## RPA Theorie für schwache Zerfälle von exotischen Kernen

- Diplomarbeit -

im Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von

#### Abdul Ahad Ataie aus Gießen

Gießen, im September 2006

Erstgutachter und Betreuer	:	
Zweitgutachter	:	

Prof. Dr. H. Lenske Prof. Dr. W. Scheid

Universität Gießen Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie Institut für theoretische Physik D-35390 Gießen

# Inhaltsverzeichnis

Eiı	nleitung	v
1	Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung	<b>1</b> 1 3 4 6 7 8 10
2	Der Grundzustand2.1Hartree-Fock2.2Hartree-Fock-Bogoliubov	<b>17</b> 17 21
3	Anregung des Grundzustands         3.1       Random-Phase-Approximation         3.1.1       Die RPA-Gleichung         3.1.2       Die Quasi-Boson-Approximation         3.2       QRPA         3.3       Linear Response Theorie         3.4       Die Landau-Migdal Wechselwirkung	<ul> <li>23</li> <li>24</li> <li>25</li> <li>26</li> <li>27</li> <li>29</li> </ul>
4	QRPA-Rechnungen für Ladungsaustauschanregungen         4.1       Der β-Zerfall         4.2       Ergebnisse	<b>35</b> 35 37
5	Zusammenfassung und Ausblick	43
Α	Darstellung der NN-WechselwirkungA.1Projektionsoperatoren-Darstellung der NN-WechselwirkungA.2Direkter- und Austauschkanal der NN-Wechselwirkung	<b>45</b> 46
В	Der Ladungsaustausch-Übergangs-Operator	49

С	Rearrangement-Term der Landau-Migdal-Parameter	53
D	Literaturverzeichnis	55

## Einleitung

Der Mensch hat sich immer wieder gefragt, woher die Erde, Sterne, das gesamte Universum und schließlich er selbst kommen. Es wurden dazu Theorien aufgestellt, die aus heutiger Sicht verwirrend und schwer vorzustellen scheinen. Die Erde wurde als eine Scheibe dargestellt, diese Theorie ist spätestens seit den Fotos der Apollo-Mission haltlos geworden. Das heutige Bild vom Aufbau und der Entstehung des Universums verdanken wir in erster Linie den stark verbesserten Teleskopen und der Himmelsbeobachtung mit modernen Untersuchungsmethoden. Ein Resultat ist beispielsweise die Erkentnis, dass unsere Erde im Universum ein unbedeutende Stellung einnimmt. Neue Teleskope ermöglichen nicht nur eine Sicht auf die geometrische Struktur des Universums, sondern bieten auch über spektroskopische Untersuchungen ein Bild über dessen Zusammensetzung. Nach heutiger Kenntnis entstand unser Universum durch den so genannten Urknall und mit ihm die leichten Elemente Wasserstoff und Helium. Schwerere Kerne bis Eisen (Fe) entstehen im Inneren von Sternen durch Kernfusion von Wasserstoff über eine Kette von exotischen Kernen bis zu den auf der Erde existierenden Elementen. Schwerere Elemente als Fe werden in Supernova Explosionen erzeugt, viele dieser Isotope sind nicht stabil und zerfallen sofort wieder. Wie man sieht, bietet die Untersuchung von exotischen Kernen und dem schwachen Zerfall ( $\beta$ -Zerfall) eine Möglichkeit, elementare Erkenntnisse über die Entstehung unseres Universums zu erhalten. Die Entwicklung moderner Beschleuniger, wie sie die Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt besitzt, bietet zudem die Möglichkeit, exotische Kerne herzustellen und deren Eigenschaften experimentell zu untersuchen. Exotische Kerne bieten ein wesentlich breiteres Spektrum von Kerneigenschaften an als stabile Kerne. Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (NN-Wechselwirkung) kann unter dem Gesichtspunkt von geringer Dichte und extremer Isospinsymmetrie erforscht werden. In der vorliegenden Arbeit werden zum einen Eigenschaften der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung unter Berücksichtigung von Dreikörperkorrelationen untersucht und zum anderen die Anregung des Grundzustands mit Hilfe der Random-Phase-Approximation (RPA) berechnet.

In Kapitel 1 werden allgemeine Eigenschaften der NN-Wechselwirkung diskutiert und die für die weitere Rechnung verwendete Wechselwirkung vorgestellt. Wir gehen auf die Notwendigkeit einer effektiven in-medium Wechselwirkung ein und durch die Bethe-Goldstone-Gleichung geben wir eine Möglichkeit zur Berechnung dieser Wechselwirkung. In dieser Arbeit gehen wir aber über die ursprüngliche M3Y-Wechselwirkung [BBML77] hinaus und erweitern diese durch eine Korrektur der Nukleon-Meson-Vertices um eine effektive Dichteabhängigkeit. Des weiteren erweitern wir die Wechselwirkung durch die Einführung von Dreikörperkorrelationen.

In Kapitel 2 stellen wir mit dem Hartree-Fock-Modell und dem Hartree-Fock-Bogoliubov-Modell zwei Näherungsverfahren zur Bestimmung des Grundzustands vor.

In Kapitel 3 gehen wir auf die Anregung des Grundzustands ein und können somit Anregungsspektren des Kerns näher untersuchen. Es wird mit Hilfe der QRPA und der Linear-Response-Theorie die Reaktion des Systems auf kleine Störungen gezeigt. Schließlich geben wir mit der Einführung der Landau-Migdal-Wechselwirkung eine weitere Möglichkeit, Eigenschaften angeregter Zustände zu berechnen.

In Kapitel 4 werden zur Untersuchung des  $\beta$ -Zerfalls der Ladungsaustausch-Übergangs-Operator eingeführt und die Responsefunktion für den Fermi- sowie den Gamow-Teller-Übergang von <sup>56</sup>Fe berechnet.

In Kapitel 5 werden die bisherigen Erkenntnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf weitere Untersuchungen gegeben.

# 1 Die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung

Die Beschreibung des Atomkerns aus mikroskopischer Sicht beinhaltet die Betrachtung eines Vielteilchensystems und erfordert somit die Kenntnis über die Wechselwirkung zwischen den Konstituenten (den Nukleonen) des Systems. Im Folgenden werden drei grundlegende Annahmen für unsere Betrachtung gemacht. Es wird angenommen, dass dynamische mesonische Freiheitsgrade vernachlässigt werden können, was dazu führt, dass der Kern als ein System von A Nukleonen beschrieben werden kann, deren Wechselwirkung durch ein Potential, welches wir im weiteren Verlauf näher betrachten, gegeben ist. Des weiteren werden relativistische Effekte vernachlässigt und die Betrachtung (zunächst) auf Zweikörperwechselwirkungen beschränkt, obwohl Dreikörperkräfte eine entscheidende Rolle für die NN-Wechselwirkung spielen und für die präzise Beschreibung von Kerneigenschaften unverzichtbar sind. Wir wollen nun allgemeine Eigenschaften der nichtrelativistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (NN-Wechselwirkung) diskutieren.

## 1.1 Eigenschaften der NN-Wechselwirkung

Zur Untersuchung des NN-Potentials müssen wir uns zunächst ein qualitatives Bild über dessen Eigenschaften machen, um anschließend eine formale Wechselwirkung zu untersuchen.



Abbildung 1.1: Schematisches Bild der Radialabhängigkeit des Nukleon-Nukleon-Potentials aus [GM95]

Abbildung 1.1 zeigt den schematischen Verlauf der NN-Wechselwirkung. Die NN-Wechselwirkung hat eine kurze Reichweite von etwa 1 fm. Innerhalb dieses Bereichs ist sie attraktiv, z.B. im Spin-Singlett Zustand mit einer Tiefe von ungefähr 40 MeV für große Abstände. Für kürzere Abstände ( $r \leq 0,5$  fm) hingegen wird sie stark abstößend. Außerdem ist eine Spin und Isospin Abhängigkeit bei der Untersuchung zu berücksichtigen.

Als allgemeiner Ansatz für das NN-Potential ist somit

$$V = V(\boldsymbol{r}_{1}, \boldsymbol{p}_{1}, \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}; \boldsymbol{r}_{2}, \boldsymbol{p}_{2}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\tau}^{(2)})$$

eine gute Wahl, wobei  $\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{\sigma}_i, \mathbf{\tau}_i$  den Ort, Impuls, Spin und Isospin der zwei beteiligten Nukleonen bezeichnet. Mit Hilfe der Invarianzanforderungen lässt sich aber die funktionale Form des Potentials noch einschränken. Das Potential muss Translationsund Galileiinvariant sein, was die Orts- und Impulsabhängigkeit des Potentials auf den Relativabstand  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  und den Relativimpuls  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$  einschränkt. Mit Hilfe der Spin- und Isospininvarianz lässt sich das Gesamtpotential in einen Spin/Isospin abhängigen und einen unabhängigen Term aufspalten:

$$V = V'({m r},{m p},{m \sigma}^{(1)},{m \sigma}^{(2)}) + ilde{V}({m r},{m p},{m \sigma}^{(1)},{m \sigma}^{(2)}){m au}^{(1)}{m au}^{(2)}$$

Die Paritätsinvarianz wird erfüllt, indem man nur Terme mit geraden Potenzen von r und p verwendet und die Zeitumkehrinvarianz impliziert eine gerade Anzahl kombinierter r und  $\sigma$  in jedem Term.

Nach Berücksichtigung all dieser Invarianzanforderungen erhalten wir für den Zentralanteil des Potentials:

$$V_{1,2} = V_0(r) + V_{\sigma}(r)\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)} + V_{\tau}(r)\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)} + V_{\sigma\tau}(r)\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)}, \quad (1.1)$$

welches sich in eine kompaktere Schreibweise umformen lässt:

$$V_{1,2} = \sum_{S,T=0}^{1} V_{S,T} (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \boldsymbol{\sigma}^{(2)})^{S} (\boldsymbol{\tau}^{(1)} \boldsymbol{\tau}^{(2)})^{T}.$$

Weitere Möglichkeiten zur Darstellung des Potentials werden im Anhang A.1 vorgestellt. Die radiale Abhängigkeit des NN-Potentials lässt sich jedoch nicht aus Invarianzbedingungen herleiten, es muss eine andere Herangehensweise gewählt werden.

1937 beschrieb Yukawa die NN-Wechselwirkung mit Hilfe der Mesonen-Feld-Theorie. Nach dieser Theorie wechselwirken Nukleonen miteinander durch den Austausch von einem bzw. mehreren Mesonen. Die einfachste Form dieses Austauschpotentials ist das Ein-Pion-Austauschpotential (englisch: one-pion-exchange potential, OPEP) mit der als Yukawafunktion bezeichneten radialen Abhängigkeit:

$$V_Y(r) = \frac{e^{-\mu r}}{\mu r}.$$
 (1.2)

Hierbei ist  $\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{mc}$  die Comptonwellenlänge des Austauschteilchens.



Abbildung 1.2: Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung durch Mesonenaustausch

Der  $\pi$ -Austausch beschreibt den langreichweitigen Anteil der NN-Wechselwirkung, wogegen für mittlere Reichweiten der korrelierte Zwei-Pionen-Austausch eingeführt wurde. Für den kurzreichweitigen Bereich müssen  $\rho$ - und  $\omega$ -Mesonen als weitere Austauschteilchen eingeführt werden.

## 1.2 Die effektive in-medium Wechselwirkung

Die bis jetzt behandelte freie NN-Wechselwirkung besitzt leider einige Eigenschaften, die schwer zu handhaben sind. Die starke Abstoßung bei kleinen Abständen (soft core bzw. hard core) führt zu einer starken Komplikation der nuklearen Vielteilchentheorie, wenn nicht sogar zur Unlösbarkeit des Problems. Beispielsweise werden bei der Anwendung in Hartree-Fock-Rechnungen durch den hard core die Hartree-Fock-Matrixelemente unendlich.

Einen Ausweg finden wir darin, dass wir anstelle der freien NN-Wechselwirkung eine effektive in-medium Wechselwirkung verwenden, welche durch eine Summation der Streureihe von zwei Nukleonen im Kernmedium zusammengesetzt ist. Die freie Wechselwirkung wird somit zum Born-Term dieser Reihe. Diese Herangehensweise hat zwei Vorteile. Zum einen werden wir den hard core los und erhalten ein gutartiges Verhalten bei kleinen Abständen und zum anderen werden durch den Ersatz der freien Wechselwirkung durch die effektive in-medium Wechselwirkung durchweg mehr Vielteilcheneffekte mitberücksichtigt, als wenn wir nur die freie Wechselwirkung benutzen würden.

Zur Berechnung dieser effektiven Wechselwirkung existiert ein Analogon zur Lippman-Schwinger-Gleichung für die Streumatrix der freien NN-Wechselwirkung, die Bethe-Goldstone-Gleichung zur Berechnung der so genannten Brückner'schen G-Matrix:

$$G = V + V \frac{Q_F}{E - H_0} G.$$

Dabei bezeichnet V die freie Wechselwirkung,  $H_0$  ist der Hamilton-Operator des Kerns und  $Q_F$  ein Projektionsoperator welcher verhindert, dass in die Fermikugel hineingestreut wird und somit für den Erhalt des Pauli-Prinzips sorgt.

Durch den Hamilton-Operator des Kerns erhalten wir eine zusätzliche Abhängigkeit der G-Matrix von den Wellenfunktionen und Einteilchenenergien der Nukleonen. Dieses Problem lässt sich aber mit Hilfe der Hartree-Fock-Theorie lösen. Eine weitere Komplikation resultiert daraus, dass unser Pauli-Blocking-Operator  $Q_F$  von der Dichte des Mediums abhängt, und diese wirkt sich auch auf die gesuchte effektive in-medium Wechselwirkung aus. Um nun nicht für jeden Kern eine andere effektive Wechselwirkung zu berechnen, werden wir eine explizit von der Dichte abhängige NN-Wechselwirkung in unendlicher Kernmaterie berechnen und später in Rechnungen für endliche Kerne verwenden.

## 1.3 Drei-Körper-Anteil der NN-Wechselwirkung

Die bisherige Betrachtung der NN-Wechselwirkung kann nicht vollständig sein, da eine Beschreibung als eine reine Zweikörperwechselwirkung nur möglich ist, wenn man subnukleonische bzw. hadronische Freiheitsgrade vernachlässigt. Es zeigt sich aber, dass das Nukleon eine Struktur besitzt und somit auch gleichzeitig angeregte Zustände, wie Beispielsweise die  $\Delta(1232)$  und die Roper N\*(1440) Resonanz in der Beschreibung der Wechselwirkung mitberücksichtigt werden müssen. Zusätzlich wird die NN-Wechselwirkung aufgrund des Pauli-Prinzips im Medium geändert. Dies gibt nun den Anreiz, die Vielteilchen-Wechselwirkung zu erweitern, was sich durch die Einführung von Dreikörperkräften realisieren lässt.

In [GLMM89] wird mit Hilfe einer nichtrelativistischen Brückner-Bethe Berechnung, welche die Dreikörpereffekte beinhaltet, eine zusätzliche effektive Zweikörperwechselwirkung vorgestellt. Die Dreikörperkraft wird hierbei aus dem Mesonen-Austausch-Strom (englisch: meson-exchange current, MEC) abgeleitet. Abbildung 1.3 zeigt die durch den MEC abgeleiteten Beiträge in erster Ordnung der Dreikörperkraft.



Abbildung 1.3: Beitrag zur Dreikörperkraft in erster Ordnung, abgeleitet aus dem MEC.

Die Beschreibung der Dreikörperkraft durch eine effektive Zweikörperkraft basiert auf dem Formalismus von McKeller und Rajaraman (für eine nähere Erläuterung siehe [GLMM89, IV.A] ).

Zur Bestimmung der NN-Wechselwirkung benötigt man die Meson-Nukleon-Kopplung, die Formfaktoren und die Mesonenmassen. Als Formfaktor wird

$$F(q^2) = \frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 - q^1} \xrightarrow{q_0 \approx 0} \frac{\Lambda^2 - m^2}{\Lambda^2 + q^1}$$

angesetzt, wobei m die Meson-Masse und  $\Lambda$  der Cutoff Parameter ist. Tabelle (1.1)

$\frac{g^2}{4\pi}$	$\Lambda \; [{\rm GeV/c}]$
11, 9	1,1
33	1, 3
14, 4	1,4
0, 55	1, 1
2,58	1,45
4, 13	1,55
	$\frac{\frac{g^2}{4\pi}}{11,9}$ 33 14,4 0,55 2,58 4,13

Tabelle 1.1: Kopplungskonstanten und Formfaktoren der unterschiedlichen Vertices.

zeigt die hierbei verwendeten Kopplungskonstanten sowie die Parameter der Formfaktoren.

