

Diplomarbeit

Relativistische Quantenfeldtheorie für Korrelationen in Kernmaterie

vorgelegt von
Andreas Fedoseew
aus Gießen

Betreuer:
Prof. Dr. Horst Lenske

Justus-Liebig Universität Gießen
Fachbereich 7 - Mathematik, Physik, Geographie
Institut für Theoretische Physik I

Giessen, September 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1 Die relativistische Hadronenfeldtheorie	1
1.1 Eigenschaften der NN-Wechselwirkung	1
1.1.1 Das Ein-Boson-Austausch Potential	2
1.1.2 Mesonen	3
1.2 Der Nukleonen-Propagator	5
1.3 Die QHD-Lagrangedichte	7
1.4 Mittelfeldnäherung	9
1.4.1 Ausnutzung von Symmetrien	9
1.4.2 No-Sea-Näherung	10
1.5 Die Dyson-Gleichung	11
1.6 Zwei-Nukleonen-System	11
1.7 Dichteabhängige Hadronenfeld-Theorie	12
1.8 Zustandsgleichung	16
2 Landaus Fermi-Liquid Theorie	21
2.1 Grundlagen	21
2.1.1 Freies Fermigas	21
2.1.2 Fermi-Flüssigkeiten	23
2.1.3 Das Quasiteilchenkonzept	23
2.1.4 Quasiteilchen-Wechselwirkung	25
2.2 Landau-Migdal-Parameter	26
2.2.1 Berechnung der Landau-Migdal Parameter	27
2.2.2 Bezug zu Makroskopischen Eigenschaften	28
2.3 Linear Response	29
2.4 Beiträge der Mesonen zur Gesamtwechselwirkung	31
2.4.1 σ -Meson	32
2.4.2 δ -Meson	32
2.4.3 ω -Meson	33
2.4.4 ρ -Meson	34
2.5 Landau-Migdal-Parameter im DDRH Modell	35
2.6 Diskussion der Ergebnisse	40

3	Relativistische RPA	45
3.1	Herleitung der RRPA	45
3.1.1	Die Korrelationsfunktion	48
3.1.2	Die Rearrangementanteile der Wechselwirkung	50
3.2	Response Funktion	53
3.2.1	Allgemeine Struktur	53
3.2.2	Beitrag der einzelnen Mesonen-Kanäle	55
4	Zusammenfassung und Ausblick	59
A	Notation und Konventionen	61
A.1	Dirac-Spinoren	62
A.2	Energie-Impuls-Tensor	64
A.3	Die Fierz-Transformation	65
B	Der Polarisationspropagator	67
B.1	Polarisationsterme	67
B.1.1	Lösung der Dyson-Gleichung	69
C	Parametersätze	71
D	Literaturverzeichnis	75

Einleitung

„*Ceci n'est pas une pipe*“¹ schrieb *René Magritte* unter die Abbildung einer Pfeife und verdeutlichte damit, dass der Gegenstand nicht mit seinem Abbild zu verwechseln ist. Ein Bild oder ein Modell ist damit immer nur ein Teil der „Wirklichkeit“ und niemals die „Wirklichkeit“ selbst, die es beschreibt. Auch in der Physik stellen Modelle und Näherungsmethoden eine Grundlage für die Beschreibung der Naturgesetze dar. So wurden besonders im letzten Jahrhundert neue Modelle und Theorien entwickelt und haben uns eine Sicht aus mehreren Perspektiven auf die Natur dargeboten. In der Erforschung von Atomkernen fertigten *Bethe* und *Weizsäcker* bereits 1935 eine erste „Skizze“ an und leiteten ausgehend vom *Tröpfchen-Modell* die berühmte Formel zur Beschreibung der Bindungsenergie pro Nukleon für Kerne mit großer Nukleonenzahl A her

$$E_B/A = a_v - a_o \cdot A^{-\frac{1}{3}} - a_c \cdot Z^2 A^{-\frac{4}{3}} - a_s \cdot \frac{(N - Z)^2}{A^2} + a_p \cdot A^{-\frac{3}{2}}. \quad (0.1)$$

Allerdings beinhaltet diese Näherung beispielsweise nicht die Beschreibung *Magischer Kerne*, die sich nur anhand des *Schalenmodells* charakterisieren lassen. Auch mussten fundamentale Modelle entwickelt werden, um den Kern als ein komplexes System miteinander wechselwirkender Nukleonen beschreiben zu können.

Eine große Herausforderung der theoretischen Kernphysik besteht damit in der Beschreibung der grundlegenden Eigenschaften von nuklearen Systemen mit Hilfe einer realistischen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung (NN-Wechselwirkung). Typischerweise wird dieses Vorgehen in zwei Schritte unterteilt. Im ersten Schritt wird ein Modell gewählt, innerhalb dessen die reine NN-Wechselwirkung beschrieben wird. Oft wird dabei ein rein phänomenologischer Ansatz verwendet. Man kann sich aber auch von der Quantenchromodynamik leiten lassen [VBFF95], oder ein Ein-Bosonen-Austausch Modell benutzen. Ein solches Modell wird genau dann als eine realistische Beschreibung der NN-Wechselwirkung bezeichnet, wenn es in der Lage ist, die Nukleon-Nukleon-Streuphasen für Energien unterhalb der Pion-Schwelle exakt zu beschreiben. In einem zweiten Schritt gilt es dann, das Vielteilchenproblem aus A wechselwirkenden Nukleonen unter Verwendung einer realistischen NN-Wechselwirkung zu lösen. Der einfachste Lösungsansatz dieses Vielteilchenproblems wechselwirkender Fermionen ist die mittlere Feld- (engl. Mean-Field) oder Hartree-Fock-Näherung. Dabei wird der

¹franz.: Dies ist keine Pfeife

Grundzustand des Vielteilchensystems als ein System unkorrelierter Teilchen betrachtet. In dieser Näherung können die Grundzustandseigenschaften von Kernen sehr gut beschrieben werden, sofern man phänomenologische Potentiale benutzt. Diese Potentiale sind jedoch nicht in der Lage, in gleicher Weise die Daten der Nukleon-Nukleon-Streuung wiederzugeben und werden daher als nichtrealistisch eingestuft. Andererseits ergibt sich unter Verwendung realistischer Potentiale, dass die Hartree-Fock-Näherung vollkommen unzureichend ist, da sie zu ungebundenen Systemen führt [MP00].

