weit voneinander entfernt. Diese Konfiguration ist darüber hinaus die erste in dieser Arbeit, in der die Teilchen *nicht* gleichzeitig in einer Ebene liegen. Wir zeigen in Abb. 6.4 den Fall  $R = 2.0$  fm aus verschiedenen räumlichen Perspektiven. Dargestellt ist die Äquipotentialfläche der dielektrischen Funktion bei  $\kappa = 0.3$ . Man sieht auch hier, dass von jedem Quark (schwarzer Punkt) zwei Flussschläuche zu beiden Antiquarks ausgebildet werden. Diese laufen fast parallel zu den Tetraederkanten,

die wir als schwarze Linien mit eingezeichnet haben. Die Flussschläuche werden nur leicht in das Zentrum des Tetraeders gezogen. Dieses ist qualitativ genau wie bei dem planaren Analogon in Abb. 6.3 rechts.

## 6.2 Das 4-Quark Potential

Für die oben gezeigten 4-Teilchen Konfigurationen bestimmen wir nun die Gesamtenergie  $E_{4q}$  und das Potential  $V_4$  des 4-Teilchen-Zustands. Unter dem Potential  $V_4$  verstehen wir hier die Differenz der Gesamtenergie des 4-Teilchen-Zustands und der Gesamtenergie zweier äquivalenter isolierter  $q\bar{q}$ -Strings.

$$V_{4q} = E_{4q} - \min\{(E_{q_1\bar{q}_1} + E_{q_2\bar{q}_2}), (E_{q_1\bar{q}_2} + E_{q_2\bar{q}_1})\} \quad (6.1)$$

Das heißt, wir suchen in der 4-Quark-Konfiguration die beiden farbneutralen  $q\bar{q}$ -Subcluster mit minimaler Energie. Beispielsweise sind dies in den beiden oberen Konfigurationen von Abb. 6.2 zwei Strings der Länge  $R$ , in der Konfiguration unten links in derselben Abbildung ebenfalls zwei Strings der Länge  $R$  und in der Konfiguration unten rechts zwei Strings der Länge  $D$ . Bei der mittleren Konfiguration auf der rechten Seite (und allen Konfigurationen in Abb. 6.3 und Abb. 6.4) gibt es zwei verschiedene, energetisch entartete Möglichkeiten, diese Subcluster zu bilden. Das Potential  $V_{4q}$  ist bzgl. der Koordinaten aus Abb. 6.1 symmetrisch unter den Transformationen  $(\Theta, \vartheta, \varphi) \rightarrow (\Theta, \vartheta, 2\pi - \varphi)$  und  $(\Theta, \vartheta, \varphi) \rightarrow (\pi - \Theta, \vartheta, \pi + \varphi)$ .

Die Energie jedes einzelnen  $q\bar{q}$ -Strings könnten wir mit dem Cornell-Potential aus Gl. (3.1) und den Parametern aus Tab. 4.1 bestimmen. Allerdings sind wir durch die Differenz in Gl. (6.1) sehr sensitiv auf kleine numerische Schwankungen in der Gesamtenergie  $E_{4q}$ , die sich durch Randeffekte auf dem numerischen Gitter ergeben. Wir bestimmen deshalb für jede Konfiguration sowohl die 4-Teilchen Energie als auch die Energien der beiden 2-Teilchen-Zustände. Durch die Differenzbildung löschen sich die unphysikalischen Selbstenergien der 4 Teilchen gerade aus, so dass wir die Wechselwirkung genauer studieren können.

Zunächst aber zeigen wir in Abb. 6.5 die Gesamtenergie der Konfigurationen aus Abb. 6.2, also für die planaren Konfigurationen mit paralleler (links) bzw. antiparalleler Ausrichtung (rechts). Die Stringlänge beträgt hier  $R = 1.0$  fm und wir variieren den String-String-Abstand  $D$ . In der Abbildung zeigen wir sowohl die Gesamtenergie, als auch die verschiedenen Energieanteile des Systems. Von der Gesamtenergie haben wir die Energie  $E_\infty = E_{4q}|_{D \rightarrow \infty}$  abgezogen, das ist die Energie der sehr weit voneinander entfernten Strings. Im parallelen Fall entspricht das gerade dem 4-Teilchen-Potential  $V_{4q}$ . Die einzelnen Energieanteile sind zur besseren Sichtbarkeit um konstante Werte gegeneinander verschoben.

Die Gesamtenergie (durchgezogene Linie) zeigt im parallelen Fall (links) ein absolutes Minimum bei  $D \approx 0.4$  fm. Der starke Anstieg für  $D \rightarrow 0$  liegt an

der Coulombabstoßung der sich annähernden und gleichnamig geladenen Quarks. Dieser Anstieg zeigt sich deshalb nur noch in der elektrischen Energie (gestrichelte Linie). Die Volumenenergie (strich-punktierte Linie) hat ihr absolutes Minimum erst bei  $D = 0$ , also wenn die beiden Strings direkt aufeinander liegen. Wenn die beiden Strings voneinander getrennt werden, vergrößert sich das Bagvolumen und damit auch die Volumenenergie. Diese wird maximal bei  $D \approx 1.0$  fm und nimmt dann den asymptotischen Wert der beiden voneinander isolierten Strings an. Das Vergrößern des Bagvolumens führt zum Absenken der elektrischen Energie bei intermediären Abständen. Der elektrische Fluss der beiden Quarkladungen verteilt sich auf eine größere Bag-Querschnittsfläche und die elektrische Energie entspannt sich. Die Oberflächenenergie (gepunktete Linie) dagegen verringert sich nahezu monoton bei Annäherung der beiden Strings. Die qualitative Form des Potentials findet sich bereits in [Loh97b] und [Traxler99b], obwohl dort das Minimum auf Grund der sehr viel breiteren Bag-Strukturen nicht so ausgeprägt ist. Das Minimum in der Gesamtenergie bei  $D \approx 0.4$  fm deutet auf einen gebundenen 4-Quark-Zustand hin. Dieses ist qualitativ anders als bei elektrischen Dipolen, die allein über das Coulomb-Potential miteinander wechselwirken. Dort findet man ein rein repulsives Potential. Allerdings ergibt sich das Energieminimum nur durch die Zwangsbedingung der konstanten Stringlängen von hier  $R = 1$  fm.

Bei der antiparallelen Ausrichtung (rechts) sehen wir natürlich qualitativ ein anderes Verhalten. Wenn sich die Strings auf Abstände  $D \approx 1.0$  fm annähern, bilden sich erst die zusätzlichen Flussschläuche zu den jeweils anderen Quarks aus und anschließend verschwinden die ursprünglichen Strings bei weiterer Annäherung. Für Abstände  $D < 1.0$  fm bleiben zwei sich stetig verkürzende Strings übrig und für  $E_{4q}$  ergibt sich damit ungefähr das doppelte  $q\bar{q}$ -Potential. Auch in diesem Fall zeigt die Volumenenergie ein lokales Maximum, wenn die Bags gerade aneinander stoßen.

In Abb. 6.6 zeigen wir jetzt das 4-Quark-Potential  $V_{4q}$  aus Gl. (6.1), wieder für die parallele (links) und die antiparallele Ausrichtung (rechts). Die verschiedenen Kurven gehören zu jeweils anderen Stringlängen  $R$ . Links sieht man wie sich das absolute Minimum des Potentials für größere Stringlängen absenkt und zu größeren Gleichgewichtsabständen  $D_0$  verschiebt. Der Gleichgewichtsabstand steigt von  $D_0 \approx 0.2$  fm bei  $R = 0.12$  fm auf  $D_0 \approx 0.4$  fm bei Stringlängen  $R > 0.6$  fm.  $D_0$  steigt für größere  $R$  nicht weiter an. Dieser charakteristische Wechselwirkungs-Abstand entspricht gerade dem Radius des einzelnen  $q\bar{q}$ -Strings. Wie zu erwarten skaliert das Minimum  $V_{4,\min} = V_{4q}(D = D_0)$  mit der Stringlänge  $R$ . Beim Verschmelzen längerer Flussschläuche gewinnt man eben mehr Energie. Wir haben das Potential-Minimum  $V_{4,\min}$  in Abb. 6.7 als Funktion der Stringlänge dargestellt (offene Dreiecke).

Bei der antiparallelen Konfiguration (rechts in Abb. 6.6) sieht man eine typische Spitze am Potential-Minimum bei  $D = R$ . Diese Spitze entspricht gerade dem String-Flip. Für Werte  $D > R$  erhält man zwei Strings der Länge  $R$  und für Werte  $D < R$  zwei Strings der Länge  $D$ . Das Verschwinden des Potentials

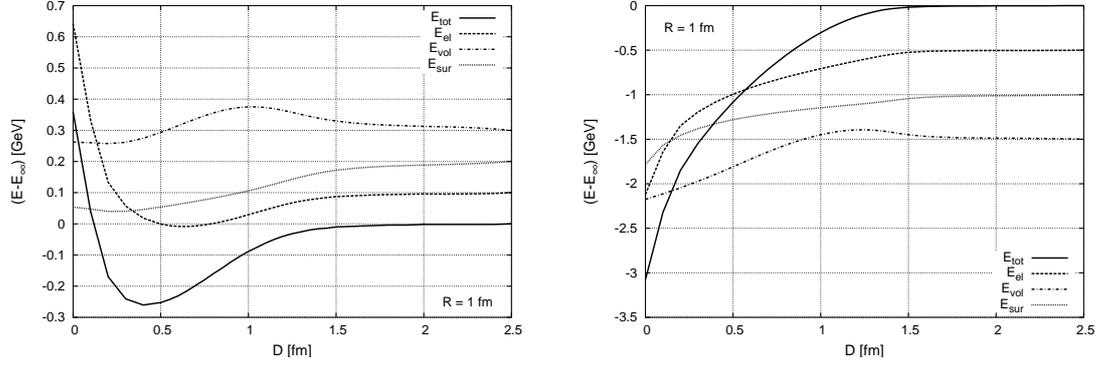


Abbildung 6.5: Die reduzierte Gesamtenergie des 2-String-Zustand als Funktion des Abstandes  $D$  für eine Stringlänge von jeweils  $R = 1$  fm. Die Teilenergien sind um einen konstanten Beitrag gegeneinander verschoben. Links: parallele Orientierung. Bei  $D \leq 1$  fm beginnen die Bags sich zu überlappen und die Volumenenergie ist größer als die der beiden getrennten Systeme. Für kleine Abstände  $D$  erkennt man die Coulombabstoßung der Teilchen untereinander. Rechts: entgegengesetzt parallel Orientierung. Für Abstände  $D \leq 1$  fm bilden sich die Flussschläuche zum jeweils anderen Antiteilchen aus und das Potential entspricht dem doppelten  $q\bar{q}$ -Potential.

für  $D \rightarrow 0$  zeigt, dass sich das Potential der 4-Quark-Konfiguration wie zwei unabhängige Strings verhält, deren Gesamtenergie mit  $D$  verschwindet. Suzuki et al. [Kodama97] haben das String-Flip-Potential im Modell des dualen Supraleiters bestimmt und qualitativ dasselbe Ergebnis erhalten. Allerdings war das Minimum für Stringlängen von  $R = 0.12$  fm bis  $R = 0.24$  fm nur ca. 100 MeV tief im Gegensatz zu unseren 300 MeV. SU(2)-Gitterrechnungen [Green93] zeigen für das String-Flip-Potential ebenfalls Potentialtiefen von ca. 100 MeV.

Auch für diese Konfiguration haben wir das Minimum des Potentials als Funktion der Stringlänge  $R$  in Abb. 6.7 dargestellt (gefüllte Quadrate). In Analogie zum Cornell-Potential in Gl. (3.1) für das  $q\bar{q}$ -System könnten wir die 4-Teilchen Energie für die Konfiguration mit  $R = D$  (vgl. Abb. 6.3) durch

$$E_{4q} = 4C_F^{\text{ab}} E_0 - C_F^{\text{ab}} \left( 4\frac{\alpha}{R} - 2\frac{\alpha}{\sqrt{2}R} \right) + 4\tau_4 R \quad (6.2)$$

parametrisieren. Hier sind  $E_0$  und  $\alpha$  die aus dem Cornell-Fit extrahierten Größen in Tab. 4.1 und  $\tau_4$  eine effektive Stringspannung. Der erste Term in Gl. (6.1) spiegelt die Selbstenergie der vier Teilchen wieder, der zweite die paarweise Coulomb-Anziehung bzw. -Abstoßung und der dritte charakterisiert die linear anwachsende Confinement-Energie. Die effektive Stringspannung können wir folgendermaßen abschätzen. Der elektrische Fluss einer Quarkladung spaltet sich symmetrisch in je zwei Flussschläuche auf. Der elektrische Fluss in jedem der Flussschläuche ist

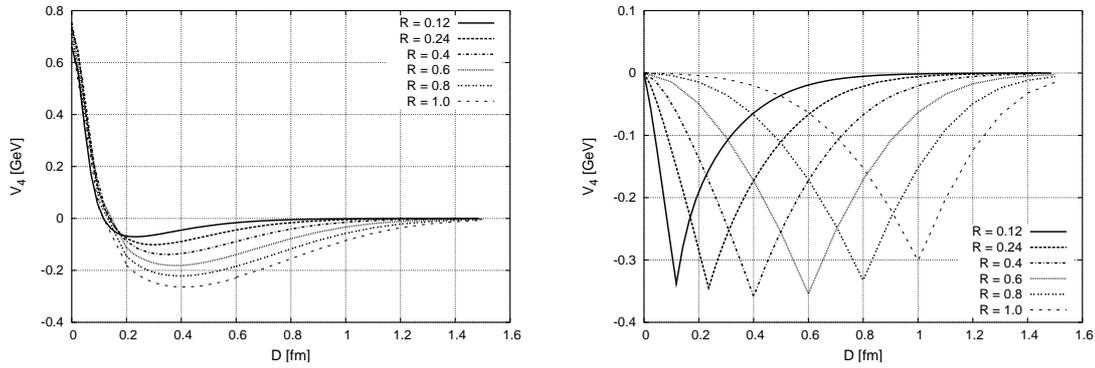


Abbildung 6.6: Das 4-Quark-Potential für Strings in der parallelen (links) und der antiparallelen Ausrichtung (rechts) für verschiedene Stringlängen  $R$ . Bei der parallelen Ausrichtung nimmt das Minimum im Potential mit der Stringlänge zu, während bei der antiparallelen Ausrichtung das Minimum maximal ist bei  $R \approx 0.5$  fm.

demnach nur durch die halbe Quarkladung gegeben. In Abschnitt 3.1.4 haben wir gesehen, dass die  $q\bar{q}$ -Stringspannung  $\tau$  mit der Ladung bzw. mit  $g_s \sqrt{C_F^{ab}}$  skaliert. Wenn sich die vier Flussschläuche in der antiparallelen Konfiguration nur durch die Reduzierung der effektiven Quarkladung gegenseitig beeinflussen, dann erwarten wir, dass die effektive Stringspannung durch  $\tau_4 = \tau/2$  gegeben ist. Für sehr große Teilchenabstände  $R$  sollte demnach das Potential abflachen und verschwinden. In Abb. 6.3 haben wir gesehen, dass sich die Flussschläuche für  $R > 1.0$  fm kaum mehr überlappen. Trotzdem sieht man für solch große Abstände in dem Potential (geschlossene Quadrate in Abb. 6.7) noch keine Sättigung, sondern ein nahezu linear anwachsendes Potential. Dasselbe finden wir für die Tetraeder-Konfiguration aus Abb. 6.4. Auch hier spaltet sich der elektrische Fluss eines Quarks auf je zwei identische Flussschläuche auf. Und auch hier wächst das Potential  $V_{4q}(R)$  für Quarkabstände  $R > 1.0$  fm linear an (schwarze Punkte in Abb. 6.7). Leider können wir im Rahmen der Numerik nur sehr schwer zu noch größeren Quarkabständen gehen. Wir bemerken hier noch einmal, dass das Potential  $V_{4q}$  die kleine Differenz (wenige Zehntel GeV) von zwei großen Energien ist (einige GeV) ist. Die numerischen Schwankungen, die wir im Algorithmus zulassen müssen, wirken sich hier deshalb besonders drastisch aus.

Für kleine Quarkabstände dagegen bildet sich ein gemeinsamer Bag aus, in dem sich die elektrischen Felder ausbreiten. Die Bagenergie und die elektrische Energie werden dadurch im Vergleich mit der Energie zweier unabhängiger Strings derselben Stringlänge abgesenkt. In der planaren, antiparallelen Konfiguration erhält man dadurch ein Minimum im Potential bei  $R \approx 0.4$  fm und bei der Tetraeder-Konfiguration bei  $R \approx 0.8$  fm.

Dieses Minimum im Potential  $V_{4q}$  bedarf allerdings einer weiteren Diskussion. Im Rahmen unseres klassischen Modells ist die absolut stabile Konfiguration je-

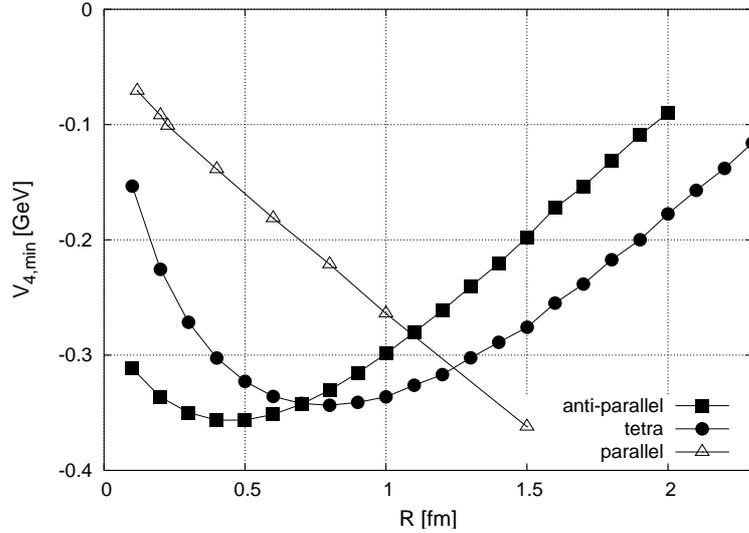


Abbildung 6.7: Das Minimum des 4-Quark-Potentials als Funktion der Stringlänge  $R$ . Im parallelen Fall (offene Dreiecke) skaliert das Minimum mit der Stringlänge. Im antiparallelen Fall (Quadrate) und in der Tetraeder-Konfiguration (Kreise) gibt es dagegen ein Minimum im Potential.

des farbneutralen Vielteilchensystems die, in der sich alle Teilchen am selben Ort befinden. Dann löschen sich die Farbladungen lokal gegenseitig aus, so dass alle elektrischen Felder verschwinden und auch das skalare Feld seinen Vakuumwert  $\sigma_{\text{vac}}$  annimmt. Dies liegt daran, dass es in dem Modell keine repulsive Wechselwirkung zwischen den Quarks außer der Coulombabstoßung gibt. Das Minimum im String-String-Potential erhält man deshalb nur, indem man die Länge  $R$  bzw.  $D$  zwischen den Quarks einfriert. Bei der Betrachtung des 4-Quark-Potentials sind die elementaren Objekte deshalb die Strings einer festen Länge, die miteinander wechselwirken und nicht die Quarks. Trotzdem ist die damit verbundene Bindung zwischen den Strings ein interessanter Effekt, der in dem Confinement-Verhalten des Modells zu suchen ist und der sich nicht in der reinen Elektrodynamik zweier äquivalenter elektrischer Dipole findet.

Der Vollständigkeit halber schließen wir die 4-Quark Analyse ab, indem wir das Potential  $V_{4q}$  für weitere Orientierungen ( $\Theta, \vartheta, \varphi$ ) in Abb. 6.8 zeigen. Von oben nach unten ändert sich der Winkel  $\Theta = (\pi/2, 3\pi/8, \pi/4, \pi/8)$ . In der linken Spalte halten wir den azimutalen Winkel  $\varphi = 0$  fest und variieren  $\vartheta = (0, \pi/2, \pi)$  in jedem Bild, und in der rechten halten wir den polaren Winkel  $\vartheta = \pi/2$  fest und variieren  $\varphi = (0, \pi/2, \pi)$ . Die Abhängigkeit von  $\Theta$  bei festem  $\varphi = 0$  (links) ist nur bei  $\vartheta = \pi/2$  (Dreiecke) ausgeprägt. Wir beobachten hier bei  $\Theta = \pi/4$  eine zusätzliche Spitze im Potential bei  $D = R/\sqrt{2} \approx 0.7$  fm. Dies liegt daran, dass bei dieser Konfiguration gerade ein Quark und ein Antiquark aufeinander liegen. Damit bestehen sowohl die 4-Quark-Konfiguration als auch die unabhängigen  $q\bar{q}$ -

Konfigurationen nur aus genau einem  $q\bar{q}$ -String und sind somit identisch, so dass  $V_{4q} = 0$  gilt. Die Abhängigkeit von  $\vartheta$  ist natürlich relativ groß, weil dieser Winkel über die Möglichkeit des String-Flips entscheidet. Bei  $\vartheta = 0$  (Quadrate) gibt es keinen String-Flip (deshalb auch die glatten Kurven).

### 6.3 Quarkphasen

Der letzte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit ungeordneten Quarksystemen. Wir betrachten die Struktur der Flussschläuche und die entsprechende Energie in Abhängigkeit von der Teilchenzahl. Bei kleinen Quarkzahlen bzw. kleinen Quarkdichten zeigte sich, dass sich wohldefinierte Bags und Flussschläuche ausbilden, die sich scharf gegeneinander abgrenzen. Wenn sich die Teilchendichte erhöht, erwarten wir, dass sich die Bags überlappen und miteinander verschmelzen. Wir können nicht erwarten, dass wir innerhalb unseres Modells Bags in einem stabilen Gleichgewicht beschreiben können. Stabil in dem Sinne, dass sich z.B. baryonische 3-Quark Zustände in einem bestimmten Gleichgewichtsabstand zu Kernmaterie anordnen. Die Bags können sich auf Grund der fehlenden Repulsion nicht im Gleichgewicht zueinander halten. Wir können aber untersuchen, wie sich die Flussschläuche bei zufällig angeordneten Quarks anordnen, ob und bis zu welchen Teilchendichten unterscheidbare Bags entstehen und ob es einen Übergang zu einem Quarkgas gibt, in dem sich beliebig viele Quarks in einem gemeinsamen Bag aufhalten.