Als effektive Dreikörperkraft ergibt sich:

$$V_{3}(\mathbf{r}_{1}',\mathbf{r}_{2}',\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2}) = \frac{1}{4}Tr\sum_{n}\int d^{3}r_{3}d^{3}r_{3}'\varphi_{n}^{*}(\mathbf{r}_{3}')(1-\eta(r_{13}'))(1-\eta(r_{23}'))$$
$$\times W_{3}(\mathbf{r}_{1}',\mathbf{r}_{2}',\mathbf{r}_{3}',\mathbf{r}_{1},\mathbf{r}_{2},\mathbf{r}_{3})(1-\eta(r_{13}))(1-\eta(r_{23}))\varphi_{n}(\mathbf{r}_{3})$$

Dabei wird die Spur im Bezug auf den Spin und den Isospin des Nukleons mit den Koordinaten (3, 3') gebildet.  $\varphi(\mathbf{r}_i)$  beschreibt eine normierte ebene Welle,  $\eta(r_{ij})$  ist der Mittelwert der Defekt-Funktion über den Spin und den Impuls im Fermi-See und berücksichtigt die Partialwellenanteile.  $W_3$  ist das Dreikörper-Wechselwirkungsmatrixelement. Die so erhaltene effektive Zweikörperkraft ist der Mittelwert der Dreikörperkraft, gebildet mit der Wellenfunktion des dritten Teilchens, wobei die Korrelationen zwischen diesem Teilchen und den beiden anderen mithilfe der Defekt-Funktion  $\eta(r)$ berücksichtigt werden.

## 1.4 Die M3Y-Wechselwirkung

Um Untersuchungen von Kerneigenschaften zu beginnen benötigt man, wie bereits erwähnt, eine effektive in-medium Wechselwirkung. Diese effektive NN-Wechselwirkung kann nun aus einer komplizierten G-Matrix Berechnung bestimmt werden oder mit Hilfe einer geschickten Parametrisierung der G-Matrix.

Unter vielen verschiedenen effektiven Wechselwirkungen orientieren wir uns an der Michigan Version der in-medium NN-Wechselwirkung (M3Y-Wechselwirkung)[BBML77], welche in der Streutheorie eine breite Verwendung findet. Die M3Y-Wechselwirkung ist so durch den Fit von Yukawa-Funktionen an die aus der Reid soft-core NN-Wechselwirkung erhaltenen G-Matrixelemente abgeleitet worden, dass die Grundzustandseigenschaften von <sup>16</sup>O reproduziert werden. Die Bereiche der M3Y-Wechselwirkung wurden so gewählt, dass sowohl der langreichweitige Ein-Pion-Austausch wie auch der kurzreichweitige und abstoßende, durch schwerere Mesonen getragene Teil der Wechselwirkung gewährleistet ist.

Aktuelle Parametrisierungen basieren jedoch auf dem Paris-Potential, was dazu führt, dass zum einen der langreichweitige Bereich der Wechselwirkung beschrieben wird und zum anderen auch der Bereich mittlerer Reichweiten. Der kurzreichweitige Bereich hingegen wurde phänomenologisch an experimentelle Streudaten gefittet. Da wir somit eine Wechselwirkung erhalten, welche auf einer fundamentaleren Theorie der NN-Wechselwirkung basiert als frühere Potentiale und außerdem auch neue experimentelle Daten enthält, werden wir im Folgenden die Paris-Parametrisierung verwenden.

Die Wechselwirkung wird somit durch die Überlagerung von drei Yukawa-Funktionen dargestellt. Den langreichweitigen (ca 1, 141 fm) Teil beschreibt der  $\pi$ -Meson-Austausch, wohingegen der mittlere- und kurzreichweitige Anteil von 0, 4 fm und 0, 25 fm im isoskalaren Kanal durch den Austausch von  $\omega$ - und  $\sigma$ -Mesonen realisiert wird und im Isovektor Kanal das  $\rho$ - und  $\sigma'$ -Meson, welches den spin-skalaren 2- $\pi$  Austausch simuliert, verwendet wird.

Durch die Herleitung der M3Y-Wechselwirkung ist diese nur für einen kleinen Bereich der Kerndichte gültig (ca.  $\frac{1}{3}$  der normalen Kerndichte) und besitzt keine explizite Dichte-Abhängigkeit. Wir werden dieses Problem im Folgenden dadurch lösen, dass wir eine explizite Dichte-Abhängigkeit in die Nukleon-Meson-Kopplungskonstante einbauen. Entsprechende Ansätze sind beispielsweise zuvor schon in [HL98] und [KOO96] untersucht worden.

## 1.5 Ansatz für die G3Y-Wechselwirkung

Als Ansatz für unsere NN-Wechselwirkung (G3Y-Wechselwirkung) werden wir die schon von Frank Hofmann [HL98] erarbeitete Erweiterung der M3Y-Wechselwirkung als Grundlage nehmen. Hierbei wurde für die Nukleon-Meson-Kopplungskonstante eine explizite Dichteabhängigkeit eingeführt, so dass man analog zu (1.2) folgende Form erhält:

$$V(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{2}) = g(\rho(\mathbf{r}_{1})) \frac{e^{-\mu |\mathbf{r}_{1} - \mathbf{r}_{2}|}}{\mu |\mathbf{r}_{1} - \mathbf{r}_{2}|} g(\rho(\mathbf{r}_{2})).$$
(1.3)

Dabei werden wir aber die Funktion  $g(\rho)$  so erweitern, dass nun auch der Dreikörperanteil in der NN-Wechselwirkung berücksichtigt wird. Im Unterschied zu anderen Ansätzen [KOO96], bei denen die Dichteabhängigkeit rein empirisch durch Fiten an Kerndaten angesetzt wird, orientieren wir uns an den reinen theoretischen Ergebnissen für Zustandsgleichungen von unendlicher Kernmaterie der Urbana Gruppe [APR98].

#### 1.5.1 Zustandsgleichung für unendliche Kernmaterie

Betrachten wir die Grundzustandsenergie in der Hartree-Fock-Rechnung, so erhalten wir:

$$E = T + \frac{1}{2} < V >$$
  
=  $\sum_{\sigma\tau} \sum_{k \le k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \sum_{k_1 \le k_{F_1}} \sum_{k_2 \le k_{F_2}} \langle \sigma_1, \tau_1, \boldsymbol{k}_1; \sigma_2, \tau_2, \boldsymbol{k}_2 | V | \sigma_1, \tau_1, \boldsymbol{k}_1; \sigma_2, \tau_2, \boldsymbol{k}_2 \rangle.$ 

wobei die Spur über die Spin- und Isospin-Freiheitsgrade gebildet wird und über alle besetzten Zustände k bis zur Fermi-Wellenzahl  $k_F$  summiert wird.

Eine drastische Vereinfachung erhalten wir, wenn wir unendliche Kernmaterie betrachten, da hier die Einteilchenwellenfunktionen  $|\sigma \tau \mathbf{k}\rangle$  ebene Wellen sind. Somit erhalten wir für die Ortswellenfunktion:

$$|m{k}
angle = \phi_{m{k}}(m{r}) = rac{1}{\sqrt{\Omega}}e^{im{k}m{r}}.$$

 $\Omega$ ist hierbei das Normierungsvolumen.

Bei der Berechnung der potentiellen Energie ist es üblich, die NN-Wechselwirkung in den Proton-Proton (pp-), Neutron-Neutron (nn-) und den Proton-Neutron (pn-) Kanal aufzuteilen, sowie den direkten- (d- oder Hartree) und Austauschterm (englisch: exchange, e oder Fock) separat zu betrachten. Wie im Anhang A.2 erläutert erhalten wir somit für das Potential:

$$\langle V \rangle = \langle V_{pp}^{d} \rangle + \langle V_{pn}^{d} + V_{nn}^{d} \rangle + \langle V_{pp}^{e} \rangle + \langle V_{pn}^{e} + V_{nn}^{e} \rangle.$$

Dabei lassen sich mit dem Spin-Entartungsfaktor  $N_s = 2s + 1 = 2$ 

$$\langle V_{pn}^{d} \rangle = N_{s}^{2} \int \frac{d^{3}k_{1}}{(2\pi)^{3}} \Theta(k_{p} - k_{1}) \int \frac{d^{3}k_{2}}{(2\pi)^{3}} \Theta(k_{n} - k_{2}) \langle \mathbf{k}_{1}\mathbf{k}_{2} | V_{pn}^{d} | \mathbf{k}_{1}\mathbf{k}_{2} \rangle,$$

$$\langle V_{pn}^{e} \rangle = N_{s}^{2} \int \frac{d^{3}k_{1}}{(2\pi)^{3}} \Theta(k_{p} - k_{1}) \int \frac{d^{3}k_{2}}{(2\pi)^{3}} \Theta(k_{n} - k_{2}) \langle \mathbf{k}_{1}\mathbf{k}_{2} | V_{pn}^{e} | \mathbf{k}_{2}\mathbf{k}_{1} \rangle$$

leicht berechnen, da für ebene Wellen die Matrixelemente zu

$$\langle \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 | V_{pn}^d | \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 \rangle = \int d^3 s V_{pn}^d(s)$$

bzw. nach Antisymmetrisierung zu

$$\langle \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 | V_{pn}^d | \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{k}_1 \rangle = \int d^3 s j_o(sk_1) j_o(sk_2) V_{pn}^e(s)$$

werden. Dabei ist  $j_0$  die sphärische Besselfunktion der Ordnung n=0. Nach der Integration über die Fermikugel erhält man:

$$< V_{pn}^{d} > = \rho_{p}\rho_{n}\frac{1}{4}\int d^{3}sV_{pn}^{d}(s)$$

$$= \rho_{p}\rho_{n}\frac{1}{4}U_{pn}^{d},$$

$$< V_{pn}^{e} > = \rho_{p}\rho_{n}\frac{1}{4}\int d^{3}s\rho_{SL}(sk_{1})\rho_{SL}(sk_{2})V_{pn}^{e}(s)$$

$$= \rho_{p}\rho_{n}\frac{1}{4}U_{pn}^{e}(\rho_{p},\rho_{n}),$$

wobei  $\rho_{SL}(sk_F)$  die so genannte Slater-Dichte ist:

$$\rho_{SL}(sk_F) = \frac{3}{sk_F} j_1(sk_F) = \left(\frac{4\pi}{3}k_F^3\right)^{-1} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k_F - k) j_0(sk).$$

Für die gesamte potentielle Energie erhalten wir somit:

$$= \left[\rho_{p}^{2}U_{pp}^{d} + 2\rho_{p}\rho_{n}U_{pn}^{d} + \rho_{n}^{2}U_{nn}^{d}\right] + \left[\rho_{p}^{2}U_{pp}^{e}(\rho_{p}) + 2\rho_{p}\rho_{n}U_{pn}^{e}(\rho_{p},\rho_{n}) + \rho_{n}^{2}U_{nn}^{e}(\rho_{n})\right].$$
(1.4)

Betrachten wir das Normierungsvolumen  $\Omega = 1 \text{ fm}^3$ , so erhalten wir für die Teilchenzahl  $A = \rho \Omega = \rho \cdot \text{fm}^3$ . Nehmen wir noch an, dass die Zustände in einer Fermikugel mit dem Radius  $k_F$  homogen verteilt sind (Fermi-Gas-Modell), so erhalten wir für die Anzahl der Teilchen identischen Isospins pro Volumen (p=Proton, n=Neutron):

$$\rho_{(p,n)} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k_{F_{(p,n)}} - k) = \frac{k_{F_{(p,n)}}^3}{3\pi^2}$$

Die kinetische Energie T ist somit durch

$$T_{(p,n)} = 2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta(k_{F_{(p,n)}} - k) \frac{\hbar k^2}{2m}$$
(1.5)

$$= \frac{3}{5} \tau_{(p,n)} \rho_{(p,n)} \tag{1.6}$$

mit  $\tau_{(p,n)} = \frac{\hbar k_{F_{(p,n)}}^2}{2m}$ gegeben. Als Zustandsgleichung unendlicher Kernmaterie (englisch: equation of state, EoS) bezeichnet man die Bindungsenergie pro Nukleon  $(\frac{E}{A})$ , welche wir durch obige Betrachtung leicht erhalten.

#### 1.5.2 Fit an Kernmaterie

Zur Bestimmung der Dichteabhängigkeit unserer NN-Wechselwirkung werden wir im Folgenden die EoS für Kernmaterie betrachten. Als Grundlage verwenden wir hierbei die in [APR98] untersuchte EoS. Dabei wurde das Argon  $v_{18}$  (A18) Modell [WSS95] verwendet, um die Zweikörperwechselwirkungen zu berücksichtigen sowie die Urbana IX (UIX) Wechselwirkung [PPCW95] zur Berücksichtigung der Drei-Körper-Korrelationen.

Wir werden zum einen symmetrische Kernmaterie für den isoskalaren Kanal der Wechselwirkung betrachten und zum anderen reine Neutronen-Kernmaterie, um ein Bild vom Isovektor-Kanal der Wechselwirkung zu erhalten. Für unsere EoS für symmetrische Kernmaterie fordern wir als Nebenbedingung, dass sie ein Minimum bei einer Dichte von ca.  $\rho_0 \approx 0, 16$  mit  $\frac{E}{A}(\rho_0) \approx -15, 85$  MeV besitzt, dies entspricht der Dichte im Inneren stabiler Kerne. Ebenfalls fordern wir für  $\rho_0$  einen verschwindenden Druck, sowie eine Kompressibilität von etwa  $K \approx 230$  MeV.

#### Symmetrische Kernmaterie

Betrachten wir Gleichung (1.4) mit der Nebenbedingung  $\rho_p = \rho_n = \frac{\rho}{2}$  (symmetrische Kernmaterie), so erhalten wir mit

$$\langle V \rangle = \frac{\rho^2}{4} \left[ U_{pp}^d + 2U_{pn}^d + U_{nn}^d \right] \\ + \frac{\rho^2}{4} \left[ U_{pp}^e(\rho) + 2U_{pn}^e(\rho) + U_{nn}^e(\rho) \right] \\ = \rho \left[ U_0^d + U_0^e(\rho) \right]$$

und

$$U_0^d = \int d^3 s V_0^d(s), \quad U_0^e = \int d^3 s \rho_{SL}^2(sk_F) V_0^d(s)$$

nur den isoskalaren Kanal der Wechselwirkung. Für den Isovektor-Kanal müssen wir, wie bereits erwähnt, später noch die reine Neutronen-Kernmaterie betrachten. Die gesamte kinetische Energie erhalten wir aus (1.5):

$$T = \frac{3}{5} [\tau_p \rho_p + \tau_n \rho_n]$$
$$= \frac{3}{5} \tau \rho.$$

Wie oben schon besprochen, werden wir nun einen Ansatz für die Dichteabhängigkeit der NN-Wechselwirkung machen. Für den direkten- sowie für den Austauschterm lässt sich

$$V_0^d(\boldsymbol{r}) \rightarrow f_0(\rho)V_0^d(\boldsymbol{r}) = V_0^d(\rho, \boldsymbol{r}),$$

$$V_0^e(\boldsymbol{r}) \to f_0(\rho)V_0^e(\boldsymbol{r}) = V_0^e(\rho, \boldsymbol{r})$$
(1.7)

als Erweiterung empfehlen. Dabei wurde im Vergleich zu (1.3)  $g(\rho(\mathbf{r}_1))g(\rho(\mathbf{r}_2))$  durch  $f(\rho) = g^2(\rho)$  ersetzt. Für endliche Kerne werden wir wieder zum ursprünglichen Ansatz zurückkehren.