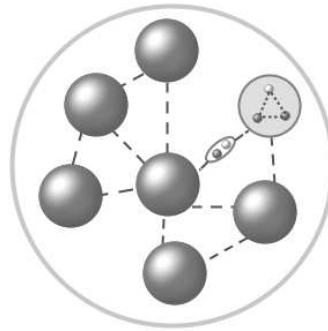


Abbildung 0.1: *Der Atomkern in einer schematischen Darstellung. Das Bild zeigt auch, dass Nukleonen und Mesonen eine innere Struktur aus Quarks und Gluonen besitzen*

Das Versagen der Hartree-Fock-Näherung unter Verwendung realistischer Potentiale hat dazu geführt, dass verschiedenste Techniken entwickelt wurden, um Korrelationseffekte, über die reine Hartree-Fock-Näherung hinaus, zu berücksichtigen. Hierzu zählen beispielsweise die Brückner Loch-Linien Entwicklung [Bru55], die coupled Cluster bzw. exponential S Methode, selbstkonsistente Berechnung der Greens-Funktionen [Bis98], Variationsmethoden unter Verwendung korrelierter Basisfunktionen [AP97], sowie neuere Entwicklungen unter Anwendung von Quantum Monte-Carlo Techniken [SB91].

Die Berücksichtigung der über die Hartree-Fock-Näherung hinausgehenden Korrelationseffekte in einer nichtrelativistischen Beschreibung im Rahmen der Brückner-Theorie oder anderen Näherungen zur Lösung des Vielteilchenproblems führt auf Ergebnisse, die in relativ guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten stehen. Es zeigt sich allerdings, dass die theoretischen Werte auf der so genannten Coester-Linie [CSDV70] liegen. Sie liefern entweder eine zu geringe Bindungsenergie oder aber eine zu große Sättigungsdichte im Vergleich zu den experimentellen Werten. Eine Möglichkeit, die Coester-Linie zu verlassen, besteht in der Einführung von Dreiteilchen Kräften, die gerade so gewählt werden, dass die Grundzustandseigenschaften

von Kernmaterie reproduziert werden [SPW86].

Eine andere Möglichkeit ist gegeben durch die Berücksichtigung von relativistischen Effekten. Dieser Weg beruht auf den Untersuchungen, die durch die phänomenologische Beschreibung von nuklearen Systemen im Rahmen des *Walecka* Modells [WS68] motiviert sind. Die NN-Wechselwirkung wird in diesem Modell durch den Austausch eines skalaren (σ), und eines vektoriellen (ω) Mesons beschrieben. Auch auf dem Meson-Austausch Modell basierende, realistische Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen liefern große Beiträge zur Selbstenergie durch den Austausch von skalaren und vektoriellen Mesonen. Für solche Potentiale lassen sich die Komponenten der Selbstenergie in der Hartree bzw. Hartree-Fock-Näherung einfach bestimmen. Verwendet man jedoch solche realistischen Potentiale, so müssen nach der vorangegangenen Diskussion Korrelationen über die reine Hartree-Fock-Näherung hinaus berücksichtigt werden, indem die Selbstenergie durch die G Matrix bestimmt wird, anstatt durch die reine NN-Wechselwirkung. Solche relativistischen Rechnungen werden als Dirac-Brueckner-Hartree-Fock bzw. einfach als relativistisches Brueckner-Hartree-Fock Verfahren bezeichnet [BM90].

Will man über die Mittelfeld-Näherung hinaus gehen, so müssen Korrelationseffekte mit berücksichtigt werden. Die Wechselwirkung eines Nukleons mit seinen Nachbarn kann, z. B. durch Mediumpolarisation, auf eine Veränderung seiner Umgebung führen. Dies führt auf den *Quasiteilchen-Formalismus* und auf *Landaus* Theorie der Fermiflüssigkeiten. Die *Random-Phase-Approximation* (RPA) bietet zusätzlich eine Möglichkeit Teilchen-Loch-Korrelationen zu untersuchen.

Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Korrelationen in unendlich ausgedehnter Kernmaterie. Ausgehend von einer *dichteabhängigen* relativistischen MFT werden im Rahmen dieser Arbeit die Quasiteilchen-Wechselwirkung und Teilchen-Korrelationen untersucht. Dazu werden in *Kapitel 1* zunächst die Grundlagen der *dichteabhängigen* relativistischen Quanten-Feld-Theorie (DDRH) vorgestellt und anschließend die Grundzustandseigenschaften unendlich ausgedehnter Kernmaterie erläutert.

In *Kapitel 2* wird *Landaus* Theorie für Fermi-Flüssigkeiten erläutert und die Landau-Migdal-Parameter im DDRH Modell für asymmetrische Kernmaterie berechnet. Anschließend werden die Beiträge der einzelnen Mesonen zur Quasiteilchen-Wechselwirkung diskutiert.

Die Berechnung der *Response-Funktion* und die Auswertung von Korrelationen anhand der relativistischen RPA ist Gegenstand von *Kapitel 3*.

In *Kapitel 4* werden schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick für weitere Untersuchungen gegeben.

1 Die relativistische Hadronenfeldtheorie

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen der relativistischen Quantenfeldtheorie vorstellen. Da die freie NN-Wechselwirkung die Basis für die effektive Wechselwirkung zwischen zwei Nukleonen im Medium bildet, wollen wir zunächst auf die Eigenschaften der NN-Wechselwirkung eingehen. In darauf folgenden Kapiteln stellen wir die Grundlagen der Quanten-Hadro-Dynamik vor, um anschließend auf die *dichtabhängige* Hadronen-Feldtheorie einzugehen.

1.1 Eigenschaften der NN-Wechselwirkung

Verschiedene Untersuchungen an nuklearen Systemen haben gezeigt, dass die NN-Wechselwirkung von kurzer Reichweite ist. Für gewöhnlich wird die Wechselwirkung in einen langreichweitigen ($r \geq 2 \text{ fm}$), intermediären ($0.5 \text{ fm} \leq 2 \text{ fm}$) und einen kurzreichweitigen bzw. Hard-Core-Bereich ($r \leq 0.5 \text{ fm}$) unterteilt. Im intermediären Bereich ist die Wechselwirkung attraktiv, wobei der Hard-Core für einen Mindestabstand der Nukleonen sorgt und somit repulsiv sein muss. Im langreichweitigen Bereich verliert die NN-Wechselwirkung ihre Bedeutung. Die NN-Wechselwirkung enthält von der Struktur her neben nicht-zentralen (tensoriellen) Anteilen auch Beiträge der Spin-Bahn, Spin-Spin und Isospin Wechselwirkung.