Wir simulieren den Übergang zu solch einem Quarkgas folgendermaßen. Für eine feste Zahl von Teilchen bestimmen wir zufällig die Position und die Farbe der Quarks. Die Wahl der Farben geschieht auf zwei verschiedene Weisen. Einerseits weisen wir für jede ausgewürfelte Quarkfarbe die entsprechende Antifarbe einem weiteren Antiquark zu. Auf diese Weise erhalten wir ein Quarkensemble mit verschwindender Baryonzahl. Andererseits wählen wir immer gleichzeitig drei Quarks und weisen ihnen die Farben  $r$ ,  $g$  und  $b$  zu. Damit können wir Quarkphasen mit hoher Baryonzahl simulieren. Alle Quarks und Antiquarks verteilen wir zufällig im numerischen Simulationsvolumen. Durch diese Wahl der Farben ist das Teilchenensemble global farbneutral. Wir betrachten also Systeme mit dem Farbinhalt von  $N_m$  Mesonen bzw.  $N_b$  Baryonen mit  $N = 2N_m$  bzw.  $N = 3N_b$  Quarks und Antiquarks. Für jede Teilchenzahl bestimmen wir mehrere verschiedene Ensembles mit zufälliger Verteilung im Farb- und im Ortsraum. Für Teilchenzahlen bis zu  $N = 100$  betrachten wir je 20 verschiedene Ensembles, für  $100 < N < 1000$  je 10 Ensembles und für größere  $N$  nur ein bis zwei. Für jede Konfiguration bestimmen wir entsprechend der Feldgleichungen die Feldkonfiguration und die Energie des Systems. Das ganze wiederholen wir für verschiedene Teilchenzahlen. Wir wählen Teilchenzahlen von  $N_m = N_b = 2$  bis zu Teilchenzahlen von  $N = 1250$  und verteilen diese zufällig in einem Volumen  $V = (5 \text{ fm})^3 = 125 \text{ fm}^3$ . Das numerische Gitter hat dabei eine etwas größere Aus-

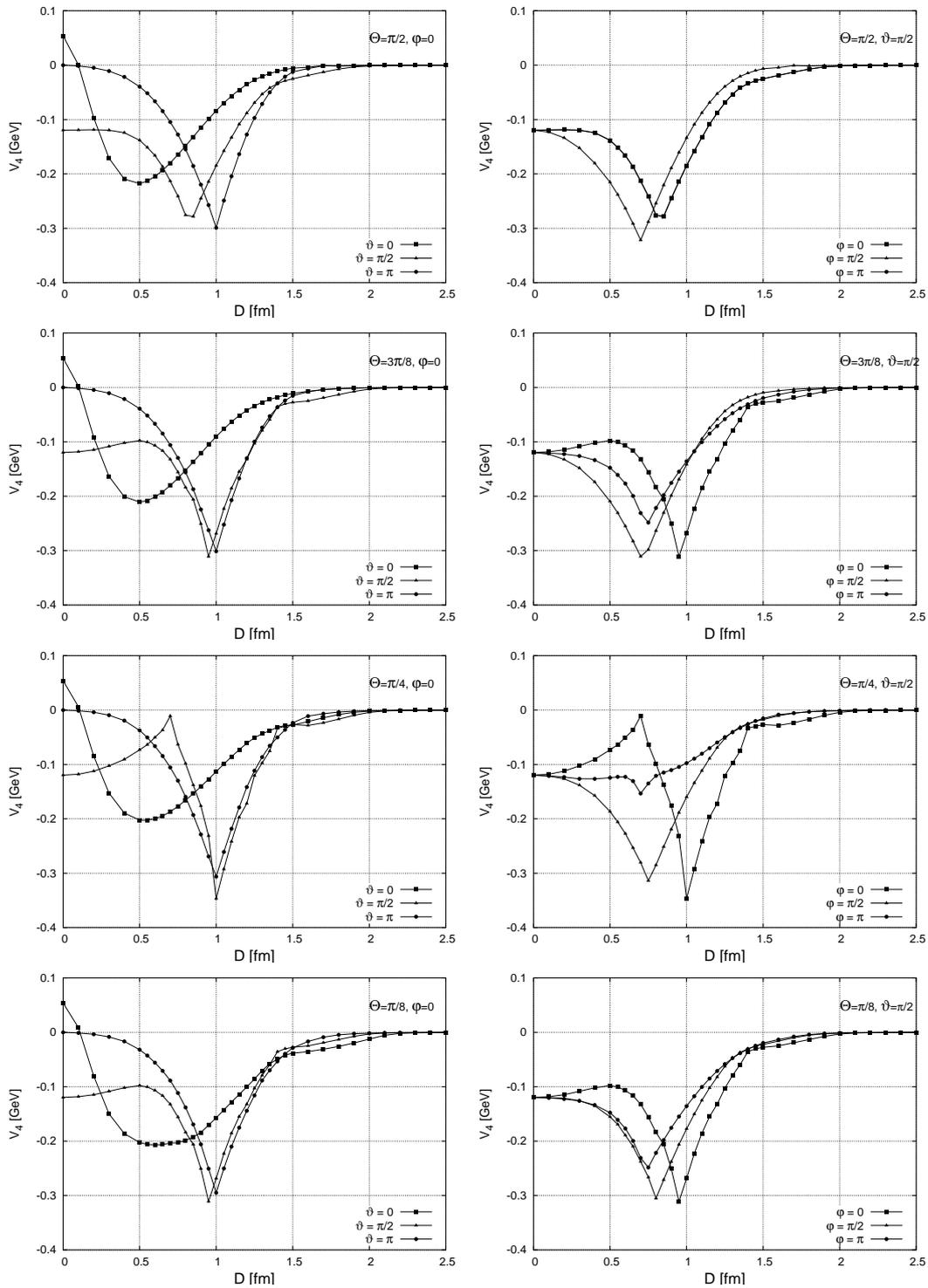


Abbildung 6.8: Das String-String-Potential für verschiedene relative Orientierungen des Strings.

dehnung von  $(6 \text{ fm})^3$ . Die Quarkdichte  $n = N/V$  steigt damit von  $n = 0.04 \text{ fm}^{-3}$  bis zu  $n = 10 \text{ fm}^{-3}$ . Kernmaterie mit einer Nukleondichte  $n_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$  hat zum Vergleich eine Konstituentenquarkdichte  $n = 3n_0 = 0.51 \text{ fm}^{-3}$ .

In Abb. 6.9 zeigen wir die entstehenden Bagstrukturen anhand des Wertes des Dielektrikums. Zu sehen ist die jeweilige Äquipotentialfläche bei  $\kappa = \kappa_p = 0.4$  zusammen mit dem Teilchenensemble. Wir zeigen hier ein mesonisches Ensemble mit Teilchenzahlen von  $N = 14$  bis  $N = 134$ . Man erkennt bei niedrigen Teilchenzahlen ( $N = 14$ ) Quarkbags mit wenigen Teilchen. In diesem speziellen Ensemble bilden sich drei  $q\bar{q}$ -Strings und zwei 4-Quarkbags. Die 4-Quarkbags bestehen wiederum aus je zwei Quarks und Antiquarks. Für größere Teilchenzahlen ergeben sich weiterhin mesonische 2-Quark-Cluster, sowie baryonische  $qqq$ - und antibaryonische  $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ -Cluster und Quarkbags mit höherem Teilcheninhalt. Die Bags beginnen tatsächlich, sich zu überlappen und die Teilchenzahl pro Bag erhöht sich. Allerdings sind auch für  $N = 134$  mit einer Quarkdichte von  $n = 1.07 \text{ fm}^{-3}$  weite Bereiche des Volumens außerhalb des perturbativen Bereichs zu sehen. Für solche Teilchenzahlen hat sich noch immer kein homogener Bag ausgebildet, der das gesamte Volumen ausfüllt und das nicht-perturbative Vakuum dringt zwischen die Quarkbags ein. Allerdings nimmt die Zahl der Quarks pro Cluster stetig zu. In dem speziell gezeigten Ensemble für  $N = 134$  in Abb. 6.9 rechts unten beispielsweise befinden sich alle Quarks in einem gemeinsamen Bag. Dieses ist ein typischer Perkolationsübergang, in dem die Bags allmählich miteinander fusionieren [Bauer88, Nardi98]. Ab einer kritischen Quarkdichte ist mindestens ein Cluster so groß, dass er gegenüberliegende Seiten des Gasvolumens miteinander verbindet bzw. alle Quarks in diesem Cluster vereinigt sind.

Wir untersuchen dieses Wechselspiel zwischen perturbativem und nicht-perturbativem Vakuum etwas quantitativ mit Hilfe der Vielteilchen-Energie. In Abb. 6.10 zeigen wir die Energie pro Teilchen als Funktion der Teilchendichte in einer doppelt logarithmischen Darstellung. Links sieht man ein baryonisches System aus zufällig positionierten  $qqq$ -Quarkmengen und rechts ein mesonisches System bestehend aus  $q\bar{q}$ -Paaren. Die offenen Kästchen zeigen die Energie der verschiedenen Ensembles für jede Teilchendichte, und die schwarzen Punkte sind die Mittelwerte über die Ensembles bei fester Teilchenzahl. Zum Vergleich haben wir auch die entsprechende freie Energie, d.h. für  $\kappa = 1$  überall, mit eingezeichnet (offene Kreise). Die mittlere Energie folgt sehr gut einem Potenzgesetz. Wir wissen, dass in unserem Modell die Energie eines Clusters linear mit dessen Größe skaliert. In einem System hoher Teilchendichte, wird sich jedes Teilchen mit einer bestimmten Farbe die nächsten Teilchen suchen, die die entsprechende Antifarbe besitzen und ein farbneutrales Cluster bilden. Wir können die mittlere Größe  $L$  eines Clusters mit dem mittleren Teilchenabstand abschätzen. Bei gegebener Teilchendichte  $n$  ist der mittlere Teilchenabstand und damit die mittlere Clustergröße gegeben durch  $L = n^{-1/3}$ . Die Gesamtenergie des Systems ist dann proportional zur Teilchenzahl  $N$  und zur mittleren Größe  $L$  der Cluster. Für die Energie der Teilchen ergibt sich somit  $E_{\text{tot}}/N = c n^{-1/3}$ , wobei  $c$  eine

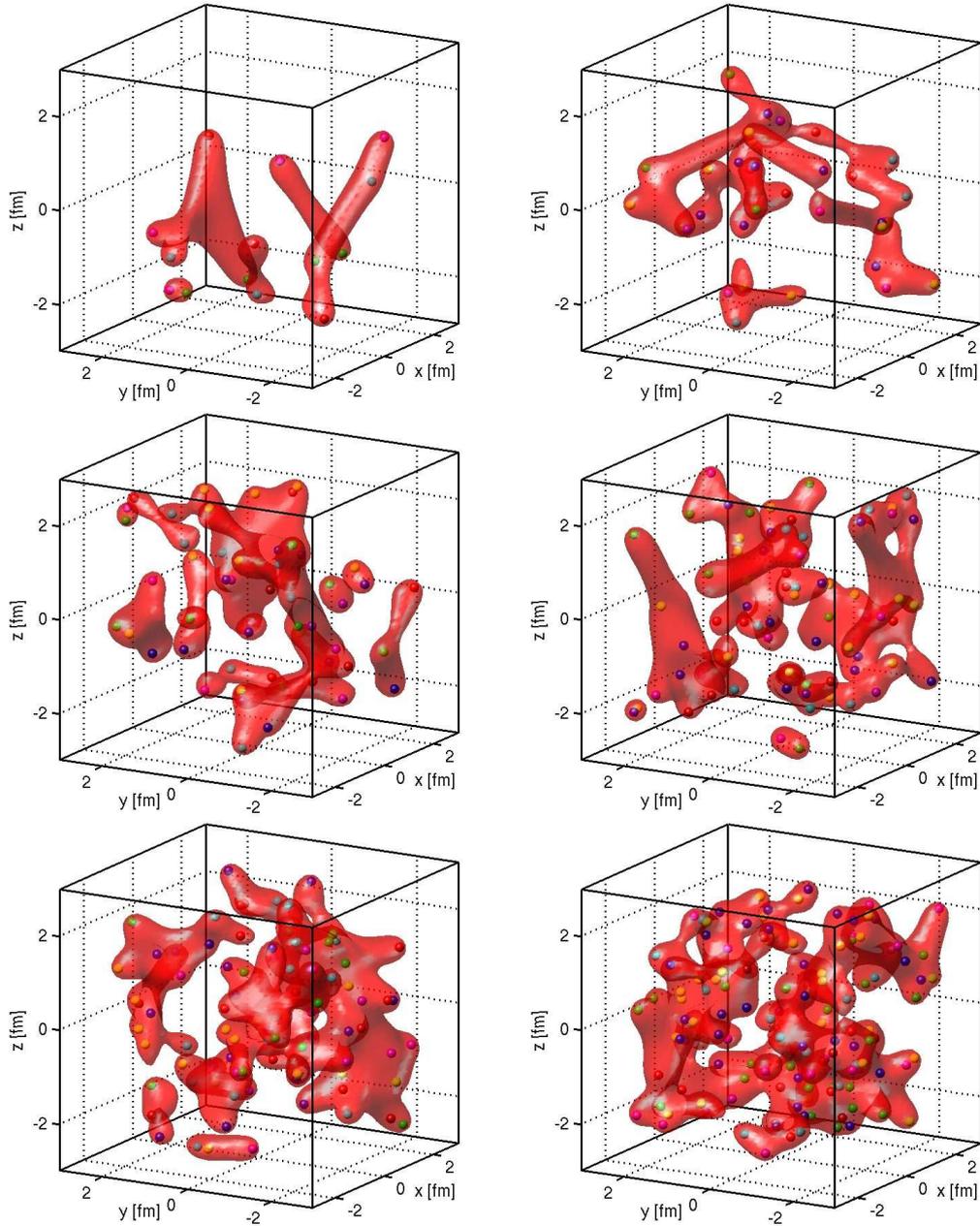


Abbildung 6.9: Die Fluss Schlauch-Struktur eines Quarkgases für verschiedene Teilchendichten. Von links oben nach rechts unten sind die Teilchenzahlen  $N = (14, 34, 54, 74, 94, 134)$  entsprechend einer Teilchendichte von  $n = (0.11, 0.27, 0.43, 0.59, 0.75, 1.07)\text{fm}^{-3}$ .

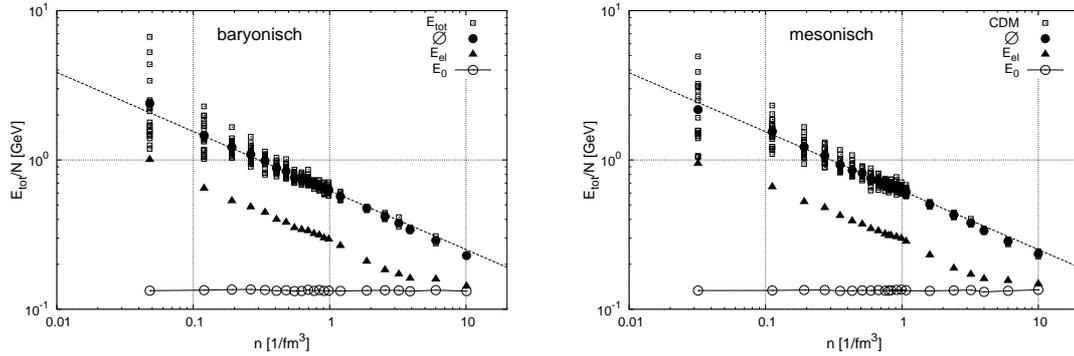


Abbildung 6.10: Die Energie pro Teilchen als Funktion der Teilchendichte für ein rein baryonisches (links) und ein rein mesonisches System (rechts). Die Kästchen entsprechen jedem einzelnen Quarkensemble, die schwarzen Punkte dem jeweiligen Mittelwert. Die gestrichelte Linie ist der Fit durch die Daten mit dem Ansatz  $E_{\text{tot}}/N = c n^\beta$ , mit  $\beta \approx 0.4$ . Die offenen Symbole stehen für die freie Energie  $E_0$  pro Teilchen.

Proportionalitätskonstante ist. Wir haben die Energie pro Teilchen mit dem Ansatz  $E_{\text{tot}}/N = c n^\beta$  an die CDM-Ergebnisse gefittet und finden einen Exponenten  $\beta = -0.39$  im mesonischen und  $\beta = -0.40$  im baryonischen Fall (gestrichelte Linie). Der Fit erstreckte sich nur über den Bereich mit hoher Statistik, also im Bereich  $0.1 \text{ fm}^{-3} \leq n \leq 1 \text{ fm}^{-3}$ . Die Extrapolation zu höheren Werten der Dichte zeigt aber weiterhin eine gute Übereinstimmung. Zum Vergleich finden wir in einem Fit an die freie Energie einen Exponenten  $\beta$ , der im Rahmen des Fehlers verträglich ist mit Null (entsprechend dem flachen Verlauf in Abb. 6.10). Für eine freie Quarkphase erwarten wir, dass sich die elektrischen Farbfelder wie freie Coulombfelder verhalten. Dementsprechend wird sich die elektrische Energie der Quarkphase der freien Energie annähern. Wir sehen in der Abb. 6.10, dass sich tatsächlich für große Quarkdichten die elektrische Energie der Quarkphase (Dreiecke) der freien Energie annähert.

Eine andere interessante Größe ist das Volumen der Bags pro Teilchen. Für kleine Teilchenzahlen bilden sich scharf gegeneinander abgegrenzte Bags mit zwei bis drei Teilchen pro Bag. Da die Bags nahezu 1-dimensionale Flussschlauchgestalt annehmen, nimmt das mittlere Volumen dieser Bags mit dem mittleren Teilchenabstand ab. Je nach räumlicher Quarkanordnung und mit zunehmender Quarkdichte überlappen die Bags oder verschmelzen miteinander, so dass dem einzelnen Quark auch größere Volumen zur Verfügung stehen und das Volumen der Bags pro Teilchen wieder zunimmt. Das Volumen der Bags bestimmen wir durch den Bereich des Gesamtvolumens, in dem der Wert des Dielektrikums größer als ein vorgegebener Wert ist, d.h. in diesem Fall  $\kappa \geq 0.6$ . Das Ergebnis zeigen wir wieder als Funktion der Teilchendichte in Abb. 6.11, links bzw. rechts für das baryonische bzw. das mesonische System. Auch hier Verhalten sich beide

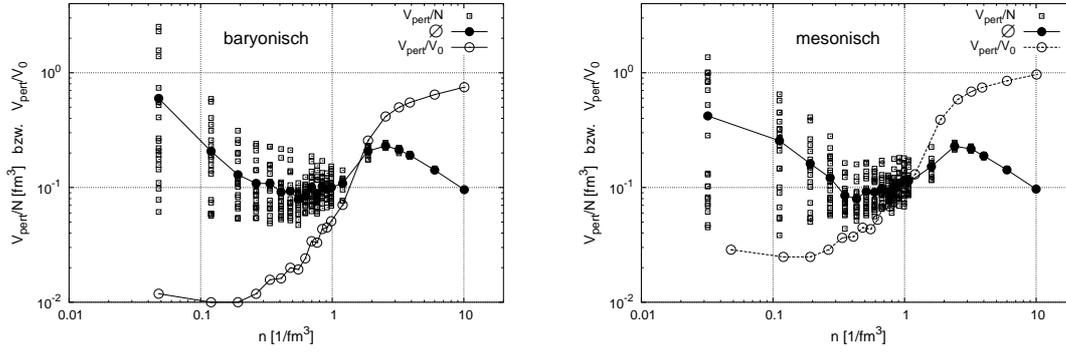


Abbildung 6.11: Das Gesamtvolumen der Bags, in denen  $\kappa \geq 0.6$  gilt, pro Teilchen für ein rein baryonisches (links) und ein rein mesonisches System (rechts). Weiße Kästchen für jedes Ensemble und schwarze Punkte für deren Durchschnitt. Die offenen Kreise geben den Anteil des perturbativen Volumens am Gesamtvolumen  $V_0$  an.

Systemtypen sehr ähnlich. Zunächst nimmt tatsächlich das perturbative Volumen  $V_{\text{pert}}$  pro Teilchen ab, d.h. die typischen Quarkcluster verkleinern sich. Ab einer Quarkdichte von  $n \approx 0.7 \text{ fm}^{-3}$  nimmt das Bagvolumen pro Teilchen bis zu einer Dichte von  $n = (2-3) \text{ fm}^{-3}$  wieder zu. Für größere Teilchendichten sehen wir, dass das mittlere Bagvolumen wieder abnimmt. Dieses ist ein numerisches Artefakt. Das numerische Volumen ist nur unwesentlich größer, als das physikalische Volumen, in dem wir die Quarks verteilt haben. Ab einer kritischen Dichte ist das gesamte numerisch zur Verfügung stehende Volumen im perturbativen Vakuum und das perturbative Volumen kann nicht weiter anwachsen. Dann ist das ganze Volumen ein einziger (kubischer) Bag. Zur Illustration haben wir deshalb den Anteil des perturbativen Volumens am Gesamtvolumen in dieselbe Abbildung mit eingezeichnet (offene Kreise). Für Dichten  $n > 3 \text{ fm}^{-3}$  nähert sich dieses Verhältnis  $V_{\text{pert}}/V_0$  sehr schnell an eins an.

Solange die numerischen Beschränkungen noch nicht ins Gewicht fallen, balancieren sich die elektrische Energie in der Quarkphase und der Druck des nicht-perturbativen Vakuums, also die Volumenenergie, gerade aus. Dies zeigen wir in Abb. 6.12, wo wir das Verhältnis von Volumenenergie  $E_{\text{vol}}$  zur elektrischen Energie  $E_{\text{el}}$  darstellen. Dieses Verhältnis ist nahezu konstant gleich eins und nimmt erst ab, wenn die numerisch kritische Dichte erreicht wird. Für genügend große Rechengrößen erwarten wir dass dieses Verhältnis immer konstant eins bleibt. Die Quarkphase bildet sich in einer Blase im perturbativen Vakuum aus, die durch den Bagdruck stabilisiert wird.

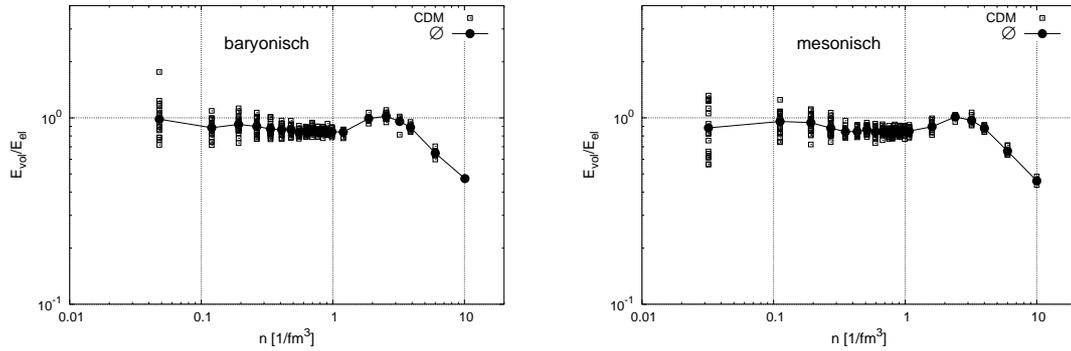


Abbildung 6.12: Das Verhältnis der Volumenenergie zur elektrischen Energie des Quarksystems. Links für ein rein baryonisches und rechts für ein rein mesonisches System.

### 6.3.1 Das kalte Quark-Gluon-Plasma

Die vorangegangene Beschreibung von Vielquark-System war eine mögliche Simulation des Phasenübergangs eines hadronischen Systems zum Quark-Gluon-Plasma. In unserer statischen Betrachtungsweise, in der die Quarks fest im Raum lokalisiert sind, entspricht dieses einem System bei verschwindender Temperatur. Im Phasendiagramm der QCD (vergl. Abb. 1.3) bewegen wir uns mit zunehmender Quarkdichte entlang der Achse des chemischen Potentials. Wir hatten in der einleitenden Diskussion in Abschnitt 1.1 festgestellt, dass man bei kleinen Temperaturen und hohen Quarkdichten einen Phasenübergang erster Ordnung feststellt. In unserem Modell vollzieht sich der Übergang von isolierten Hadronen zu einem Quarkgas allerdings sehr stetig. Das nicht-perturbative Vakuum wird nur sehr allmählich durch die Quarks verdrängt. Beide Phasen des Modells – die perturbative mit  $\kappa \lesssim 1$  und die nicht-perturbative mit  $\kappa \approx \kappa_{\text{vac}}$  – durchdringen sich in einer porösen Struktur, bis allmählich bei sehr hoher Quarkdichte die letzten Bereiche des nicht-perturbativen Bereichs aus dem Bereich des Quarkgases herausgedrängt werden. In [Nardi98] wird solch ein Übergang im Rahmen eines Perkolations-Modells beschrieben. Die mittlere Clustergröße wächst mit zunehmender Quarkdichte und die mittlere Zahl der Quarks pro Cluster wächst ebenso. Ab einer kritischen Dichte befinden sich alle Quarks in einem gemeinsamen Bag, obwohl der Bag nicht das gesamte Volumen ausfüllt.

# Kapitel 7

## Schlussbetrachtung

### 7.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit haben wir das Chromo-Dielektrische Modell verwendet, um das Phänomen des Confinements zu studieren. Wir haben das Modell vorgestellt und den Mechanismus verdeutlicht, durch den die farbelektrischen Gluonfelder in wohldefinierten Quarkbags eingeschlossen werden. Dabei bildet das nichtstörungstheoretische Vakuum ein nahezu perfektes Dielektrikum, aus dem die elektrischen Felder ähnlich dem Meissner-Effekt im Supraleiter die magnetischen Felder herausgedrängt werden. Die Existenz von farbgeladenen Quarks erzwingt allerdings nicht-verschwindende Farbfelder, so dass sich bagartige Raumbereiche im nicht-perturbativen Vakuum bilden, in denen Quarks und Gluonfelder eingeschlossen sind. Diese Bags bilden sich dynamisch entsprechend der Bewegungsgleichungen des Modells und werden nicht von außen vorgegeben wie im ursprünglichen Bag-Modell.

Das einfachste Objekt in diesem Modell ist ein Bag bestehend aus einem  $q\bar{q}$ -Paar. Wir haben in einer detaillierten Analyse den Einfluss der Modellparameter sowohl auf dessen geometrische Gestalt als auch auf seinen Energieinhalt untersucht. Schon aus vorangegangenen Arbeiten ist bekannt, dass die Bags mit zunehmendem  $q\bar{q}$ -Abstand Fluss Schlauch-artige, 1-dimensionale Strukturen entwickeln und die Energie des Systems für große Abstände linear mit dem Abstand skaliert. Wir sehen in dieser Arbeit, dass für kleine Quark-Abstände das Coulomb-Potential zwischen den Quarks reproduziert wird, und das  $q\bar{q}$ -Potential gut durch ein Cornell-Potential beschrieben werden kann. Die Modellparameter haben dabei direkten Einfluss auf die transversale Breite und Form der Flussschläuche und auf die Koeffizienten des  $q\bar{q}$ -Cornell-Potentials.