Die EoS wird somit für symmetrische Kernmaterie zu:

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5}\tau + \frac{\rho}{2}f_0(\rho) \left[ U_0^d + U_0^e(\rho) \right].$$

Als Ansatz zur Beschreibung der Dichteabhängigkeit nehmen wir für  $f_0(\rho)$ :

$$f_0(\rho) = \alpha_F(\rho) \frac{a^2}{(1+b^2(\frac{\rho}{\rho_0})^{2/3})^2} + \frac{c^2(1-\alpha_F(\rho))}{(1+d^2(\frac{\rho}{\rho_0})^{2/3})^2},$$
(1.8)

wobei  $\alpha_F(\rho)$  eine aus Fermifunktionen zusammengesetzte Funktion ist und jeder Austauschkanal einen individuellen Satz von Parametern a,b,c und d erhält. Diese funktionale Form wird von Dirac-Brückner Rechnungen nahe gelegt.  $f_0$  beschreibt somit die Erweiterung der Meson-Nukleon-Kopplungskonstante. Jeder mesonische Vertex wird im Folgenden durch einen individuellen Parametersatz beschrieben und an die EoS gefittet.

Betrachten wir nach dem Fit die isoskalaren Vertices (Abbildung 1.4), so spiegelt dieses sehr gut die Zunahme des kurzreichweitigen ( $\omega$ ,  $\rho$  und  $\sigma$ ) Anteils der Wechselwirkung und die Abnahme des langreichweitigen ( $\pi$ ) Anteils mit zunehmender Dichte wieder.



Abbildung 1.4: isoskalare Vertices der NN-Wechselwirkung

11

$\rho_0$	$0, 16 \ {\rm fm}^{-3}$
$\frac{E}{A}$	$-16,05 \; [MeV]$
Ŕ	$238,75 \; [MeV]$

Tabelle 1.2: Eigenschaften symmetrischer Kernmaterie beim Minimum der EoS

Abbildung 1.5 zeigt den Fit unserer EoS für symmetrische Kernmaterie. Nähere Betrachtungen zeigen auch, dass die EoS ein Minimum bei  $\rho_0 = 0, 16 \text{ fm}^{-3}$  besitzt. Bei dieser Dichte befindet sich die Kernmaterie im thermodynamischen Gleichgewicht, was durch den verschwindenden Druck  $P(\rho_0) = \rho_0 \frac{\partial E(\rho)}{\partial \rho}\Big|_{\rho_0} = 0$  gekennzeichnet ist.

Hieraus lassen sich die Eigenschaften unendlicher Kernmaterie bei  $\rho_0$  bestimmen. Wir erhalten für die Bindungsenergie:

$$\frac{E}{A} = -16,05 \,\mathrm{MeV},$$

und für die Kompressibilität:

$$K = k_F^2 \frac{d^2(\frac{E}{A})}{d^2 k_F^2} = 9\rho^2 \frac{d^2(\frac{E}{A})}{d^2 \rho} = 238,75 \,\mathrm{MeV},$$

was unsere zu Beginn angesprochenen Nebenbedingungen sehr gut erfüllt.



Abbildung 1.5: Fit der EoS für symmetrische Kernmaterie

#### **Reine Neutronen-Kernmaterie**

Zur Untersuchung des Isovektor-Kanals der Wechselwirkung betrachten wir nun die EoS für reine Neutronen-Kernmaterie. Wir gehen hier analog zur Erweiterung des isoskalaren Kanals der Wechselwirkung (1.7) vor:

$$egin{array}{rcl} V^d_{ au}(m{r}) & o & f_{ au}(
ho) V^d_{ au}(m{r}) = V^d_{ au}(
ho,m{r}), \ V^e_{ au}(m{r}) & o & f_{ au}(
ho) V^e_{ au}(m{r}) = V^e_{ au}(
ho,m{r}). \end{array}$$

Dabei wählen wir die gleiche funktionale Form wie im isoskalaren Kanal:

$$f_{\tau}(\rho) \simeq f_0(\rho),$$

geben aber jedem Austauschkanal einen neuen Satz Parameter. Unsere EoS für reine Neutronen-Kernmaterie

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5}\tau + \frac{\rho}{2} \left\{ f_0(\rho) \left[ U_0^d + U_0^e(\rho) \right] + f_\tau(\rho) \left[ U_\tau^d + U_\tau^e(\rho) \right] \right\}$$

enthält nun nicht nur den isoskalaren Anteil der symmetrischen Kernmaterie, sondern einen zusätzlichen Isovektor-Anteil. Hierbei sind  $U^d_{\tau}$  und  $U^e_{\tau}(\rho)$  zu  $U^d_0$  und  $U^e_0(\rho)$ analoge Volumenintegrale. Die Transformation der pp- und pn-Darstellung in die effektive isoskalare und isovektorielle Darstellung der Wechselwirkung wird in Anhang A.2 näher erläutert.

Betrachten wir auch hier nach dem Fit die Isovektor-Vertices, so lässt sich wie im isoskalaren Ergebnis die Entwicklung der kurz- sowie der langreichweitigen Kanäle der Wechselwirkung erkennen.



Abbildung 1.6: Isovektor-Vertices der NN-Wechselwirkung

	a	b	с	d
$\omega/ ho$	1,427	$1,107\cdot 10^{-3}$	2,001	$-2,298 \cdot 10^{-06}$
$\sigma$	1,397	0,182	1,957	0,147
$\pi$	0,646	$1,326 \cdot 10 - 2$	-4,131	1,682

Tabelle 1.3: Fitparameter des Formfaktors  $f_0(\rho)$  der isoskalaren Vertices.

Abbildung 1.7 zeigt die vollständige EoS für reine Neutronen-Kernmaterie.



Abbildung 1.7: Fit der EoS für reine Neutronen-Kernmaterie

Abbildungen 1.8 und 1.9 zeigen zum Vergleich den Fit an einen reinen Zweikörperkraftansatz (A18). Der Plot für die symmetrische Kernmaterie zeigt anschaulich wie die EoS mit Hilfe der UIX-Wechselwirkung korrigiert ist, so dass das Minimum bei  $\rho_0 = 0, 16 \text{fm}^{-3}$  liegt.

Zusätzlich zu unerer Beschreibung der Wechselwirkung mit einer expliziten Dichteabhängigkeit untersuchen wir eine Wechselwirkung mit konstanten Skalierungsfaktoren für die drei Standard-Mesonen. Diese Skalierungsfaktoren erhalen wir durch einen analogen Fit von 1.8 mit b = c = d = 0. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1.4 und 1.6 dargestellt. Durch diesen Ansatz lässt sich die EoS von symmetrischer Kernmaterie und reiner Neutronenmaterie bis zu  $\rho = 0, 64$  fm<sup>-3</sup> reproduzieren.

	a	b	с	d
$\omega/ ho$	2.126	0	0	0
$\sigma$	1.956	0	0	0
$\pi$	0.933	0	0	0

Tabelle 1.4: Fitparameter für die Wechselwirkung mit konstanten Skalierungsfaktoren für die drei Standard-Mesonen der Isovektor-Vertices.

	a	b	с	d
$\omega/ ho$	1,532	$1,183\cdot 10^{-3}$	8,492	5,292
$\sigma$	1,567	0,320	7,889	$8,670\cdot 10^{-2}$
$\pi$	0,794	$1,484\cdot 10^{-2}$	-4,137	1,656

Tabelle 1.5: Fitparameter des Formfaktors  $f_{\tau}(\rho)$  der Isovektor-Vertices.

	a	b	с	d
$\omega/ ho$	2.015	0	0	0
$\sigma$	1.636	0	0	0
$\pi$	5.169	0	0	0

Tabelle 1.6: Fitparameter für di Wechselwirkung mit konstanten Skalierungsfaktoren für die drei Standard-Mesonen der isoskalaren Vertices.



Abbildung 1.8: Fit an die reine Zweiteilchen A18 Wechselwirkung ohne Dreikörper Wechselwirkung für symmetrische Kernmaterie. Die Ergebnisse entsprechen einer Brückner-Hartree-Fock Rechnung



Abbildung 1.9: Fit an die reine Zweiteilchen A18 Wechselwirkung ohne Dreikörper Wechselwirkung für reine Neutronenmaterie. Die Ergebnisse entsprechen einer Brückner-Hartree-Fock Rechnung

## 2 Der Grundzustand

## 2.1 Hartree-Fock

Das von uns betrachtete Problem spiegelt die Beschreibung eines Systems miteinander wechselwirkender Teilchen wieder. Die Beschreibung eines solchen Vielteilchensystems ist im allgemeinen nicht exakt möglich, so dass man auf Näherungen zurückgreifen muss.

Eine einfache und erfolgreiche Möglichkeit bietet das Hartree-Fock-Verfahren (HF-Verfahren), welches nicht nur in der theoretischen Physik seine Anwendung findet, sondern auch in der theoretischen Chemie für die Beschreibung von Atomen und Molekülen angewandt wird.

#### Hartree-Fock-Gleichung

Mit dem HF-Verfahren versucht man ein System wechselwirkender Fermionen durch ein effektives Einteilchenproblem zu beschreiben. Die grundlegende Annahme ist dabei, dass jedes Teilchen einem mittleren Einteilchenpotential (mean field), welches durch alle anderen Teilchen und gegebenenfalls ein äußeres Potential erzeugt wird, ausgesetzt ist.

Der Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist die Annahme, dass ein mittleres Einteilchenpotential (HF-Potential)

$$H^{HF} = \sum_{i=1}^{A} h(i)$$

mit den Einteilchen-Hamiltonoperatoren h(i) existiert. Dessen Eigenfunktionen, als Approximation für den exakten Grundzustand, sollen die niedrigsten Eigenwerte  $E_0^{HF}$ besitzen. Die beste Wahl für eine Eigenfunktion  $\Phi(1...A)$  ist eine Slater-Determinante:

$$|HF\rangle = |\Phi(1\dots A)\rangle = \prod_{i=1}^{A} a_i^{\dagger}|-\rangle.$$

Dabei wirken die Fermion-Operatoren  $a_k^{\dagger}$ ,  $a_k$  auf die Einteilchenwellenfunktionen  $\varphi_k$ , welche wiederum Eigenfunktionen des Einteilchen-Hamiltonoperators mit den Eigenwerten  $\epsilon_k$  sind:

$$h(i)\varphi_k(i) = \epsilon_k \varphi_k(i), \qquad i = \{\mathbf{r}_i, s_i, t_i\}.$$

 $s_i$  und  $t_i$  sind hierbei die Spin- und Isospinfreiheitsgrade.

In der folgenden Diskussion werden wir Teilchen-Zustände mit den Indizes m,n und Loch-Zustände mit i,j bezeichnen. Alle Zustände, bei denen wir nicht zwischen diesen beiden Fällen differenzieren, werden mit k, l, p, q bezeichnet.

Die Wellenfunktion  $\varphi_k(\mathbf{r}, s, t)$  ist die Ortsraumdarstellung des Eigenzustandes  $|k\rangle$  des Einteilchen-Hamilton-Operators h. Gehen wir aber davon aus, dass wir einen beliebigen vollständigen Satz von orthogonalen Einteilchenwellenfunktionen  $\{\chi_l\}$  haben, so lässt sich  $\varphi_k$  in dieser Basis entwickeln:

$$\varphi_k = \sum_l D_{lk} \chi_l.$$

Entsprechend dieser Transformation lassen sich auch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $(a_l^{\dagger}, a_l)$  in die korrespondierenden Operatoren  $(c_l^{\dagger}, c_l)$  transformieren:

$$a_k^{\dagger} = \sum_l D_{lk} c_l^{\dagger}. \tag{2.1}$$

Da beide Sätze  $\{\varphi_k\}$  und  $\{\chi_k\}$  vollständig und orthogonal sind, ist die Transformation D unitär:

$$D^{\dagger}D = DD^{\dagger} = 1. \tag{2.2}$$

Dies führt dazu, dass die Operatoren  $(a_l^{\dagger}, a_l)$  und  $(c_l^{\dagger}, c_l)$  beide die Fermi-Kommutatorrelation erfüllen. Da die Darstellung der Slater-Determinante nicht eindeutig ist, ist es üblich, diese durch die Einteilchendichtematrix

$$\rho_{ll'} = \langle \Phi | c_{l'}^{\dagger} c_l | \Phi \rangle$$

darzustellen. Setzen wir (2.1) und (2.2) hier ein, so erhalten wir für die Dichtematrix:

$$\rho_{ll'} = \sum_{kk'} D_{lk} D^*_{l'k'} \langle \Phi | a^{\dagger}_{k'} a_k | \Phi \rangle = \sum_{i=1}^A D_{li} D^*_{l'i}.$$

Da  $\rho$  diagonal in der Basis  $a_k^{\dagger}$ ,  $a_k$  mit den Eigenwerten 1 für besetzte Zustände und 0 für unbesetzte Zustände ist, ergibt die Spur von  $\rho$  gerade die Teilchenzahl. Die Einteilchendichte  $\rho$  für Slater-Determinanten ist dadurch charakterisiert, dass sie die Eigenwerte 1 und 0 besitzt d.h.:

$$\rho^2 = \rho$$

Somit ist  $\rho$  ein Projektionsoperator von dem Raum der Einteilchenwellenfunktionen auf den Unterraum der Lochzustände. Auf die gleiche Weise definiert man den Projektor  $\sigma$ :

$$\sigma = 1 - \rho,$$

welcher auf den Unterraum der Teilchenzustände projiziert.

Im HF-Verfahren suchen wir nun den Satz von Slater-Determinanten  $\{\Phi\}$ , der aus A beliebigen, aber orthogonalen Einteilchenwellenfunktionen  $\varphi_i$  als Spurwellenfunktionen besteht und minimieren diesen Satz bezüglich der Energie.

Betrachten wir zunächst einmal die HF-Energie:

$$E^{HF} = \langle \Phi | H | \Phi \rangle.$$

Ausgehend vom Vielteilchen-Hamilton-Operator H in zweiter Quantisierung

$$H = \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} c_{l_1}^{\dagger} c_{l_2} + \frac{1}{4} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \bar{v}_{l_1 l_2 l_3 l_4} c_{l_1}^{\dagger} c_{l_2}^{\dagger} c_{l_4} c_{l_3}$$

mit  $\bar{v}_{l_1l_2l_3l_4} = v_{l_1l_2l_3l_4} - v_{l_1l_2l_4l_3}$  und dem Wick'schen Theorem lässt sich die Energie als Funktional der Dichte berechnen:

$$E^{HF}[\rho] = \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} \langle \Phi | c_{l_1}^{\dagger} c_{l_2} | \Phi \rangle + \frac{1}{4} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \bar{v}_{l_1 l_2, l_3 l_4} \langle \Phi | c_{l_1}^{\dagger} c_{l_2}^{\dagger} c_{l_4} c_{l_3} | \Phi \rangle$$
  
$$= \sum_{l_1 l_2} t_{l_1 l_2} \rho_{l_1 l_2} + \frac{1}{2} \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} \rho_{l_3 l_1} \bar{v}_{l_1 l_2, l_3 l_4} \rho_{l_4 l_2}$$
  
$$= \operatorname{Tr}(t\rho) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}_1 \operatorname{Tr}_2(\rho v \rho).$$
(2.3)

Nutzen wir die bereits erwähnte Diagonalform von  $\rho$  in der HF-Basis aus, so erhalten wir:

$$E^{HF} = \sum_{i=1}^{A} t_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{A} \bar{v}_{ij,ij}.$$

Um nun die HF-Basis zu bestimmen, müssen wir die Energie für alle Dichten mit der Eigenschaft  $\rho^2 = \rho$  minimieren. Für kleine Variationen von  $\rho$  gilt:

$$(\rho + \delta \rho)^2 = \rho + \delta \rho$$

bzw. in linearer Ordnung in  $\delta \rho$ :

$$\delta \rho = \rho \delta \rho + \delta \rho \rho.$$

In der HF-Basis, in der  $\rho$  diagonal ist, heißt dies, dass Teilchen-Teilchen- (englisch: particle-particle: pp-) und Loch-Loch-Matrixelemente (englisch: hole-hole: hh-) von  $\delta\rho$ verschwinden müssen. Somit bleiben nur noch die Variationen  $\delta\rho_{mi}$  und  $\delta\rho_{im}$  der phund hp- Matrixelemente der Dichte  $\rho$  übrig.