Wie in der Quantenelektrodynamik die Wechselwirkung zweier Elektronen durch Photonenaustausch beschrieben wird, lässt sich auch die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen mit Hilfe eines Mesonenaustausches beschreiben. Ausgehend von der klassischen Feldtheorie führte *Yukawa* bereits 1935 das Meson als massives Austauschteilchen ein, wobei das Mesonenfeld die Klein-Gordon Gleichung erfüllen muss

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x) = g \bar{\Psi}(x) \Psi(x). \quad (1.1)$$

Dabei ist Ψ das Nukleonenfeld, welches gleichzeitig die Quelle des Mesonenfeldes mit der Stärke g ist. Gleichung (1.1) geht unter der Annahme eines unendlich schweren und im Ursprung fixierten Nukleons über in

$$(-\Delta + m^2) \Phi(\mathbf{r}) = g \delta(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt gerade das *Yukawa-Potential*

$$\Phi(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (1.3)$$

Für Massen ungleich Null hat es aufgrund des exponentiellen Verhaltens eine endliche Reichweite. Der Grenzfall $m \rightarrow 0$ ergibt dabei das bekannte Coulomb-Potential

$$V(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (1.4)$$

Durch diesen einfachen Ansatz und durch die Entdeckung des von Yukawa vorausgesagten π Mesons motiviert, glaubte man ursprünglich, dass die Mesonenfeldtheorie, analog zur QED, die Theorie der starken Wechselwirkung sei. Damit sollte auch eine Störungsentwicklung nach der Kopplungskonstanten ebenfalls möglich sein.

Im Gegensatz zum Elektron und Photon haben Nukleonen und Mesonen jedoch eine Substruktur, daher kann die Mesonentheorie keine fundamentale Wechselwirkung darstellen. Es ist vielmehr eine erfolgreiche effektive Beschreibung von Nukleonensystemen, die sich aus der fundamentaleren Theorie der Quantenchromodynamik als Grenzfall für den Niederenergiebereich ergeben sollte. Ein anderer wesentlicher Unterschied zur QED besteht in den wesentlich größeren Kopplungskonstanten (typischerweise in der Größenordnung 10). Damit erscheint eine Entwicklung nach der Kopplungskonstanten zunächst nicht ohne Weiteres möglich, allerdings ist eine Beschreibung der NN-Wechselwirkung in Störtermen und die graphische Veranschaulichung mit Hilfe der Feynman-Diagramme auch hier umsetzbar.

1.1.1 Das Ein-Boson-Austausch Potential

Die NN-Wechselwirkung kann anhand eines Mesonen-Austausches zwischen den wechselwirkenden Nukleonen kovariant beschrieben werden (Abb. 1.1). Als Beitrag für die Streuamplitude ergibt sich entsprechend den Feynman-Regeln

$$V_\alpha = \bar{u}_1(q') \Gamma_1 u_1(q) \frac{P_\alpha}{(q' - q)^2 - m_\alpha^2} \bar{u}_2(-q') \Gamma_2 u_2(-q). \quad (1.5)$$

Meson	σ	δ	ω	ρ	η	π
I, J^P	$0, 0^+$	$1, 0^+$	$0, 1^-$	$1, 1^-$	$0, 0^-$	$1, 0^-$
Masse [MeV]	571	962	784	776	548	139
$g^2/4\pi$	7.4	1.67	11.7	0.43	2.0	14.16
$\Lambda^2[\text{GeV}^2]$	1300	1300	1300	1300	1300	1300
Kopplung Γ_i	$\mathbb{1}$	$\boldsymbol{\tau}\mathbb{1}$	γ_μ	$\boldsymbol{\tau}\gamma_\mu$	γ_5	$\boldsymbol{\tau}\gamma_5$

Tabelle 1.1: Gegenüberstellung der einzelnen Mesonen und derer Eigenschaften.

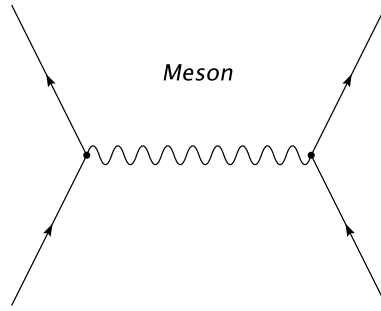


Abbildung 1.1: OBE

Dabei ist $\frac{P_\alpha}{(q'-q)^2 - m_\alpha^2}$ der Lorentz-invariante Mesonenpropagator. Für Vektor-Mesonen ist $P_\alpha = -g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m_\alpha^2$ und für skalare und pseudoskalare Mesonen gilt $P_\alpha = 1$. Γ_i stellt den Vertex der Meson-Nukleon Wechselwirkung dar.

Das Ein-Bosonen-Austausch-Potential (One-Boson-Exchange-Potential) wird als Summe aller von den einzelnen Mesonen kommender Beiträge definiert:

$$V_{OBE} = \sum_{\alpha} V_{\alpha}. \quad (1.6)$$

Wir wollen nun die Beiträge der einzelnen Mesonen zum Ein-Boson-Austausch Potential diskutieren und deren Eigenschaften gegenüberstellen.

1.1.2 Mesonen

In Tabelle (1.1) werden die Eigenschaften der für das OBE-Potential relevanten Mesonen aufgelistet.

Das π -Meson ist wegen seiner kleinen Masse für den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung verantwortlich. Aufgrund seiner Kopplung enthält es auch Tensorkräfte. Das ρ -Meson liefert ebenso Beiträge zur Tensorkraft, wegen seiner deutlich schwereeren Masse aber nur für kurze Abstände und kompensiert einen Teil der durch das

π -Meson induzierten tensoriellen Wechselwirkung. Das ω -Meson als schwereres Meson mit entsprechend kurzer Reichweite, ist für die starke Repulsion bei kurzen Abständen verantwortlich und liefert ferner Beiträge zur Spin-Bahn Wechselwirkung.

Was allerdings nicht im Rahmen eines Ein-Bosonen-Austausch-Modells mit beobachtbaren Mesonen erklärt werden kann, ist die Attraktion im intermediären Bereich. Hierfür wäre ein skalares, isoskalares Meson mit einer ungefähren Masse um die 500 MeV notwendig, das aber in der Natur nicht als scharfer Massenzustand beobachtet wird. Es kann jedoch gezeigt werden, dass diese Attraktion im Wesentlichen aus den irreduziblen 2π -Austauschtermen resultiert. Hierzu zählen sowohl die Cross-Boxed Diagramme, als auch 2π -Austauschterme mit internen $N\Delta$ - oder $\Delta\Delta$ - Zuständen. Diese Beiträge werden durch den Austausch eines skalaren Mesons, welches meist als σ bezeichnet wird, recht gut parametrisiert [WS68].