Die Analyse der Modellparameter hat ergeben, dass sich die globalen Eigenschaften der Flussschläuche wie in einem naiven Bag-Modell, beschrieben durch die Bag-Konstante und die farbelektrische Kopplungskonstante, verhalten. So ist der Zusammenhang zwischen Bag-Konstante und Kopplung einerseits und

Breite der Flussschläuche und Stringspannung andererseits im CDM genau wie im einfachen Bag-Modell. Im CDM sind wir darüberhinaus in der Lage, auch die räumliche Feld- und Energieverteilung innerhalb der Bags zu beschreiben. So konnten wir im Vergleich und in Übereinstimmung mit Rechnungen in der Gitter-QCD die Parameter des Modells festlegen [Bali95]. Wir finden einen Parametersatz, der diese Gitterrechnungen optimal wiedergibt. Diese Parameter weichen zum Teil erheblich von denen ab, die in vorangegangenen Arbeiten zum CDM verwendet wurden. So ist die Bag-Konstante bei beispielsweise zehnfach größer und im Gegenzug die elektrische Kopplung sehr viel kleiner. Diese neuen Parameter beschreiben das Verhalten der Flussschläuche allerdings sehr gut und sind auch in Übereinstimmung mit Analysen, die sich allein mit dem Gluonsektor der QCD beschäftigen. Wir geben zusätzlich noch zwei weitere Parametersätze an, in denen wir die Parameter teilweise auf Literaturwerte einschränken und im Rahmen dieser Beschränkung die beste Übereinstimmung der  $q\bar{q}$ -Flussschläuche suchen. Natürlich vergrößert diese Einschränkung die Abweichungen von den Gitterdaten. Die Ergebnisse der alternativen Parametersätze spiegeln demnach die möglichen Bandbreiten in den Beobachtungsgrößen wider.

Das  $q\bar{q}$ -System haben wir sehr ausführlich beschrieben. Das Potential wird schon für  $q\bar{q}$ -Abstände von  $R = 0.3$  fm vom linearen Confinement-Term dominiert. Die asymptotische Geometrie des Strings wird allerdings erst für Stringlängen von  $R = 1.0$  fm erreicht. Die Stringbreite sättigt bei ca.  $\rho = 0.35$ - $0.4$  fm ab und steigt für größere Stringlängen nur noch langsam an. Wir haben die Ergebnisse für den  $q\bar{q}$ -Flussschlauch mit den Ergebnissen im Modell des dualen Supraleiters verglichen [Ripka04]. In diesem Modell wird Confinement durch einen supraleitenden magnetischen Wirbelstrom erreicht, der das elektrische Feld in den Flussschlauch drängt. Wir konnten im Rahmen des CDMs einen magnetischen Strom aus den Feldgleichungen extrahieren und somit auf einer qualitativen Ebene die beiden Modelle miteinander vergleichen. Gegenüber dem CDM hat der duale Supraleiter den Vorteil, als dass für einfache Systeme wie dem (unendlich langen)  $q\bar{q}$ -Flussschlauch analytische Lösungen existieren [Nielsen73, Wyld76]. Allerdings sind Modellrechnungen für komplizierte Quarkanordnungen ebenfalls nur noch numerisch durchzuführen. Zusätzlich hat man einen numerischen Nachteil durch die Dirac-Strings, die neben den Singularitäten der punktförmigen Quarkladungen eine 1-dimensionale singuläre Linie einführen. Für einfache Systeme kann man die Lage dieser Linie der räumlichen Symmetrie entnehmen und aus den Modellgleichungen entfernen [Ball88]. Für Systeme mit mehr als drei Quarks ist dies allerdings nicht mehr trivial und Wechselwirkungen zwischen Flussschläuchen können nur noch unter der Annahme der Lage der Dirac-Strings gelöst werden [Kodama97].

Die in der Literatur seit langem diskutierte Hypothese des Casimir Scaling können wir in unserem Modell nicht bestätigen. Es ist eine generelle Eigenschaft von bag-ähnlichen Modellen, dass die Stringspannung nur linear mit der Ladung skaliert und nicht quadratisch, also mit dem Casimir-Operator der je-

weiligen Darstellung. Dies ist im CDM durch die die Wechselwirkung mit dem Vakuum-Druck zu verstehen. Das nicht-perturbative Vakuum weicht dem elektrischen Feld der höheren Ladung aus, und der String verbreitert sich. Erst mit von der Ladung unabhängigem Stringradius kann man das Casimir Scaling reproduzieren. Diese Hypothese ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht eindeutig entschieden. Einige Gitterrechnungen bestätigen diese Hypothese [Bali00], andere wiederum schließen sie aus. Bei den letzteren gibt es sowohl direkte Analysen des  $q\bar{q}$ -Potentials in höheren Darstellungen, die eine Abweichung vom Casimir Scaling sehen [Kratochvila03], als auch indirekte Hinweise. Gitterrechnungen finden qualitative Übereinstimmungen mit Ergebnissen des dualen Supraleiters, wenn dieser gerade auf der Grenze zwischen erster und zweiter Art ist [Matsubara94]. Der duale Supraleiter zeigt unter diesen Umständen allerdings ebenfalls kein Casimir Scaling. Wie schon in der Einleitung in Abschnitt 1.1.1 diskutiert, wird das Casimir Scaling vom Modell des stochastischen Vakuums reproduziert [Dosch88, Shoshi03]. Erst widerspruchsfreie Rechnungen in der Gitter-QCD werden in der Zukunft entscheiden, ob das Casimir Scaling in der QCD enthalten ist. Bis dahin bestehen die verschiedenen Modelle des Confinements gleichberechtigt nebeneinander.

Neben den elementaren  $q\bar{q}$ -Strings haben wir auch  $qqq$ -Konfigurationen betrachtet. Besonderes Augenmerk lag dabei wieder auf der Geometrie der Felder und auf dem Potential der Konfiguration. Das Potential lässt sich in zwei Bereiche aufteilen. Für kleine und mittlere paarweise Quarkabstände von bis zu 1-2 fm lässt sich das Potential durch paarweise, perturbative Wechselwirkungen beschreiben. Erst für größere Quarkabstände bilden sich die charakteristischen Flussschläuche heraus und die Konfiguration zeigt eine Y-artige Struktur. Damit verbunden skaliert auch das Potential mit der Länge der Schenkel des Y's, so dass das Potential eine wesentliche 3-Quark-Wechselwirkungen zeigt. Dieser Übergang zum Y setzt erst für relativ große Abstände ein. Wir erklären dies in unserem Modell durch den relativ großen und symmetrischen Quarkbag. Die Ausbildung des  $qqq$ -Systems zum Y ist in der symmetrischen Dreieckskonfiguration am besten zu beobachten. In dieser Anordnung hat der Bag ein relativ großes Volumen und die elektrischen Felder können sich in ihm perturbativ ausbreiten. Erst für Quarkabstände, die wesentlich größer sind als der Durchmesser der Flussschläuche ( $2\rho = 0.7-0.8$  fm) prägen sich die drei einzelnen Y-Flussschläuche aus und das Potential wird zum 3-Teilchen-Potential. Aktuelle Gitterrechnungen bestätigen dieses Verhalten des  $qqq$ -Systems [Alexandrou03].

Die Wechselwirkung zwischen farbneutralen Bags beschreiben wir für zwei  $q\bar{q}$ -Flussschläuche. In dieser 4-Quark-Konfiguration kommt es zum String-Flip, in dem die Ausrichtung der Flussschläuche zwischen zwei Möglichkeiten wechselt. Wir finden ein Potential mit einer charakteristischen Reichweite und Tiefe, die von der Länge und der Ausrichtung der Strings abhängig ist. In den symmetrischen Konfigurationen, in denen die vier Teilchen durch vier Flussschläuche miteinander verbunden sind, finden wir eine Wechselwirkung die nicht allein durch

die triviale Überlagerung der vier Teilstrings bestimmt ist. Ergänzend haben wir das String-String-Potential für beliebige räumliche Orientierungen der beiden Strings zueinander bestimmt.

Die Stabilität von Flussschläuchen haben wir in zwei verschiedenen Szenarien untersucht. Im Vakuum sind die Strings im CDM (bis auf numerische Einschränkungen) absolut stabil. In genügend starken, äußeren Farbfeldern dagegen finden wir, dass die Stringspannung reduziert wird. Wir können uns vorstellen, dass in einer Schwerionenkollision bei hohen Energien im ersten Moment durch Farbaustauschreaktionen solch hohe Felder entstehen können. In diesem angeregten Hintergrund entwickeln sich neu entstehende  $q\bar{q}$ -Paare. Wir haben gezeigt, dass in genügend starken Feldern die Bindung zwischen diesen Paaren aufgehoben wird und quasi frei Quarks zulässt. In einer weiteren Analyse haben wir die Möglichkeit der Paarerzeugung innerhalb eines Flussschlauches betrachtet. Wir haben ein Tunnelpotential mit Hilfe der Feldgleichungen bestimmt, dass die Produktion von mesonischen  $q\bar{q}$ -Clustern beeinflusst.

In einem letzten Schritt haben wir globale Eigenschaften von Systemen mit großer Teilchenzahl untersucht. Solche Systeme bilden, abhängig von der Teilchendichte, voneinander isolierte mesonische, baryonische und antibaryonische Bags aus. Diese verschmelzen mit zunehmender Dichte und Bags mit höherem Quarkinhalt entstehen. Dabei stellen wir fest, dass das nicht-perturbative Vakuum nach und nach aus dem räumlichen Bereich der Quarks herausgedrängt wird. Die beobachtbaren Größen wie Energie pro Teilchen und Bagvolumen pro Teilchen verändern sich kontinuierlich und nicht abrupt. Die Flussschlauchstrukturen gehen über in einen homogenen Bereich, in dem das perturbative Vakuum vorherrscht. Die Balance zwischen elektrischer Energie und Volumenenergie geht dabei allerdings nicht verloren. Der Druck des perturbativen Vakuums, der dem einzelnen  $q\bar{q}$ -Flussschlauch seine Gestalt aufprägt und ihn stabilisiert, hält auch das ausgedehnte Quarkensemble gefangen. Auf einer globalen Ebene geht Confinement dadurch also nicht verloren. Die Blase perturbativen Vakuums im nicht-perturbativen, dielektrischen Medium ist lediglich größer und enthält mehr Quarks. Wenn das Volumen des Bags nur groß genug ist, dann sind die Quarks tief im Inneren des Bags quasi frei und die elektrischen Gluonfelder sind identisch mit denen freier Quarks.

## 7.2 Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Wechselwirkung der Gluonfelder mit dem nicht-perturbativen Vakuum studiert. Die Quarks waren in dieser Betrachtung nur statische, äußere Quellen. Dieses Szenario statischer und damit unendlich schwerer Quarks ähnelt der *quenched* Näherung der QCD, in der nur die Gluonen dynamische Freiheitsgrade sind. Wie wir schon in der Einleitung diskutiert haben, sind die Eigenschaften der QCD wesentlich abhängig von den Eigenschaften der

Quarks. So ändern sich sowohl die Temperatur als auch die Art des Phasenübergangs von der hadronischen in die partonische Phase. Es wäre interessant, die Quarks in einer selbstkonsistenten Analyse mit ihren Wechselwirkungen sowohl zu den farbelektrischen Feldern als auch zum skalaren Confinement-Feld zu beschreiben. Das Modell, ausgedrückt durch die Lagrange-Dichte in Gl. (2.1), sieht diese Wechselwirkungen explizit vor. Die Wechselwirkung der Quarks mit dem Confinement-Feld über die skalare Kopplung stabilisiert die farbneutralen Bags gegenüber einer vollständigen Auslöschung der Felder. Wenn die Quarks denselben räumlichen Zustand einnehmen, dann löschen sich die Farbladungen der Quarks exakt aus, und die farbelektrischen Felder verschwinden. Mit fehlender skalarer Kopplung gibt es keinen Quellterm mehr für das skalare Term und alle Felder verschwinden. Die skalare Kopplung führt die skalare Quarkdichte als zusätzlichen Quellterm für das Confinement-Feld ein, so dass die Existenz von Quarks die Ausbildung von Bags induziert. Für ausgedehnte  $q\bar{q}$ -Zustände haben wir die skalare Dichte versuchsweise einmal durch die Gauß'sche Quarkverteilung  $w(\vec{x})$  aus Gl. (2.19b) simuliert. Der zusätzliche Quellterm verändert die Bags nur in der Nähe der Quarks aber die Struktur der farbelektrischen Flussschläuche nur unwesentlich.

Das CDM kann also auf jeden Fall Quarkbags erzeugen, auch bei verschwindender Farbladungsdichte. Leider gibt es keinen Term in den Modellgleichungen, der eine Abstoßung zwischen den Bags verursacht. Aus diesem Grunde wird man im CDM keine sich selbst stabilisierende Kernmaterie, bestehend aus baryonischen  $qqq$ -Bags, beschreiben können. Allerdings haben wir in dieser Arbeit gesehen, dass sich in jeder global farbneutralen Quarkkonfiguration immer die energetisch günstigsten farbneutralen Subcluster in einem Bag oder Fluss-schlauch finden. In [Traxler99b] wurde gezeigt, dass sich auch in einer semi-dynamischen Reaktion die Quarks nur in farbneutralen 2- und 3-Quark Clustern in separaten Bags finden. Auf diese Weise wurde dort die Hadronisierung aus einem heißen Quark-Gluon-Plasma heraus simuliert. Solch ein Plasma wird in hochenergetischen Kernreaktionen erwartet. Diese Hadronisierung wird in allen transporttheoretischen Modellen als ad hoc Annahme eingebaut. Im CDM können wir einen dynamischen und mikroskopischen Mechanismus angeben, mit dem dieses Prozess stattfindet. In [Traxler99b] wurde die Dynamik der Teilchen und des Confinement-Feldes untersucht. Die Gluonfelder wurden in jedem Zeitschritt genau wie in dieser Arbeit durch die Lösung der Poisson-Gleichung bzw. des Gauß-Gesetzes gelöst, also durch die Lösung einer Zwangsbedingung bei vorgegebener Teilchen- und Confinement-Feld-Konfiguration.

Die Gluonfelder unterliegen aber selbst dynamischen Bewegungsgleichungen. Diese sind gerade durch die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen in Gl. (2.14) gegeben. Wir können demnach prinzipiell alle Felder und auch die Teilchen dynamisch in der Zeit propagieren. Allerdings glauben wir nicht, dass dieses einfach ist. Zwei Dinge stellen eine wirkliche Herausforderung dar. Die eine liegt in der Numerik, die andere in der Interpretation der Felder. Kommen wir erst zur letz-

teren. In der semi-dynamischen Simulation von Traxler et al. wurde ein zunächst dichtes Quarkensemble in einem einzigen großen Bag in der Zeit propagiert. Die hohen Anfangsimpulse der Quarks führten zu einem Aufbruch des Feuerballs und letztendlich zu einer vollständigen Zerlegung in hadronische Subcluster. Am Ende der Simulation gab es allerdings nicht nur die weißen Hadronen, sondern auch starke Anregungen im Confinement-Feld. Diese  $\sigma$ -Wellen machten am Ende der Simulation ungefähr die Hälfte der Gesamtenergie aus. Es ist eigentlich nicht klar, wie diese Anregung in physikalisch beobachtbare Teilchen umzuwandeln ist. Bei unseren statischen Analysen ist die Kombination aus Bag, elektrischem Feld und den Quarks der physikalische  $q\bar{q}$ -String und das skalare Feld dient als eine Art Führungsfeld, in dem sich die Gluonfelder ausbreiten. Die  $\sigma$ -Wellen breiten sich dagegen auch ohne Farbfelder und Quarks aus. Vor einer Realisierung einer dynamischen Simulation sollte diese Frage erst geklärt werden.

Die zweite Herausforderung ist natürlich numerischer Natur. Die kleinsten physikalischen Objekte in unserem System sind mesonische  $q\bar{q}$ -Strings. Diese haben einen typischen transversalen Radius von 0.4 fm. Die Längenskala auf der die elementaren Felder  $\sigma$ ,  $\kappa$  und  $\phi^a$  variieren ist von derselben Größenordnung. Wir haben in unseren numerischen Simulationen kartesische Gitter mit einer Ausdehnung zwischen 3 fm und 6 fm verwendet mit einer Gitterschrittweite von 0.02 fm und 0.05 fm verwendet. Die Gitterweite darf nicht sehr viel größer gewählt werden, damit die Ergebnisse nicht zu stark durch den Diskretisierungsfehler beeinflusst werden. Andererseits benötigt man für Hadronisierungsszenarien sehr viel größere numerische Raumbereiche. In der Arbeit von Traxler wurde vollständige Hadronisierung in einem Volumen von ca.  $(30 \text{ fm})^3$  beobachtet, was ungefähr dem doppelten Durchmesser eines Goldatoms entspricht. Wir benötigen also 5-10fach größere Volumen in jeder Raumrichtung. Bei gleichbleibender Gitterweite entspricht das einem 100-1000fach erhöhtem Speicheraufwand. Dieser Speicher steht uns noch nicht zur Verfügung. In der Arbeit von Traxler wurde ein lokal verfeinertes Gitter vorgestellt. Allerdings wurden nur die elektrischen Felder auf diesem Gitter bestimmt. Das skalare Feld wurde ebenfalls auf einem kartesischen Gitter mit entsprechend größerer Schrittweite dargestellt. Die elektrischen Feldgleichungen sind *lineare* partielle Differentialgleichungen. Uns ist nicht klar, ob der in [Traxler99a] vorgestellte lokale, adaptive Algorithmus auch auf die *nicht-linearen* Gleichungen des Confinement-Feldes übertragbar ist. Eine lokale Verfeinerung ist aber angesichts des hohen Speicheraufwandes für eine quantitative Analyse zwingend erforderlich.

Für eine qualitative Analyse könnten moderne und zukünftige Rechnerarchitekturen allerdings ausreichen, um das Phänomen der Hadronisierung zu beobachten. Wir glauben, dass der von uns vorgestellte Mehrgitter-Algorithmus, der elektrisches Potential und Confinement-Feld gleichberechtigt nebeneinander löst, in modifizierter Form dafür verwendet werden kann, die zeitlichen Veränderungen der Felder zu bestimmen. Wir denken, dass dieses am besten auf der Ebene der elektromagnetischen Felder  $\vec{E}^a$  und  $\vec{B}^a$  zu formulieren ist. Die Maxwell-

Gleichungen sind nur erster Ordnung in der Zeit und damit leichter zu handhaben. Für die Diskretisierung der elektro-magnetischen Felder gibt es darüber hinaus schon etablierte Verfahren, wie z.B. den *Yee*-Algorithmus [Sadiku92], der die Geometrie der Feldgleichungen berücksichtigt. Wir warnen an dieser Stelle noch einmal vor den unerwarteten Eigenschaften von Systemen nicht-linearer partieller Differential-Gleichungen.

Die dynamische Beschreibung der Hadronisierung ist numerisch also relativ aufwändig. Trotzdem ist das Chromo-Dielektrische Modell ein ausgezeichnetes Kandidat, dieses Problem zu beschreiben. Die Gleichungen sind schnell formulierbar und die auftretenden Felder – mit der genannten Schwierigkeit für das skalare Feld – leicht interpretierbar. Die Farbladungen können über quantenmechanische Dirac-Spinoren oder über klassische Ladungsdichten in das System eingeführt werden. Es ist geeignet, elementare hadronische Eigenschaften wiederzugeben, lässt sich mit existierenden Gitterdaten zu den Fluss-schlauch-Strukturen vereinbaren und stellt einen anschaulichen Mechanismus des Confinements und der Hadronisierung zur Verfügung. Die Interpretation des physikalischen Vakuums als dielektrisches Medium erweist sich damit als äußerst fruchtbar, da es stark wechselwirkende, farbige Systeme sowohl auf hadronischen Skalen als auch auf Skalen von ausgedehnten Feuerball-Strukturen beschreibt. Wir sind somit der in der Einleitung aufgeworfenen Frage nach dem Confinement und dem Mechanismus der Hadronenbildung etwas näher gekommen und schließen damit diese Arbeit.



# Anhang A

## Der FAS-Algorithmus

Das Chromo-Dielektrische Modell beschreibt farbelektrische Potentiale  $\phi^a$  und das Confinement-Feld  $\sigma$  in der Anwesenheit von farbgeladenen Quarks. Die Bewegungsgleichungen für statische Probleme, wie sie in dieser Arbeit diskutiert wurden, sollen hier noch einmal wiederholt werden:

$$\Phi_\sigma \phi(\vec{r}) := \vec{\nabla} \cdot \left( \kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi \right) = -g_s \rho \quad (\text{A.1a})$$

$$\Sigma_\phi \sigma(\vec{r}) := \Delta \sigma - U'(\sigma) + \frac{1}{2} \kappa'(\sigma) \vec{D}^2 / \kappa^2(\sigma) = 0, \quad (\text{A.1b})$$

mit  $\vec{D} = \kappa(\sigma) \vec{E} = \kappa(\sigma) \vec{\nabla} \phi$ . Hier haben wir für den späteren Gebrauch die Differential-Operatoren  $\Phi_\sigma$  und  $\Sigma_\phi$  eingeführt und der Notation wegen den Farbindex  $a$  weggelassen.

Dieses System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist erst eindeutig bestimmt nach Angabe von Randbedingungen. Physikalisch motivierte Randbedingungen wären solche, die die Felder oder ihre Ableitungen im Unendlichen bestimmen. Die spezielle Wahl des skalaren Potentials  $U(\sigma)$  legt nahe, dass das Confinement-Feld  $\sigma$  dort seinen Vakuums-Erwartungswert  $\sigma_{\text{vac}}$  annimmt. Ferner ist es plausibel, dass die elektrischen Felder im Unendlichen verschwinden. Im Allgemeinen lassen sich nicht alle Komponenten des elektrischen Feldes auf dem Rand gleichzeitig vorgeben, d. h. dass entweder Dirichlet'sche oder von-Neumann'sche Randbedingungen für das elektrische Potential  $\phi$  gewählt werden müssen. Die angemessenen Randbedingungen sind also:

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_{\text{vac}} \quad (\text{A.2a})$$

$$\phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{oder} \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{\vec{r}} = 0 \quad (\text{A.2b})$$

für  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$

Von-Neumann'sche Randbedingungen sind allerdings nicht immer kompatibel mit der Poisson-Gleichung in Gl. (A.1a). Diese ist nur die differentielle Form des

Gauß'schen Gesetzes, das in seiner integralen Form

$$S = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} d^3r = \oint_{\partial V} \kappa \vec{E} \cdot \vec{n} d^2a = Q \quad , \quad (\text{A.3})$$

ist. Das bedeutet, dass der gesamte elektrische Fluss  $S$  durch eine geschlossene Oberfläche durch die in dem Volumen  $V$  eingeschlossene Ladung  $Q$  gegeben ist. Ist  $Q \neq 0$  dann ist der Fluss durch die Oberfläche  $\partial V$   $S \neq 0$ , was im Widerspruch ist zu  $\vec{E} \cdot \vec{n} = \partial\phi/\partial n = 0$ . Für Ladungsverteilungen mit nicht-verschwindender Gesamtladung  $Q$  wählen wir also Dirichlet'sche Randbedingungen, für alle anderen von-Neumann'sche Randbedingungen, da diese gerade jeden Fluss durch die Oberfläche verhindern.

Die Farbladungsdichte  $\rho$  bestimmt sich durch die Farbladungen  $q_k$  und die Positionen  $\vec{r}_k$  der Quarks,

$$\rho(\vec{r}) = \sum_k^N q_k w(\vec{r} - \vec{r}_k) \quad (\text{A.4})$$

$$w(\vec{r}) = (2\pi r_0^2)^{-3/2} e^{-\vec{r}^2/(2r_0^2)}. \quad (\text{A.5})$$

Die Zahl  $N$  und die Positionen der Quarks sind beliebig von außen vorzugebene Größen und bestimmen das System vollständig. Obwohl sich diese Arbeit hauptsächlich mit den Feldern und Potentialen von zwei und drei Teilchen Systemen befasst, soll doch die numerische Realisierung möglichst allgemein gültig sein. Könnte man für  $q\bar{q}$  Strings noch die Zylindersymmetrie ausnutzen und die Zahl der räumlichen Dimensionen von drei auf zwei, im Falle sehr langer Strings sogar auf eine (zylinderradiale) reduzieren, würde bereits das drei Quark-System solch eine Vereinfachung nicht mehr zulassen. Die freie Wahl der Quarkverteilung erfordert also einen wirklich drei-dimensionalen Algorithmus. Dieser Algorithmus soll einerseits flexibel mit allen Quarkverteilungen umgehen können, andererseits stabil und gering im Verbrauch der Computer-Ressourcen sein. Er soll also gering sowohl im Speicherbedarf als auch in der verwendeten CPU-Zeit sein. Der hier verwendete *Full Approximation Storage* Algorithmus (FAS) [Brandt82, Press96] genügt diesen Anforderungen und soll im Folgenden vorgestellt werden.