Wir erhalten somit:

$$\delta E = E[\rho + \delta\rho] - E[\rho] = \sum_{kk'} h_{kk'} \delta\rho_{k'k} = \sum_{mi} h_{mi} \delta\rho_{im} + \sum_{mi} h_{mi}^* \delta\rho_{im}^*$$

mit der hermiteschen Matrix h:

$$h_{kk'} = \frac{\partial E^{HF}[\rho]}{\partial \rho_{kk'}}$$

Aus Gleichung (2.3) bekommt man:

$$h = t + \Gamma \tag{2.4}$$

mit dem selbstkonsistenten Feld:

$$\Gamma_{kk'} = \sum_{ll'} \bar{v}_{kl'k'l} \rho_{ll'}.$$

Um unser Minimum zu erreichen, müssen wir nun  $\delta E = 0$  setzen, dies bedeutet, dass die ph-Matrixelemente von h verschwinden:

$$h_{mi} = t_{mi} + \sum_{j=1}^{A} \bar{v}_{mjij} = 0 \quad (\text{für } i \le A, \ m > A).$$

In der Basis, in der  $\rho$  diagonal ist, erlangen wir den äquivalenten Ausdruck:

$$[h,\rho] = [t+\Gamma[\rho],\rho].$$

Diese nichtlineare Gleichung ist nicht einfach zu lösen, da h und  $\rho$  gleichzeitig diagonalisiert werden können. Da die Basis, in der  $\rho$  diagonal ist, nur bis auf eine unitäre Transformation eindeutig festgelegt ist, nehmen wir an, dass h diagonal sein soll. Dies definiert die HF-Basis und wir erhalten die Eigenwertgleichung:

$$h_{kk'} = t_{kk'} + \sum_{i=1}^{A} \bar{v}_{kik'i} = \epsilon_k \delta_{kk'}.$$

Berücksichtigen wir die Tatsache, dass die Basis durch die Transformation D gegeben ist, erhalten wir die HF-Gleichung

$$\sum_{l'} h_{ll'} D_{l'k} = \sum_{l'} \left( t_{ll'} + \sum_{i=1}^{A} \sum_{pp'} \bar{v}_{lp'l'p} D_{pi} D_{p'i}^* \right) D_{l'k} = \epsilon_k D_{lk},$$

die ein hermitesches Eigenwertproblem darstellt. Die HF-Gleichung kann nicht als eine gewöhnliche Eigenwertgleichung gesehen werden, denn es handelt sich dabei um ein so genanntes selbstkonsistentes Verfahren, da die Matrix h von der Dichte  $\rho$  und somit von der Lösung des Problems abhängig ist. Die Koeffizienten  $D_{lk}$ , welche wir durch die Lösung dieser Gleichung erhalten, bestimmen die Einteilchenwellenfunktionen  $\varphi_k$ .

### 2.2 Hartree-Fock-Bogoliubov

Das HF-Verfahren bietet uns, wie im vorausgehenden Abschnitt gezeigt, eine elegante Möglichkeit, den Grundzustand unseres Systems zu berechnen. Nun stellt sich aber heraus, dass die Annahme, dass sich die Nukleonen unabhängig voneinander in einem mittleren Potential bewegen nur bedingt als Näherung für unsere Problemstellung genügt. Vergleicht man beispielsweise die experimentell bestimmten Bindungsenergien von gu-Kernen (Kerne mit gerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl) mit denen von gg-Kernen (Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl), so stellt man fest, dass diese von gu-Kernen geringer sind als das arithmetische Mittel der Bindungsenergien von gg-Kernen. Diese und weitere Beobachtungen zeigen uns, dass wir bei der Betrachtung zusätzliche kurzreichweitige, attraktive Kräfte zwischen Paaren von Nukleonen berücksichtigen müssen. Das HF-Verfahren berücksichtigt nur den Teilchen-Loch-Kanal der Wechselwirkung, welcher durch den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung bestimmt ist, wohingegen die oben beschriebenen kurzreichweitigen Kräfte zusätzliche Teilchen-Loch-Wechselwirkungen benötigen. Dieses Problem lässt sich analog zum Teilchen-Loch-Kanal lösen, indem wir zum Bild der Quasi-Teilchen übergehen, was durch die Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned} \alpha_k^{\dagger} &= u_k a_k^{\dagger} - v_k a_{-k}, \\ \alpha_{-k}^{\dagger} &= u_k a_{-k}^{\dagger} + v_k a_k \end{aligned}$$

leicht in der zweiten Quantisierung realisiert werden kann. Die Parameter  $u_p$  und  $v_p$  sind die Wahrscheinlichkeiten, dass ein bestimmter Paarzustand (mit einem Quasi-Teilchen) besetzt bzw. unbesetzt ist. Zur Normierung verlangen wir außerdem, dass die Beziehung

$$u_p^2 + v_p^2 = 1$$

erfüllt ist.

Durch die Einführung von Quasi-Teilchen haben wir leider die Teilchenzahlerhaltung verletzt, was uns dazu zwingt, diese durch eine Zwangsbedingung in unseren neuen Hamilton-Operator (den Hartree-Fock-Bogoliubov-Hamilton-Operator) zu integrieren:

$$\hat{H}_{HFB} = \hat{H}_0 - \lambda \hat{N},$$

wobei  $\hat{N} = \sum \alpha^{\dagger} \alpha$  der Besetzungszahloperator ist und  $\lambda$  der Lagrangeparameter.

Durch erneutes Anwenden des Variationsprinzips (siehe z.B.[RS80]) erhalten wir die Hartree-Fock-Bogoliubov-Gleichung (HFB-Gleichung):

$$\underbrace{(\underline{t}_{kk'} - \lambda \delta_{kk'} + U_{kk'}^{HFB})}_{mean-field\ Anteil} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) - \Delta_{k-k'} (u_k u_{k'} + v_{k'} v_k) = 0,$$

wobei

$$U_{kk'}^{HFB} = \sum_{k''} \bar{V}_{kk''k'k''} v_{k''}^2$$

das HFB-Potential und

$$\Delta_{k-k'} = -\sum_{k''>0} \bar{V}_{k-k'k''-k''} u_{k''} v_{k''}$$

die Gap-Gleichung darstellt.

Eine häufig in praktischen Anwendungen verwendete Vereinfachung ist die Annahme eines diagonalen Paarkraftpotentials:

$$\Delta_{k-k'} = \Delta_k \delta_{kk'}.$$

Die HFB-Gleichung kann vereinfacht werden, indem man die Einteilchenzustände als die Eigenzustände eines geeignet ausgesuchten Einteilchen-Hamiltonoperators  $\hat{h}$  mit

$$\hat{h}_{kk'} = t_{kk'} - \lambda \delta_{kk'} + U_{kk'}^{HFB} = \epsilon_k \delta_{kk'}$$

wählt. Dies führt zur vereinfachten Form

$$2\epsilon_k u_k v_k - \Delta_k (u_k^2 - v_k^2) = 0 \ \forall \ k$$

der HFB-Gleichung mit der Gap-Gleichung für ein diagonales Paarkraftpotential:

$$\Delta_{k} = -\frac{1}{2} \sum_{k''>0} \frac{\bar{V}_{k-kk''-k''}}{\sqrt{\epsilon_{k''}^2 + \Delta_{k''}^1}} \Delta_{k''}$$

Durch Lösen dieser Gleichungen erhalten wir neben den Besetzungszahlen der einzelnen Quasiteilchenzustände auch noch die sphärische Basis des Grundzustands

$$\langle \boldsymbol{r}|(ls)jm\rangle = \left[i^lY_l\otimes\chi_{rac{1}{2}}
ight]_{jm}.$$

## 3 Anregung des Grundzustands

In der vorangegangenen mikroskopischen Beschreibung des Kerns haben wir nur statische, unabhängige-Teilchen-Modelle betrachtet. Mit diesen Modellen können mit Hilfe der effektiven Wechselwirkung die Grundzustandseigenschaften der Teilchen bzw. Quasi-Teilchen berechnet werden. Einen weiteren Zugang zum Verständnis der Kernstruktur bietet die Untersuchung von Kernanregungsspektren.

Eine Möglichkeit der Untersuchung dieser Spektren liefert das Schalen-Modell. Eine Reihe von Anregungszuständen können somit durch Teilchen-Loch- oder Zwei-Quasi-Teilchen-Anregungen beschrieben werden. Es zeigt sich aber, dass es weitere Anregungszustände gibt, die nicht im Rahmen des Schalen-Modells beschrieben werden können und kompliziertere Methoden, welche die wichtigen Korrelationen zwischen den Nukleonen berücksichtigen, in Betracht gezogen werden müssen. Für die nähere Untersuchung der Anregungszustände benötigen wir noch eine Möglichkeit, das Verhalten des Systems in diesem Zusammenhang zu untersuchen. Die Linear-Response Theorie bietet uns diese Chance, indem wir die Stärke der Reaktion auf den in zweiter Quantisierung dargestellten Übergang berechnen.

Einen weiteren Ansatz zur Berechnung von Eigenschaften angeregter Kerne bietet die Landau-Migdal-Theorie, welche durch Beschreibung des Systems mit Hilfe von Quasi-Teilchen, die sich im wechselwirkenden System wie reale Teilchen im nichtwechselwirkenden System verhalten, eine Möglichkeit gibt Anregungszustände unendlicher Systeme wechselwirkender Fermionensysteme zu untersuchen.

### 3.1 Random-Phase-Approximation

Eine Möglichkeit, die angesprochenen Korrelationen zwischen den Nukleonen zu berücksichtigen, bietet die Tamm-Dancoff-Approximation (TDA), welche die Teilchen-Loch-Wechselwirkung basierend auf dem unkorrelierten HF-Grundzustand berücksichtigt. Eine Erweiterung, welche die 2-Teilchen-2-Loch (2p-2h) Korrelationen mitberücksichtigt, ist die Random-Phase-Approximation (RPA), deren Eigenwertgleichung wir im Folgenden herleiten wollen. Wir werden im Folgenden das HF Einteilchenbild verwenden, da es die Betrachtung stark vereinfacht, und da die Verallgemeinerung mit dem HFB Quasi-Teilchenbild leicht zu realisieren ist.

#### 3.1.1 Die RPA-Gleichung

Als Ausgangspunkt nehmen wir den Satz  $|\nu\rangle$  der exakten Eigenzustände des Hamilton-Operators H:

$$H|\nu\rangle = E|\nu\rangle \tag{3.1}$$

und definieren uns Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren  $Q_{\nu}^{\dagger}$  und  $Q_{\nu}$  für die angeregten Zustände mit

$$|\nu\rangle = Q_{\nu}^{\dagger}|0\rangle$$
 und  $Q_{\nu}|0\rangle = 0.$ 

Aus der Schrödingergleichung (3.1) erhalten wir somit die Bewegungsgleichung

$$\left[H, Q_{\nu}^{\dagger}\right]|0\rangle = (E_{\nu} - E_0) Q_{\nu}^{\dagger}|0\rangle.$$

Durch Multiplikation mit einem beliebigen Zustand der Form  $\langle 0|\delta Q$  erhalten wir:

$$\langle 0| \left[ \delta Q, \left[ H, Q_{\nu}^{\dagger} \right] \right] |0\rangle = (E_{\nu} - E_0) \langle 0| \left[ \delta Q, Q_{\nu}^{\dagger} \right] |0\rangle.$$
(3.2)

Die Benutzung des Kommutators ist legitim, da  $\langle 0|Q_{\nu}^{\dagger} = \langle 0|HQ_{\nu}^{\dagger} = 0$  ist. Bis jetzt sind wir bei unserer Betrachtung exakt, da die Variation  $\langle 0|\delta Q$  im ganzen Hilbertraum wirkt. Wenn wir den exakten Grundzustand  $|0\rangle$  durch den HF-Grundzustand  $|HF\rangle$  approximieren und den Operator  $Q_{\nu}$  durch den kollektiven Teilchen-Loch-Operator

$$Q^{\dagger}_{\nu} = \sum_{mi} C^{\nu}_{mi} a^{\dagger}_{m} a_{i}$$

erhalten wir die oben erwähnte TDA-Gleichung:

$$\sum_{n,j} \langle HF | \left[ a_i^{\dagger} a_m, \left[ H, a_n^{\dagger} a_j \right] \right] | HF \rangle C_{nj}^{\nu} = E_{\nu}^{TDA} C_{mi}^{\nu}.$$

Dabei ist  $E_{\nu}^{TDA}$  die Anregungsenergie in der TDA und  $C_{mi}^{\nu}$  der Entwicklungskoeffizient für den Zustand  $|\nu\rangle$ . Um im Grundzustand 2p-2h Korrelationen mit zu berücksichtigen, erweitern wir  $Q_{\nu}^{\dagger}$  zu:

$$Q_{\nu}^{\dagger} = \sum_{m,i} X_{mi}^{\nu} a_{m}^{\dagger} a_{i} - \sum_{mi} Y_{mi}^{\nu} a_{i}^{\dagger} a_{m}, \qquad (3.3)$$

wobei das Minuszeichen zur Einfachheit gewählt wurde. Als Normierungsbedingung für die RPA-Zustände wählt man  $\langle 0|QQ^{\dagger}|0\rangle = \sum (X^2 - Y^2)$ . Der RPA Grundzustand wird so definiert, dass

$$Q_{\nu}|RPA\rangle = 0$$

gilt. Anstelle von  $C_{mi}^{\nu}$  erhalten wir  $X_{mi}^{\nu}$  und  $Y_{mi}^{\nu}$  und zusätzlich zwei Variationen. Somit ergeben sich aus 3.2 zwei Sätze von Gleichungen:

$$\langle RPA | \left[ a_i^{\dagger} a_m, \left[ H, Q_{\nu}^{\dagger} \right] \right] | RPA \rangle = \hbar \Omega_{\nu} \langle RPA | \left[ a_i^{\dagger} a_m, Q_{\nu}^{\dagger} \right] | RPA \rangle, \langle RPA | \left[ a_m^{\dagger} a_i, \left[ H, Q_{\nu}^{\dagger} \right] \right] | RPA \rangle = \hbar \Omega_{\nu} \langle RPA | \left[ a_m^{\dagger} a_i, Q_{\nu}^{\dagger} \right] | RPA \rangle,$$

$$(3.4)$$

wobei  $\hbar\Omega_{\nu}$  die Anregungsenergie des Zustands  $|\nu\rangle$  ist.

#### 3.1.2 Die Quasi-Boson-Approximation

Wenn wir annehmen, dass der korrelierte Grundzustand nicht stark von dem HF-Grundzustand abweicht, können wir die Erwartungswerte in der HF-Approximation berechnen:

$$\langle RPA | \left[ a_i^{\dagger} a_m, a_n^{\dagger} a_j \right] | RPA \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn} - \delta_{mn} \langle RPA | a_j^{\dagger} a_i | RPA \rangle - \delta_{ij} \langle RPA | a_n^{\dagger} a_m | RPA \rangle$$

$$\approx \langle HF | \left[ a_i^{\dagger} a_m, a_n^{\dagger} a_j \right] | HF \rangle = \delta_{ij} \delta_{mn}.$$

Der Name Quasi-Boson-Approximation (QBA) kommt durch die Verwendung der Boson-Kommutatorrelation für die Paarerzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, dabei wird aber das Pauli-Prinzip verletzt. In der QBA erkennt man, dass die Absolutquadrate der Amplituden  $X_{mi}^{\nu}$  und  $Y_{mi}^{\nu}$  die Wahrscheinlichkeit angeben, den Zustand  $a_m^{\dagger}a_i|0\rangle$  und  $a_i^{\dagger}a_m|0\rangle$  im exakten System  $|\nu\rangle$  zu finden, da man für die jeweiligen Komponenten der Übergangsdichte  $\rho^{(1)} = \langle 0|a_q^{\dagger}a_p|\nu\rangle$  folgende Beziehung erhält:

$$\begin{split} \rho_{mi}^{(1)^{\nu}} &= \langle 0|a_i^{\dagger}a_m|\nu\rangle \approx \langle HF| \left[a_i^{\dagger}a_m, Q_{\nu}^{\dagger}\right] |HF\rangle = X_{mi}^{\nu}, \\ \rho_{im}^{(1)^{\nu}} &= \langle 0|a_m^{\dagger}a_i|\nu\rangle \approx \langle HF| \left[a_m^{\dagger}a_i, Q_{\nu}^{\dagger}\right] |HF\rangle = Y_{mi}^{\nu}. \end{split}$$

Gleichung (3.4) lässt sich nun kompakt darstellen:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \end{pmatrix} = \hbar \Omega_{\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{\nu} \\ Y^{\nu} \end{pmatrix}, \qquad (3.5)$$

mit

$$A_{minj} = \langle HF | \left[ a_i^{\dagger} a_m, \left[ H, a_n^{\dagger} a_j \right] \right] | HF \rangle = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \bar{v}_{mjin},$$
  
$$B_{minj} = -\langle HF | \left[ a_i^{\dagger} a_m, \left[ H, a_n^{\dagger} a_j \right] \right] | HF \rangle = \bar{v}_{mnij}.$$

Die Matrix A ist hermitesch und die Matrix B symmetrisch.