Das δ -Meson, als skalares Isevektor-Meson, liefert insgesamt sowohl wegen seiner großen Masse als auch seiner kleinen Kopplungskonstanten nur einen kleinen Beitrag zum Ein-Bosonen-Austauschpotential.

Ebenso wie das π -Meson ist das η -Meson ein pseudoskalares Meson, allerdings mit Isospin 0, und liefert somit Beiträge zur isospinunabhängigen Tensorkraft. Aufgrund seiner kleinen Kopplungskonstanten und der gegenüber dem π -Meson fast viermal größeren Masse, sind die Beiträge aber so gering, dass das η -Meson für die NN-Wechselwirkung nur eine sehr geringe Rolle spielt.

Die Art der Meson-Beiträge zum Potential wird durch die Kopplung der Mesonen an das Nukleonenfeld bestimmt. Dabei legt ihre Masse die Reichweite der Wechselwirkung fest. Das Verhältnis von Kopplungskonstante und Masse $(g/m)^2$ gibt uns ein Maß dafür, wie groß die einzelnen Beiträge der Mesonen sind.

Mesonen mit größeren Massen als die in Tabelle (1.1) werden im Rahmen eines Ein-Boson-Austausch-Modells nicht betrachtet, da sie Beiträge zur NN-Wechselwirkung im kurzreichweitigen Bereich liefern würden. Dieser ist allerdings durch die starke Repulsion des ω -Mesons geprägt, die zusätzliche Beiträge überlagert.

Wie wir bereits oben angesprochen haben, ist die NN-Wechselwirkung nicht fundamental, da die Nukleonen und Mesonen eine innere Struktur besitzen. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, wird an die einzelnen Meson-Nukleon-Vertices ein entsprechender Formfaktor multipliziert

$$F(k^2) = \frac{\Lambda_i^2 - m_i^2}{\Lambda_i^2 - k^2}, \quad (1.7)$$

wobei m_i für die Masse des jeweiligen Mesons und k_μ für den Viererimpuls-Übertrag steht ($k^2 = k_\mu k^\mu$). Λ_i wird als Cutoff-Parameter bezeichnet. Die Formfaktoren sind in einer Mesonentheorie der NN-Wechselwirkung unerlässlich, da sie die innere Struktur der Nukleonen quasi verbergen und die Theorie in der Störungsrechnung überhaupt erst endlich machen. Typischerweise liegen die Cutoff-Parameter in einem Bereich von

1-2 GeV, so dass hier die Berücksichtigung schwerer Mesonen im Rahmen des Ein-Bosonen-Austausch-Modells keinen Sinn macht.

1.2 Der Nukleonen-Propagator

Zur quantenmechanischen Beschreibung des Vielteilchenproblems ist eine Formulierung, die auch Teilchenerzeugung und -vernichtung beinhaltet notwendig. Dies führt auf den Formalismus der zweiten Quantisierung. Man definiert Erzeugungs- $\hat{a}_i^\dagger$ und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_i$, die einen quantenmechanischen Zustand i erzeugen beziehungsweise vernichten. Für den Vakuumzustand soll dabei definitionsgemäß gelten:

$$a_i |0\rangle = 0. \quad (1.8)$$

Die Operatoren $\hat{a}_i^\dagger$ und $\hat{a}_i$ müssen den Vertauschungs- (Bosonen) bzw. Antivertauschungsrelationen (Fermionen) genügen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger]_\pm &= \delta_{ij} \\ [\hat{a}_i, \hat{a}_j]_\pm &= [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger]_\pm = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Der Übergang von einer klassischen zur Quantenfeldtheorie geschieht durch die Definition von lorentzkovarianten Feldoperatoren $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$. Die Zustände des Systems werden durch Zustandsvektoren im Hilbertraum beschrieben. Dabei werden für den Feldoperator die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', t)]_\pm &= \delta_{\alpha,\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ [\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}', t)]_\pm &= [\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', t)]_\pm = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

gefordert.

Wobei das Minus für Bosonen und das Plus für Fermionen steht. Als Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, gehorchen Fermionen der Fermi-Dirac-Statistik. $\hat{\psi}$ muss damit die Dirac-Gleichung erfüllen

$$(\not{p} - M)\hat{\psi} = 0. \quad (1.11)$$

Seien nun $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ Erzeugungs- bzw. Vernichtungs-Operatoren für Teilchen und $\hat{d}^\dagger$ und $\hat{d}$ Erzeugungs- bzw. Vernichtungs-Operatoren für Antiteilchen, dann können wir den Feldoperator nach freien Lösungen der Dirac-Gleichung entwickeln

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M}{E_p}} (\hat{b}(p, s) u(p, s) e^{-ip \cdot x} + \hat{d}^\dagger(p, s) v(p, s) e^{+ip \cdot x}) \quad (1.12)$$

Mit der expliziten Form der Spinoren

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + M}{2M(E_p + M)} u(0, s)$$

$$v(p, s) = \frac{-\not{p} + M}{2M(E_p + M)}v(0, s). \quad (1.13)$$

$u(0, s)$ und $v(0, s)$ sind die Einheitsspinoren im Ruhesystem ($p=(m, \mathbf{0})$). Sie genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned} (\not{p} - M)u(p, s) &= 0 \\ (\not{p} + M)v(p, s) &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Wir wollen nun den Feynman-Propagator $G_{\alpha\beta}$ für Baryonen in einem System nicht wechselwirkender Fermionen angeben. Dieser wird üblicherweise definiert als der Grundzustandserwartungswert des zeitgeordneten Produkts von zwei Feldoperatoren an unterschiedlichen Raum-Zeit-Punkten[WS68]:

$$iG_{\alpha\beta}(x - y) = \langle \Psi_0 | T[\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(y)] | \Psi_0 \rangle \quad (1.15)$$

Der Grundzustand Ψ_0 soll Baryonen positiver Energie bis zum Fermiimpuls k_f enthalten. Der Zeitordnungsoperator T ist definiert durch:

$$T[\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(y)] = \begin{cases} \hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta(y) & \text{für } x^0 \geq y^0 \\ \pm \hat{\psi}_\alpha(y)\hat{\psi}_\beta(x) & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.16)$$