## A.1 Diskretisierung

Zur numerischen Lösung des Systems (A.1) wird das kontinuierliche System, das im ganzen drei-dimensionalen Raum definiert ist, auf ein diskretes Gitter mit endlicher räumlicher Ausdehnung eingeschränkt. Der Rand des Gitters fällt also mit dem Rand des physikalischen Volumens zusammen, dass wir betrachten. Wir wählen ein kubisches Kartesisches Gitter  $\Omega^h$  mit Volumen  $V$ , Zahl der Git-

terpunkte (Knoten)  $N$ , und Gitterschrittweite  $h_\alpha$  wie folgt:

$$V = L_1 \times L_2 \times L_3 \quad (\text{A.6a})$$

$$N = (n + 1 + 2\delta)^3 \quad (\text{A.6b})$$

$$h_\alpha = L_\alpha/n \quad (\text{A.6c})$$

$$n = 2^\ell, \quad \alpha \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.6d})$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{Dirichlet} \\ 1, & \text{von-Neumann} \end{cases}$$

Die Ausdehnungen  $L_i$  der Box müssen im Allgemeinen nicht gleich sein, die Zahl der Knoten pro Dimension  $n$  allerdings schon<sup>1</sup>. Wir wollen hier aber der einfacheren Notation wegen  $L_1 = L_2 = L_3 \equiv L$  voraussetzen und damit auch  $h_1 = h_2 = h_3 \equiv h$ . Bei von-Neumann'schen Randbedingungen wird die Normalableitung auf dem Gitterrand vorgegeben. Da diese numerisch über die Nachbarknoten bestimmt wird (siehe weiter unten) wird das Gitter an jedem Rand um einen Knoten über den physikalischen Rand hinaus erweitert ( $\delta = 1$ ).

Mit der Wahl dieses Gitters können  $\phi(\vec{r})$ ,  $\sigma(\vec{r})$  und  $\rho(\vec{r})$  nur noch an den diskreten Gitterstellen

$$x_i = x_0 + i h \quad (\text{A.7a})$$

$$y_j = y_0 + j h \quad (\text{A.7b})$$

$$z_k = z_0 + k h, \quad (\text{A.7c})$$

$$i, j, k = \{-\delta, 0, 1 \dots n + \delta\}$$

dargestellt werden, d. h.

$$\sigma(\vec{r}) \rightarrow \sigma^h(x_i, y_j, z_k) \equiv \sigma_{i,j,k}^h \quad (\text{A.8a})$$

$$\phi(\vec{r}) \rightarrow \phi^h(x_i, y_j, z_k) \equiv \phi_{i,j,k}^h \quad (\text{A.8b})$$

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho^h(x_i, y_j, z_k) \equiv \rho_{i,j,k}^h, \quad (\text{A.8c})$$

wobei der Index  $h$  die Schrittweite des Gitters angibt.

Zum Abschluss müssen nur noch die Differential-Operatoren  $\Phi_\sigma$  und  $\Sigma_\phi$  auf ihre Differenzen-Form gebracht werden. Für die Ableitungen wählen wir zentrale Differenzen Näherungen der Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ :

$$\partial f / \partial x \rightarrow \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} \quad (\text{A.9a})$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 \rightarrow \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}. \quad (\text{A.9b})$$

---

<sup>1</sup>Diese Einschränkung gilt nur aufgrund der gewählten Realisierung im Computercode.

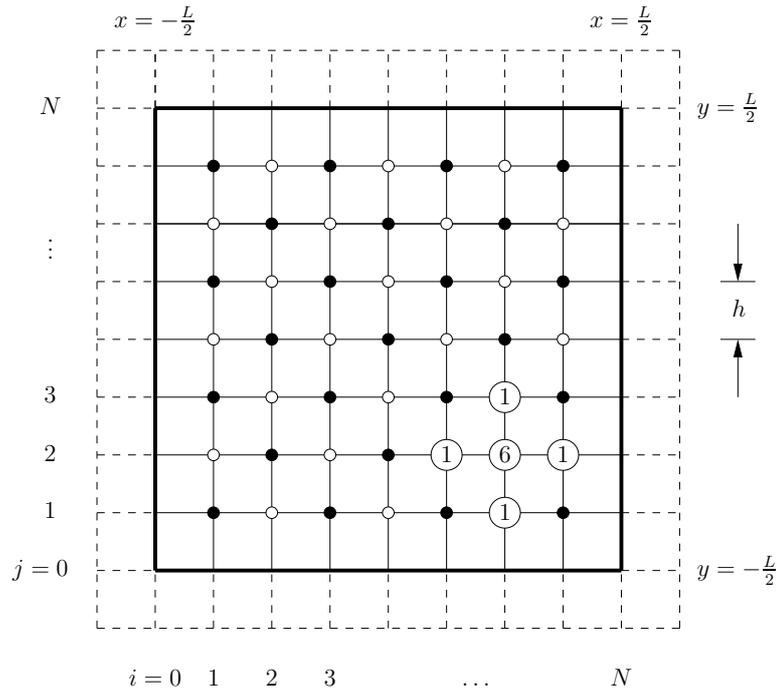


Abbildung A.1: Das Gitter  $\Omega^h$ , auf dem die Lösung definiert ist. Das Gitter hat eine Schrittweite  $h$  und eine Ausdehnung  $L = Nh$  in jeder Raumrichtung. Wir benutzen bei der Lösung eine sog. *rot-schwarz*-Reihenfolge in der Knotenabfolge, entsprechend den schwarzen und weißen Punkten in der Abbildung. Ebenfalls in der Abbildung zu sehen (unten rechts) ist die Diskretisierungs-Matrix für die benachbarten Gitterpunkte (s. Gl. (A.9)). Der zentrale Wert 6 entspricht der Diskretisierung in drei Raumdimensionen.

Die Differenzen-Form von Gl. (A.1) sieht dann vollständig wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \Phi^h(\phi_{ijk}^h) &:= \kappa'(\sigma_{ijk}^h) \left[ (\sigma_{i+1,jk}^h - \sigma_{i-1,jk}^h)(\phi_{i+1,jk}^h - \phi_{i-1,jk}^h) \right. \\ &\quad + (\sigma_{i,j+1,k}^h - \sigma_{i,j-1,k}^h)(\phi_{i,j+1,k}^h - \phi_{i,j-1,k}^h) \\ &\quad \left. + (\sigma_{ij,k+1}^h - \sigma_{ij,k-1}^h)(\phi_{ij,k+1}^h - \phi_{ij,k-1}^h) \right] / (2h)^2 \\ &\quad + \kappa(\sigma_{ijk}^h) \left[ \phi_{i+1,jk}^h + \phi_{i-1,jk}^h + \phi_{i,j+1,k}^h + \phi_{i,j-1,k}^h \right. \\ &\quad \left. + \phi_{ij,k+1}^h + \phi_{ij,k-1}^h - 6\phi_{ijk}^h \right] / h^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10a})$$

$$\begin{aligned} &= -g_s \rho_{ijk}^h \\ \Sigma^h(\sigma_{ijk}^h) &:= \left[ \sigma_{i+1,jk}^h + \sigma_{i-1,jk}^h + \sigma_{i,j+1,k}^h + \sigma_{i,j-1,k}^h \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{ij,k+1}^h + \sigma_{ij,k-1}^h - 4\sigma_{ijk}^h \right] / h^2 \\ &\quad - U'(\sigma_{ijk}^h) + \frac{1}{2} \kappa'(\sigma_{ijk}^h) (\bar{D}_{ijk}^h)^2 / \kappa^2(\sigma_{ijk}^h) \\ &= 0 =: f_{ijk}^h. \end{aligned} \quad (\text{A.10b})$$

In der Differenzen-Gleichung (A.10b) haben wir als Quellterm bereits die künstliche Größe  $f_{ijk}^h$  eingeführt. Diese allgemeinere Form der Gleichung werden wir im nicht-linearen Mehrgitter-Algorithmus später noch gebrauchen. Wir können die obigen Gleichungen (A.10) kurz notieren durch:

$$\Phi^h \phi^h = -g_s \rho^h \quad (\text{A.11a})$$

$$\Sigma^h \sigma^h = \mathbf{f}^h, \quad (\text{A.11b})$$

wobei die jeweils  $N$  Komponenten der Vektoren  $\phi^h$  und  $\sigma^h$  die Unbekannten  $\phi_{ijk}^h$  bzw.  $\sigma_{ijk}^h$  sind, und  $\rho^h$  und  $\mathbf{f}^h$  die jeweils  $N$  Quellterme enthalten. Die erste der beiden Gleichungen kann als Matrix-Vektor-Gleichung gelesen werden mit der band-diagonalen Matrix  $\Phi^h$ .  $\Phi^h$  enthält in der Tat nur  $\phi$  unabhängige Terme, was die Linearität des Differenzen-Operators zum Ausdruck bringt. Die analoge Matrix  $\Sigma^h$  dagegen enthält durch das skalare Potential  $U(\sigma)$  und die dielektrische Funktion  $\kappa(\sigma)$  auf der Diagonalen auch  $\sigma$  abhängige Terme und ist demnach ein nicht-linearer Operator.

Zur vollständigen Beschreibung des Differenzen-Systems müssen jetzt noch

die Randbedingungen in Gl. (A.2) an das Gitter angepasst werden.

$$\sigma_{ijk} = \sigma_{\text{vac}} \quad (\text{A.12a})$$

$$\phi_{ijk} = \phi_{\text{rand}} \quad (\text{A.12b})$$

oder

$$\phi_{i+1,jk} - \phi_{i-1,jk} = 0 \quad (\text{A.12c})$$

$$\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k} = 0$$

$$\phi_{ij,k+1} - \phi_{ij,k-1} = 0$$

$$\text{für } \{i, j, k\} \in \{0, n\}$$

Die Gln. (A.12b) und (A.12c) beschreiben dabei Dirichlet'sche bzw. von-Neumann'sche Randbedingungen. Im Allgemeinen muss die Normalableitung auf dem Rand nicht verschwinden, sondern kann einen endlichen Wert haben. Das System von partiellen Differentialgleichungen (A.1) ist damit auf ein algebraisches Gleichungssystem für die  $3(n-1)^3 \approx 3N$  Unbekannten  $\phi_{ijk}^a$  und  $\sigma_{ijk}$  reduziert. Dieses Gleichungssystem hat folgende Eigenschaften:

1. Der Satz von Gleichungen für das elektrische Potential  $\phi$  (A.10a) ist zwar linear, hat aber durch die  $\sigma$ -Abhängigkeit von  $\kappa$  nicht-konstante Koeffizienten.
2. Der Satz von Gleichungen für das Confinement-Feld  $\sigma$  ist durch das quartische Potential  $U(\sigma)$  und die dielektrische Kopplung  $\kappa(\sigma)$  an das elektrische Feld nicht-linear.
3. Die Zahl der Unbekannten ist sehr groß, in drei Dimension ist  $N$  in der Größenordnung  $10^6$ .

## A.2 Grob-Gitter-Korrekturen

Zum Lösen von Gleichungssystemen gibt es einige erprobte Verfahren, wovon die gängigsten allerdings ausscheiden. Das in dieser Arbeit vorgestellte Mehrgitter-Verfahren ist in der Lage, die genannten Schwierigkeiten zu bewältigen. Alle Mehrgitter-Algorithmen sind sog. iterative Verfahren, in denen ausgehend von einer Startlösung sukzessive bessere Näherungen für die Lösungen gefunden werden. Der Algorithmus endet bei Erreichen einer vorgegebenen Abbruch-Genauigkeit. Innerhalb des Algorithmus werden temporäre Gitter erzeugt, durch die die Lösung weiter verbessert und die Konvergenz-Rate erhöht wird. Der Algorithmus besteht aus folgenden Bausteinen:

1. Relaxations-Methoden, d.h. ein Lösungsverfahren für die Differenzen-Gleichungen auf jedem Gitter.

2. Konstruktion temporärer Gitter mit größerer Schrittweite  $H > h$  und kleinerer Knotenzahl  $n_H < n_h$ . Alle erzeugten Gitter haben immer dieselbe Ausdehnung  $L$ .
3. Transport der temporären Lösungen von feinen zu groben Gittern und umgekehrt, beschrieben durch *Restriktions-* und *Interpolations-*Operatoren.
4. Korrektur der Lösung auf jeweils feinerem Gitter.

Die einzelnen Bausteine werden jetzt beschrieben und zunächst mit ihrer Hilfe ein linearer Mehrgitter-Algorithmus entwickelt, der dann im Folgenden auf einen nicht-linearen verallgemeinert wird. Der lineare Algorithmus wird in der numerischen Realisierung (im CDM Computer-Code) zur Lösung der ungekoppelten Gleichungen verwendet, also für den Fall, dass  $\kappa = 1$  überall gilt. Die PDG (A.1a) für das elektrische Potential  $\phi^a$  entkoppelt dann von der PDG (A.1b) und reduziert sich auf die Poisson-Gleichung. Er ist darüber hinaus auch in der Lage, die Gleichung (A.1a) bei vorgegebenem  $\sigma(\vec{r})$  zu lösen, also die Poisson-Gleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten  $\kappa(\sigma)$  und  $\kappa'(\sigma)$ .

### A.2.1 Relaxations-Methode

Der zentrale Baustein des Mehrgitter-Algorithmus ist die verwendete Relaxations- bzw. Glättungsmethode. Für den linearen Algorithmus beschränken wir uns auf die Differenzen-Gleichungen (A.10a) bzw. (A.11a), d.h.

$$\Phi\phi = -\rho \quad , \quad (\text{A.13})$$

wobei wir hier der Einfachheit halber  $g_s = 1$  gesetzt haben. Für die Relaxation verwenden wir eine klassische iterative Methode zum Lösen solcher Gleichungssysteme [Press96, Briggs87, Brandt82]. Solche sind z.B. das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren. Wie bei jedem iterativen Verfahren wird zuerst eine beliebige Startlösung  $\tilde{\phi}^0$  geraten. Natürlich hängt die Konvergenz des Verfahrens von der Wahl der Startlösung ab. Zunächst wissen wir noch nichts über die wirkliche Lösung und wählen einfach  $\tilde{\phi}^0 = 0$ . Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir diese Wahl verbessern. Bei beiden Verfahren wird zuerst die Gleichung für den Knoten  $(ijk)$  nach der Unbekannten  $\phi_{ijk}$  gelöst – was auf Grund der Linearität der Gleichung leicht ist. Man erhält einen neuen Wert  $\phi_{ijk}^1$  durch ausnutzen der Gleichung (A.10a) und festhalten der alten Werte der Nachbarknoten, d.h. solche mit Indices  $(i \pm 1, j \pm 1, k \pm 1)$ . Für einen vollständigen Relaxations-Schritt werden alle Knoten  $(ijk)$  durchlaufen und diese Prozedur wiederholt und man erhält eine neue Näherung  $\tilde{\phi}^0 \xrightarrow{\text{relax}} \tilde{\phi}^1$ . Der Notation halber nennen wir solch einen Relaxation-Schritt  $\mathcal{S}$ . Damit können wir formal schreiben

$$\tilde{\phi}^1 = \mathcal{S} \tilde{\phi}^0 \quad . \quad (\text{A.14})$$

Der Unterschied zwischen Jacobi- und Gauß-Seidel-Relaxation ist vorwiegend praktischer Natur. Bei der Jacobi-Relaxation werden erst alle Werte  $\phi_{ijk}^0$  ausgerechnet und dann  $\tilde{\phi}^0$  durch  $\tilde{\phi}^1$  ersetzt. Bei der Gauß-Seidel-Relaxation wird sofort jeder neue Wert  $\phi_{ijk}^1$  zur Berechnung aller weiteren verwendet. Man sieht leicht, dass im ersten Fall der Speicher-Bedarf verdoppelt wird, während im letzteren kein temporärer Speicher benötigt wird. Allerdings wird dadurch das Ergebnis von  $\tilde{\phi}^1$  abhängig von der Reihenfolge, in der die einzelnen Knoten im Relaxations-Schritt  $\mathcal{S}$  angesprochen werden. Wir wählen hier die sog. *rot-schwarz* Reihenfolge. Bei dieser Abfolge werden erst alle roten, d.h. alle Knoten die nicht direkt benachbart sind, berechnet und danach alle schwarzen, also alle anderen (s. Abb. A.1). Die Reihenfolge innerhalb der roten Knoten ist dabei beliebig, da diese auf Grund der Wahl des Differenzen-Operators (A.9) nur von schwarzen Nachbarknoten abhängen. Das gleiche gilt natürlich für die darauffolgende Relaxation der schwarzen Knoten. Diese Wahl der rot/schwarzen Reihenfolge hat zwei Vorteile. Zum einen bleibt jede räumliche Symmetrie, die in der Problemstellung enthalten ist, durch diesen Update erhalten. Zum anderen können prinzipiell alle roten (schwarzen) Knoten parallel bestimmt werden.<sup>2</sup>

Gauß-Seidel-Relaxation ist für sich schon ein vollständiges Lösungsverfahren zum Lösen des Differenzen-Systems (A.13). Durch  $p$ -fache Anwendung des Operators  $\mathcal{S}$  erhalten wir die  $p$ -te Approximation

$$\tilde{\phi}^p = \mathcal{S}^p \tilde{\phi}^0 \quad . \quad (\text{A.15})$$

Nach unendlich vielen Iterationen  $p \rightarrow \infty$  konvergiert die Näherungslösung gegen die exakte Lösung, also  $\tilde{\phi}^p \rightarrow \phi$ . Nach endlich vielen Iterationen dagegen gibt es noch eine Abweichung von der Lösung  $\tilde{\phi}$  und wir können einen Fehler  $\mathbf{e}$  definieren mit  $\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}^p$  und

$$\mathbf{e} = \phi - \tilde{\phi} \quad . \quad (\text{A.16})$$

Der Fehler  $\mathbf{e}$  kann quantitativ natürlich nicht bestimmt werden, da auch die exakte Lösung nicht bekannt ist. Aber wir werden den Fehler  $\mathbf{e}$  noch qualitativ untersuchen und wichtige Aussagen über ihn machen können. Wir können aber eine Größe definieren, die wir auch quantitativ bestimmen können und die eine Aussage über die Güte unserer Näherung  $\tilde{\phi}$  macht, nämlich das Residuum

$$\mathbf{r} = \Phi \tilde{\phi} + \boldsymbol{\rho} \quad . \quad (\text{A.17})$$

Für  $\tilde{\phi} \rightarrow \phi$  gilt  $\mathbf{r} = 0$  und wir erhalten die gesuchte Gleichung (A.13). Die Größe  $\mathbf{r}$  kann numerisch bestimmt werden, da sowohl der Quellterm  $\boldsymbol{\rho}$  als auch die aktuelle Näherung  $\tilde{\phi}$  bekannt sind. Das Residuum verwenden wir unter anderem auch als Abbruchkriterium (s. weiter unten).

Es zeigt sich allerdings [Briggs87, Press96], dass jedes klassische Iterations-

---

<sup>2</sup>Dieses ist im CDM-Code allerdings nicht realisiert.

Verfahren nur sehr langsam konvergiert. Um den Fehler um eine signifikante Stelle zu verkleinern benötigt man  $p = \mathcal{O}(n^2)$  Iterationen. Bei Gittern mit  $n \approx 100$  ist dieses Verfahren für sich also nur von theoretischem Interesse. Zum Verständnis für den Mehrgitter-Algorithmus ist es allerdings hilfreich den Grund für die langsame Konvergenz der klassischen Iterations-Verfahren zu erkennen. Dazu entwickeln wir zunächst die nicht diskretisierte Funktion  $\phi$  in die Eigenfunktionen  $v_{\lambda\mu\nu}(\vec{r})$  des Laplace-Operators im kubischen Gebiet  $\Omega = L^3$ , die die Randbedingungen erfüllen [Jackson75]:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{\lambda\mu\nu}^{\infty} \phi_{\lambda\mu\nu} v_{\lambda\mu\nu}(\vec{r}) \quad (\text{A.18})$$

$$v_{\lambda\mu\nu}(\vec{r}) = \begin{cases} \sin(k_\lambda x) \sin(k_\mu y) \sin(k_\nu z), & \text{Dirichlet} \\ \cos(k_\lambda x) \cos(k_\mu y) \cos(k_\nu z), & \text{von-Neumann} \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$$\Delta v_{\lambda\mu\nu}(\vec{r}) = -(k_\lambda^2 + k_\mu^2 + k_\nu^2) v_{\lambda\mu\nu}(\vec{r}) \quad , \quad (\text{A.20})$$

mit  $k_\lambda = \frac{\lambda\pi}{L}$  etc. Im kontinuierlichen System ist das Spektrum nach oben nicht beschränkt, d.h.  $(\lambda, \mu, \nu) \in \{1 \dots \infty\}$ . Das äquivalente diskretisierte System hat dann folgende Gestalt:

$$\phi = \sum_{\lambda\mu\nu}^n \phi_{\lambda\mu\nu} \mathbf{v}_{\lambda\mu\nu} \quad (\text{A.21a})$$

$$v_{\lambda\mu\nu}^{ijk} = \begin{cases} \sin(\frac{i\lambda\pi}{n}) \sin(\frac{j\mu\pi}{n}) \sin(\frac{k\nu\pi}{n}), & \text{Dirichlet} \\ \cos(\frac{i\lambda\pi}{n}) \cos(\frac{j\mu\pi}{n}) \cos(\frac{k\nu\pi}{n}), & \text{von-Neumann} \end{cases} \quad (\text{A.21b})$$

$$\Phi \mathbf{v}_{\lambda\mu\nu} \approx \bar{k}_{\lambda\mu\nu}^2 \mathbf{v}_{\lambda\mu\nu} \quad , \quad (\text{A.21c})$$

wobei die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{\lambda\mu\nu}$  auf die sog. *Brillouin-Zone* eingeschränkt sind, d.h.  $(\lambda, \mu, \nu) < n$ . Die Einführung des Gitters unterdrückt also alle Moden mit größeren Modenzahlen. Das bildet den sog. *Diskretisierungs-Fehler*. Die Diskretisierung muss so fein gewählt werden, dass diese Moden keinen nennenswerten Beitrag liefern.<sup>3</sup> Wenn die finite Differenzen Matrix  $\Phi$  aus dem Laplace-Operator hervorgeht, gilt Gl. (A.21c) exakt. Ist  $\Phi$  die in Gl. (A.10a) definierte Differenzen Matrix, gilt dies nicht mehr exakt. Wichtig für das Folgende ist lediglich, dass die Vektoren  $\mathbf{v}_{\lambda\mu\nu}$  nicht zu stark mischen und Gl. (A.21c) näherungsweise gilt. Die diskreten Eigenwerte  $\bar{k}_{\lambda\mu\nu}$  lassen sich für den Laplace-Operator analytisch bestimmen [Briggs87], sind hier aber nicht von Bedeutung.

Weiter wollen wir die Entwicklung (A.21a) zerlegen in die lang- und die kurzwelligen Moden, die wir auch die glatten und die oszillierenden Moden nennen.

---

<sup>3</sup>Im CDM-Code wird dies nicht weiter untersucht und eine maximale Knotenzahl  $n$  von vornherein festgelegt.

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_{\text{os}} + \boldsymbol{\phi}_{\text{gl}} \quad , \quad (\text{A.22})$$

wobei  $\boldsymbol{\phi}_{\text{gl}}$  nur die glatten Moden mit  $(\lambda, \mu, \nu) < n/2$  enthält und  $\boldsymbol{\phi}_{\text{os}}$  alle anderen.

Wir können nun die Differenzen-Gl. (A.13) mit Hilfe der durch Gauß-Seidel-Relaxation erhaltenen Näherungslösung  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ , dem in Gl. (A.16) definierten Fehler und dem Residuum  $\boldsymbol{r}$  umschreiben zu

$$\Phi(\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{\rho} \quad (\text{A.23})$$

$$\Phi\tilde{\boldsymbol{\phi}} + \Phi\boldsymbol{e} = \boldsymbol{\rho} \quad (\text{A.24})$$

$$\Phi\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{r} \quad . \quad (\text{A.25})$$

Im ersten Schritt haben wir hier die Linearität von  $\Phi$  und im zweiten die Definition des Residuums ausgenutzt. Gl. (A.25) ist die sog. *Residuums-Gleichung*. Sie besagt, dass der Fehler  $\boldsymbol{e}$  derselben Gleichung wie  $\boldsymbol{\phi}$  gehorcht, wenn der Quellterm  $\boldsymbol{\rho}$  durch das Residuum  $\boldsymbol{r}$  ersetzt wird.

Die zentrale Eigenschaft des Gauß-Seidel-Operators  $\mathcal{S}$  besteht nun in seiner Selektivität auf die glatten und die oszillierenden Moden in der exakten Lösung  $\boldsymbol{\phi}$ . Da er nur benachbarte Knoten miteinander verknüpft, kann das kurzwellige Spektrum  $\boldsymbol{\phi}_{\text{os}}$  sehr effizient mit ihm bestimmt werden, während das langwellige Spektrum nahezu unbeeinflusst bleibt. Das bedeutet, dass nach nur wenigen Iterationen von  $\mathcal{S}$  ( $p \leq 4$ ) der oszillierende Teil der Näherungs-Lösung identisch ist mit dem oszillierenden Teil von  $\boldsymbol{\phi}$ , d.h.  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{\text{os}} = \boldsymbol{\phi}_{\text{os}}$ . Dieses ist in Abb. A.2 dargestellt. Wir illustrieren dies hier an einem Fall, den wir analytisch lösen können. Dazu wählen wir ein Gitter mit  $N = 32$  Knoten und setzen die Lösung  $\boldsymbol{\phi}$  aus einer glatten Mode mit  $\lambda = 3$  und einer oszillierende Mode mit  $\mu = 17$  zusammen mit jeweils gleicher Amplitude.