Um den Gültigkeitsbereich der QBA zu untersuchen, betrachten wir den Kommutator:

$$[A_{pn}^{\dagger}, A_{p'n'}] = \delta_{pp'}\delta_{nn'} + c_{pp',nn'},$$

und es gilt:

$$\langle HF|c_{pp'nn'}|HF\rangle = 0.$$

Somit folgt, dass der QBA-Ansatz eine gute Wahl ist, falls

$$|HF\rangle \sim |RPA\rangle$$

gilt. Allgemein betrachtet erhalten wir:

$$\langle RPA | c_{pp'nn'} | RPA \rangle \sim \delta_{pp'} \delta_{nn'} n_p (1 - n_n),$$

wobei  $n_p$  und  $n_n$  die gesamten Besetzungszahlen mit  $n_p(HF) = 0$  und  $n_n(HF) = 1$  bezeichnen.

## 3.2 QRPA

Wie bereits erwähnt, wollen wir nun die RPA unter Berücksichtigung von Paarkorrelationen betrachten. Diese Korrelationen können abseits von abgeschlossenen Schalen nicht mehr vernachlässigt werden. Wir haben schon gezeigt, dass wir in diesem Fall anstelle des HF-Grundzustands nun den HFB-Grundzustand erhalten. Da wir mit dem HFB-Grundzustand gleichermaßen eine deterministische Wellenfunktion erhalten, können wir analog zur vorhergegangenen Herleitung der TDA und RPA verfahren. Um diese Gleichungen herzuleiten, startet man mit der Quasi-Teilchen Darstellung des Zweiteilchen-Hamiltonoperators (siehe: [RS80, E.2]):

$$H = H^0 + H^{11} + H^{31} + H^{40} + H^{22},$$

wobei bei  $H^{nm}$  n die Anzahl der Quasi-Teilchen Erzeugungsoperatoren und m die Anzahl der Vernichtungsoperatoren des jeweiligen Summanden angibt.

Anstelle von (3.3) verwenden wir nun

$$Q_{\nu}^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{kk'} \left( X_{kk'}^{\nu} \alpha_k^{\dagger} \alpha_{k'}^{\dagger} - Y_{kk'}^{\nu} \alpha_{k'} \alpha_k \right)$$

und finden analog zur Herleitung der RPA die QRPA Gleichung, deren Matrix äquivalent zu (3.5) ist. Nur die Matrixindizes laufen über alle Paare (k < k') des Konfigurationsraums. Die Matrizen A und B sind nun durch

$$A_{kk'll'} = \langle HFB | \left[ a_{k'}a_k, \left[ H, a_l^{\dagger}a_{l'}^{\dagger} \right] \right] | HFB \rangle$$
  
=  $(E_k + E_{k'})\delta_{kl}\delta_{k'l'} + H^{22}_{kk'll'},$ 

$$B_{kk'll'} = -\langle HFB | [a_{k'}a_k, [H, a_la_{l'}]] | HFB \rangle$$
  
= 4! · H<sup>40</sup><sub>kk'll'</sub>

gegeben, wobei (k < k', l < l') gilt.

## 3.3 Linear Response Theorie

Bis jetzt haben wir die kollektiven Anregungen des Kerns als ein stationäres Problem betrachtet. Im Folgenden wollen wir den Einfluss eines zeitabhängigen externen Feldes auf das System untersuchen. Mit Hilfe der Linear Response Theorie bekommen wir eine Möglichkeit, diesen Zusammenhang zwischen dem externen Feld und der Kerndichte über die so genannte Response-Funktion zu analysieren und zusätzlich leiten wir die RPA-Gleichung für dichteabhängige Wechselwirkungen her.

Betrachten wir die Wirkung des externen zeitabhängigen Feldes

$$F(t) = Fe^{-i\omega t} + F^{\dagger}e^{i\omega t}$$

auf das System. Wir nehmen an, dass F ein Ein-Körper Operator

$$F(t) = \sum_{kl} f_{kl}(t) a_k^{\dagger} a_l$$

ist und dass dessen Feld so schwach ist, dass sein Einfluss auf die Kerndichte klein ist und in linearer Ordnung behandelt werden kann. Die Wellenfunktion des Systems  $|\Phi(t)\rangle$  ist somit nicht mehr stationär. Sie ist nun ein Wellenpaket und wir erhalten für die Einteilchendichte:

$$\rho_{kl}(t) = \langle \Phi(t) | a_l^{\dagger} a_k | \Phi(t) \rangle.$$

Für die weitere Rechnung werden folgende Näherungen gemacht:

1.  $\rho(t)$  soll zu jedem Zeitpunkt einer Slater-Determinante entsprechen (d.h.  $\rho^2 = \rho$ ). Dann genügt  $\rho$  der Zeitabhängigen Hartree-Fock-Gleichung (englisch: timedependent Hartree-Fock equation: TDHF) (siehe: [RS80]):

$$i\hbar\dot{\rho} = [h(\rho) + f(t), \rho].$$
 (3.6)

Dabei ist  $h(\rho)$  das Einteilchen HF-Feld (2.4) und f das zeitabhängige externe Feld.

2. Wir nehmen an, dass das externe Feld f(t) schwach ist und nur Oszillationen mit kleiner Amplitude um die stationäre Dichte  $\rho^{(0)}$ , welche die stationäre HF-Gleichung  $[h[\rho^0], \rho^0] = 0$  löst, ausführt. Somit erhalten wir für die Dichte:

$$\rho(t) = \rho^{(0)} + \delta\rho(t)$$
(3.7)

mit

$$\delta \rho = \rho^{(1)} e^{-i\omega t} + \rho^{(1)^{\dagger}} e^{i\omega t}$$

Dieser Ausdruck ist linear im Feld f. Da wir  $\rho^{(0)}$  und  $h[\rho(0)]$  in der HF-Basis betrachten und diese somit diagonal sind, erhalten wir:

$$\rho_{kl}^{(0)} = \delta_{kl} \rho_k^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{für Teilchen} \\ 1 & \text{für Löcher} \end{cases}$$

und

$$(h_0)_{kl} = \left(h(\rho^{(0)})\right)_{kl} = \delta_{kl}\epsilon_k.$$

Wir setzen (3.7) in die TDHF-Gleichung (3.6) ein:

$$i\hbar\dot{
ho} = [h_0,\delta
ho] + \left[\frac{\delta h}{\delta
ho}\delta
ho,
ho^{(0)}\right] + [f,
ho^{(0)}],$$

wobe<br/>i $\frac{\delta h}{\delta \rho} \delta \rho$ eine Kurz<br/>notation für

$$\sum_{im} \left( \frac{\partial h}{\partial \rho_{mi}} \bigg|_{\rho = \rho^{(0)}} \delta \rho_{mi} + \frac{\partial h}{\partial \rho_{im}} \bigg|_{\rho = \rho^{(0)}} \delta \rho_{im} \right)$$

ist.

Nach Berechnung der HF-Dichtematrizen erhalten wir die Linear-Response-Gleichung:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} - \hbar \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \rho^{(1)ph} \\ \rho^{(1)hp} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f^{ph} \\ f^{hp} \end{pmatrix},$$
(3.8)

 $\operatorname{mit}$ 

$$A_{minj} = (\epsilon_m - \epsilon_i)\delta_{mn}\delta_{ij} + \frac{\partial h_{mi}}{\partial \rho_{nj}} \quad \text{und} \quad B_{minj} = \frac{\partial h_{mi}}{\partial \rho_{nj}}.$$

Wenn wir als Restwechselwirkung

$$\tilde{v}_{psqr} = \frac{\partial h_{pq}}{\partial \rho_{rs}} = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_{qp} \partial \rho_{rs}}$$

verwenden, erhalten wir für A und B die gleichen Matrizen wie in der RPA. Mit der Linear-Response-Gleichung ergibt sich eine inhomogene Gleichung, welche durch die Invertierung der Matrix auf der linken Seite gelöst werden kann. Dadurch erhält man einen linearen Zusammenhang zwischen dem externen Feld f und der Änderung der Kerndichte (d.h. die Resonanz (englisch: response)) des Systems:

$$\rho_{kl}^{(1)} = \sum_{pq} R_{klpq}(\omega) f_{pq}.$$
(3.9)

Die Funktion  $R_{klpq}$  wird als Response-Funktion [RS80] bzw. Polarisationspropagator [FW71] bezeichnet.

Die Response-Funktion R ist abhängig von der Frequenz des externen Feldes. Ihre Pole liegen bei den Eigenfrequenzen des Systems. Diese geben an, wo ein infinitesimales Feld f ausreicht, um angeregte Zustände zu erhalten.

#### Die Linear-Response-Gleichung

Betrachtet man die Linear-Response-Gleichung genauer und berechnet die Eigenfrequenzen  $\Omega_{\nu}$  und die RPA Amplituden X und Y, so erhält man einen eindeutigen Ausdruck für die Response-Funktion. In der Spektral-Darstellung lautet diese:

$$R_{klp'q'}(\omega) = \frac{1}{\hbar} \sum_{\nu>0} \left[ \frac{\langle 0|a_q^{\dagger} a_p |\nu\rangle \langle \nu | a_{p'}^{\dagger} a_{q'} |0\rangle}{\omega - \Omega_{\nu} + i\eta} - \frac{\langle 0|a_{p'}^{\dagger} a_{q'} |\nu\rangle \langle \nu | a_q^{\dagger} a_p |0\rangle}{\omega + \Omega_{\nu} + i\eta} \right]. \quad (3.10)$$

Die Indizes p, q, p' und q' laufen nur über ph- und hp-Paare, alle anderen Matrixelemente von R verschwinden in der RPA. Betrachten wir die Änderung der exakten Wellenfunktion des Systems durch das externe Feld F in zeitabhängiger Störungstheorie, so erhalten wir:

$$|\Psi(t)\rangle = |0\rangle + \sum_{\nu>0} |\nu\rangle \left\{ \frac{\langle \nu|F|0\rangle}{\hbar(\omega - \Omega_{\nu}) + i\eta} e^{-i\omega t} - \frac{\langle \nu|F^{\dagger}|0\rangle}{\hbar(\omega + \Omega_{\nu}) - i\eta} e^{i\omega t} \right\}.$$

Die Zustände  $|0\rangle$  und  $|\nu\rangle$  sind ungestörte stationäre Eigenzustände des Systems. Die Übergangsdichte  $\rho^{(1)}$  entspricht(3.9) mit der Response Funktion (3.10). Durch Einführung der Response-Funktion für das freie System (ohne Restwechselwirkung  $\tilde{v}$ )

$$R^{0}_{pqp'q'}(\omega) = \frac{\rho_q^{(0)} - \rho_p^{(0)}}{\hbar\omega - \epsilon_p + \epsilon_q + i\eta} \delta_{pp'} \delta_{qq'}$$

ist es möglich, in der RPA Betrachtung ein weiteres Gleichungssystem für  $R(\omega)$  zu erhalten, nämlich die Dyson-Gleichung:

$$R_{pqp'q'} = R^0_{pqp'q'} + \sum_{p_1q_1p_2q_2} R^0_{pqp_1q_1} \tilde{v}_{p_1q_2q_1p_2} R_{p_2q_2p'q'}.$$

Mit Hilfe des Imaginärteils der Response-Funktion lässt sich die Anregungsstärke in Abhängigkeit von der Frequenz  $\omega$  bestimmen. Diese interessante Größe definieren wir als:

$$S(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} R(\omega)$$

Manchmal wird in der Literatur diese Größe als Response-Funktion bezeichnet.

## 3.4 Die Landau-Migdal Wechselwirkung

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der Eigenschaften von angeregten Zuständen bietet die Landau-Migdal-Theorie wechselwirkender Fermionensysteme. Die Landau-Migdal-Theorie erlaubt es Anregungszustände von unendlichen Systemen wechselwirkender Fermionen, wie beispielsweise flüssiges <sup>3</sup>He oder Kernmaterie, zu untersuchen.

Landaus Hauptannahme ist, dass das wechselwirkende System durch ein nichtwechselwirkendes System beschrieben werden kann, indem wir adiabatisch die Wechselwirkung einschalten. Dies bedeutet, dass es eine eindeutige Beziehung zwischen den Einteilchenzuständen und den so genannten Quasiteilchenzuständen im wechselwirkenden System gibt. Diese Quasi-Teilchen verhalten sich im wechselwirkenden System wie reale Teilchen im nichtwechselwirkenden System. Um solche Quasi-Teilchen zu beschreiben, betrachtet Landau die Gesamtenergie des wechselwirkenden Systems als ein Funktional der Besetzungszahlfunktion  $n(\mathbf{k})$  des Quasiteilchenzustands  $\mathbf{k}$ . Die Quasiteilchenenergien sind durch die erste funktionale Ableitung der Gesamtenergie nach  $n(\mathbf{k})$  gegeben und die Wechselwirkung durch die zweite funktionale Ableitung. Die renormalisierte Quasi-Teilchen-Wechselwirkung ist Spin- und impulsabhängig und lässt sich an der Fermi-Oberfläche nach Legendre-Polynomen entwickeln.

Migdal erweiterte diese Idee auf endliche Fermionensysteme und wendete sie auf Atomkerne an. Zum einen muss nun mit zwei Arten von Fermionen gerechnet werden (Protonen und Neutronen), zum anderen haben wir eine relativ kleine Anzahl von Teilchen und die Quasi-Teilchen-Wechselwirkung ist zusätzlich Isospin abhängig. Wie schon bei unendlichen Systemen wird hier auch nach Legendre-Polynomen entwickelt und man erhält die bekannten Entwicklungskoeffizienten, die Landau-Migdal-Parameter (LMP).

Wie schon erwähnt, betrachten wir die Energie des wechselwirkenden Systems als ein Funktional der Besetzungszahlfunktion  $n(\mathbf{k})$  der Quasi-Teilchen  $(E = E(n(\mathbf{k})))$ . Eine Anregung des Systems ist im wesentlichen durch die Änderung der Besetzungszahlfunktion um die Größe  $\delta n(\mathbf{k})$  gegeben. Die entsprechende Änderung der Energie ist:

$$\begin{split} \delta E &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon^0(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') \delta n(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}') \\ &= \sum_{\mathbf{k}} [\epsilon^0(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'} f(\mathbf{k},\mathbf{k}') \delta n(\mathbf{k})] \delta n(\mathbf{k}') \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}'), \end{split}$$

mit  $\epsilon^0(\mathbf{k})$  die Gleichgewichtsenergie der Quasi-Teilchen. Die Energie der Quasi-Teilchen  $\epsilon(\mathbf{k})$  und die Wechselwirkung zwischen den Quasi-Teilchen und den Quasi-Löchern  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  ist durch die funktionalen Ableitungen der Energie nach der Besetzungszahlfunktion gegeben:

$$\epsilon(\mathbf{k}) = \frac{\delta E}{\delta n(\mathbf{k})}, \qquad f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\delta^2 E}{\delta n(\mathbf{k}) \delta n(\mathbf{k}')}.$$

Durch die explizite Spin- und Isospin-Abhängigkeit erhalten wir für die Wechselwir-

kung

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') = F(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') + F'(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}' + [G(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}') + G'(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}']\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$
(3.11)

Durch die Voraussetzung, dass der Hauptanteil der Wechselwirkung nahe der Fermi-Oberfläche stattfindet und somit nur vom Winkel  $\theta$  zwischen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$  abhängt ist, wird eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen möglich:

$$F(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') = \sum_{l} F_{l} P_{l}(\cos \theta). \qquad (3.12)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $F_l$  werden als LMP bezeichnet. Um dimensionslose Parameter zu erhalten, definieren wir:

$$F_l = C_0 f_l,$$

mit  $C_0$  als inverse Zustandsdichte an der Fermi-Oberfläche:

$$C_0 = \left(\frac{dn}{d\epsilon}\right)^{-1} \bigg|_{\epsilon=\epsilon_F}$$
$$= \left(\frac{2k_F M^*}{(\hbar\pi)^2}\right)^{-1} = N_0^{-1}(k_F).$$

Dementsprechend ist es möglich, auch die weiteren Komponenten der Wechselwirkung (3.11) zu entwickeln und somit die Parameter  $f'_l$ ,  $g_l$ ,  $g'_l$  der einzelnen Terme zu definieren.