Wobei das $+$ für Bosonen und das $-$ für Fermionen gilt. Durch Fouriertransformation folgt weiterhin

$$G_{\alpha\beta}(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} G_{\alpha\beta}(k). \quad (1.17)$$

Dabei ist der Propagator im Impulsraum durch folgende Beziehung gegeben

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(k) &= \frac{1}{2E(k)} \left[(\gamma_\mu K^\mu + M)_{\alpha\beta} \left(\frac{1 - \theta_k}{k_0 - E(k) + i\varepsilon} + \frac{\theta_k}{k_0 - E(k) - i\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_\mu \tilde{K}^\mu - M)_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{k_0 + E(k) - i\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \gamma_\mu K^\mu &= \gamma_0 E(k) - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \\ \gamma_\mu \tilde{K}^\mu &= \gamma_0 E(k) + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \\ \theta_k &\equiv \theta(k_F - |\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die drei Terme in Gleichung (1.18) können einfach interpretiert werden: Der erste beschreibt die Propagation von Baryonen oberhalb der Fermikante, während der zweite

für die Bewegung von Löchern im Fermisee verantwortlich ist. Der dritte Term schließlich steht für die Propagation von Antibaryonen. Im nichtrelativistischen Grenzfall ($|\mathbf{k}| \ll M$) reduziert sich der Nukleonen-Propagator zu

$$G_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{1 - \theta_p}{k_0 - E(k) + i\varepsilon} + \frac{\theta_k}{k_0 - E(k) - i\varepsilon} \right]. \quad (1.20)$$

Fasst man den ersten und den letzten Term in (1.18) zusammen, so ergibt sich eine weitere Darstellung von $G_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= (\not{k} + M)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{k_\mu^2 - M^2 + i\varepsilon} + i\pi\delta(k_0 - E(k))\theta_k \right] \\ &\equiv G_F + G_D. \end{aligned} \quad (1.21)$$

G_F beschreibt die Propagation von freien Baryonen und Antibaryonen und G_D die der Löcher im Fermisee. Daher wird G_F als der Feynman-Propagator und G_D als der dichteabhängige oder Materie-Propagator bezeichnet.

1.3 Die QHD-Lagrangedichte

In der Quanten-Hadro-Dynamik (QHD) ist die Lagrangedichte eine Funktion der Nukleon- und Meson-Felder. Üblicherweise benutzt man eine Aufteilung in drei Komponenten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int} \quad (1.22)$$

$\mathcal{L}_N$ steht für das freie Nukleonenfeld

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - M] \psi. \quad (1.23)$$

Dabei ist Ψ der Nukleonenspinor und M die Masse des Nukleons (später werden wir zusätzlich zwischen Neutronen und Protonen unterscheiden).

Die Bewegung freier Mesonen wird durch $\mathcal{L}_m$ beschrieben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \delta, \pi, \eta} (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\omega, \rho, \gamma} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - m_i^2 A_\mu^i A^{i\mu} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

wir stellen skalare Mesonen-Felder durch Φ_α und vektorielle durch $A^{(i)\mu}$ dar. $F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ist der Feldstärketensor.

Für den Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}_{int}$ wird im einfachsten Fall folgender Ansatz verwendet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} = & \bar{\psi}g_{\sigma}\Phi_{\sigma}\psi + \bar{\psi}g_{\delta}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi}_{\delta}\psi \\ & + \bar{\psi}g_{\pi}\gamma^5\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi}_{\pi}\psi + \bar{\psi}g_{\eta}\gamma^5\Phi_{\eta}\psi \\ & - \bar{\psi}g_{\omega}\gamma_{\mu}A_{\omega}^{\mu}\psi - \bar{\psi}g_{\rho}\gamma_{\mu}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A}_{\rho}^{\mu}\psi - e\bar{\psi}\hat{Q}\gamma_{\mu}A_{\gamma}^{\mu}\psi.\end{aligned}\quad (1.25)$$

Hier stellt $\hat{Q} = \frac{1+\tau_3}{2}$ den elektrischen Ladungsoperator dar. $\boldsymbol{\tau}$ ist der Isospinoperator mit $\tau_3|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$ für Protonen bzw. Neutronen. Die g_i 's stehen für die Kopplungsstärken der jeweiligen Mesonen [WS68]. In der dichteabhängigen Hadronenfeldtheorie hängen diese jedoch von der Dichte des Mediums ab [HKL01]. Wir wollen darauf im nächsten Abschnitt etwas genauer eingehen.

Mittels der Euler-Lagrange Gleichung

$$\partial_{\mu}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\varphi)} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} = 0 \quad (1.26)$$

erhält man die Bewegungsgleichungen der Felder

$$\begin{aligned}(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\sigma}^2)\Phi_{\sigma} &= g_{\sigma}\bar{\psi}\psi \\ (\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\delta}^2)\boldsymbol{\Phi}_{\delta} &= g_{\delta}\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\psi \\ (\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\eta}^2)\Phi_{\eta} &= g_{\eta}\bar{\psi}\gamma^5\psi \\ (\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m_{\pi}^2)\boldsymbol{\Phi}_{\pi} &= g_{\pi}\bar{\psi}\gamma^5\boldsymbol{\tau}\psi \\ \partial_{\nu}F^{(\omega)\mu\nu} + m_{\omega}^2A^{(\omega)\mu} &= g_{\omega}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \\ \partial_{\nu}F^{(\rho)\mu\nu} + m_{\rho}^2\boldsymbol{A}^{\rho\mu} &= g_{\rho}\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma^{\mu}\psi \\ \partial_{\nu}F^{(\gamma)\mu\nu} &= e\hat{Q}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi.\end{aligned}\quad (1.27)$$

Für die Baryonenfelder schreibt sich die Dirac-Gleichung als

$$[\gamma_{\mu}(i\partial^{\mu} - \Sigma^{\mu}) - (M - \Sigma^s)] = 0. \quad (1.28)$$

Dabei ist $\Sigma^s = g_{\sigma}\Phi_{\sigma} + g_{\delta}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi}_{\delta}$ die skalare und $\Sigma^{\mu} = g_{\omega}A^{\mu} + g_{\rho}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{A}^{\mu}$ die vektorielle *Selbstenergie*. Mit den Definitionen $M^* \equiv M_{\Sigma}^s$ und $p_{\mu}^* \equiv p_{\mu} - \Sigma_{\mu}$ kann Gleichung (1.28) uminterpretiert werden als eine Dirac-Gleichung für freie Nukleonen mit der Masse M^* und dem Impuls p^* [WS68]

$$(p^* - M^*)\Psi = 0. \quad (1.29)$$

Durch ihre Wechselwirkung verhalten sich die Nukleonen, als würden sie sich wechselwirkungsfrei mit der effektiven Masse M^* und dem effektiven Impuls p^* bewegen. Die Lösung der Feldgleichungen (1.27) und (1.29) ist sehr komplex und eine exakte selbstkonsistente Lösung ist im allgemeinen gar nicht möglich. Um die Problemstellung zu vereinfachen, müssen Näherungen vorgenommen werden, die für den zu betrachteten Bereich gültig sind. Für Kernmaterie ist der einfachste Ansatz die Mittelfeldnäherung, die wir im folgenden Abschnitt skizzieren wollen.