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{v}_{\lambda\lambda\lambda} + \boldsymbol{v}_{\mu\mu\mu} \quad (\text{A.26a})$$

$$\boldsymbol{\rho} = \bar{k}_{\lambda\lambda\lambda}^2 \boldsymbol{v}_{\lambda\lambda\lambda} + \bar{k}_{\mu\mu\mu}^2 \boldsymbol{v}_{\mu\mu\mu} \quad (\text{A.26b})$$

$$\Phi\boldsymbol{\phi} = -\boldsymbol{\rho} \quad (\text{A.26c})$$

Sowohl  $\boldsymbol{\phi}$  als auch  $\boldsymbol{\rho}$  sind so gewählt, dass Gl. (A.13) gelöst ist. Da wir die Lösung kennen, können wir zu jedem Zeitpunkt den Fehler  $\boldsymbol{e}$  angeben. Als Startlösung wählen  $\boldsymbol{\phi}^0 = 0$ , so dass:

$$\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}^0 = \boldsymbol{v}_{\lambda\lambda\lambda} + \boldsymbol{v}_{\mu\mu\mu} \quad (\text{A.27})$$

In der Abbildung zeigen wir einen eindimensionalen Schnitt entlang der  $x$ -Achse. Auf der linken Seite sieht man, dass nach nur wenigen Relaxationen  $\mathcal{S}$  die Näherungslösung  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  (gestrichelte Linie) fast identisch mit dem oszillierenden Teil der exakten Lösung  $\boldsymbol{\phi}$  (durchgezogenen Linie) ist. Der Fehler (strich-punktierte Linie) ist noch von derselben Größenordnung wie die Näherungslösung selbst.

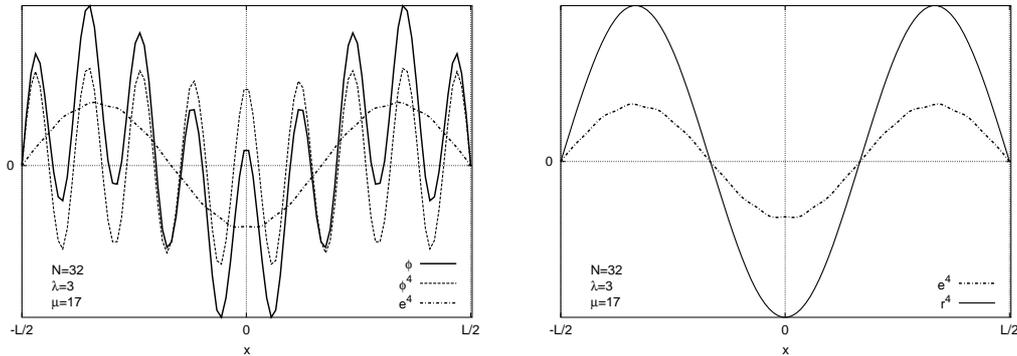


Abbildung A.2: Gauß-Seidel-Relaxation bestimmt den kurzwelligen Anteil der Lösung und hinterlässt einen langwelligen Fehler und ein glattes Residuum.

Auf der rechten Seite zeigen wir den Fehler und das Residuum. Die kurzwelligen Störungen sind nahezu verschwunden und sowohl der Fehler  $\mathbf{e}$  als auch das Residuum  $\mathbf{r}$  bestehen fast ausschließlich aus der langwelligen Mode.

$$\tilde{\phi}^4 \approx \mathbf{v}_{\mu\mu\mu} \quad (\text{A.28a})$$

$$\mathbf{e}^4 \approx \mathbf{v}_{\lambda\lambda\lambda} \quad (\text{A.28b})$$

$$\mathbf{r}^4 \approx \bar{k}_{\lambda\lambda\lambda}^2 \mathbf{v}_{\lambda\lambda\lambda} \quad (\text{A.28c})$$

$$\Phi \mathbf{e}^4 = -\mathbf{r}^4 \quad (\text{A.28d})$$

Die nur ungefähre Gleichheit ist dadurch bedingt, dass  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{r}$  nach nur wenigen Iteration von  $\mathcal{S}$  noch kurzwellige Beiträge mit allerdings vernachlässigbaren Amplituden enthalten. Wir wollen hier allgemein festhalten, dass

1. wenige Relaxationen  $\mathcal{S}$  das kurzwellige Spektrum von  $\phi$  effizient lösen, und
2. dass der Fehler und das Residuum nur das langwellige Spektrum mit Moden  $(\lambda, \mu, \nu) < n/2$  enthalten.

Dabei hat die spezielle Wahl der Gauß-Seidel Relaxation mit rot-schwarzer Knotenfolge  $\mathcal{S}$  eine weitere Eigenschaft. Die kurzwelligen Fehler-Moden mit  $\mu > n/2$  werden nicht nur gedämpft, sondern gleichzeitig auf eine langwellige Mode mit  $\lambda = n - \mu$  abgebildet. Damit verschwinden sie aus dem kurzwelligen Spektrum, tauchen aber im langwelligen Spektrum wieder auf. Gleichzeitig enthält auch das Residuum diese zusätzlichen Moden, so dass die beiden obigen Aussagen weiterhin gelten.

## A.2.2 Fehler-Korrektur

Diese Aussage hilft uns, den Fehler  $\mathbf{e}$  effektiv weiter zu bestimmen. Dazu greifen wir auf die Residuums-Gleichung (A.25) zurück. Naiverweise könnten wir jetzt

einfach dieselben Relaxationen wie zuvor anwenden, um den Fehler zu bestimmen,<sup>4</sup> aber da Fehler und Residuum glatt sind, konvergiert dieses Verfahren wie zuvor nicht. Stattdessen führen wir ein neues Gitter  $\Omega^H$  mit doppeltem Gitterabstand  $H = 2h$  ein. Dieses Gitter hat die gleiche physikalische Ausdehnung wie  $\Omega^h$  hat aber nur die halbe Knotenzahl  $n_1 = n/2$  pro Dimension. Auf diesem Gitter können wir jetzt die gleiche Entwicklung für  $\mathbf{e}$  wie für  $\phi$  in Gl. (A.21) ansetzen. Allerdings ist das Spektrum auf diesem Gitter auf Moden mit  $(\lambda, \mu, \nu) < n_1 = n/2$  beschränkt.

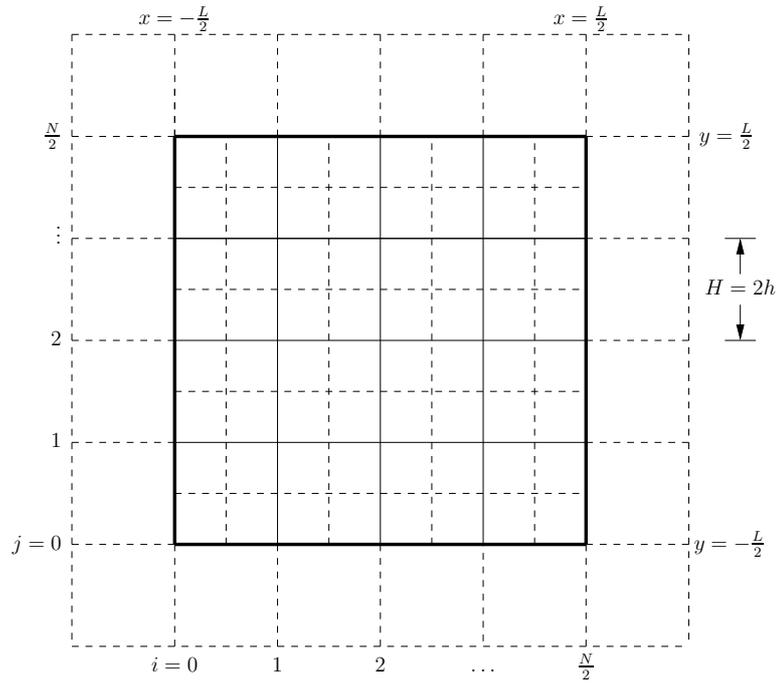


Abbildung A.3: Das gröbere Gitter  $\Omega^H$  mit Schrittweite  $H = 2h$  ist durch die durchgezogenen Linien dargestellt.

Da das Residuum  $\mathbf{r}$  ebenfalls nur Moden aus diesem Spektralbereich enthält, kann es ohne Informationsverlust auf dieses Gitter übertragen werden. Dasselbe gilt natürlich auch für den Fehler.

$$\mathbf{r}^h \rightarrow \mathbf{r}^H \quad (\text{A.29a})$$

$$\Phi^H \mathbf{e}^H = -\mathbf{r}^H \quad (\text{A.29b})$$

Die Indizes  $h$  und  $H$  deuten dabei an, auf welchem Gitter die Größen definiert sind. Wir wollen hier zunächst einmal annehmen, dass die Gleichung (A.29b) auf dem groben Gitter  $\Omega^H$  leicht gelöst werden kann und die Lösungsmethode erst

<sup>4</sup>Prinzipiell wissen wir nichts über den Fehler, außer dass er glatt ist.

später spezifizieren.<sup>5</sup> Wenn die Lösung  $e^H$  bekannt ist, können wir sie wieder auf das ursprüngliche Gitter zurücktransportieren und die alte Näherungslösung  $\tilde{\phi}$  mit dem Fehler korrigieren.

$$e^H \rightarrow e^h \quad (\text{A.30a})$$

$$\tilde{\phi}^h \rightarrow \tilde{\phi}^h + e^h \quad (\text{A.30b})$$

Diese Korrektur verändert dabei nur das glatte Spektrum der Näherungs-Lösung, da  $e$  selbst glatt ist. In unserem obigen Beispiel erhalten wir also

$$\tilde{\phi}^h \rightarrow \tilde{\phi}^h + e^h \approx v_{\lambda\lambda\lambda} + v_{\mu\mu\mu} = \phi \quad . \quad (\text{A.31})$$

In diesem Beispiel erhalten wir also eine sehr gute Näherung für die wahre Lösung. Allerdings ist diese Aussage nur wertvoll, wenn die Bestimmung des Fehlers auf dem groben Gitter mit Hilfe der Residuums-Gleichung (A.25) bzw. (A.29b) tatsächlich leicht, d.h. numerisch schnell zu finden ist.

### A.2.3 Gittertransfer

Bevor wir uns allerdings dem numerischen Aufwand zur Lösung der Residuums-Gleichung zuwenden, müssen wir noch genauer spezifizieren, wie die Gleichung (A.29b) zu verstehen ist. Außerdem müssen wir den Transport des Residuums von  $\Omega^h$  nach  $\Omega^H$  in Gl. (A.29a) und den des Fehlers von  $\Omega^H$  nach  $\Omega^h$  in Gl. (A.30a) beschreiben. Im ersten Fall nennen wir den dazugehörigen Operator Restriktions-Operator  $\mathcal{R}$  und im zweiten Fall Interpolations-Operator  $\mathcal{I}$ , mit

$$\mathcal{R}_h^H \mathbf{r}^h = \mathbf{r}^H \quad (\text{A.32a})$$

$$\mathcal{I}_H^h \mathbf{e}^H = \mathbf{e}^h \quad . \quad (\text{A.32b})$$

Für  $\mathcal{I}$  wählen wir einfache lineare Interpolation. Für den Operator  $\mathcal{R}$  würde sich anbieten, einfach jeden zweiten Gitterpunkt zu wählen, also  $v_{ijk}^H = v_{2i,2j,2k}^h$ .

---

<sup>5</sup>Wir betonen hier bereits, dass das grobe Gitter nur noch  $n_1^3 = n^3/8$  Gitterpunkte enthält.

Stattdessen wählen wir hier einen gewichteten Mittelwert über alle Nachbarwerte.

$$\begin{aligned}
v_{ijk}^H = & \frac{1}{64} \left\{ \begin{array}{l} v_{2i-1,2j-1,2k-1}^h + v_{2i+1,2j-1,2k-1}^h \\ + v_{2i-1,2j+1,2k-1}^h + v_{2i-1,2j-1,2k+1}^h \\ + v_{2i+1,2j+1,2k-1}^h + v_{2i+1,2j-1,2k+1}^h \\ + v_{2i-1,2j+1,2k+1}^h + v_{2i+1,2j+1,2k+1}^h \end{array} \right. & 8 \text{ Ecken} \\
+ 2 \left( \begin{array}{l} v_{2i-1,2j-1,2k}^h + v_{2i+1,2j-1,2k}^h \\ + v_{2i-1,2j+1,2k}^h + v_{2i+1,2j+1,2k}^h \\ + v_{2i-1,2j,2k-1}^h + v_{2i+1,2j,2k-1}^h \\ + v_{2i-1,2j,2k+1}^h + v_{2i+1,2j,2k+1}^h \\ + v_{2i,2j-1,2k-1}^h + v_{2i,2j+1,2k-1}^h \\ + v_{2i,2j-1,2k+1}^h + v_{2i,2j+1,2k+1}^h \end{array} \right) & 12 \text{ Kanten} \\
+ 4 \left( \begin{array}{l} v_{2i-1,2j,2k}^h + v_{2i+1,2j,2k}^h \\ + v_{2i,2j-1,2k}^h + v_{2i,2j+1,2k}^h \\ + v_{2i,2j,2k-1}^h + v_{2i,2j,2k+1}^h \end{array} \right) & 6 \text{ Flächen} \\
+ 8 v_{2i,2j,2k}^h & 1 \text{ Zentrum}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Jeder Gitterpunkt von  $\Omega^H$  wird also von allen 27 nächsten Gitterpunkten von  $\Omega^h$  beeinflusst. Die Wahl dieses Restriktions-Operators hat eine besondere Eigenschaft, die die Wahl des Differenzen-Operators  $\Phi^H$  auf dem groben Gitter betrifft. Nach dem oben Gesagten ist der Fehler  $e^h$  glatt und wir können annehmen, dass es einen äquivalenten Vektor  $e^H$  auf dem groben Gitter gibt, für den Gl. (A.32b) gilt. Die Residuums-Gleichung (A.25), definiert auf  $\Omega^h$ , lässt sich dann folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
\Phi^h e^h &= \Phi^h \mathcal{I}_H^h e^H = -r^h \\
\mathcal{R}_h^H \Phi^h \mathcal{I}_H^h e^H &= -\mathcal{R}_h^H r^h \\
\Phi^H e^H &= -r^H, \text{ mit} \\
\Phi^H &= \mathcal{R}_h^H \Phi^h \mathcal{I}_H^h.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Damit ist der Differenzen-Operator  $\Phi^H$  auf  $\Omega^H$  eindeutig definiert. Im Falle der reinen Poisson-Gleichung zeigt sich [Briggs87], dass dadurch  $\Phi^H$  mit  $\Phi^h$  identisch ist nach der Ersetzung  $h \rightarrow H$ . Für allgemeinere Differenzen-Operatoren ist dies nicht mehr exakt aber immer noch ausreichend gültig. Gleichzeitig ist auch der Relaxations-Operator  $\mathcal{S}^H$  mit  $\mathcal{S}^h$  identisch mit der gleichen Ersetzung.

## A.3 Mehrgitter-Verfahren

Durch den Transport der Residuums-Gleichung auf das grobe Gitter erreichen wir eine neue Einteilung in oszillierende und glatte Moden. Auf dem Gitter  $\Omega^H$  sind alle Moden mit  $(\lambda, \mu, \nu) < n_1/2 = n/4$  glatt und solche mit  $n_1/2 < (\lambda, \mu, \nu) < n_1$  oszillierend. Wir wollen mit Hilfe der Gl. (A.29b) und gegebenem Residuum  $\mathbf{r}^H$  den groben Fehler  $\mathbf{e}^H$  bestimmen. Der Nomenklatur und der späteren Mehrgitter-Rekursion halber benennen wir den Fehler und das Residuum mit

$$\mathbf{e}^H \rightarrow \boldsymbol{\phi}^H \quad (\text{A.35})$$

$$\mathbf{r}^H \rightarrow \boldsymbol{\rho}^H \quad (\text{A.36})$$

Damit haben die ursprüngliche Gl. (A.13) und die Residuums-Gl. (A.29b) formal dieselbe Form.

Der auf diesem Gitter definierte Relaxations-Operator  $\mathcal{S}^H$  hat dieselbe Wirkung wie  $\mathcal{S}^h$  auf dem Gitter  $\Omega^h$ . Das kurzwellige Spektrum von  $\boldsymbol{\phi}^H$  wird sehr schnell vom kurzwelligen Anteil der Näherung  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}^H$  beschrieben und der jetzt neu definierte Fehler  $\mathbf{e}^H$  ist glatt. Mit dieser Erkenntnis lässt sich jetzt leicht ein rekursiver Algorithmus definieren, mit dem sukzessive der Fehler auf ein immer kleiner werdendes Spektrum reduziert wird, und dieser auf immer größeren Gittern durch Relaxation schnell gelöst wird. Das größte Gitter besteht nur noch aus einem einzigen freien Gitterpunkt und für die Gitterschrittweite gilt  $h_{\max} = L/2$ . Der Algorithmus, den man auch einen *V-Zyklus* nennt ist in Abb. A.4 als Fluss-Diagramm dargestellt.

Der Name V-Zyklus kommt daher, dass zuerst alle Gitter vom feinsten mit  $h = h_{\min}$  zum größten mit  $h = h_{\max}$  durchlaufen werden (die absteigende Flanke des V's) und danach alle in der entgegengesetzten Reihenfolge (die aufsteigende Flanke des V's). Der zweite Relaxation-Schritt nach der Fehler-Korrektur ist nötig, um eventuell wieder aufgetretene, oszillierende Moden nachträglich zu dämpfen. Für diesen linearen Algorithmus wählen wir  $p = 2$  Gauß-Seidel-Relaxationen auf jedem Gitter sowohl vor der Residuums-Berechnung als auch nach der Fehler-Korrektur.

Ein V-Zyklus reduziert den absoluten Fehler sehr effektiv und für alle Moden gleichmäßig. Natürlich können wir den Fehler im Allgemeinen nicht bestimmen, da wir die wahre Lösung nicht kennen. Wir können uns aber ein weiteres Maß für den numerischen Fehler über das Residuum definieren. Das Residuum  $\mathbf{r}$  verschwindet genau dann, wenn  $\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{\phi}$ . Wenn die Norm von  $\mathbf{r}$  klein ist gegen typische Größen im System, dann können wir das Verfahren abbrechen. Wir beobachten also die Größe

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{\rho}\|} \quad (\text{A.37})$$

und können z.B. fordern, dass  $\epsilon < \epsilon_{\min}$  ist.  $\|\cdot\|$  ist hier die Norm eines Vektors,

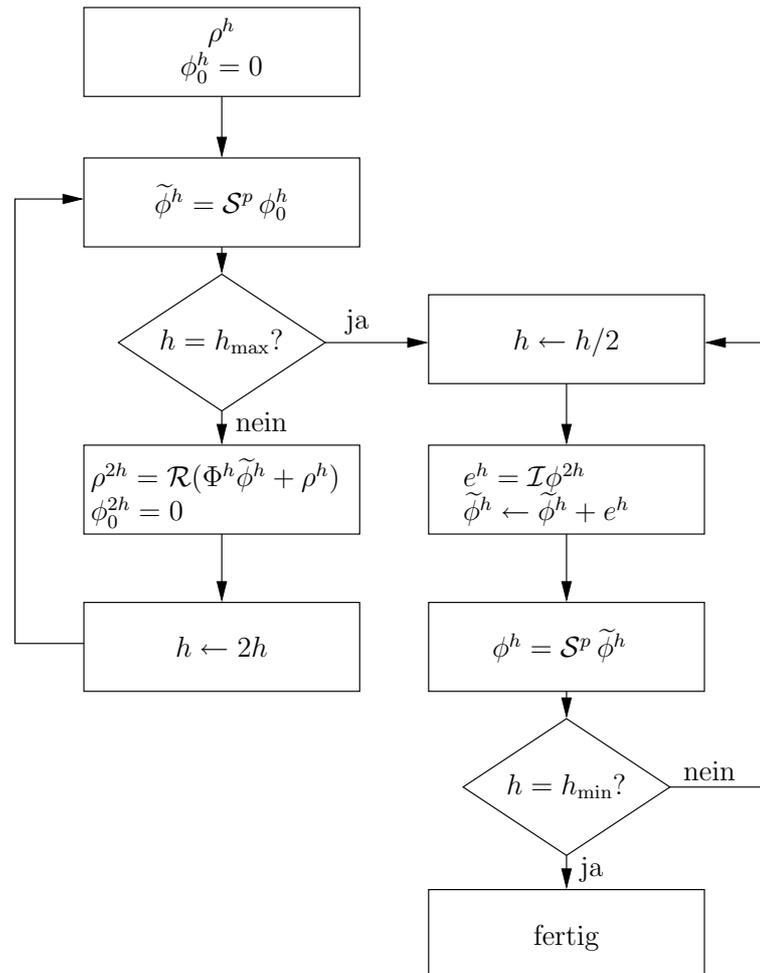


Abbildung A.4: Fluss-Diagramm für den V-Zyklus Algorithmus.

z.B.  $\|\mathbf{r}\| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}$ . Der V-Zyklus wird wiederholt, bis der numerische Fehler diesen Wert unterschritten hat. In der Praxis wählen wir allerdings ein etwas anderes Abbruchkriterium. Wir bestimmen nach jedem V-Zyklus mit den jeweiligen Feldern die Gesamtenergie des Systems gemäß Gl. (2.29). Die Differential-Operatoren, die in dem Ausdruck für die Energie auftreten übersetzen sich dabei natürlich in die Differenzen in Gl. (A.9). Wir wiederholen die den V-Zyklus, bis sich die aufeinanderfolgenden Werte für die Gesamtenergie nur noch um ein Promille unterscheiden. Diese hohe Genauigkeit ist für einige Analysen notwendig und wir bereits nach wenigen V-Zyklen erreicht.

### A.3.1 Vollständiger Mehrgitter-Algorithmus

Der V-Zyklus beschleunigt also die Konvergenz der Relaxationen, indem der glatte Fehler  $\mathbf{e}^h$  auf dem jeweils nächst größeren Gitter bestimmt und interpoliert wird. Die absolute Konvergenz-Geschwindigkeit hängt darüber hinaus stark von der Wahl der geratenen Anfangslösung  $\phi_0^h$  ab. Je besser diese mit der wahren Lösung übereinstimmt, desto schneller werden die Fehler-Moden gedämpft. Die jetzige Wahl  $\phi_0^h = 0$  spiegelt lediglich unsere völlige Unkenntnis der Lösung zu Beginn des Lösungs-Verfahrens wider. Es gibt allerdings eine numerisch recht günstige Methode, dieses zu verbessern. Dazu müssen wir uns noch einmal klar machen, dass der numerische Aufwand für alle Operationen stark von der Knotenzahl des Gitters abhängt. Mit Verdoppelung der Knotenzahl in jeder Raumdimension verachtfacht sich die Zahl der elementaren Operationen. Deshalb ist es naheliegend, eine Lösung auf einem Gitter  $\Omega^{2h}$  mit nur halber Knotenzahl  $n_1 = n/2$  zu suchen. Diese Lösung können wir per Interpolation auf das endgültige Gitter  $\Omega^h$  transportieren und als Startlösung verwenden. Natürlich lässt sich dasselbe Argument auch auf die Startlösung auf dem groben Gitter übertragen, und wir erhalten folgenden vollständigen Mehrgitter-Algorithmus.

1.  $h = h_{\max} = L/2$  und  $n_{\min} = 2$
2. Löse  $\Phi^h \phi^h = -\rho^h$  mit V-Zyklus.
3. Interpoliere  $\phi^h \rightarrow \phi^{h/2} = \mathcal{I} \phi^h$ .
4.  $h \leftarrow h/2$  und  $n \leftarrow 2n$
5. Wenn  $n \leq n_0$  gehe zu 2

Dieser Algorithmus ist graphisch in Abb. A.5 dargestellt. Der Start ist auf dem Gitter mit  $n = 2$  mit nur einem freien Gitterplatz  $((i, j, k) = (1, 1, 1))$ . Dort wird die lineare Gleichung exakt gelöst. Die Lösung wird zum nächsten Gitter mit  $n = 4$  interpoliert (gestrichelte Pfeile) und mit dieser Startlösung ein V-Zyklus gestartet. Dieses wird bis zum feinsten Gitter mit  $n = n_0$  durchgeführt und dort die Lösung gefunden. Wieder gilt, dass der V-Zyklus so oft gestartet wird, bis der numerische Fehler  $\epsilon$  unterschritten wird.