Mit Hilfe der LMP lassen sich auch die Systemeigenschaften des Kerns beschreiben, wie beispielsweise die Kompressibilität K:

$$K = k_F^2 \frac{d^2(\frac{E}{A})}{dk_F^2} = 6 \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} (1 + 2f_0),$$

die Symmetrie-Energie  $\beta$ :

$$\beta = \frac{1}{3} \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m^*} (1 + 2f_0')$$

und die effektive Masse  $m^*$ :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{2}{3}f_1.$$

Diese Parameter lassen sich experimentell bestimmen und können dazu benutzt werden, um weitere Vorhersagen zu treffen. Die Größen gehen auch in die Bestimmung der Gleichung für  $\delta n(\mathbf{k}, \omega)$  ein, deren Lösung kleine boson-artige Anregungen im Fermionensystem bestimmt. Im Kern entsprechen diese Anregungen der Multipol-Riesenresonanz (siehe Beispielsweise [KST03]).

Durch die Einschränkung der Entwicklung (3.12) auf die niedrigste Ordnung (l = 0) erhalten wir eine im Impulsraum konstante Wechselwirkung, was zu einer Delta-Funktion im Ortsraum führt:

$$F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = C_0 \left[ f(\boldsymbol{r}) + f'(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2' + \left( g + g'\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2' \right) \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \quad (3.13)$$

Die nächste Ordnung (l = 1) führt eine Impulsabhängigkeit in die Teilchen-Loch-Wechselwirkung ein.

Ein Vergleich unseres Ansatzes (1.1) für die NN-Wechselwirkung mit Gleichung 3.13 zeigt den Zusammenhang mit den LMP. Im S = 0 und T = 0 Kanal muss durch den Übergang auf endliche Kern ein Rearrangement-Term  $f_r(kf)$  (Anhang C) berücksichtigt werden. Wir erhalten somit für die LMP unserer Wechselwirkung:

 $\begin{array}{rcl} f_0 &=& N_0(k_F)V_{00} + f_r(k_F), \\ f'_0 &=& N_0(k_F)V_{10}, \\ g_0 &=& N_0(k_F)V_{01}, \\ g'_0 &=& N_0(k_F)V_{11}. \end{array}$ 

Abbildung 3.1 und 3.2 zeigen die LMP für <sup>56</sup>Fe. Es werden jeweils die LMP für den dichteabhängigen Wechselwirkungsansatz (Index d) mit denen für den Ansatz konstanter Skalierungsfaktoren für die drei Standard-Mesonen gegenübergestellt. Abbildung 3.3 zeigt  $f_0$  beim Übergang von symmetrischer Kernmaterie zur reinen Neutronen-Materie.



Abbildung 3.1: LMP  $f_0$  und  $f'_0$  (mit dichteabhängiger Dreikörperwechselwirkung) und  $f_{d0}$  und  $f'_{d0}$  (Dreikörperwechselwirkung mit konstanten Skalierungsfaktoren) für  $\frac{Z}{A} = 0, 46$ 



Abbildung 3.2: LMP  $g_0$  und  $g'_0$  (mit dichteabhängiger Dreikörperwechselwirkung) und  $g_{d0}$  und  $g'_{d0}$  (Dreikörperwechselwirkung mit konstanten Skalierungsfaktoren) für  $\frac{Z}{A} = 0, 46$ 



Abbildung 3.3: LMP  $f_0$  unter Berücksichtigung der Dreikörperwechselwirkung für  $\chi = \frac{Z}{A}$  von symmetrischer Kernmaterie ( $\chi = 0.5$ ) bis zu reiner Neutronenmaterie ( $\chi = 0$ )

# 4 QRPA-Rechnungen für Ladungsaustauschanregungen

## **4.1 Der** $\beta$ -Zerfall

In den vorangegangenen Abschnitten sind wir auf Techniken eingegangen, welche es uns ermöglichen, die Grundzustandsanregungen des Systems zu untersuchen. Ein interessanter Prozess in diesem Zusammenhang ist der  $\beta$ -Zerfall, welcher den Übergang von einem Proton in ein Neutron  $(p \rightarrow n)$  und umgekehrt  $(n \rightarrow p)$  bezeichnet. Aus Sicht der Kernstrukturphysik entsprechen diese Prozesse den Ladungsaustauschanregungen

$$\begin{array}{rcl} A & = & (Z,N) \to A_{-} = (Z-1,N+1) & bzw. \\ A & = & (Z,N) \to A_{+} = (Z+1,N-1), \end{array}$$

die Proton-Loch Neutron-Teilchen  $(p^{-1}n)$  oder  $(pn^{-1})$  Anregungen des Ausgangskerns A angesehen werden können.

Als Wechselwirkungsoperator führen wir den Ladungsaustausch-Übergangs-Operator  $T_{\lambda\mu}$  mit

$$T_{\lambda\mu}(\pm,\xi) = T_{\lambda\mu}(\xi)\tau_{\pm}, \qquad (\xi = (\boldsymbol{r},\boldsymbol{\sigma},\dots))$$

ein. Anhang B diskutiert diesen Operator mit Hilfe der Drehimpulskopplung in der zweiten Quantisierung und erstellt den Zusammenhang mit dem Quasi-Teilchenbild. Wir erhalten letztendlich für dessen Darstellung:

$$T_{\lambda\mu}(+,\xi) = \sum_{j_p,j_n} \frac{(-)^S}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda}\tau_- || j_n \rangle^* \tilde{A}_{\lambda-\mu}(j_p j_n)$$

und

$$T_{\lambda\mu}(-,\xi) = \sum_{j_p,j_n} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* A^{\dagger}_{\lambda-\mu}(j_p j_n).$$

Der Übergang des Grundzustands  $|0\rangle$  ist durch

$$T_{\lambda}^{\nu}(\pm) = \langle 0|Q_{\nu}T_{\lambda\mu}(\pm)|0\rangle \delta_{J_{\nu}\lambda}^{M_{\nu}\mu}$$

35

gegeben, wobe<br/>i $Q_{\nu}$ den QRPA-Operator

$$Q_{J_{\nu}M_{\nu}}^{\dagger} = \sum_{j_p j_n} (X_{pn}^{\nu} \Omega_{J_{\nu}M_{\nu}}^{\dagger})(j_p j_n) - (Y_{pn}^{\nu} \tilde{\Omega}_{J_{\nu}M_{\nu}}^{\dagger})(j_p j_n))$$

bezeichnet. Somit erhalten wir:

$$T_{\lambda}^{\nu}(-) = -\sum_{j_{p}j_{n}} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_{p} || T_{\lambda} \tau_{-} || j_{n} \rangle (u_{p} v_{n} X_{pn}^{\nu} + v_{p} u_{n} Y_{pn}^{\nu}),$$
  
$$T_{\lambda}^{\nu}(+) = -\sum_{j_{p}j_{n}} \frac{(-)^{S}}{\hat{\lambda}} \langle j_{p} || T_{\lambda} \tau_{-} || j_{n} \rangle (v_{p} u_{n} X_{pn}^{\nu} + u_{p} v_{n} Y_{pn}^{\nu}).$$

Für die Multipolentwicklung der Zwei-Quasi-Teilchen Wechselwirkung finden wir:

$$V_{\tau} = \sum_{pnp'n'} \langle pn^{-1} | V_{\tau} | p'n'^{-1} \rangle a_p^{\dagger} a_n a_{n'}^{\dagger} a_{p'}$$
  
$$= \sum_{pnp'n'\lambda\mu} V_{\lambda}(pnp'n') \langle p | T_{\lambda\mu}\tau_{-} | n \rangle \langle n' | T_{\lambda\mu}^{\dagger}\tau_{+} | p' \rangle a_p^{\dagger} a_n a_{n'}^{\dagger} a_{p'},$$

wobe<br/>i $V_{\lambda}$  das radiale Integral bezeichnet.

Mit den obigen Beziehungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle n'|T_{\lambda\mu}^{\dagger}\tau_{+}|p'\rangle &= \langle p'||T_{\lambda\mu}\tau_{-}||n'\rangle^{*} \\ &= \frac{1}{\hat{\lambda}}\langle p'||T_{\lambda}\tau_{-}||n'\rangle^{*} \\ &= (-)^{j_{n'}-m_{n'}}(j_{p'}m_{p'}j_{n'}m_{n'}|\lambda\mu) \end{aligned}$$

und somit für die Wechselwirkung

$$V_{\tau} = \sum_{pnp'n'\lambda\mu} V_{\lambda}(pnp'n') \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle p || T_{\lambda}\tau_{-} || n \rangle \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle p' || T_{\lambda}\tau_{-} || n' \rangle^{*} A^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_{p}j_{n}) A_{\lambda\mu}(j_{p'}j_{n'}).$$

Die numerischen Rechnungen basieren in Analogie zur Linear-Response-Theorie (3.3) auf der Lösung der QRPA-Dyson-Gleichung für die Response-Funktion

$$R_{\alpha\beta} = \langle 0 | T_{\alpha}^+ G_{RPA} T_{\beta} | 0 \rangle.$$

Wir definieren die unkorrelierte Zweiquasiteilchen-Responsefunktion für den reinen Zweiquasiteilchen Propagator  $G_0$ 

$$R^0_{\alpha\beta} = \langle 0|T^+_{\alpha}G_0T_{\beta}|0\rangle$$

und erhalten:

$$R_{\alpha\beta} = R^0_{\alpha\beta} + \sum_{\lambda} R^0_{\alpha\lambda} V_{\lambda} R_{\lambda\beta}.$$

Für zusätzliche Erläuterungen siehe [FW71], [RS80] und [BBD+97].

## 4.2 Ergebnisse

Im Folgenden wollen wir nach der Einführung des Ladungsaustausch-Ubergangsoperators den Imaginärteil der Response-Funktion bim  $\beta$ -Zerfall betrachten. Vorerst müssen wir uns aber ein Bild von den möglichen Übergängen des  $\beta$ -Zerfalls machen.

Man unterscheidet zwei Arten von Übergängen: den  $\beta^+$ -  $(p \rightarrow n + e^+ + \nu_e)$  und den  $\beta^-$ -Zerfall  $(n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e)$ . Diese Zerfälle werden wiederum in den Fermiund den Gamow-Teller-Übergang, die durch den jeweiligen Spin-Übertrag charakterisiert sind, unterteilt. Abbildung 4.1 zeigt den Fermi-Übergang, dieser bezeichnet die Emission eines  $\beta$ -Teilchens und Neutrinos mit antiparallelem Spin, folglich mit einem Gesamtspinübertrag  $\Delta S = 0$ . Abbildung 4.2 zeigt den Gamow-Teller-Übergang, der die Emission eines  $\beta$ -Teilchen und eines Neutrinos mit parallelem Spin, demzufolge mit einem Gesamtspinübertrag  $\Delta S = 1$ .



Abbildung 4.1: Spin beim Fermi-Übergang



Abbildung 4.2: Spin beim Gamow-Teller Übergang

Wir vergleichen hier die Antwort-Funktionen der Dichteabhängigen NN-Wechselwirkung (3-Body DD) mit einem Ansatz, welcher die Skalierungsfaktoren für die drei Standard-Mesonen als konstant ansetzt (3-Body). Um ein Bild von vorherigen Resultaten zu erhalten, enthalten die Plots zusätzlich die Ergebnisse für den Zweikörper-Ansatz der Wechselwirkung welche beispielsweise in [BNCR+88],[BGK+88],[Len88],[BBC+89], [LBW89],[Len89],[NYK<sup>+</sup>90],[HTZ<sup>+</sup>97],[CCD<sup>+</sup>04], und [RLW04] ihre Anwendung findet. Als Ausgangskern für unsere Untersuchung nehmen wir <sup>56</sup>Fe. Wie schon angesprochen, haben wir neben dem  $\beta^-$ -Zerfall von <sup>56</sup>Fe nach <sup>56</sup>Co und dem  $\beta^+$ -Zerfall nach <sup>56</sup>Mn, weiterhin noch zwischen dem Fermi- sowie dem Gamow-Teller-Übergang zu unterscheiden.

Abbildungen 4.3 und 4.4 zeigen den 0<sup>+</sup> Fermi-Übergang des  $\beta^+$  sowie  $\beta^-$  Zerfalls von <sup>56</sup>Fe. In Abbildungen 4.5 und 4.6 wird der 1<sup>+</sup> Gamow-Teller-Übergang des  $\beta^+$  sowie des  $\beta^-$  Zerfalls von <sup>56</sup>Fe mit einem Bahndrehimpulsübertrag von  $\Delta L = 0$  gezeigt. Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen diesen Übergang mit einem Bahndrehimpulsübertrag von  $\Delta L = 2$ .

Betrachten wir die Stärkefunktionen, so lässt sich eine deutliche Verschiebung der Maxima beim Übergang vom Zweikörperansatz zum Dreikörperansatz sehen. Experimentelle Messungen der Anregungsenergien können somit dazu beitragen die Relevanz dieses Modellansatzes zu bestimmen. Ein ganz anderes Bild zeigt sich beim Vergleich der beiden Dreikörperansätze. Anders als in der Beschreibung der EoS spielt hier die explizite Dichteabhängigkeit der Vertices keine besondere Rolle, wir erhalten für beide Ansätze ein ähnliches Resultat. Lediglich beim  $\beta^-$ -Fermi Übergang ist eine kleine Verschiebung der beiden Maxima zu erkennen.



Abbildung 4.3:  ${}^{56}\text{Fe} \rightarrow {}^{56}\text{Mn}$  Fermi-Übergang



Abbildung 4.5:  $^{56}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Mn}$ Gamow-Teller-Übergang mit Drehimpulsübertrag L=0



Abbildung 4.6:  $^{56}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Co}$ Gamow-Teller-Übergang mit Drehimpulsübertrag L=0



Abbildung 4.7:  $^{56}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Mn}$ Gamow-Teller-Übergang mit Drehimpulsübertrag L=2



Abbildung 4.8:  $^{56}\mathrm{Fe} \rightarrow {}^{56}\mathrm{Co}$ Gamow-Teller-Übergang mit Drehimpulsübertrag L=2

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, wie man im Rahmen der RPA-Theorie den  $\beta$ -Zerfall exotischer Kerne untersuchen kann. Um Anregungsspektren von Kernen zu untersuchen, benötigt man neben der Kenntnis über die NN-Wechselwirkung auch noch aufgrund der Komplexität des Systems Näherungsmethoden zur Bestimmung des Grundzustands.

In Kapitel 1 haben wir uns ausführlich mit der NN-Wechselwirkung beschäftigt. Neben den Eigenschaften der freien NN-Wechselwirkung wurde auch auf die in-medium Effekte eingegangen und somit die Motivation für die Einführung einer expliziten Dichteabhängigkeit der Wechselwirkung aufgeführt. Zum anderen haben wir gezeigt, dass aufgrund der vorhandenen Struktur des Nukleons und des Pauli-Prinzips eine Erweiterung der herkömmlichen Zweikörperwechselwirkung durch zusätzliche Dreikörperkorrelationen erforderlich ist, um die Physik genauer zu beschreiben. Mit der Bethe-Goldstone-Gleichung wurde eine Möglichkeit gegeben, diese effektive in-medium Wechselwirkung zu bestimmen. Mit der M3Y-Wechselwirkung haben wir eine geschickte Parametrisierung der G-Matrix erhalten, welche die Grundzustandseigenschaften von <sup>16</sup>O reproduziert. Diese Wechselwirkung haben wir durch eine explizite dichteabhängige Korrektur der Meson-Nukleon-Kopplungskonstanten zur G3Y-Wechselwirkung erweitert. Ein Fit an die erweiterte A18 EoS durch die Urbana IX EoS, welche somit die Dreikörperkorrelationen mitberücksichtigte, ließ uns die notwendigen Parameter der Korrektur bestimmen. Die Berechnung der Sättigungsdichte in der symmetrischen Kernmaterie und der Eigenschaften bei  $\rho_0$  spiegelten die passende Wahl der Wechselwirkung wieder.