1.4 Mittelfeldnäherung

Die Grundidee der Mittelfeldnäherung basiert auf der Annahme, dass alle Nukleonen durch die Wechselwirkung untereinander ein gemeinsames effektives Potential spüren, welches die komplexe Vielteilchenwechselwirkung parametrisieren soll. Dieser Ansatz ist umso besser, je größer die Baryonenzahl ist. Die Stärke der Quellterme in den Mesonengleichungen (1.27) nimmt für wachsende skalare und Vektor-Baryondichten zu [FW71]. Da für große Quellterme die Quantenfluktuationen verglichen mit dem Erwartungswert klein sind, sind diese hauptsächlich durch ihren Erwartungswert $\langle \hat{\rho}_i \rangle$ bestimmt. Somit lassen sich auch die Feldoperatoren der Mesonen durch ihren Erwartungswert annähern:

$$\hat{\Phi} \rightarrow \langle \hat{\Phi}_i \rangle \equiv \Phi^0. \quad (1.30)$$

Die Erwartungswerte verhalten sich hier also wie klassische Felder. Da das System im Grundzustand eine wohldefinierte Ladung und Parität besitzen muss, verschwinden für $N = Z$ die Anteile der geladenen und pseudoskalaren Mesonen. In Kernmaterie fällt auch der Erwartungswert der Raumanteile der Vektormesonen weg, da keine ausgezeichnete Raumrichtung vorliegt. Für die Baryondichten folgen dann die Näherungen

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}\Psi &\rightarrow \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = \rho^s = \rho_n^s + \rho_p^s \\ \bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\Psi &\rightarrow \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \delta_{i3} = \langle \bar{\Psi}\tau_3\Psi \rangle = \rho_3^s \equiv \rho_n^s - \rho_p^s \\ \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rangle &\rightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rangle \delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\Psi \rangle = \rho_3^s \equiv \rho_n + \rho_p \\ \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \rangle &\rightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \rangle \delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\boldsymbol{\tau}_3\Psi \rangle = \rho_3^s \equiv \rho_n - \rho_p. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (1.27) zu

$$\begin{aligned} (-\nabla^2 + m_\sigma^2) \Phi_\sigma^0 &= g_\sigma \rho_s \\ (-\nabla^2 + m_\delta^2) \Phi_\delta^0 &= g_\delta \rho_3^s \\ (-\nabla^2 + m_\omega^2) A^{0(\omega)} &= g_\omega \rho \\ (-\nabla^2 + m_\rho^2) A^{0(\rho)} &= g_\rho \rho. \end{aligned} \quad (1.32)$$

1.4.1 Ausnutzung von Symmetrien

Symmetrien spielen in der Physik eine fundamentale Rolle. Sie stellen oft eine enorme Vereinfachung von Problemstellungen dar und führen auf wichtige Erhaltungssätze.

- **Räumliche Symmetrien**

Durch Ausnutzung räumlicher Symmetrien lassen sich Dreierortsvektoren auf zwei oder gar eine Dimension einschränken. Im Fall von Kernmaterie liegt sogar Translationsinvarianz vor. Dadurch wird die Dirac-Gleichung so weit vereinfacht, dass sie analytisch lösbar wird.

- **Zeitumkehrinvarianz**

In der gegebenen Problemstellung liegt Zeitumkehrinvarianz vor. Die Konsequenz dieser Symmetrie ist, dass es keinerlei Ströme in den Kernen geben kann. Mit anderen Worten verschwinden die räumlichen Komponenten der Vierervektoren $A^{(i)\mu}, \rho^\mu, \rho_3^\mu$ usw. und es bleiben jeweils die zeitlichen Komponenten $A^{(i)0}, \rho^0, \rho_3^0$ übrig.

- **Ladungserhaltung** Die Erhaltung der Ladung hat für ein abgeschlossenes System zur Folge, dass die dritte Iso-Komponente des Isovektors ρ^0 erhalten ist, die wir hier mit ρ_3 bezeichnen.

- **Parität**

Das Verhalten eines Systems unter Raumspiegelungstransformation ist eine weitere wichtige Symmetrieeigenschaft. Wird ein System unter einer solchen Transformation in sich selbst überführt, so spricht man von *positiver Parität*. Tritt jedoch bei der Transformation ein Vorzeichenwechsel auf, so wird das System als ein Zustand mit *negativer Parität* bezeichnet.

Spinoren transformieren sich unter Raumspiegelung gemäß

$$\psi'(\mathbf{x}', t) = \psi'(-\mathbf{x}, t) = e^{i\phi} \gamma^0 \psi(-\mathbf{x}', t).$$

Der gesamte Paritätsoperator ist dann definiert als [Sch04]

$$P = e^{i\phi} \gamma^0 P^0. \quad (1.33)$$

$e^{i\phi}$ ist dabei ein unbeobachteter Phasenfaktor und P^0 bewirkt die Raumspiegelung $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. Die Ruhezustände positiver und negativer Energie sind dabei Eigenzustände von P , allerdings mit entgegengesetzten Eigenwerten. Die *inneren* Paritäten sind daher für Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt.

1.4.2 No-Sea-Näherung

Die Dirac-Gleichung beinhaltet als Lösungen nicht nur Zustände positiver Energie, sondern gleichermaßen auch den gesamten Dirac-See der Antiteilchenzustände. Dies stellt ein Problem unendlich vieler miteinander wechselwirkender Teilchen dar. Dadurch werden viele Summen und observable Größen unendlich, was eine Renormierung erfordert. Es gibt jedoch einen einfacheren Weg, das Problem zu umgehen, und zwar indem man das Vakuum neu als den Zustand ohne die zu beschreibenden Teilchen definiert und die im Grundzustand des Systems besetzten Zustände negativer Energie weglässt. Damit werden alle Betrachtungen stets nur zum nicht wechselwirkenden Vakuum durchgeführt. Dieses Verfahren wird als die *No-Sea-Näherung* bezeichnet. Die Beiträge des Dirac-Sees werden durch Anpassung der freien Parameter pauschal mit berücksichtigt.