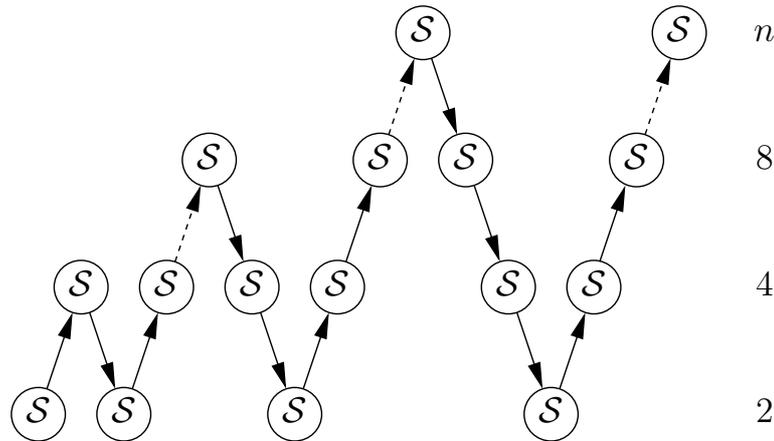


Abbildung A.5: Struktur des vollen Mehrgitter-Algorithmus. Jeder aufsteigende Pfeil entspricht einer Interpolation von einem groben zum feinen Gitter, jeder absteigende Pfeil einer Restriktion in umgekehrter Richtung. Auf jedem Gitter wird die Gitter durch  $\mathcal{S}$  geglättet. Ausgehend von einer Lösung auf dem größten Gitter mit  $n = 2$  Knoten pro Dimension wird sukzessive das Gitter verfeinert bis zu einem Gitter mit  $n$  Knoten. Auf jedem Gitter wird ein vollständiger V-Zyklus durchlaufen (ab- und aufsteigende Äste).

### A.3.2 Nichtlinearer FAS

In diesem Abschnitt werden wir den vorgestellten linearen Mehrgitter-Algorithmus verändern, damit auch die nicht-lineare Gleichung (A.10b) und damit auch das gekoppelte System gelöst werden kann. Wir verfolgen hier nicht die Strategie, abwechselnd eine Lösung für das skalare Potential  $\phi$  und für das Confinement Feld  $\sigma$  bei jeweils festgehaltenem anderen Feld zu suchen. Es hat sich gezeigt, dass dieses Verfahren nicht konvergiert. Stattdessen werden wir beide Felder gleichzeitig innerhalb eines Mehrgitter-Verfahrens lösen.

Wir schreiben hier kurz für das zu lösende System

$$\Sigma \sigma = \mathbf{f} \quad , \quad (\text{A.38})$$

wobei der Quellterm  $\mathbf{f}$  vorwegnehmend bereits hier eingeführt wird. Auf dem Gitter  $\Omega^h$  gilt natürlich  $\mathbf{f} = 0$ . Der folgende Algorithmus wird auch auf die Gleichung (A.10a) angewendet, wird aber aufgrund der einfacheren Notation hier nicht explizit ausgeschrieben.

Der grobe Ablauf des nicht-linearen Verfahrens unterscheidet sich nicht sehr von seinem linearen Pendant. Deshalb beschreiben wir hier nur die Unterschiede. Zunächst einmal können wir nicht die einfache Gauß-Seidel-Relaxation verwenden. Gl. (A.10b) als Gleichung für den Gitterwert  $\sigma_{ijk}$  angesehen, lässt sich auf Grund der nicht-linearen Funktionen  $U(\sigma)$  und  $\kappa(\sigma)$  nicht wie im linearen Fall

nach  $\sigma_{ijk}$  auflösen. Wir können die Gleichung aber linearisieren und einen einzelnen *Newton-Raphson* Schritt [Press96] für die Nullstellen-Suche anwenden. Für unser System heißt das:

$$\sigma_{ijk}^{\text{neu}} = \sigma_{ijk}^{\text{alt}} - \beta \left. \frac{\Sigma(\sigma_{ijk})}{\partial \Sigma} \right|_{\sigma_{ijk}^{\text{alt}}} . \quad (\text{A.39})$$

$\beta$  entspricht dabei einer numerischen Reibung, die wir künstlich einfügen um mögliche Schwierigkeiten des Newton-Verfahrens (z.B. in der Nähe von relativen Extrema) abzufangen. In der Praxis hat sich ein Wert von  $\beta = 0.5$  bewährt. Ein voller Relaxation-Schritt durchläuft jeden Gitterpunkt und berechnet den neuen Gitterwert  $\sigma_{ijk}^{\text{neu}}$ . Die Konvergenz des Newton-Raphson Verfahrens ist ausreichend hoch, um ein vergleichbares Glättungsverhalten zu erhalten wie im linearen Fall. Den dazugehörigen Glättungsoperator nennen wir hier  $\mathcal{S}_{\text{nl}}$ . Selbstverständlich wirkt auf die linearen Gleichungen (A.10a) weiterhin der Glättungsoperator  $\mathcal{S}$ . Nach  $p$ -facher Anwendung von  $\mathcal{S}_{\text{nl}}$  erhalten wir so die Näherungs-Lösung  $\tilde{\sigma}$ .  $\mathcal{S}_{\text{nl}}$  löst ebenso wie  $\mathcal{S}$  sehr effektiv das kurzwellige Spektrum von  $\sigma$  und hinterlässt einen glatten Fehler  $e$ .

Die zentrale Gleichung im linearen Algorithmus war die Residuums-Gleichung (A.25) für den glatten Fehler  $e$ . Da  $\Sigma$  ein nicht-linearer Operator ist, können wir die analoge Gleichung hier nicht aufstellen. Wir suchen also nach einer anderen Art, den glatten Fehler auf einem groben Gitter zu bestimmen. Dazu manipulieren wir Gl. (A.38) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Sigma^h \sigma^h &= \mathbf{f}^h \\ \Sigma^h \sigma^h - \Sigma^h \tilde{\sigma}^h &= \mathbf{f}^h - \Sigma^h \tilde{\sigma}^h = -\mathbf{r}^h \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

wobei wir hier die Definition des Residuums  $\mathbf{r}$  verwendet haben. Das Residuum ist nach der Relaxation glatt, also ist auch die linke Seite von Gl. (A.40) glatt. Die Gleichung kann also ohne Informationsverlust auf ein gröberes Gitter übertragen werden.

$$\begin{aligned} \Sigma^H \sigma^H - \Sigma^H (\mathcal{R} \tilde{\sigma}^h) &= -\mathcal{R} \mathbf{r}^h \\ \Sigma^H \sigma^H &= \Sigma^H (\mathcal{R} \tilde{\sigma}^h) - \mathcal{R} \mathbf{r}^h \\ \Sigma^H \sigma^H &= \mathbf{f}^H \quad \text{mit} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{f}^H = \Sigma^H (\mathcal{R} \tilde{\sigma}^h) - \mathcal{R} \mathbf{r}^h \quad . \quad (\text{A.42})$$

Hier haben wir  $\mathbf{f}^H$  als Quellterm auf dem groben Gitter eingeführt. Selbst wenn wir mit  $\mathbf{f}^h = 0$  starten, ist  $\mathbf{f}^H \neq 0$ . Wieder nehmen wir an, dass Gl. (A.41) leicht nach  $\sigma^H$  gelöst werden kann.<sup>6</sup> Wir haben dann zwei Repräsentation von  $\sigma$  auf dem groben Gitter  $\Omega^H$ , nämlich  $\sigma^H$  und  $\mathcal{R} \tilde{\sigma}^h$ . Wir können dann die Differenz

<sup>6</sup>Natürlich greifen dazu wieder auf den V-Zyklus zurück.

der beiden Repräsentationen als den Grob-Gitter-Fehler  $e^H$  definieren. Dieser enthält per Konstruktion nur langwellige Moden und kann auf  $\Omega^h$  interpoliert werden und wir können die Näherungs-Lösung  $\tilde{\phi}^h$  weiter verbessern:

$$e^H = \sigma^H - (\mathcal{R} \tilde{\sigma}^h) \quad (\text{A.43})$$

$$\tilde{\sigma}^h \leftarrow \tilde{\sigma}^h + \mathcal{I} e^H \quad (\text{A.44})$$

In Abb. A.4 verändern sich nur zwei Blöcke. Auf dem absteigenden Ast des V-Zyklus wird der Quellterm für die Differenzen-Gleichung auf dem groben Gitter anders bestimmt. Gleichzeitig wird die Startlösung auf diesem Gitter mit  $\phi^{2h} = \mathcal{R} \tilde{\sigma}^h$  initialisiert. Auf dem aufsteigenden Ast des V-Zyklus wird der Fehler durch Gl. (A.43) bestimmt. Diese Änderungen sind in Abb. A.6 dargestellt.

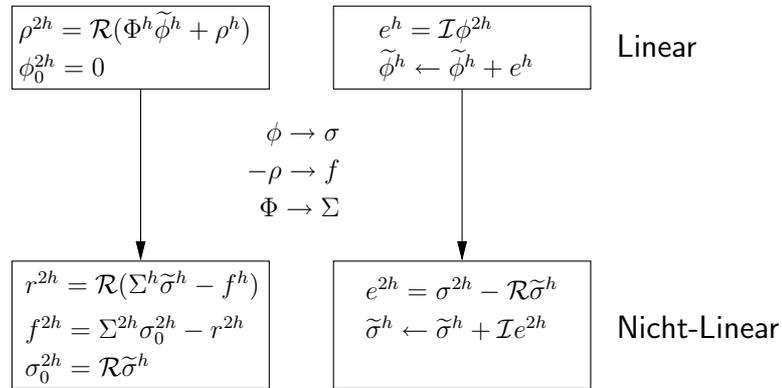


Abbildung A.6: Veränderungen im FAS-Algorithmus gegenüber dem linearen V-Zyklus aus Abb. A.4. Im absteigenden Ast (links) ändert sich die Bestimmung des Quellterms und der Startvektor wird mit der alten Näherung initialisiert. Im aufsteigenden Ast (rechts) ändert sich die Bestimmung des Grob-Gitter-Fehlers.

Bei diesem nicht-linearen Algorithmus benutzen wir sowohl für den ersten als auch für den zweiten Glättungsschritt  $p = 4$  Gauß-Seidel-Relaxationen. Auch hier wird der V-Zyklus bis zur Konvergenz wiederholt. Es zeigt sich, dass dies nach nur wenigen ( $q = 3 \dots 5$ ) V-Zyklen der Fall ist. Wir weisen hier noch einmal darauf hin, dass wir die Lösung für  $\phi^a$  und für  $\sigma$  *gleichzeitig* und mit demselben FAS-Algorithmus auffinden. In der Praxis durchlaufen wir den nicht-linearen V-Zyklus nicht bis zum größten Gitter mit nur einem freien Gitterpunkt, sondern wählen eine Rekursionstiefe  $\ell_0 < \ell$ , wobei  $\ell$  die Zahl der verschiedenen Gitter angibt (s. auch Diskretisierung in Gl. (A.6)). Das größte Gitter hat dann ein Knotenzahl von  $n = 8$ . Dies hat sich als numerisch stabil erwiesen. Die Rekursionstiefe lässt sich verändern, so dass  $\ell_0 = 0$  einer einfachen Newton-Gauß-Seidel-Relaxation entspricht. Dieses ist maximal stabil, aber wie oben gesagt nur äußerst langsam konvergent. Je größer die Rekursionstiefe ist, (wir wählen  $\ell_0 = 4$  für Gitter mit  $n = 128$  Knoten pro Dimension) desto höher ist die Kon-

vergenzrate, aber leider nimmt die Stabilität der Numerik ab. Für größere  $\ell_0$  ist die numerische Umsetzung des Algorithmus' in unserem Computercode nicht mehr stabil. Trotzdem erreichen wir, wie wir weiter unten zeigen werden, eine ausgezeichnete Konvergenzrate.

### A.3.3 Numerische Komplexität

In diesem Abschnitt wollen wir die Effizienz des Algorithmus beschreiben. Dazu gehen wir auf die Speichieranforderungen und die Zahl der Operationen ein. Die  $\gamma = 3$  Felder  $\phi^3, \phi^8, \sigma$  werden in  $d$  Dimensionen auf einem  $n^d$  Gitter abgespeichert. Zu jedem Feld gibt es einen entsprechenden Quellterm, so dass die Minimalanforderung an den Speicher  $M = (2\gamma)n^d$  Fließkommazahlen sind. Diese Speichergröße nennen wir eine Speichereinheit. Genauso können wir eine CPU-Arbeitseinheit festlegen. Im Idealfall kennen wir die Lösung analytisch und wir müssen für jedes Feld mit  $n^d$  Operationen entsprechend der Komplexität der Gleichungen die Lösung zuweisen. Die Arbeitseinheit ist also  $W = \gamma n^d$  Fließkommazahloperationen (flops). Jetzt können wir die Mehrbelastung durch den Algorithmus abschätzen.

Wir beginnen mit der zusätzlichen Speicherbelastung. Auf dem feinsten Gitter müssen wir für jedes Feld das Residuum bestimmen. Die Residuen werden allerdings nicht alle gleichzeitig (auf dem feinsten Gitter) benötigt, so dass nur noch einmal  $n^d$  Speicherplätze benötigt werden. Die Speichieranforderung auf dem feinsten Gitter  $\Omega^h$  sind demnach  $m_0 = (2\gamma + 1)n^d$  Speicherplätze. Während des V-Zyklus' durchlaufen wir die Gitter ( $\Omega_0 = \Omega^h, \Omega_1 = \Omega^{2h}, \dots, \Omega_i, \dots, \Omega_\ell = \Omega^{2^\ell h}$ ). Für die zusätzlichen Gitter brauchen wir auf jedem der Gitter  $m_i = (2\gamma + 1)(n/2^i)^d$  Speicherplätze. Summieren wir den Speicherbedarf für den gesamten V-Zyklus auf erhalten wir

$$m = \sum_{i=0}^{\ell} m_i = (2\gamma + 1) n^d \sum_{i=0}^{\ell} (2^{-d})^i \quad (\text{A.45a})$$

$$\leq \frac{1}{1 - 2^{-d}} (2\gamma + 1) n^d \quad (\text{A.45b})$$

$$= c_d (2\gamma + 1) n^d \quad (\text{A.45c})$$

Von der ersten zur zweiten Zeile haben wir die endliche Summe durch einen unendliche geometrische Reihe abgeschätzt. Der von der Dimension abhängige Vorfaktor ist  $c_d = 8/7$  in  $d = 3$  Raumdimensionen und wird erstaunlicherweise um so kleiner, je größer die Dimensionalität ist. Für  $\gamma = 3$  unabhängige Felder und  $d = 3$  Dimensionen ergibt sich somit ein gesamter Speicheraufwand von

$$m = \frac{8}{7} 7 n^3 = \frac{4}{3} M \quad (\text{A.46})$$

Speicherplätzen, also nur das  $4/3 \approx 1.3$ fache des minimalen Speicheraufwands.

Auf ähnliche Weise können wir die höhere numerische CPU-Belastung abschätzen. Für jedes Feld führen wir auf dem auf- und dem absteigenden Ast des V-Zyklus' je  $p = 4$  Newton-Gauß-Seidel-Relaxationen durch und müssen je einmal das Residuum bestimmen. Das ergibt zusammen  $(2p + 1)\gamma n^d$  flops. Den Transfer vom feinen zum groben Gitter und wieder zurück schätzen wir mit weiteren  $2\gamma n^d$  flops ab. Das ergibt zusammen auf dem feinsten Gitter  $w_0 = (2p + 3)\gamma n^d$  flops. Für die gesamte CPU-Anforderung ergeben sich dann

$$w = \sum_{i=0}^{\ell} w_i = (2p + 3)\gamma n^d \sum_{i=0}^{\ell} (2^{-d})^i \quad (\text{A.47a})$$

$$\leq \frac{1}{1 - 2^{-d}} (2p + 3)\gamma n^d \quad (\text{A.47b})$$

$$= c_d (2p + 3)\gamma n^d \quad (\text{A.47c})$$

Fließkommazahloperationen. Hier haben wir wieder auf die geometrische Reihe zurückgegriffen. Für  $\gamma = 3$  unabhängige Felder und  $d = 3$  Raumdimensionen ergibt sich damit eine gesamte CPU-Belastung von

$$w = \frac{8}{7} 33 n^3 = \frac{88}{7} W \quad (\text{A.48})$$

Fließkommazahloperationen. Ein vollständiger V-Zyklus entspricht demnach  $\frac{88}{7} \approx 12.5$  elementaren Newton-Gauß-Seidel-Iterationen.

### A.3.4 Effizienz des Algorithmus

In diesem Abschnitt zeigen wir die Effizienz unseres Computercodes mit dem FAS-Algorithmus im Vergleich zu einer einfachen Newton-Gauß-Seidel-Relaxation. Unser Test-Problem besteht aus einem  $q\bar{q}$ -Paar und die Modellparameter entsprechen dem Parametersatz PS-I. Zunächst zeigen wir den relativen numerischen Fehler  $\epsilon$  aus Gl. (A.37) als Funktion der CPU-Belastung in Arbeitseinheiten  $W$  in Abb. A.7. Bei der Gauß-Seidel-Relaxation (offene Symbole) nimmt die Konvergenzrate mit zunehmender Knotenzahl stark ab. Auffällig ist auch ein starkes Oszillieren des Fehlers. Im Vergleich dazu nimmt der Fehler mit dem FAS-Algorithmus sehr viel schneller ab (geschlossenen Symbole). Außerdem sinkt der Fehler streng monoton und die Konvergenzrate ist unabhängig von der Knotenzahl des Gitters.

Als nächstes zeigen wir in Abb. A.8 (links) die Schwankungen in der Gesamtenergie auf einem Gitter mit  $n = 128$  Knoten pro Dimension. Nach 4-5 V-Zyklen ist die Energie stabil und ändert sich nur noch unwesentlich. Der numerische Aufwand ist im Vergleich zur einfachen Relaxation um zwei Größenordnungen kleiner. Typischerweise dauert die Bestimmung der Felder einer einzelnen

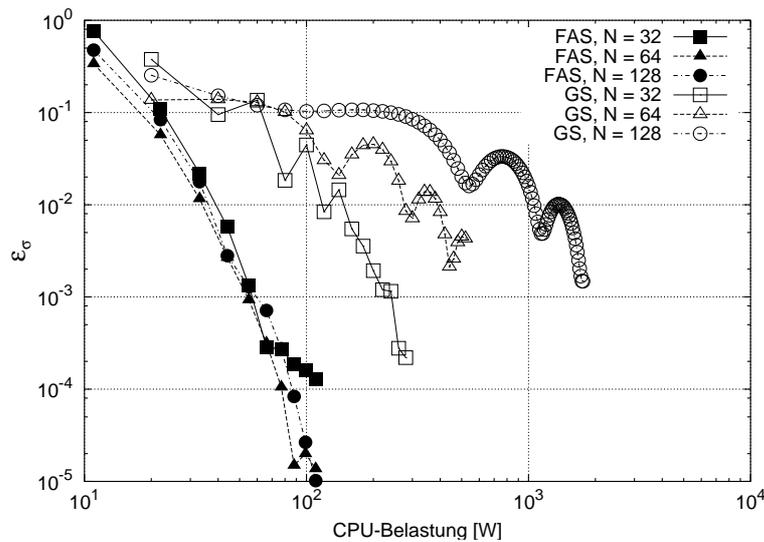


Abbildung A.7: Der numerische Fehler als Funktion der CPU-Belastung. Der Fehler sinkt mit dem FAS-Algorithmus sehr schnell und die Konvergenzrate ist unabhängig von der Knotenzahl des Gitters.

Quark-Konfiguration auf einem Intel Pentium mit 2.0 Ghz 3-4 Minuten. Um die Energieschwankungen auf ein ähnliches Maß zu reduzieren, wären mit der Gauß-Seidel-Relaxation für eine einzige Konfiguration ca. 14 Stunden nötig.

Abschließend zeigen wir in derselben Abbildung (rechts) die Rechenzeit für Gitter mit verschiedenen großen Knotenzahlen  $n$ . Nach Gl. (A.47) skaliert der Zeitaufwand für ein Problem in  $d = 3$  Raumdimensionen mit der dritten Potenz von  $n$ . Ein Fit durch die Rechenzeiten mit dem Ansatz  $T \propto n^d$  ergibt einen Wert  $d = 2.8$ . Im vollen Mehrgitteralgorithmus ist die jeweilige Startlösung auf jedem temporären Gitter (bis auf Diskretisierungs-Abweichungen) optimal und der Aufwand zum Lösen verringert sich dadurch. Dadurch ist der Zeitaufwand zum Lösen sogar sublinear  $d = 2.8 < 3$ .

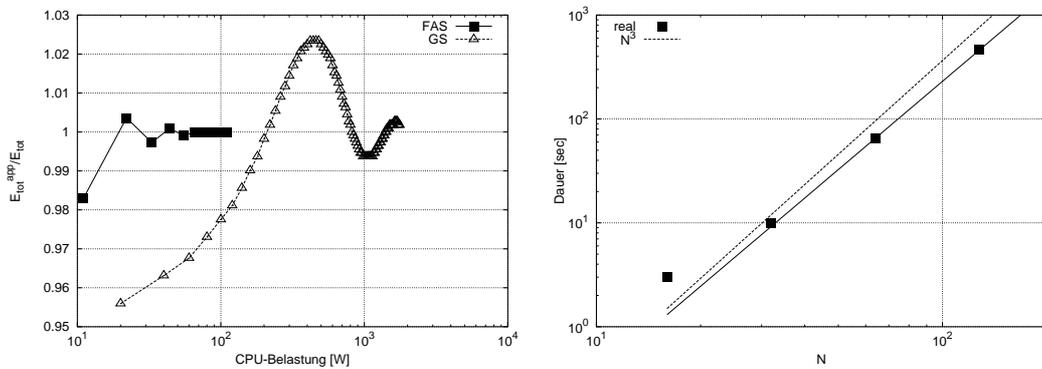


Abbildung A.8: Links: Die Gesamtenergie des Systems als Funktion des numerischen Aufwands auf einem Gitter mit  $n = 128$  Gitterpunkten. Mit dem FAS-Algorithmus ist die Energie nach 4-5 V-Zyklen stabil. Rechts: Die Rechenzeit als Funktion der Knotenzahl  $n$  des Gitters.