In Kapitel 2 sind wir auf die Problematik der Bestimmung des Grundzustands eingegangen. Angesichts der Komplexität des Systems ist eine exakte Lösung unmöglich und wir haben Näherungsmethoden eingeführt. Zunächst wurde die HF-Methode vorgestellt, welche eine so genannte Mittelfeld-Approximation darstellt und die einzelnen Teilchen ein durch alle Konstituenten erzeugtes Potential spüren läßt. Experimentelle Befunde zeigen jedoch, dass Paarkorrelationen nicht vernachlässigt werden dürfen. Durch die Anwendung der Bogoliubov-Transformation, welche anstelle der realen Teilchen Quasi-Teilchen einführt, haben wir das HFB-Verfahren erhalten.

In Kapitel 3 haben wir uns der Aufgabe der Bestimmung der Anregungszustände des durch das HFB-Verfahren erhaltenen Grundzustands gewidmet. Zunächst stellten wir die RPA vor, welche es uns ermöglicht, Anregungszustände unter Berücksichtigung der Korrelationen zwischen den Nukleonen zu berechnen. Durch die QBA erhielten wir zusätzlich eine Verknüpfung mit dem durch das HF- und HFB-Verfahren berechneten Grundzustand. Da wir aber unsere Untersuchung im Quasi-Teilchen-Bild durchgeführt haben, mussten wir die RPA zur QRPA erweitern. Für die Untersuchung des  $\beta$ -Zerfalls haben wir aber noch eine Möglichkeit benötigt, die Reaktion des Systems auf kleine Störungen zu berechnen. Mit Hilfe der Linear-Response-Theorie und der Einführung des Ladungsaustausch-Übergangs-Operators in Kapitel 4 haben wir die Möglichkeit bekommen den  $\beta$ -Übergang näher zu untersuchen und haben einen Vergleich der einzelnen Modelle erhalten. Die Einführung der Landau-Migdal-Wechselwirkung ermöglichte uns einen zusätzlichen Zugang zur Berechnung angeregter Zustände wechselwirkender Fermionensysteme.

Diese Arbeit hat bestätigt, dass die Untersuchung der NN-Wechselwirkung eine sehr komplexe Aufgabe ist. Durch die Mesonen-Feld-Theorie lässt sie sich zwar veranschaulichen, die komplexen Korrelationen benötigen jedoch ein tieferes Verständnis der Kernstruktur. Es wurde auch gezeigt, dass Korrelationen zwischen den Nukleonen (beispielsweise die Paarkorrelationen) nicht nur bei der Grundzustandsberechnung, sondern auch bei der Untersuchung der Anregungszustände mitberücksichtigt werden müssen. Zum anderen wurde auf die Erfordernis von Dreikörperkorrelationen hingewiesen und auf die dadurch verbesserte Reproduktion experimenteller Daten. Schlussendlich wurde das Werkzeug zur Untersuchung von Anregungszuständen des Kerns geliefert, was eine genaue Analyse des  $\beta$ -Übergangs möglich macht. Es wird daher auch in Zukunft notwendig sein, mit diesen Techniken Anregungszustände verschiedener Kerne zu bestimmen, um daraus ein besseres Verständnis des  $\beta$ -Zerfalls und der kernphysikalischen Aspekte der schwachen Wechselwirkung im Allgemeinen zu erlangen. Diese Fragen erfahren gegenwärtig große Aufmerksamkeit wegen ihrer herausragenden Bedeutung für das Verständnis von Neutrino-Materie-Wechselwirkungen und der Nukleosynthese in stellaren Prozessen.

## A Darstellung der NN-Wechselwirkung

## A.1 Projektionsoperatoren-Darstellung der NN-Wechselwirkung

Wie schon in Kapitel 1.1 beschrieben, lässt sich der Zentralanteil der NN-Wechselwirkung durch

$$V_{1,2} = V_0(r) + V_{\sigma}(r)\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)} + V_{\tau}(r)\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)} + V_{\sigma\tau}(r)\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\boldsymbol{\tau}^{(1)}\boldsymbol{\tau}^{(2)}$$
(A.1)

ausdrücken. Eine weitere Art der Darstellung ergibt sich, wenn wir die Spin- und Isospinaustauschoperatoren

$$P_{\sigma} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_1)$$
 und  $P_{\tau} = \frac{1}{2}(1 + \hat{\tau}_1 \hat{\tau}_1),$ 

sowie die mit ihnen erzeugten Projektionsoperatoren

$$\Pi_{SE} = \frac{1}{2}(1 - P_{\sigma})\frac{1}{2}(1 + P_{\tau}),$$
  

$$\Pi_{TE} = \frac{1}{2}(1 + P_{\sigma})\frac{1}{2}(1 + P_{\tau}),$$
  

$$\Pi_{SO} = \frac{1}{2}(1 - P_{\sigma})\frac{1}{2}(1 - P_{\tau}),$$
  

$$\Pi_{TO} = \frac{1}{2}(1 + P_{\sigma})\frac{1}{2}(1 - P_{\tau})$$

betrachten.  $P_{SE}$  projiziert dabei auf die Ortswellenfunktion der wechselwirkenden Nukleonen, die gerade (englisch: even, E) unter Koordinatenaustausch ist und auf den Spin-Singlett (Singlett, S) der Zweiteilchenwellenfunktion. Dementsprechend projiziert  $P_{TO}$  auf den Spin-Triplett (Triplett, T) und die ungeraden (englisch: odd, O) Ortswellenfunktionen.

Mit diesen Projektionsoperatoren lässt sich (A.1) in eine in der Streutheorie gebräuchliche Form umschreiben:

$$V = V_{SE}(r)\Pi_{SE} + V_{TE}(r)\Pi_{TE} + V_{SO}(r)\Pi_{SO} + V_{TO}(r)\Pi_{TO}.$$

Die neuen Wechselwirkungskoeffizienten erhalten wir durch:

$$V_{0} = \frac{1}{16} [3V_{TE} + 3V_{SE} + 9V_{TO} + V_{SO}],$$
  

$$V_{\tau} = \frac{1}{16} [-3V_{TE} + V_{SE} + 3V_{TO} - V_{SO}],$$
  

$$V_{\sigma} = \frac{1}{16} [V_{TE} - 3V_{SE} + 3V_{TO} - V_{SO}],$$
  

$$V_{\sigma\tau} = \frac{1}{16} [-V_{TE} - V_{SE} + V_{TO} + V_{SO}],$$
  
(A.2)

mit  $V_0 = V_{00}, V_{\tau} = V_{01}, V_{\sigma} = V_{10}$  und  $V_{\sigma\tau} = V_{11}$ .

## A.2 Direkter- und Austauschkanal der NN-Wechselwirkung

Für die HF-Rechnung aus Abschnitt (1.5.1) ist es sinnvoll, die Separation der NN-Wechselwirkung in den direkten- und Austauschkanal mit gleichem oder verschiedenem Isospin durchzuführen. Wir werden im Folgenden für die HF-Matrixelemente, unter Ausnutzung der Orthonormalität der Spin- und Isospinfunktionen [W.N82], den direkten- und den Austauschterm der NN-Wechselwirkung in Abhängigkeit vom Isospin untersuchen.

Das antisymmetrische Matrixelement der Wechselwirkung für zwei Zustande  $|N\rangle$  und  $|M\rangle$  ist somit durch

$$\langle MN|V_C|MN - NM \rangle = \frac{1}{4} (1 - \delta_\tau \delta_\chi - \delta_\chi + \delta_\tau) \langle mn|V_{SE}|mn + nm \rangle + \frac{1}{4} (1 - \delta_\tau \delta_\chi + \delta_\chi - \delta_\tau) \langle mn|V_{TE}|mn + nm \rangle + \frac{1}{4} (1 + \delta_\tau \delta_\chi - \delta_\chi - \delta_\chi) \langle mn|V_{SO}|mn + nm \rangle + \frac{1}{4} (1 + \delta_\tau \delta_\chi + \delta_\chi + \delta_\chi + \delta_\tau) \langle mn|V_{TO}|mn + nm \rangle$$

gegeben. Dabei sei  $|N\rangle = \phi_n(\mathbf{r})\chi_n\tau_n$  die vollständige Einteilchenwellenfunktion inklusive Spin- und Isospinwellenfunktion und  $|n\rangle = \phi_n(\mathbf{r})$  die reine Einteilchenwellenfunktion im Ortsraum.

Nach der Mittelung über den Spin erhalten wir für Teilchen mit gleichem Isospin  $(\delta_{\tau} = 1)$ :

$$\langle mn|\frac{1}{4}V_{SE} + \frac{3}{4}V_{TO}|mn\rangle + \langle mn|\frac{1}{4}V_{SE} - \frac{3}{4}V_{TO}|nm\rangle,$$

sowie für Teilchen mit verschiedenem Isospin ( $\delta_{\tau} = 0$ ):

$$\langle mn | \frac{1}{8} V_{SE} + \frac{3}{8} V_{TO} + \frac{1}{8} V_{SO} + \frac{3}{8} V_{TO} | mn \rangle + \langle mn | \frac{1}{8} V_{SE} + \frac{3}{8} V_{TO} - \frac{1}{8} V_{SO} - \frac{3}{8} V_{TO} | nm \rangle.$$

Für den direkten- und den Austauschterm der spingemittelten Proton-Proton- (pp) und Proton-Neutron-Wechselwirkung (pn) erhalten wir somit:

$$\begin{split} V_{pp}^{d} &= \frac{1}{8} \left[ 2V_{SE} + 6V_{TO} \right], \\ V_{nn}^{d} &= V_{pp}^{d}, \\ V_{pn}^{d} &= \frac{1}{8} \left[ V_{SE} + 3V_{TE} + V_{SO} + 3V_{TO} \right], \\ V_{pp}^{e} &= \frac{1}{8} \left[ 2V_{SE} - 6V_{TO} \right], \\ V_{nn}^{e} &= V_{pp}^{e}, \\ V_{pn}^{e} &= \frac{1}{8} \left[ V_{SE} + 3V_{TE} - V_{SO} + 3V_{TO} \right]. \end{split}$$

Zusätzlich möchten wir noch effektive isoskalare und isovektorielle Wechselwirkungen für den direkten- und Austauschterm sowohl in der pp-pn-Darstellung:

$$\begin{split} V_0^d &= \frac{1}{2} \left[ V_{pp}^d + V_{pn}^d \right], \\ V_\tau^d &= \frac{1}{2} \left[ V_{pp}^d - V_{pn}^d \right], \\ V_0^e &= \frac{1}{2} \left[ V_{pp}^e + V_{pn}^e \right], \\ V_\tau^e &= \frac{1}{2} \left[ V_{pp}^e - V_{pn}^e \right], \end{split}$$

als auch in der Projektionsoperatoren-Darstellung:

$$V_0^d = \frac{1}{16} [3V_{SE} + 3V_{TE} + V_{SO} + 9V_{TO}],$$
  

$$V_\tau^d = \frac{1}{16} [V_{SE} - 3V_{TE} - V_{SO} + 3V_{TO}],$$
  

$$V_0^e = \frac{1}{16} [3V_{SE} + 3V_{TE} - V_{SO} - 9V_{TO}],$$
  

$$V_\tau^e = \frac{1}{16} [V_{SE} - 3V_{TE} + V_{SO} - 3V_{TO}],$$

definieren.

Dies zeigt, dass die definierte effektive direkte Wechselwirkung identisch mit dem ursprünglichen Ansatz A.2 ist. Jedoch gibt es für die Form der Wechselwirkung des Austauschterms keine Äquivalenz. A Darstellung der NN-Wechselwirkung

# B Der Ladungsaustausch-Übergangs-Operator

Für die Erforschung des  $\beta$ -Zerfalls ist es hilfreich, den Ladungsaustausch-Übergangs-Operator für  $p \to n \ (\tau_+)$  und  $n \to p \ (\tau_-)$  Anregungen

$$T_{\lambda\mu}(\pm,\xi) = T_{\lambda\mu}(\xi)\tau_{\pm} \qquad (\xi = (\boldsymbol{r},\boldsymbol{\sigma},\dots))$$

näher zu untersuchen.

In der zweiten Quantisierung lässt sich dieser anschaulich darstellen:

$$T_{\lambda\mu}(+,\xi) = \sum_{pn} \langle n | T_{\lambda\mu}(\xi) | p \rangle \langle n | \tau_+ | p \rangle a_n^{\dagger} a_p,$$
  
$$T_{\lambda\mu}(-,\xi) = \sum_{pn} \langle p | T_{\lambda\mu}(\xi) | n \rangle \langle p | \tau_- | n \rangle a_p^{\dagger} a_n.$$

Mit der Standard-Tensorkonvention

$$T^{\dagger}_{\lambda\mu}(\xi) = (-)^{\lambda+S+\mu}T_{-\lambda-\mu}(\xi),$$
  
$$\tau_{\pm} = \tau^{\dagger}_{\pm}$$

lässt sich die einfache Beziehung

$$T^{\dagger}_{\lambda\mu}(+,\xi) = (-)^{\lambda+S+\mu}T_{-\lambda-\mu}(-,\xi)$$

finden. Folglich kann mit Hilfe des Wigner-Eckhart-Theorems der Übergang durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten und das reduzierte Matrixelement darstellt werden (siehe: [Edm64]):

$$\langle j_n m_n | T_{\lambda \mu} | j_p m_p \rangle = \langle j_p m_p | T_{\lambda \mu}^{\dagger} | j_n m_n \rangle^*$$

$$= (-)^{\lambda + \mu + S} \langle j_p m_p | T_{\lambda - \mu} | j_n m_n \rangle^*$$

$$= (-)^{\lambda + \mu + S} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p | | T_{\lambda} | | j_n m_n \rangle^* (-)^{j_n - m_n} (j_p m_p j_n - m_n | \lambda - \mu)$$

und

$$\langle j_p m_p | T_{\lambda \mu} | j_n m_n \rangle = \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p | | T_{\lambda} | | j_n \rangle (-)^{j_n - m_n} (j_p m_p j_n - m_n | \lambda - \mu),$$

49

so dass wir für  $T_{\lambda\mu}(+,\xi)$ 

$$T_{\lambda\mu}(+,\xi) = \sum_{\substack{j_p,j_n \\ \sum \\ m_n,m_p}} (-)^{\lambda+\mu+S} \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} || j_n \rangle \langle n | \tau_+ | p \rangle$$

erhalten.

Die Definitionen

 $\tilde{a}_{jm} = (-)^{j+m} a_{j-m}$ 

und

$$A^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_p, j_n) = \sum_{m_n, m_p} (j_p m_p j_n m_n | \lambda - \mu) a^{\dagger}_{j_n m_n} a_{j_p m_p}$$
$$= [a_p \otimes a_n]_{\lambda\mu}$$

ermöglichen es uns, den Übergang kompakter darzustellen:

$$T_{\lambda\mu}(+,\xi) = \sum_{j_p,j_n} (-)^S \frac{1}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* (-)^{\lambda+\mu} A_{\lambda-\mu}(j_p j_n)$$
$$= \sum_{j_p,j_n} \frac{(-)^S}{\hat{\lambda}} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* \tilde{A}_{\lambda-\mu}(j_p j_n)$$

und entsprechend

$$T_{\lambda\mu}(-,\xi) = \sum_{j_p,j_n} \frac{1}{\lambda} \langle j_p || T_{\lambda} \tau_- || j_n \rangle^* A^{\dagger}_{\lambda-\mu}(j_p j_n).$$

Die Diskussion des Ladungsaustausch-Übergangs-Operators beschränkte sich bis jetzt auf das Teilchenbild, da wir aber in unserer Arbeit die Paarkorrelationen der Nukleonen mitberücksichtigen, muss noch die Beziehung zum Quasi-Teilchen Bild untersucht werden.