1.5 Die Dyson-Gleichung

Befindet sich ein Nukleon im Medium, so kann es mit den anderen Nukleonen auf verschiedene Art und Weise wechselwirken. Seine Bewegung wird durch diese Wechselwirkung gegenüber der im freien Raum stark verändert. So kann es auf seinem Weg beliebig oft mit anderen Nukleonen wechselwirken. Dieser Sachverhalt wird mit Hilfe der so genannten Dyson-Gleichung beschrieben:

$$G = G_0 + G_0 \Sigma G_0 + G_0 \Sigma G_0 \Sigma G_0 + \cdots = G_0(k) + G_0(k) \Sigma G(k). \quad (1.34)$$

Dabei ist G_0 der wechselwirkungsfreie Nukleonenpropagator (Gleichung (1.21))

Als formale Lösung der Dyson-Gleichung ergibt sich der Ausdruck

$$G(k) = \frac{\Theta(k_0 - \varepsilon(k_F))}{\not{k} - M - \Sigma(k) + i\varepsilon} + \frac{\Theta(\varepsilon(k_F) - k_0)}{\not{k} - M - \Sigma(k) - i\varepsilon}. \quad (1.35)$$

1.6 Zwei-Nukleonen-System

Die Zwei-Teilchen-Streuung wird in der relativistischen kovarianten Formulierung durch die Bethe-Salpeter-Gleichung beschrieben

$$\mathcal{M} = V + V \mathcal{G} \mathcal{M}. \quad (1.36)$$

$\mathcal{M}$ ist die invariante Übergangsamplitude für die Zwei-Nukleon Streuung, V die Summe aller zusammenhängender Zwei-Teilchen-irreduziblen Diagramme und $\mathcal{G}$ der relativistische Zwei-Teilchen Propagator. Bezeichnet man mit p, q, k den Impuls im Anfang-, Intermediär-, und Endzustand, so lautet Gl.(1.36) in einem beliebigen Bezugssystem ausführlich

$$\mathcal{M}(q, p|P) = V(q, p|P) + \int d^4k V(q, k|P) \mathcal{G}(k|P) \mathcal{M}(k, p|P) \quad (1.37)$$

Dabei ist P der totale Viererimpuls und der Zwei-Teilchen Propagator $\mathcal{G}$ ergibt sich in Leiter-Näherung zu

$$\mathcal{G}(k|P) = \frac{i}{(2\pi)^4} \left(\frac{\not{P} + \not{k} + M}{(P + k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \right)_{(1)} \left(\frac{\not{P} - \not{k} + M}{(P - k)^2 - M^2 + i\varepsilon} \right)_{(2)}. \quad (1.38)$$

Die Bethe-Salpeter-Gleichung ist eine vierdimensionale Integralgleichung und ist im Allgemeinen nicht einfach zu lösen. Es wurden daher dreidimensionale kovariante Reduktionen entwickelt, die nicht nur technisch einfacher zu handhaben sind, sondern auch ähnliche Resultate im Vergleich zur vollständigen Behandlung des Problems liefern. Die Reduktion von Gl.(1.36) geschieht durch Aufspaltung in zwei gekoppelte Gleichungen [Tho70]

$$\mathcal{M} = \mathcal{W} + \mathcal{W} g \mathcal{M}$$

$$\mathcal{W} = V + V(\mathcal{G} - g)\mathcal{W}. \quad (1.39)$$

Hier beschreibt g einen kovarianten dreidimensionalen Propagator. Geht man nun davon aus, dass der Term $V(\mathcal{G} - g)\mathcal{W}$ klein gegenüber V ist, so stellt dies eine wesentliche Vereinfachung des ursprünglichen Problems dar:

$$\mathcal{M} = V + Vg\mathcal{M}. \quad (1.40)$$

Die Reduktion auf drei Dimensionen ist allerdings nicht eindeutig, da für gewöhnlich die Integration über die zeitartige Komponente durchgeführt wird, die auf eine kovariante Art und Weise fixiert werden muss. Ein typisches Beispiel ist die Reduktion nach *Blanckenbecker und Sugar*, die für den dreidimensionalen, kovarianten Propagator folgenden Ausdruck liefert

$$g(\mathbf{k}|\mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M^2}{E_{\mathbf{P}-\mathbf{k}}} \frac{\Lambda_+^{(1)}(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \cdot \Lambda_+^{(2)}(\mathbf{P} - \mathbf{k})}{E_{\mathbf{P}-\mathbf{p}}^2 - E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} \delta(k_0). \quad (1.41)$$

$\Lambda_+ = \frac{\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{k} + M}{2M}$ ist eine Projektion auf positive Energiezustände und unterdrückt somit virtuelle Anti-Nukleon Beiträge. Eine alternative Wahl für den dreidimensionalen Propagator ist die von *Thompson* [Tho70]:

$$g_{Th}(\mathbf{k}|\mathbf{P}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M^2}{2E_k E_{\mathbf{P}+\mathbf{k}}} \frac{\Lambda_-^{(1)}(\mathbf{P} + \mathbf{k}) \cdot \Lambda_+^{(2)}(\mathbf{P} - \mathbf{k})}{E_{\mathbf{p}}^2 - E_{\mathbf{k}}^2 + i\varepsilon} \delta(k_0). \quad (1.42)$$

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Leiternäherung eine effektive Theorie ist, deren Parameter Kopplungsstärken der Mesonen sind. Vakuumpolarisation und Eigenzustände negativer Energie werden dabei in der Regel nicht berücksichtigt.¹ Diese Beiträge und die Beiträge aus Diagrammen anderer Klassen werden durch einen Fit der Parameter an experimentelle Streudaten implizit mit einbezogen.

1.7 Dichteabhängige Hadronenfeld-Theorie

Eine dichteabhängige Formulierung der NN-Wechselwirkung wird durch das Theorem von *Hohenberg* und *Kohn* motiviert. Dieses Theorem besagt, dass der Grundzustand eines fermionischen Vielteilchensystems, exakt und unabhängig von der Teilchenanzahl durch ein Energiefunktional beschrieben werden kann [HW64]. Mit dieser Beschreibung werden prinzipiell alle Grundzustandskorrelationen mit eingeschlossen.