# Anhang B

## SU(3) Yang-Mills Theorie

### B.1 Elemente der SU(3) Algebra

In diesem Abschnitt werden wir einige verwendete Relationen der SU(3) angeben. Wir folgen im Wesentlichen der Notation in [Peskin95] und in [Ebert89]. Wir beziehen uns hier auf die *Farb*-SU(3), obwohl die Flavor-Algebra von dieser nicht verschieden ist. Die SU(3)-Lie-Algebra ist definiert durch die Kommutator-Relationen zwischen ihren  $N^2 - 1 = 8$  ( $N = 3$ ) Hermite'schen und spurlosen Generatoren  $t^a$ :

$$[t_D^a, t_D^b] = i f^{abc} t_D^c \quad (\text{B.1a})$$

$$(t_D^a)^* = (t_D^a)^\top \quad (\text{B.1b})$$

$$\text{Sp } t_D^a = 0 \quad a \in 1 \dots 8. \quad (\text{B.1c})$$

Über doppelt auftretende Indizes ist hier und im Folgenden immer zu summieren. Der Index  $D$  bezeichnet die sog. *Darstellung* der SU(3)-Algebra. In der Darstellung  $D$  sind die Generatoren  $t_D^a$   $D \times D$  Matrizen. Die  $f^{abc}$  sind die vollständig anti-symmetrischen Strukturkonstanten der SU(3). Die Generatoren sind gemäß

$$\text{Sp } t_D^a t_D^b = n_D \delta^{ab} \quad (\text{B.2})$$

normiert.  $n_D$  ist ein von der Darstellung  $D$  abhängiger Normierungsfaktor. Mit Gl. (B.1) und der Normierung in Gl. (B.2) ergibt sich für die Strukturkonstanten

$$f^{abc} = -\frac{i}{n_D} \text{Sp} ([t^a, t^b] t^c) \quad (\text{B.3})$$

Die SU(3)-Gruppe ist vom Rang 2 und man kann 2 Operatoren finden, die gleichzeitig mit allen Generatoren vertauschen, die sog. Casimir-Operatoren. Diese sind quadratisch bzw. kubisch in den Generatoren. In dieser Arbeit werden wir nur

den quadratischen Casimir-Operator verwenden:

$$\mathbf{C}_D = t_D^a t_D^a = C_D \mathbf{1}_D \quad , \quad (\text{B.4a})$$

$$[\mathbf{C}_D, t_D^a] = 0 \quad . \quad (\text{B.4b})$$

Da die Gruppe vom Rang 2 ist, vertauschen maximal zwei der acht Generatoren  $t^a$  miteinander. Die Dimension der *fundamentalen Darstellung* ist  $D = N = 3 = F$ . Die Generatoren in dieser Darstellung sind explizit durch die Gell-Mann-Matrizen gegeben, d.h.  $t^a \equiv t_F^a = \lambda^a/2$  mit

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{B.5a})$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{B.5b})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{B.5c})$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{B.5d})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5e})$$

und der Normierungskonstanten  $n_F = 1/2$ , d.h.

$$\text{Sp } t^a t^b = \frac{\delta^{ab}}{2} \quad . \quad (\text{B.6})$$

Die explizite Form der Generatoren ist so gewählt, dass  $t^3$  und  $t^8$  diagonal sind und so miteinander vertauschen. Die nicht-verschwindenden Strukturkonstanten sind dann durch Gl. (B.3) gegeben mit:

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \quad , & f^{147} &= \frac{1}{2} \quad , & f^{156} &= -\frac{1}{2} \quad , \\ f^{246} &= \frac{1}{2} \quad , & f^{257} &= \frac{1}{2} \quad , & f^{345} &= \frac{1}{2} \quad , \\ f^{367} &= -\frac{1}{2} \quad , & f^{458} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , & f^{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Für die *adjungierte* Darstellung mit  $D = N^2 - 1 = 8 = A$  lassen sich die Darstellungsmatrizen  $T^a \equiv t_A^a$  explizit durch die Strukturkonstanten  $f^{abc}$  formulieren:

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Man beachte, dass in dieser Form die beiden Matrizen  $T^3$  und  $T^8$  zwar nicht diagonal sind, aber weiterhin miteinander vertauschen. Die Generatoren  $t^a$  erzeugen unitäre Transformationen

$$U = e^{ig_s \theta^a t^a} \quad , \quad (\text{B.9})$$

die auf die Zustände im Multiplett wirken. Die Phasenwinkel  $\theta^a$  sind entweder konstant oder selbst eine Funktion der Raumkoordinaten  $\theta^a = \theta^a(x)$ . Die Transformationen  $U$  nennt man dann entweder *globale* oder *lokale* Transformationen. Jeder Darstellung ist ein Multiplett mit  $D$  Elementen zugeordnet. Die farbigen Quarks sind demnach die Elemente der Fundamental-Darstellung, des Triplets. Die  $D = F = 3$  Zustände lassen sich durch drei Basisvektoren beschreiben, die wir rot ( $r$ ), grün ( $g$ ) und blau ( $b$ ) nennen

$$|c_1\rangle = |r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |c_2\rangle = |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |c_3\rangle = |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{B.10})$$

Der Casimir-Operator hat für alle Zustände innerhalb eines Multipletts denselben Wert. Aus Gl. (B.4) und Gl. (B.2) mit  $n_F = 1/2$  ergibt sich für das Triplet  $C_F = 4/3$ . Für das 8-dimensionale adjungierte Oktett ergibt sich analog mit  $n_A = 3$  für den Casimir-Operator  $C_A = 3$ . Die Zustände eines Multipletts lassen sich durch die beiden Generatoren  $t_D^3$  und  $t_D^8$  charakterisieren.<sup>1</sup> Wir nennen  $t_D^{3/8}$  auch die Farbladungsoperatoren  $Q^{3/8} = t_D^{3/8}$ . Durch die Eigenwerte  $q^3$  und  $q^8$  dieser beiden Operatoren ist ein Zustand eindeutig innerhalb des Multipletts festgelegt. In der  $SU(3)$  lässt sich ein weiteres unabhängiges Triplet finden, das den Antiquarks zugeordnet wird. Für die Generatoren dieses Antitriplets gilt

$$\bar{t}^a = -(t^a)^* = -(t^a)^\top. \quad (\text{B.11})$$

## B.2 Eichsymmetrie der QCD

Die QCD beschreibt farbige Quark- und Gluon-Felder  $\psi(x)$  bzw.  $A^{\mu,a}(x)$ . Die Dynamik der Felder ist durch die QCD Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi} (i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi \quad (\text{B.12a})$$

$$- \frac{1}{2} \text{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.12b})$$

<sup>1</sup> In der Flavor- $SU(3)$  entsprechen diese beiden Operatoren gerade der 3-Komponente des Isospins  $T_3$  und der Hyperladung  $Y$ .

mit den Dirac'schen  $\gamma$ -Matrizen gegeben. Die Quark-Felder  $\psi(x) = \psi_i(x)|c_i\rangle$  sind Vektoren im Farbraum. Die  $\psi_i(x)$  selbst sind Dirac-Spinoren und  $m$  ist die Masse des Quarkfeldes. Wir vernachlässigen hier die verschiedenen Flavor-Komponenten der Quarks mit den verschiedenen Quarkmassen  $m_f$ . Die kovariante Ableitung  $D^\mu$  und der Feldstärketensor  $F^{\mu\nu}$  sind gegeben durch

$$D^\mu = \partial^\mu + ig_s A^\mu \quad (\text{B.13a})$$

$$\text{mit } A^\mu = A^{\mu,a} t^a$$

$$\text{und } F^{\mu\nu} = -\frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] \quad (\text{B.13b})$$

$$\text{mit } F^{\mu\nu} = F^{\mu\nu,a} t^a \\ = (\partial^\mu A^{\nu,a} - \partial^\nu A^{\mu,a} - g_s f^{abc} A^{\mu,b} A^{\nu,c}) t^a \quad .$$

Man beachte, dass  $F^{\mu\nu}$  kein Ableitungsoperator ist, wie man an der letzten Zeile in Gl. (B.13b) erkennen kann.

Die in Gl. (B.9) definierten lokalen SU(3)-Transformationen  $U(x)$  transformieren die Quark- und Gluon-Felder mit

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \quad , \quad (\text{B.14a})$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x) \quad , \quad (\text{B.14b})$$

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x) = U(x) A^\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g_s} U(x) \partial^\mu U^\dagger(x) \quad . \quad (\text{B.14c})$$

Unter denselben Transformationen ergibt sich für die kovariante Ableitung und den Feldstärketensor

$$D^\mu \rightarrow D'^\mu = U(x) D^\mu U^\dagger(x) \quad , \quad (\text{B.15a})$$

$$F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} = U(x) F^{\mu\nu} U^\dagger(x) \quad . \quad (\text{B.15b})$$

Mit den letzten Transformations-Vorschriften sieht man, wenn man die zyklische Vertauschbarkeit unter der Spur verwendet, dass die QCD-Lagrange-Dichte invariant unter SU(3)-Transformationen ist.

In der Gluon-Lagrange-Dichte Gl. (B.12b) treten im Gegensatz zur QED mit Gl. (B.13b) Potenzen von  $A^{\mu,a}$  in dritter und vierter Ordnung auf. Diese verursachen die Nicht-Linearität der *Yang-Mills-Gleichungen*, die zusammen mit der Dirac-Gleichung für die Quarks als Bewegungsgleichungen aus Gl. (B.12) folgen. Die Yang-Mills-Gleichungen werden durch die Bianchi-Identität ergänzt, die die homogenen Maxwell-Gleichungen der U(1)-Theorie ersetzt. Die Bianchi-Identität

folgt aus der Definition des Feldtensors  $F^{\mu\nu}$  in Gl. (B.13b). Insgesamt:

$$\text{(Dirac)} \quad (i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad (\text{B.16a})$$

$$\text{(Yang-Mills)} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu,a} - g_s f^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu,c} = g_s j^{\nu,a} \quad , \quad (\text{B.16b})$$

$$\text{(Bianchi)} \quad [D^\rho, F^{\mu\nu}] + [D^\nu, F^{\rho\mu}] + [D^\mu, F^{\nu\rho}] = 0 \quad . \quad (\text{B.16c})$$

Der Quarkstrom

$$j^{\mu,a} = \bar{\psi} \gamma^\mu t^a \psi \quad (\text{B.17})$$

in Gl. (B.16b) ist kein erhaltener Strom. Durch Kontraktion von Gl. (B.16b) mit  $\partial_\nu$  erhält man nämlich:

$$\begin{aligned} \partial_\nu j^{\nu,a} &= \frac{1}{g_s} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu,a} - f^{abc} \partial_\nu A_\mu^b F^{\mu\nu,c} \\ &= -f^{abc} \partial_\nu A_\mu^b F^{\mu\nu,c} \neq 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Der erste Term in Gl. (B.18) verschwindet auf Grund der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu,a}$ . Der Quarkstrom ist keine Erhaltungsgröße, da die Gluonen selbst eine Farbladung tragen. Definiert man die elektrischen und magnetischen Felder  $E^{i,a} = -F^{0i,a}$  bzw.  $B^{i,a} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} F^{jk,a}$  erhält man die Maxwell-Gleichungen der SU(3):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = -g_s f^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c + g_s j^{0,a} \quad (\text{B.19a})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^a - \partial_t \vec{E}^a = -g_s f^{abc} (\phi^a \vec{E}^c + \vec{A}^b \times \vec{H}^c) + g_s \vec{j}^a \quad (\text{B.19b})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^a + \partial_t \vec{H}^a = g_s f^{abc} [\vec{A}^b \times (\partial_t \vec{A}^c + \vec{\nabla} \phi^c) - (\vec{\nabla} \times \vec{A}^b) \phi^c] \quad (\text{B.19c})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H}^a = \frac{1}{2} g_s f^{abc} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}^b \times \vec{A}^c) \quad . \quad (\text{B.19d})$$

Hier treten neue nicht-lineare Quellterme zusätzlich zum Quarkstrom  $j^{\mu,a}$  auf. Die jeweils rechten Terme in den Gln. (B.19c) und (B.19d) wirken wie ein magnetischer Strom bzw. eine magnetische Ladung. Diese werden durch die Farbfeld-Konfigurationen selbst erzeugt. Innerhalb der SU(3) lassen sich magnetische Monopolterme konstruieren [’t Hooft74, Polyakov74].

## B.3 Farbneutrale Zustände

Auf Grund der Invarianz der QCD Lagrange-Dichte unter lokalen SU(3)-Transformationen müssen physikalische Zustände so konstruiert sein, dass sie ebenfalls invariant sind unter diesen Transformationen. Da die Zustände aller nicht-trivialen Multipletts nicht invariant sind,<sup>2</sup> müssen physikalische Zustände in ei-

<sup>2</sup>per definitionem transformieren sie sich mit  $U_D = \exp[ig_s \theta^a t_D^a]$

nem Farb-Singulett sein. Solche Singulett-Zustände lassen sich aus den fundamentalen Triplet- und Antitriplett-Zuständen konstruieren. Als Beispiel nennen wir hier Quark-Antiquark- ( $q\bar{q}$ -) und 3-Quark- ( $qqq$ -) Zustände, also mesonische und baryonische Zustände. Bezeichnet man einen Zustand eines Multipletts mit Dimension  $D$  mit  $\mathbf{D}$ , dann ergibt sich für Mesonen und Baryonen:

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad , \quad (\text{B.20a})$$

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad . \quad (\text{B.20b})$$

Aus den 9 bzw. 27 verschiedenen Möglichkeiten die (Anti)-Triplets zu koppeln, erhält man jeweils genau einen Singulett-Zustand.<sup>3</sup> Die explizite Konstruktion der  $q\bar{q}$ - und  $qqq$ -Zustände ist dann mit

$$|q\bar{q}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |(c_i\psi) (\bar{c}_i\bar{\psi})\rangle \quad (\text{B.21a})$$

$$|qqq\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon_{ijk} |(c_i\psi_1) (c_j\psi_2) (c_k\psi_3)\rangle \quad , \quad (\text{B.21b})$$

eindeutig, wobei wieder über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.  $\psi$  bzw.  $\bar{\psi}$  bezeichnen hier den räumlichen Teil des Zustands und sind auf Eins normiert. Sowohl  $|q\bar{q}\rangle$  als auch  $|qqq\rangle$  sind per Konstruktion invariant unter Eichtransformationen  $U(x)$ :

$$\begin{aligned} |c_i\bar{c}_i\rangle &\rightarrow |U_{ij}c_j\bar{c}_kU_{ki}^\dagger\rangle = |c_j\bar{c}_k\rangle \underbrace{U_{ki}^\dagger U_{ij}}_{\delta_{kj}} \\ &= |c_j\bar{c}_j\rangle \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.22a})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} |c_i c_j c_k\rangle &\rightarrow \epsilon_{ijk} |U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'} c_{i'} c_{j'} c_{k'}\rangle \\ &= \underbrace{\epsilon_{ijk} U_{ii'}U_{jj'}U_{kk'}}_{\epsilon_{i'j'k'}} |c_{i'} c_{j'} c_{k'}\rangle \\ &= \epsilon_{i'j'k'} |c_{i'} c_{j'} c_{k'}\rangle \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.22b})$$

Der Operator, der die Farbladung des Zustands misst, ist

$$Q^a = \sum_{n=1}^N t_n^a \quad , \quad (\text{B.23})$$

wobei die Summe über alle Teilchen im  $N$ -Teilchen-Zustand läuft. Der Operator  $t_n^a$  wirkt auf das  $n$ -te Teilchen und wirkt entweder als Teilchen- oder als Antiteilchen-Operator. Die Zustände  $|q\bar{q}\rangle$  und  $|qqq\rangle$  sind farbneutral, d.h. es gilt:

---

<sup>3</sup>In der Flavor- $SU(3)$ , die keine Eichgruppe ist, werden auch die Oktett- und Dekuplett-Zustände beobachtbaren Hadronen zugeordnet.

$$\langle c_{i'} \bar{c}_{j'} | Q^a | q\bar{q} \rangle = 0 \quad , \quad (\text{B.24a})$$

$$\langle c_{i'} c_{j'} c_{k'} | Q^a | qqq \rangle = 0 \quad (\text{B.24b})$$

für jede Farbkombination  $i', j', k'$ . Dieses gilt nicht für Zustände wie  $|r\bar{r}\rangle$  oder  $|rgb\rangle$ , die damit auch nicht eichinvariant sind (s. auch Diskussion in Kap. 2.5.3). Der Erwartungswert von  $Q^a$  in den Zuständen  $|q\bar{q}\rangle$  und  $|qqq\rangle$  verschwindet ebenfalls:

$$\begin{aligned} 3 \langle q\bar{q} | Q^a | q\bar{q} \rangle &= \langle c_i \bar{c}_i | t_1^a + \bar{t}_2^a | c_j \bar{c}_j \rangle & (\text{B.25a}) \\ &= \langle c_i | t^a | c_j \rangle \delta_{ij} + \langle \bar{c}_i | \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle c_i | t^a | c_i \rangle - \langle c_i | t^a | c_i \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \langle qqq | Q^a | qqq \rangle &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k'} \langle c_{i'} c_{j'} c_{k'} | t_1^a + t_2^a + t_3^a | c_i c_j c_k \rangle & (\text{B.25b}) \\ &= 3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k'} \langle c_{i'} | t^a | c_i \rangle \delta_{jj'} \delta_{kk'} \\ &= 6 \delta_{ii'} \langle c_{i'} | t^a | c_i \rangle \\ &= 6 \text{Sp } t^a = 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Farbladungs-*Dichte* wird vom Operator

$$\tilde{\rho}^a(x) = \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) t_n^a \quad (\text{B.26})$$

gemessen. Für einen eichinvarianten Zustand ist auch der Erwartungswert der Ladungsdichte Null, die Ladung verschwindet also lokal überall<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} 3 \langle q\bar{q} | \tilde{\rho}(x)^a | q\bar{q} \rangle &= \sum_n \langle (c_i \psi)(\bar{c}_i \bar{\psi}) | \delta(x - x_n) t_n^a | (c_j \psi)(\bar{c}_j \bar{\psi}) \rangle & (\text{B.27a}) \\ &= \langle c_i | t^a | c_i \rangle \langle \psi | \delta(x - x') | \psi \rangle \\ &\quad - \langle c_i | t^a | c_i \rangle \langle \bar{\psi} | \delta(x - x') | \bar{\psi} \rangle \\ &= \text{Sp } t^a (|\psi(x)|^2 - |\bar{\psi}(x)|^2) \\ &= 0 \quad , \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Ein herzlicher Dank gilt Tina Leitner, die im Rahmen des Bag-Modells in Computergenauigkeit dieses nachgerechnet und dem Verfasser dieser Arbeit diese Erkenntnis vermittelt hat.

$$\begin{aligned}
6 \langle qqq | \widehat{\rho}(x)^a | qqq \rangle &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{i'j'k'} \langle c_i | t^a | c_i \rangle \delta_{jj'} \delta_{kk'} \sum_n |\psi_n(x)|^2 & (B.27b) \\
&= 2 \operatorname{Sp} t^a \sum_n |\psi_n(x)|^2 \\
&= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Hier haben wir die Spurfreiheit der  $t^a$  und folgende Identitäten ausgenutzt:

$$\langle \psi | \delta(x - x') | \psi \rangle = \int d^3 x' \psi^*(x') \delta(x - x') \psi(x) = |\psi(x)|^2 \quad , \quad (B.28a)$$

$$\langle \bar{c}_i | \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle = -\langle c_j | t^a | c_i \rangle \quad . \quad (B.28b)$$

Ergänzend geben wir hier 2-Teilchen-Eigenschaften an:

$$\langle \psi | \delta(x - x') \delta(y - x') | \psi \rangle = \int d^3 x' \psi^*(x') \delta(x - x') \delta(y - x') \psi(x) \quad (B.29a)$$

$$\begin{aligned}
&= |\psi(x)|^2 \delta(x - y) \quad , \\
\langle \bar{c}_i | \bar{t}^a \bar{t}^a | \bar{c}_j \rangle &= +\langle c_j | t^a t^a | c_i \rangle \quad . \quad (B.29b)
\end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [Abrikosov57] A. A. Abrikosov, *On the magnetic properties of superconductors of the second group*, Sov. Phys. JETP **5** (1957) 1174. 1.1.1, 4.1.2
- [Achtzehnter85] J. Achtzehnter, W. Scheid und L. Wilets, *Nuclear matter in the crystal soliton bag model*, Phys. Rev. **D32** (1985) 2414. 1.1.1
- [Alberico02] W. M. Alberico, A. Drago und C. Ratti, *Stability of strange quark matter: Mit bag versus color dielectric model*, Nucl. Phys. **A706** (2002) 143, hep-ph/0110091. 1.1.1
- [Alexandrou02] C. Alexandrou, P. De Forcrand und A. Tsapalis, *The static three-quark  $SU(3)$  and four-quark  $SU(4)$  potentials*, Phys. Rev. **D65** (2002) 054503, hep-lat/0107006. 4.2, 4.2.2
- [Alexandrou03] C. Alexandrou, P. de Forcrand und O. Jahn, *The ground state of three quarks*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003) 667, hep-lat/0209062. 4.2, 4.2.2, 7.1
- [Ambjørn84a] J. Ambjørn, P. Olesen und C. Peterson, *Stochastic confinement and dimensional reduction. 1. four- dimensional  $SU(2)$  lattice gauge theory*, Nucl. Phys. **B240** (1984) 189. 4.1.4
- [Ambjørn84b] J. Ambjørn, P. Olesen und C. Peterson, *Stochastic confinement and dimensional reduction. 2. three- dimensional  $SU(2)$  lattice gauge theory*, Nucl. Phys. **B240** (1984) 533. 4.1.4
- [Amemiya99] K. Amemiya und H. Suganuma, *Effective mass generation of off-diagonal gluons as the origin of infrared abelian dominance in the maximally abelian gauge in qcd*, Phys. Rev. **D60** (1999) 114509, hep-lat/9811035. 2.1, 2.6.2
- [Andersson83] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman und T. Sjostrand, *Parton fragmentation and string dynamics*, Phys. Rept. **97** (1983) 31. 1.1, 5.2, 5.2

- [Andersson87] B. Andersson, G. Gustafson und B. Nilsson-Almqvist, *A model for low  $p(t)$  hadronic reactions, with generalizations to hadron-nucleus and nucleus-nucleus collisions*, Nucl. Phys. **B281** (1987) 289. 1.1, 5.2, 5.2
- [Andersson98] B. Andersson, *The Lund Model* (Cambridge University Press, 1998). 5.2, 5.2
- [Baker91] M. Baker, J. S. Ball und F. Zachariasen, *Dual qcd: A review*, Phys. Rept. **209** (1991) 73. 1.1.1, 2.7.1
- [Baker98] M. Baker, N. Brambilla, H. G. Dosch und A. Vairo, *Field strength correlators and dual effective dynamics in QCD*, Phys. Rev. **D58** (1998) 034010, hep-ph/9802273. 4.1.2
- [Bali93] G. S. Bali und K. Schilling, *Running coupling and the lambda parameter from  $SU(3)$  lattice simulations*, Phys. Rev. **D47** (1993) 661, hep-lat/9208028. 3.2, 4.1.3
- [Bali95] G. S. Bali, K. Schilling und C. Schlichter, *Observing long color flux tubes in  $SU(2)$  lattice gauge theory*, Phys. Rev. **D51** (1995) 5165, hep-lat/9409005. 1.1.2, 2.7.1, 3, 3.2, 3.2, 4.1.1, 4.5, 7.1
- [Bali96] G. S. Bali, V. Bornyakov, M. Muller-Preussker und K. Schilling, *Dual superconductor scenario of confinement: A systematic study of gribov copy effects*, Phys. Rev. **D54** (1996) 2863, hep-lat/9603012. 2.6.2
- [Bali97] G. S. Bali, K. Schilling und A. Wachter, *Complete  $O(v^{**2})$  corrections to the static interquark potential from  $SU(3)$  gauge theory*, Phys. Rev. **D56** (1997) 2566, hep-lat/9703019. 1.1, 3, 3.2, 4.1.3
- [Bali98] G. S. Bali, C. Schlichter und K. Schilling, *Probing the QCD vacuum with static sources in maximal Abelian projection*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 645, hep-lat/9802005. 1.1.1, 4.1.2, 4.6, 4.7
- [Bali00] G. S. Bali, *Casimir scaling or flux counting?*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000) 422, hep-lat/9908021. 4.1.4, 7.1
- [Bali01] G. S. Bali, *QCD forces and heavy quark bound states*, Phys. Rept. **343** (2001) 1, hep-ph/0001312. 3.2, 3.2, 4.2, 4.2.2
- [Ball88] J. S. Ball und A. Caticha, *Superconductivity: A testing ground for models of confinement*, Phys. Rev. **D37** (1988) 524. 1.1.1, 4.1.4, 7.1

- [Barone95] V. Barone und A. Drago, *Quark matter in the colour-dielectric model with perturbative gluons*, J. Phys. **G21** (1995) 1317. 1.1.1
- [Bass98] S. A. Bass et al., *Microscopic models for ultrarelativistic heavy ion collisions*, Prog. Part. Nucl. Phys. **41** (1998) 225, nucl-th/9803035. 1.1
- [Bauer88] W. Bauer, *Extraction of signals of a phase transition from nuclear multifragmentation*, Phys. Rev. **C38** (1988) 1297. 6.3
- [Bickeboeller85] M. Bickeboeller, M. C. Birse, H. Marschall und L. Wilets, *Gluonic interactions in the soliton bag model*, Phys. Rev. **D31** (1985) 2892. 1.1.2, 2.1, 2.1
- [Biro84] T. S. Biro, H. B. Nielsen und J. Knoll, *Color rope model for extreme relativistic heavy ion collisions*, Nucl. Phys. **B245** (1984) 449. 5.1
- [Blaizot02] J.-P. Blaizot und E. Iancu, *The quark-gluon plasma: Collective dynamics and hard thermal loops*, Phys. Rept. **359** (2002) 355, hep-ph/0101103. 1.1
- [Börchers96] V. Börchers, *Models for the Baryon in the context of the Poincare-Covariant-Dynamics (PCD)*, Diplomarbeit, Universität Bremen (1996). 4.2
- [Börchers00] V. Börchers, J. Meyer, S. Gieseke, G. Martens und C. C. Nock, *A Poincare covariant parton cascade model for ultrarelativistic heavy-ion reactions*, Phys. Rev. **C62** (2000) 064903, hep-ph/0006038. 1.1
- [Bornyakov04] V. G. Bornyakov, H. Ichie, Y. Mori, D. Pleiter, M. Polikarpov, G. Schierholz, T. Streuer, H. Stüben und T. Suzuki (DIK), *Baryonic flux in quenched and two-flavor dynamical QCD* (2004), hep-lat/0401026. 2.6.2, 3, 4.2, 4.2.2
- [Brandt82] A. Brandt, *Guide to multigrid development*, in: W. Hackbusch und U. Trottenberg (Hg.), *Multigrid Methods*, Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1982), S. 220–312. A, A.2.1
- [Briggs87] W. L. Briggs, *A Multigrid Tutorial* (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987). A.2.1, A.2.1, A.2.1, A.2.3
- [Casher79] A. Casher, H. Neuberger und S. Nussinov, *Chromoelectric flux tube model of particle production*, Phys. Rev. **D20** (1979) 179. 2.7, 5.1, 5.2