Die Transformation ins Quasi-Teilchen Bild ist durch

$$a_{p}^{\dagger}\tilde{a}_{n} = (u_{p}\alpha_{p}^{\dagger} + v_{p}\tilde{\alpha}_{p})(u_{n}\tilde{\alpha}_{n} - v_{n}\alpha_{n}^{\dagger})$$
  
$$= -(u_{p}v_{n}\alpha_{p}^{\dagger}\alpha_{n}^{\dagger} + v_{p}u_{n}\tilde{\alpha}_{n}\tilde{\alpha}_{p}) + O(\alpha^{\dagger}\tilde{\alpha})$$
  
$$\tilde{a}_{p}^{\dagger}a_{n} = (u_{n}\tilde{\alpha}_{p}^{\dagger} - v_{n}\alpha_{n})(u_{n}\alpha_{n} + v_{n}\tilde{\alpha}_{p}^{\dagger})$$

$$\begin{aligned} a_n' a_p &= (u_n \alpha_p' - v_n \alpha_n) (u_p \alpha_p + v_p \alpha_p') \\ &= -(v_p u_n \tilde{\alpha}_p^{\dagger} \tilde{\alpha}_n^{\dagger} + u_p v_n \alpha_n \alpha_p) + O(\alpha^{\dagger} \tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

gegeben.

50

Wir definieren den Quasi-Teilchen Ladungsaustausch-Übergang-Operator:

$$\Omega^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_p j_n) = \sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) \alpha^{\dagger}_{j_p m_p} \alpha^{\dagger}_{j_n m_n}$$
$$\tilde{\Omega}_{\lambda\mu}(j_p j_n) = (-)^{\lambda+\mu} \Omega_{\lambda-\mu}(j_p j_n).$$

Mit Hilfe der Rechenvorschriften für Clebsch-Gordan-Koeffizienten

$$\sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda \mu) \tilde{\alpha}_n \tilde{\alpha}_p = \sum_{m_p m_n} (-)^{j_n - m_n + j_p - m_p} (j_p - m_p j_n - m_n | \lambda \mu) \alpha_{j_n m_n} \alpha_{j_p m_p}$$
$$= (-)^{-\lambda + \mu} \Omega_{\lambda - \mu} (j_p j_n)$$
$$= (-)^{\lambda + \mu} \Omega_{\lambda - \mu} (j_p j_n)$$
$$= \tilde{\Omega}_{\lambda \mu} (j_p j_n)$$

und der Relation

$$\sum_{m_p m_n} (j_p m_p j_n m_n | \lambda - \mu) \tilde{\alpha}_p^{\dagger} \tilde{\alpha}_n^{\dagger} = (-)^{\lambda + \mu} \Omega_{\lambda \mu}^{\dagger} (j_p j_n)$$

lässt sich folglich die Beziehung vom Teilchen-Bild zum Quasi-Teilchen-Bild finden:

$$\begin{aligned} A^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_p j_n) &= -(u_p v_n \Omega^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_p j_n) + v_p u_n \tilde{\Omega}_{\lambda\mu}(j_p j_n)), \\ \tilde{A}_{\lambda\mu}(j_p j_n) &= -(v_p u_n \Omega^{\dagger}_{\lambda\mu}(j_p j_n) + u_p v_n \tilde{\Omega}_{\lambda\mu}(j_p j_n)) \\ &= (-)^{\lambda+\mu} A_{\lambda-\mu}(j_p j_n). \end{aligned}$$

# C Rearrangement-Term der Landau-Migdal-Parameter

Beim Übergang von unendlicher Kernmaterie zu endlichen Kernen ist im S = 0, T = 0 Kanal der Wechselwirkung ein Rearrangement-Term (deutsch: Umordnungsterm) zu berücksichtigen, welcher sich auf den LMP  $f_0$  auswirkt. Zur Bestimmung dieses Rearrangement-Terms betrachten wir das Energiedichtefunktional

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \sum_{p,p'=p,n} \sum_{S,T=0,1} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \Theta(k_F(q) - k_1) \Theta(k_F(q') - k_2) \\ \times V_{ST}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \rho) \langle (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2)^S(\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2)^T \rangle$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$V_{S,T} = \sum_{m} g_{m}^{2}(
ho) \left( V^{d} + V^{e}(|m{k}_{2} - m{k}_{1}| 
ight)$$

in symmetrischer Kernmaterie.

In spingesättigter symmetrischer Kernmatrie taucht nur noch der S = 0, T = 0Kanal auf, der uns durch den Vergleich mit Gleichung 1.1 bei der Bestimmung von  $f_0$ dient:

$$E_s(\rho) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{N_s N_\tau}{2\pi^2}\right)^2}_{\equiv \alpha} \int dk_1 k_1^2 \int dk_2 k_2^2 \Theta(k_F - k_1) \Theta(k_F - k_2) V_{00}(k_1, k_2, \rho).$$

 $N_s$  und  $N_{\tau}$  sind die Spin- bzw. Isospinfreiheitsgrade. Somit folgt für  $\alpha = \frac{1}{2\pi^4}$ .

Berücksichtigt man, dass die Delta-Funktion die Ableitung der Stufenfunktion ist, so erhält man für die ersten beiden Ableitungen des Energiedichtefunktionals:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial E_s}{\partial \rho} = 2 \frac{\partial k_F}{\partial \rho} k_F^2 \int dk k^2 \Theta(k_F - k) V_{00}(k, k_F, \rho) + \int dk_1 k_1^2 \int dk_2 k_2^2 \Theta(k_F - k_1) \Theta(k_F - k_2) \frac{\partial}{\partial \rho} V_{00}(k_1, k_2, \rho),$$

53

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 E_s}{\partial \rho^2} = \left[ 2 \frac{\partial^2 k_F}{\partial \rho^2} k_F^2 + 4 \left( \frac{\partial k_F}{\partial \rho} \right)^2 k_F \right] \int_0^{k_F} dk k^2 V_{00}(k, k_F, \rho) 
+ 2 \left( \frac{\partial k_F}{\partial \rho} \right)^2 k_F^4 V_{00}(k_F, k_F, \rho) 
+ 2 \frac{\partial k_F}{\partial \rho} k_F^2 \int_0^{k_F} dk k^2 \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial \rho} V_{00}(k, k_F, \rho) + \frac{\partial}{\partial \rho} V_{00}(k, k', \rho) \right]_{k'=k_F} \right]}_{\equiv \frac{1}{\rho} \tilde{V}} 
+ \int_0^{k_F} dk_1 k_1^2 \int_0^{k_F} dk_2 k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} V_{00}(k_1, k_2, \rho).$$

 $\operatorname{mit}$ 

$$\frac{1}{\rho}\tilde{V} = 2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sum_{m}g_{m}^{2}(\rho)\right)\cdot\left(V^{d}+V^{e}(k_{F},k_{1})\right)+\sum_{m}g_{m}^{2}(\rho)\frac{\partial k_{F}}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial k_{F}}V^{e}V^{e}(k_{F},k_{1}).$$

Unter Beachtung des Zusammenhangs von Fermi-Impuls und Dichte

$$k_F = (3\pi^2 \rho)^{\frac{1}{3}}$$

erhalten wir die ersten beiden Ableitungen von  $k_F$ nach  $\rho {:}$ 

$$\frac{\partial k_F}{\partial \rho} = \frac{1}{3} \frac{k_F}{\rho},$$
$$\frac{\partial^2 k_F}{\partial \rho^2} = -\frac{2}{9} \frac{k_F}{\rho^2}$$

und können für die zweite Ableitung des Energiedichtefunktionals

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial \rho^2} = V_{00}(k_F, k_F, \rho) + \underbrace{\frac{1}{\pi^2 \rho} \int_0^{k_F} dk k^2 \tilde{V} + \frac{1}{2\pi^4} \int_0^{k_F} dk_1 k_1^2 \int_0^{k_F} dk_2 k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} V_{00}(k_1, k_2, \rho)}_{f_r(\rho) \cdot N_0(k_F)^{-1}}$$

schreiben. Somit folgt für die LMP:

$$\begin{aligned} f_0 &= N_0(k_F)V_{00} + f_r, \\ f'_0 &= N_0(k_F)V_{10}, \\ g_0 &= N_0(k_F)V_{01}, \\ g'_0 &= N_0(k_F)V_{11}. \end{aligned}$$

## **D** Literaturverzeichnis

- [APR98] AKMAL, A. ; PANDHARIPANDE, V.R. ; RAVENHALL, D.G.: Equation of state of nucleon matter and neutron star structure. In: *Phys. Rev. C* 58 (1998), S. 1804
- [BBC<sup>+</sup>89] BERAT, C. ; BUENERD, M. ; CHAUVIN, J. ; HOSTACHY, J.Y. ; LEBRUN,
  D. ; MARTIN, P. ; BARETTE, J. ; BERTHIER, B. ; FERNANDEZ, B. ;
  MICZAIKA, A. ; MITTIG, W. ; STILIARIS, E. ; OERTZEN, W. von ; LENS-KE, H. ; WOLTER, H.H.: Heavy Ion Charge Exchange Reactions to Probe The Giant Electric Isovector Modes in Nuclei. In: *Phys. Lett.* 218B (1989),
  S. 299
- [BBD<sup>+</sup>97] BAKER, F.T.; BIMBOT, L.; DJALALI, C.; GLASHAUSER, C.; LOVE, H. Lenske, W.; MORLET, M.; TOMASI-GUSTAFSON, E.; WIELE, J. van d.; WAMBACH, J.; WILLIS, A.: The Nuclear Spin Response to Intermediate Energy Protons and Deuterons at Low Momentum Transfer. In: *Phys.Rep. 289* (1997), S. 235
- [BBML77] BERTSCH, G.; BORYSOWICZ, J.; MCMANUS, H.; LOVE, W. G.: In: *Phys. Rev. A* 284 (1977), 399 S.
- [BGK<sup>+</sup>88] BOHLEN, H.G.; GEBAUER, B.; KOLBERT, D.; KUBONO, S.; OERTZEN, W. von; PELLEGRIN, P.O.; STILLIARIS, E.; WILPERT, M.; WILPERT, T.; LENSKE, H.; WOLTER, H.H.; MICZAIKA, A.; ALAMANOS, N.; BARETTE, J.; BERTHIER, B.; FERNANDEZ, B.; GASTEBOIS, J.; BERAT, C.; HOSTACHY, J.Y.; MARTIN, Ph.; MITTIG, W.: The Mechanism of the (<sup>12</sup>C, <sup>12</sup>N) Charge Exchange Reaction on <sup>12</sup>C between 30 and 100 Mev/u. In: Nucl. Phys. A488 (1988), S. 89c
- [BNCR<sup>+</sup>88] BRENDEL, C. ; NEUMANN-COSEL, P. von ; RICHTER, A. ; SCHRIEDER, G. ; LENSKE, H. ; WOLTER, H.H. ; CARTER, J. ; SCHÜLL, D.: Quasi-elastic Nucleon Transfer and Single Charge Exchange in <sup>48</sup>Ti+ <sup>42</sup>Ca Collisions. In: Nucl. Phys. A477 (1988), S. 162
- [CCD<sup>+</sup>04] CAPPUZZELLO, F. ; CUNSOLO, A. ; D.BEAUMEL ; FORTIER, S. ; FOTI, A. ; A.LAZZARO ; LENSKE, H. ; NOCIFORO, C. ; S.ORRIGO ; WINFIELD, J.S.: A many-body analysis of the <sup>11</sup>B(<sup>7</sup>Li,<sup>7</sup>Be)<sup>11</sup>Be reaction at 57 MeV. In: Nucl. Phys. A739 (2004), S. 30

- [Edm64] EDMONDS, A. R.: Drehimpulse in der Quantenmechanik. Bibliograph. Inst., 1964
- [FW71] FETTER, A. L.; WALECKA, J. D.: *Quantum Theory of many-particle* systems. McGraw-Hill Publishing Company, 1971
- [GLMM89] GRANGÉ, P. ; LEJEUNE, A. ; MARTZOLFF, M. ; MATHIOT, J.-F.: In: *Phys. Rev. C* 40 (1989), 1040 S.
- [GM95] GREINER, W.; MARUHN, J.: Kernmodelle. Verlag Harri Deutsch, 1995
- [HL98] HOFFMANN, F.; LENSKE, H.: Hartree-Fock calculations in the density matrix expansion approach. In: *Phys. Rev. C* 57 (1998), S. 2281
- [KOO96] KHOA, D. T.; OERTZEN, W. von; OGLOBLIN, A.A.: In: *Nucl. Phys.* A602 (1996), 98 S.
- [KST03] KAMERDZHIEV, S. ; SPETH, J. ; TERTYCHNY, G.: Extended Theory of Finite Fermi Systems (Collective Vibrations in Closed Shell Nuclei). In: *eprint arXiv:nucl-th/0311058* (2003)
- [LBW89] LENSKE, H.; BOHLEN, H.G.; WOLTER, H.H.: Reaction Mechanism Of Heavy Ion Charge Exchange Scattering. In: *Phys.Rev.Lett.* 62 (1989), S. 1457
- [Len88] LENSKE, H.: Theory of Heavy Ion Charge Exchange Scattering at Low and Intermediate Energies. In: *Nucl. Phys.* A482 (1988), S. 353c
- [Len89] LENSKE, H.: Isovector Excitations in Heavy Ion Scattering at Intermediate Energies. In: Nucl. Phys. A495 (1989), S. 127c
- [NYK<sup>+</sup>90] NAKAYAMA, S. ; YAMAGATA, T. ; K.YUASA ; TANAKA, M. ; BOHLEN, H.G. ; LENSKE, H. ; WOLTER, H.H. ; INOUE, M. ; ITAHASHI, T. ; OGATA, H.: Excitation of Isovector States by the (<sup>7</sup>Li,<sup>7</sup>Be) Reaction on <sup>12</sup>C and <sup>13</sup>C. In: Nucl. Phys. A507 (1990), S. 515
- [PPCW95] PUDLINER, B. S. ; PANDHARIPANDE, V. R. ; CARLSON, J. ; WIRINGA, R. B.: In: Phys. Rev. Lett 74 (1995), 4396 S.

- [RLW04] RAMSTROM, E. ; LENSKE, H. ; WOLTER, H.H.: A multistep direct reaction approach for nucleon production spectra in neutron-induced reactions at intermediate energy. In: *Nucl. Phys.* A744 (2004), S. 108
- [RS80] RING, P.; SCHUCK, P.: The Nuclear Many-Body Problem. Springer, 1980
- [W.N82] W.NEGELE, J.: In: *Rev. Mod. Phys.* 54 (1982), 913 S.
- [WSS95] WIRINGA, R. B.; STOKS, V. G. J.; SCHIAVILLA, R.: In: *Phys. Rev. C* 51 (1995), 38 S.

# Danksagung

An erster Stelle möchte ich Professor Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut danken.

Prof. Dr. Horst Lenske danke ich für die sehr gute Betreuung, für die nette Art meine Fragen zu beantworten und mir dabei einen Einblick in die Vielfalt der Physik zu geben. Auch danke ich ihm für die Durchsicht meiner Manuskripte.

Meinem Zimmerkollegen Andreas Fedoseew danke ich für die angenehme Gesellschaft und für die gemeinsame Zeit vom Abitur bis zum Diplom.

David Kalok und Fabian Eichstädt danke ich für die netten Pausen und freundlichen Unterhaltungen im Partyzimmer.

Meinem Kommilitonen Michael Genkin danke ich dafür, dass er so geduldig war meine Diplomarbeit Korrektur zu lesen und für die zahlreichen hilfreichen Korrekturvorschläge.

Elke Jung danke ich für die Bewältigung aller administrativer Probleme, sie ist unentbehrlich.

Allen anderen Mitgliedern des Instituts, die hier nicht namentlich erwähnt werden, sei für das für das angenehme Arbeitsklima, für die regelmäßigen Mensagänge und netten Gespräche gedankt.

Schließlich gilt ein besonderer Dank meiner gesamten Familie für ihre Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit, ohne euch wäre ich nie soweit gekommen und damit habt Ihr diese Diplomarbeit erst möglich gemacht.

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe, ohne andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Giessen, den