- [Cassing99] W. Cassing und E. L. Bratkovskaya, *Hadronic and electromagnetic probes of hot and dense nuclear matter*, Phys. Rept. **308** (1999) 65. 1.1
- [Cea95] P. Cea und L. Cosmai, *Dual superconductivity in the  $SU(2)$  pure gauge vacuum: A lattice study*, Phys. Rev. **D52** (1995) 5152, hep-lat/9504008. 1.1.2, 3.2
- [Chanfray89] G. Chanfray, J. F. Mathiot und H. J. Pirner, *Color dielectric approach to the nucleon and nuclear matter*, Nucl. Phys. **A497** (1989) 247c. 1.1.1
- [Chodos74a] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson und C. B. Thorn, *Baryon structure in the bag theory*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2599. 1.1.1, 1.1.1.1, 4.1.3
- [Chodos74b] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn und V. F. Weisskopf, *A new extended model of hadrons*, Phys. Rev. **D9** (1974) 3471. 1.1.1.1, 1.1.1.1, 4.1.3
- [Cornwall79] J. M. Cornwall, *Quark confinement and vortices in massive gauge invariant QCD*, Nucl. Phys. **B157** (1979) 392. 4.2
- [Cornwall96] J. M. Cornwall, *The baryon Wilson loop area law in QCD*, Phys. Rev. **D54** (1996) 6527, hep-th/9605116. 4.2
- [Cornwall04] J. M. Cornwall, *On the center-vortex baryonic area law*, Phys. Rev. **D69** (2004) 065013, hep-th/0305101. 4.2, 4.2
- [Creutz88] M. Creutz, *QUARKS, GLUONS AND LATTICES*, Cambridge monographs on mathematical physics (Cambridge University Press, 1988). 1.1
- [DeGrand75] T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson und J. E. Kiskis, *Masses and other parameters of the light hadrons*, Phys. Rev. **D12** (1975) 2060. 1.1.1.1, 3.2
- [Deldar00] S. Deldar, *Static  $SU(3)$  potentials for sources in various representations*, Phys. Rev. **D62** (2000) 034509, hep-lat/9911008. 4.1.4, 4.1.4
- [Dirac31] P. A. M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. Roy. Soc. Lond. **A133** (1931) 60. 1.1.1.1, 6.1.1
- [Dirac48] P. A. M. Dirac, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev. **74** (1948) 817. 1.1.1.1, 6.1.1

- [Dosch87] H. G. Dosch, *Gluon condensate and effective linear potential*, Phys. Lett. **B190** (1987) 177. 1.1.1
- [Dosch88] H. G. Dosch und Y. A. Simonov, *The area law of the wilson loop and vacuum field correlators*, Phys. Lett. **B205** (1988) 339. 1.1.1, 7.1
- [Ebert89] D. Ebert, *Eichtheorien, Grundlagen der Elementarteilchenphysik* (Akademie-Verlag, Berlin, 1989). B.1
- [Effenberger99] M. Effenberger, *Eigenschaften von Hadronen und in Kernmaterie in einem vereinheitlichten Transportmodell*, Doktorarbeit, Universität Giessen (1999). 1.1
- [Eichten75] E. Eichten et al., *The spectrum of charmonium*, Phys. Rev. Lett. **34** (1975) 369. 1.1, 3
- [Eichten77] E. Eichten und K. Gottfried, *Heavy quarks in  $e^+ e^-$  annihilation*, Phys. Lett. **B66** (1977) 286. 4.1.3
- [Eichten78] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane und T.-M. Yan, *Charmonium: 1. the model*, Phys. Rev. **D17** (1978) 3090. 3
- [Eichten80] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane und T.-M. Yan, *Charmonium: Comparison with experiment*, Phys. Rev. **D21** (1980) 203. 1.1, 3
- [Elze89] H.-T. Elze und U. W. Heinz, *Quark - gluon transport theory*, Phys. Rept. **183** (1989) 81. 5.1.2
- [Ezawa82] Z. F. Ezawa und A. Iwazaki, *Abelian dominance and quark confinement in yang-mills theories*, Phys. Rev. **D25** (1982) 2681. 2.1, 2.6.2
- [Fai88] G. Fai, R. J. Perry und L. Wilets, *The chromodielectric model: Confinement, effective coupling and chiral invariance*, Phys. Lett. **B208** (1988) 1. 2.1, 2.1
- [Fodor04a] Z. Fodor und S. D. Katz, *Critical point of QCD at finite  $T$  and  $\mu$ , lattice results for physical quark masses*, JHEP **04** (2004) 050, hep-lat/0402006. 1.1, 1.3
- [Fodor04b] Z. Fodor und S. D. Katz, *Finite  $T/\mu$  lattice QCD and the critical point*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 86, hep-lat/0401023. 1.1

- [Friedberg77a] R. Friedberg und T. D. Lee, *Fermion field nontopological solitons. 1*, Phys. Rev. **D15** (1977) 1694. 1.1.1, 2, 2.4
- [Friedberg77b] R. Friedberg und T. D. Lee, *Fermion field nontopological solitons. 2. models for hadrons*, Phys. Rev. **D16** (1977) 1096. 1.1.1, 2, 2.4
- [Geiger95] K. Geiger, *Space-time description of ultrarelativistic nuclear collisions in the qcd parton picture*, Phys. Rept. **258** (1995) 237. 1.1
- [Goldflam82] R. Goldflam und L. Wilets, *The soliton bag model*, Phys. Rev. **D25** (1982) 1951. 1, 1.1.1, 2.1
- [Green93] A. M. Green, C. Michael, J. E. Paton und M. E. Sainio, *Multi-quark energies in su(2) lattice gauge theory*, Int. J. Mod. Phys. **E2** (1993) 479, hep-lat/9301006. 6.2
- [Gubarev99] F. V. Gubarev, E. M. Ilgenfritz, M. I. Polikarpov und T. Suzuki, *The lattice SU(2) confining string as an Abrikosov vortex*, Phys. Lett. **B468** (1999) 134, hep-lat/9909099. 4.1.2
- [Hansson86] T. H. Hansson, *The bag model and the adjoint string tension*, Phys. Lett. **B166** (1986) 343. 2.7.1, 4.1.4
- [Hasenfratz80a] P. Hasenfratz, R. R. Horgan, J. Kuti und J. M. Richard, *Heavy baryon spectroscopy in the QCD bag model*, Phys. Lett. **B94** (1980) 401. 3.2
- [Hasenfratz80b] P. Hasenfratz, R. R. Horgan, J. Kuti und J. M. Richard, *The effects of colored glue in the QCD motivated bag of heavy quark - anti-quark systems*, Phys. Lett. **B95** (1980) 299. 3.2, 4.1.3
- [Hofmann00] M. Hofmann et al., *Statistical mechanics of semi-classical colored objects*, Phys. Lett. **B478** (2000) 161, nucl-th/9908030. 1.1
- [Jackson75] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2. Aufl. (John Wiley and Sons, 1975). 2.3, 2.4, 2.7.1, A.2.1
- [Johnson76] K. Johnson und C. B. Thorn, *String - like solutions of the bag model*, Phys. Rev. **D13** (1976) 1934. 2.7, 2.7.1, 4.1.4
- [Jones90] H. F. Jones, *Groups, representations and physics* (Institute of Physics Publishing Ltd., London, 1990). 4.1.4

- [Kajantie85] K. Kajantie und T. Matsui, *Decay of strong color electric field and thermalization in ultrarelativistic nucleus-nucleus collisions*, Phys. Lett. **B164** (1985) 373. 5.1
- [Kalmbach93] U. Kalmbach, T. Vetter, T. S. Biro und U. Mosel, *A quark transport theory to describe nucleon-nucleon collisions*, Nucl. Phys. **A563** (1993) 584, nucl-th/9306021. 1.1.1
- [Karsch03] F. Karsch und E. Laermann, *Thermodynamics and in-medium hadron properties from lattice QCD*, in: R. Hwa (Hg.), *Quark-Gluon Plasma III* (2003), hep-lat/0305025. 1.1, 1.2, 1.3
- [Karsch04] F. Karsch, *Lattice QCD at non-zero chemical potential and the resonance gas model*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **153** (2004) 106, hep-lat/0401031. 1.1
- [Kluger92] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper und E. Mottola, *Fermion pair production in a strong electric field*, Phys. Rev. **D45** (1992) 4659. 5.1
- [Kodama97] H. Kodama, Y. Matsubara, S. Ohno und T. Suzuki, *Inter-meson potentials in dual Ginzburg-Landau theory*, Prog. Theor. Phys. **98** (1997) 1345, hep-ph/9704340. 6.1.1, 6.2, 7.1
- [Koepf94] W. Koepf, L. Wilets, S. Pepin und F. Stancu, *The nucleon-nucleon potential in the chromodielectric soliton model: Statics*, Phys. Rev. **C50** (1994) 614, nucl-th/9402008. 1.1.1
- [Kogut74] J. B. Kogut und L. Susskind, *Vacuum polarization and the absence of free quarks in four- dimensions*, Phys. Rev. **D9** (1974) 3501. 1.1.1
- [Kogut75] J. B. Kogut und L. Susskind, *Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories*, Phys. Rev. **D11** (1975) 395. 4.1.1
- [Kogut81] J. B. Kogut, D. K. Sinclair, R. B. Pearson, J. L. Richardson und J. Shigemitsu, *The fluctuating string of lattice gauge theory: The heavy quark potential, the restoration of rotational symmetry and roughening*, Phys. Rev. **D23** (1981) 2945. 4.1.1
- [Koma03a] Y. Koma, M. Koma, E. M. Ilgenfritz und T. Suzuki, *A detailed study of the Abelian-projected SU(2) flux tube and its dual Ginzburg-Landau analysis*, Phys. Rev. **D68** (2003) 114504, hep-lat/0308008. 4.1.2

- [Koma03b] Y. Koma, M. Koma und H. Toki, *Casimir scaling hypothesis on the nonperturbative force in QCD vs. dual superconducting scenario of confinement*, Nucl. Phys. **A721** (2003) 903, hep-ph/0212400. 1.1.1, 4.1.4
- [Kratochvila03] S. Kratochvila und P. de Forcrand, *Observing string breaking with Wilson loops*, Nucl. Phys. **B671** (2003) 103, hep-lat/0306011. 4.1.4, 7.1
- [Kronfeld87] A. S. Kronfeld, G. Schierholz und U. J. Wiese, *Topology and dynamics of the confinement mechanism*, Nucl. Phys. **B293** (1987) 461. 2.1
- [Kuzmenko03] D. S. Kuzmenko und Y. A. Simonov, *Triangular and Y-shaped hadrons in QCD*, Phys. Atom. Nucl. **66** (2003) 950, hep-ph/0202277. 2.5.3, 4.2
- [Lampert00] M. A. Lampert und B. Svetitsky, *Flux tube dynamics in the dual superconductor*, Phys. Rev. **D61** (2000) 034011, hep-ph/9905455. 5.1
- [Lehr00] J. Lehr, M. Effenberger und U. Mosel, *Electron and photon induced reactions on nuclei in the nucleon resonance region*, Nucl. Phys. **A671** (2000) 503, nucl-th/9907091. 1.1
- [Lenz86] F. Lenz et al., *Quark confinement and hadronic interactions*, Ann. Phys. **170** (1986) 65. 6.1.1
- [Loh96] S. Loh, T. S. Biro, U. Mosel und M. H. Thoma, *A dynamical model of color confinement*, Phys. Lett. **B387** (1996) 685, hep-ph/9602358. 1.1.1, 1.1.2, 3.2, 4.1.3, 6.1.1
- [Loh97a] S. Loh, *Ein Transportmodell mit Farbconfinement*, Doktorarbeit, Universität Gießen (1997). 2
- [Loh97b] S. Loh, C. Greiner, U. Mosel und M. H. Thoma, *Dynamical fragmentation of flux tubes in the Friedberg-Lee model*, Nucl. Phys. **A619** (1997) 321, hep-ph/9701363. 1.1.1, 2.1, 3.2, 6.2
- [Lucini01] B. Lucini und M. Teper, *Confining strings in  $SU(N)$  gauge theories*, Phys. Rev. **D64** (2001) 105019, hep-lat/0107007. 2.7.1, 4.1.4
- [Lüscher81] M. Lüscher, G. Münster und P. Weisz, *How thick are chromoelectric flux tubes?*, Nucl. Phys. **B180** (1981) 1. 4.1.1

- [Mack84] G. Mack, *Dielectric lattice gauge theory*, Nucl. Phys. **B235** (1984) 197. 1.1.1, 2.1
- [Maedan90] S. Maedan, Y. Matsubara und T. Suzuki, *Abelian confinement mechanism and the QCD vacuum*, Prog. Theor. Phys. **84** (1990) 130. 1.1.1, 4.1.2
- [Magas01] V. K. Magas, L. P. Csernai und D. D. Strottman, *The initial state of ultra-relativistic heavy ion collision*, Phys. Rev. **C64** (2001) 014901, hep-ph/0010307. 5.1, 5.1.2
- [Mandelstam74] S. Mandelstam, *Dual - resonance models*, Phys. Rept. **13** (1974) 259. 1.1.1
- [Martens01] G. Martens, C. Traxler, U. Mosel und T. S. Biro, *Hadronization in the chromodielectric model*, in: L. S. Ferreira, P. Nogueira und J. I. Silva-Marcos (Hg.), *QCD: Perturbative or non-perturbative?* (World Scientific, Lissabon, 2001), S. 397–403, hep-ph/0002037. 1.1.1
- [Martens03] G. Martens, C. Greiner, S. Leupold und U. Mosel, *Chromofields of strings and baryons*, Eur. Phys. J. **A18** (2003) 223, hep-ph/0303017. 3.1.5, 5.1
- [Mathiot89] J. F. Mathiot, G. Chanfray und H. J. Pirner, *Phenomenology of color dielectrics in SU(3)color*, Nucl. Phys. **A500** (1989) 605. 1.1.1
- [Matsubara94] Y. Matsubara, S. Ejiri und T. Suzuki, *The (dual) Meissner effect in SU(2) and SU(3) QCD*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **34** (1994) 176, hep-lat/9311061. 3, 3.2, 7.1
- [Matsui86] T. Matsui und H. Satz, *J / psi suppression by quark - gluon plasma formation*, Phys. Lett. **B178** (1986) 416. 1.1
- [Michael98] C. Michael, *Adiabatic surfaces from the lattice: Excited gluonic potentials*, in: *Quark confinement and the hadron spectrum III* (Newport News, 1998), hep-ph/9809211, hep-ph/9809211. 4.1.4
- [Michael99] C. Michael, *Hadronic spectroscopy from the lattice: Glueballs and hybrid mesons*, Nucl. Phys. **A655** (1999) 12, hep-ph/9810415. 3.2, 3.2
- [Morningstar97] C. J. Morningstar und M. J. Peardon, *Efficient glueball simulations on anisotropic lattices*, Phys. Rev. **D56** (1997) 4043, hep-lat/9704011. 3.2, 3.2, 4.1.3

- [Mosel99] U. Mosel, *Fields, Symmetries, and Quarks*, Texts and monographs in Physics, 2. Aufl. (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1999). 1.1.1
- [Nachtmann96] O. Nachtmann, *High energy collisions and nonperturbative qcd* (1996), hep-ph/9609365. 1.1.1
- [Nardi98] M. Nardi und H. Satz, *String clustering and  $j/\psi$  suppression in nuclear collisions*, Phys. Lett. **B442** (1998) 14, hep-ph/9805247. 6.3, 6.3.1
- [Nielsen73] H. B. Nielsen und P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. **B61** (1973) 45. 1.1.1, 2.7.1, 4.1.2, 7.1
- [Pavel91] H. P. Pavel und D. M. Brink,  *$q$  anti- $q$  pair creation in a flux tube with confinement*, Z. Phys. **C51** (1991) 119. 5.2
- [Pepin96] S. Pepin, F. Stancu, W. Koepf und L. Wilets, *The nucleon-nucleon interaction in the chromo-dielectric soliton model: Dynamics*, Phys. Rev. **C53** (1996) 1368, nucl-th/9508048. 1.1.1
- [Peskin95] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Addison-Wesley, Reading, USA, 1995). 2.3, 4.2, B.1
- [Pirner84] H. J. Pirner, G. Chanfray und O. Nachtmann, *A color dielectric model for the nucleus*, Phys. Lett. **B147** (1984) 249. 1.1.1
- [Pirner92] H. J. Pirner, *The color dielectric model of QCD*, Prog. Part. Nucl. Phys. **29** (1992) 33. 1.1.1, 2.1
- [Polyakov74] A. M. Polyakov, *Particle spectrum in quantum field theory*, JETP Lett. **20** (1974) 194. 1.1.1, B.2
- [Press96] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C - The Art of Scientific Computing*, 2. Aufl. (University Press, 1996). A, A.2.1, A.2.1, A.3.2
- [Quigg79] C. Quigg und J. L. Rosner, *Quantum mechanics with applications to quarkonium*, Phys. Rept. **56** (1979) 167. 1.1, 3, 4.1.3
- [Rebhan02] A. Rebhan, *Thermal gauge field theories*, Lect. Notes Phys. **583** (2002) 161, hep-ph/0105183. 1.1
- [Ripka04] G. Ripka, *Dual Superconductor Models of Color Confinement*, Bd. 639 von *Lecture Notes in Physics* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004). 1.1.1, 12, 7.1

- [Rosina86] M. Rosina, A. Schuh und H. J. Pirner, *Lattice qcd and the soliton bag model*, Nucl. Phys. **A448** (1986) 557. 1.1.2
- [Sadiku92] M. N. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics* (CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992). 7.2
- [Savvidy77] G. K. Savvidy, *Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom*, Phys. Lett. **B71** (1977) 133. 2
- [Schmitt02] A. Schmitt, Q. Wang und D. H. Rischke, *When the transition temperature in color superconductors is not like in BCS theory*, Phys. Rev. **D66** (2002) 114010, [nucl-th/0209050](#). 1.1
- [Schönfeld90] T. Schönfeld, B. Müller, K. Sailer, J. Reinhardt, W. Greiner und A. Schäfer, *Pair creation in a flux tube*, Phys. Lett. **B247** (1990) 5. 5.2
- [Schreiber86] P. Schreiber, *Zur Geschichte des sog. Steiner-Weber-Problems.*, in: *Math.-nat. wiss. Reihe*, Bd. 35 (Wiss. Z. Ernst-Moritz-Arndt Univ. Greifswald, 1986), S. 53–58. 4.2
- [Schuh86a] A. Schuh und H. J. Pirner, *The nucleon in the color dielectric model*, Phys. Lett. **B173** (1986) 19. 1.1.1
- [Schuh86b] A. Schuh, H. J. Pirner und L. Wilets, *Nucleon nucleon scattering in the soliton bag model*, Phys. Lett. **B174** (1986) 10. 1.1.1
- [Schwinger51] J. S. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization*, Phys. Rev. **82** (1951) 664. 5.1, 5.2
- [Shifman79a] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, *QCD and resonance physics: Applications*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 448. 3.2
- [Shifman79b] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, *QCD and resonance physics. theoretical foundations*, Nucl. Phys. **B147** (1979) 385. 3.2
- [Shoshi03] A. I. Shoshi, F. D. Steffen, H. G. Dosch und H. J. Pirner, *Confining QCD strings, Casimir scaling, and a Euclidean approach to high-energy scattering*, Phys. Rev. **D68** (2003) 074004, [hep-ph/0211287](#). 1.1.1, 4.1.2, 7.1
- [Soff03] S. Soff, J. Randrup, H. Stocker und N. Xu, *Effects of strong color fields on baryon dynamics*, Phys. Lett. **B551** (2003) 115, [nucl-th/0209093](#). 5.1

- [Soff04] S. Soff, S. Kesavan, J. Randrup, H. Stocker und N. Xu, *Phimeson production at RHIC, strong color fields and intrinsic transverse momenta* (2004), nucl-th/0404005. 5.1
- [Sommer84] R. Sommer und J. Wosiek, *Baryonic loops and the confinement in the three quark channel*, Phys. Lett. **B149** (1984) 497. 4.2
- [’t Hooft74] G. ’t Hooft, *Magnetic monopoles in unified gauge theories*, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276. 1.1.1, B.2
- [Takahashi02] T. T. Takahashi, H. Suganuma, Y. Nemoto und H. Matsufuru, *Detailed analysis of the three quark potential in  $SU(3)$  lattice QCD*, Phys. Rev. **D65** (2002) 114509, hep-lat/0204011. 4.2, 4.2.2, 4.2.2
- [Traxler99a] C. Traxler, *Hadronisierung des Quark-Gluon-Plasmas im chromodielektrischen Modell*, Doktorarbeit, Universität Gießen (1999). 7.2
- [Traxler99b] C. T. Traxler, U. Mosel und T. S. Biro, *Hadronization of a quark-gluon plasma in the chromodielectric model*, Phys. Rev. **C59** (1999) 1620, hep-ph/9808298. 1.1.1, 1.1.2, 2.1, 3.2, 4.1.3, 6, 6.1.1, 6.2, 7.2
- [Trottier93] H. D. Trottier und R. M. Woloshyn, *Flux tubes in three-dimensional lattice gauge theories*, Phys. Rev. **D48** (1993) 2290, hep-lat/9303008. 3.2
- [Trottier95] H. D. Trottier, *Adjoint ’quark’ color fields in four-dimensional lattice gauge theory: Vacuum screening and penetration*, Phys. Lett. **B357** (1995) 193, hep-lat/9503017. 1.1.1, 3.2
- [Vasak83] D. Vasak, K. H. Wietschorke, B. Müller und W. Greiner, *Fission of bags by spontaneous quark - anti-quark pair production in supercritical color fields*, Z. Phys. **C21** (1983) 119. 5.2
- [Vetter95] T. Vetter, T. S. Biro und U. Mosel, *A transport theory of relativistic nucleon-nucleon collisions with confinement*, Nucl. Phys. **A581** (1995) 598, nucl-th/9407008. 1.1.1
- [Warke92] C. S. Warke und R. S. Bhalerao, *Effective lagrangian for a strong color electric field inside a flux tube with quark confinement*, Phys. Rev. **D46** (1992) 5168. 5.2
- [Wilets89] L. Wilets, *Nontopological Solitons*, Bd. 24 von *Lecture Notes in Physics* (World Scientific, Singapore, 1989). 1, 1.1.1

- [Wilets95] L. Wilets und R. D. Puff, *Collapse of flux tubes*, Phys. Rev. **C51** (1995) 339, [nucl-th/9408019](#). 5.2
- [Wong70] S. K. Wong, *Field and particle equations for the classical Yang-Mills field and particles with isotopic spin*, Nuovo Cim. **A65** (1970) 689. 5.1.2
- [Wyld76] H. W. Wyld und R. T. Cutler, *Flux tubes and the magnetic confinement of quarks*, Phys. Rev. **D14** (1976) 1648. 1.1.1, 2.7.1, 7.1
- [Xu04] Z. Xu und C. Greiner, *Thermalization of gluons in ultrarelativistic heavy ion collisions by including three-body interactions in a parton cascade* (2004), [hep-ph/0406278](#). 1.1



---

## Danksagung

Natürlich wäre diese Arbeit ohne die Hilfe anderer nie zu Stande gekommen. Diesen möchte ich an dieser Stelle herzlich danken.

Zuerst danke ich Herrn Professor Ulrich Mosel für die Aufnahme an sein Institut und für die nötige Geduld und Ausdauer, die er mir bei der Entstehung dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Ganz besonders danke ich Stefan Leupold für das schier unerschöpfliche Reservoir an Antworten auf die immer gleichen Fragen und die unglaubliche Fähigkeit, das zu erahnen, was man eigentlich wissen wollte, auch wenn man es nicht gefragt hat. Seine vorurteilsfreie Sicht der Dinge hat vieles klarer erscheinen lassen.

Carsten Greiner danke ich für das stete Interesse am Fortgang meiner Arbeit und seine aufmunternde Art, dass am Ende schon etwas dabei heraus kommen wird. Sehr bedauerlich, dass er gar nicht wiederkommt.

Elke Jung war unschlagbar bei der Erledigung aller Formalia. Mit ihrer Hilfe hat sich manches Formblatt wie von selbst ausgefüllt. Christiane Pausch danke ich für den freundlichen und reibungslosen Bibliotheksbetrieb.

Für ein gut funktionierendes System von elektronischen Rechenknechten haben stets Christoph Keil und Frank Frömel gesorgt. Der großzügigen Auskunftsfreude beider verdanke ich eine große Extraportion Einblick in die Tiefen der EDV.

Die gute Stimmung im gesamten Institut hat die letzten Jahre nur halb so lang erscheinen lassen. Allen ehemaligen und gegenwärtigen Mitstreitern danke ich für zahlreiche gemeinsame Mittagessen und Konferenznachsitzungen.

Marcus Post war immer bereit, bei einem guten Espresso über Sinn und Unsinn einer Promotion reden.

Mit Sascha Juchem und Stefan Leupold hatte ich das große Glück, eine gut funktionierende Land-Kommune zu bilden. Mit ihnen hat es besonders viel Spaß gemacht, über den Tellerrand der Physik zu blicken. Ihnen wünsche ich auch für die Zukunft genauso erfolgreiche Wohnprojekte.

Natürlich danke ich all denen, die mir allein durch ihre Anwesenheit zur Seite standen, auch wenn und gerade weil sie mit Physik nicht im Geringsten etwas zu tun haben.

Diese Arbeit wäre gar nicht möglich gewesen ohne meine Eltern. Mit ihrem wohlmeinenden Unverständnis für meine Arbeit haben sie mir immer das Gefühl gegeben, trotzdem das Richtige zu tun. Ihnen danke ich dafür ganz besonders.

Meiner Frau Alexandra letztendlich kann ich gar nicht genug danken. Sie hat mich durch manches Tief geschoben und sämtliche Selbstzweifel unerschütterlich beiseite geschoben. Mit ihr zusammen würde ich immer wieder jedes Langzeitprojekt angehen.

---