Kohn und *Sham* erweiterten dieses Theorem auf Systeme mit Spinfreiheitsgraden [KS65] und *Speicher*, *Dreizler* und *Engel* führten eine relativistische Verallgemeinerung durch [SDE92]. Die starke Aussage dieses Theorems ist, dass in jedem Fall eine *exakte*

¹Die Auswirkung von Zuständen negativer Energie auf die Leiternäherung wurde in Arbeiten von *de Jong* und *Lenske* untersucht [JL98]

Beschreibung des betrachteten Systems existiert. Allerdings gibt es keinerlei Auskunft darüber, wie das entsprechende Energiefunktional aussieht, oder zumindest wie es berechnet werden kann. Die relativistische Formulierung des Theorems lautet[DG90]:

Die exakten skalaren und vektoriellen Dichten, die Energie und das chemische Potential für das voll wechselwirkende Viel-Fermionen System können in einer Beschreibung von (Quasi)-Fermionen reproduziert werden, die sich in angemessen definierten lokalen, klassischen Feldern bewegen.

Damit stellen aus Sicht der Dichtefunktionaltheorie effektive Modelle der Kernstruktur Näherungen an das *exakte* Dichtefunktional dar. Sie enthalten insofern automatisch Korrelationen und Vielkörpereffekte.

Die Vielteilchentheorie bietet uns die Möglichkeit systematisch Mediumeffekte zu untersuchen. Für ein umsetzbares Modell sind jedoch Näherungen unerlässlich. Nicht-relativistisch wird die Mediumabhängigkeit der NN-Wechselwirkung erfolgreich mit Hilfe der Energie-Dichtefunktional Methode beschrieben. Relativistische Rechnungen beinhalten jedoch eine Formulierung mittels des Lagrange-Formalismus, bei der die Mediumeffekte durch eine effektive dichteabhängige Meson-Baryon Kopplung parametrisiert werden können. Eine Beziehung zwischen den mikroskopischen und effektiven Meson-Baryon Vertices kann anhand der lokalen Dichtenäherung hergestellt werden. Das grundlegende Konzept der dichteabhängigen relativistischen Hadronenfeldtheorie besteht darin, dass in der Wechselwirkungs-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{int}$ (1.25) die Kopplungsstärken g_i als lorentz-skalare *Funktionale* $\Gamma_i(\hat{\rho})$ des *Dichteoperators* angesetzt werden. Es hat sich gezeigt, dass diese Behandlung von *Medium-Effekten* nicht nur den Vorteil einer kovarianten Formulierung hat, sondern auch thermodynamisch konsistent ist [HKL01]. In der Regel wird die skalare (SDD) bzw. vektorielle (VDD) Dichteabhängigkeit mit

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_{SDD} &= \bar{\psi}\psi \\ \hat{\rho}_{VDD} &= \sqrt{j_\mu j^\mu}\end{aligned}$$

gewählt. Für die Wechselwirkungs-Lagrangedichte gilt damit

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_{\alpha} \hat{\Gamma}_{\alpha}(\hat{\rho}) \bar{\psi}(\hat{\gamma} \cdot \phi_{\alpha}) \psi. \quad (1.43)$$

$\hat{\gamma}$ steht hier für die entsprechende Kopplung der Mesonen an das Nukleonfeld und $(a \cdot b)$ repräsentiert die Lorentz-Kontraktion. Der wesentliche Unterschied einer Dichteabhängigen Formulierung spiegelt sich in zusätzlichen Rearrangement-Beiträgen in den Selbstenergien wieder, da die Variation von $\mathcal{L}_{int}$ sich auch auf die Vertices $\Gamma_{\alpha}(\hat{\rho})$ auswirkt.

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}} \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta \bar{\psi}}$$

Die Rearrangementenergien lassen sich, wie das englische Wort schon andeutet, als eine dynamische Umordnung des nuklearen Mediums aufgrund von Polarisierungseffekten verstehen. Die herkömmlichen Selbstenergien aus dem ersten Teil der Variation lassen sich in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil zerlegen

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^{s(0)} &= \hat{\Gamma}_\sigma(\hat{\rho})\phi_\sigma + \hat{\Gamma}_\delta(\hat{\rho})\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Phi}_\delta \\ &= \hat{\Sigma}_0^{s(0)} + \boldsymbol{\tau}\hat{\Sigma}_3^{s(0)}\end{aligned}\quad (1.44)$$

und

$$\hat{\Sigma}^{\mu(0)} = \hat{\Gamma}(\hat{\rho})A^{(\omega)\mu} + \hat{\Gamma}_\rho(\hat{\rho})\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}^{(\rho)\mu} + e\hat{Q}A^{\gamma\mu}. \quad (1.45)$$

In Hartree-Näherung können die Vertex-Funktionale $\hat{\Gamma}_\alpha$ durch Funktionen des Erwartungswertes von $\hat{\rho}_0$ ersetzt werden [HKL01]. Unter Ausnutzung der schon oben diskutierten Symmetrien ergibt sich für die Selbstenergie-Beiträge insgesamt

$$\begin{aligned}\Sigma_b^{s(0)}(\rho) &= \Gamma_\sigma(\rho)\Phi_\sigma + \tau_b\Gamma_\delta(\rho)\Phi_\delta \\ \Sigma^{0(0)} &= \Gamma_\omega(\rho)A_0^{(\omega)} + \tau_b\Gamma_\rho(\rho)A_0^{(\rho)} + e\frac{1-\tau_b}{2}A_0^{(\gamma)} \\ \Sigma^{0(r)} &= \left(\frac{\partial\Gamma_\omega}{\partial\rho}A_0^{(\omega)}\rho + \frac{\partial\Gamma_\rho}{\partial\rho}A_0^{(\rho)}\rho_3 - \frac{\partial\Gamma_\sigma}{\partial\rho}\Phi_\sigma\rho^s - \frac{\partial\Gamma_\delta}{\partial\rho}\Phi_\delta\rho_3^s \right),\end{aligned}\quad (1.46)$$

dabei soll $b = n, p$ zwischen Neutronen und Protonen unterscheiden und es gilt wieder $\tau_{n/p} = \pm 1$.

Damit lässt sich die Dirac-Gleichung für die Baryonenfelder schreiben als

$$\left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - \hat{\Sigma}^\mu \right) - \left(M - \hat{\Sigma}^s \right) \right] \psi = 0, \quad (1.47)$$

wobei $\hat{\Sigma}^\mu = \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)}$ und $\hat{\Sigma}^s = \hat{\Sigma}^{s(0)} + \hat{\Sigma}^{s(r)}$ gilt. Man sieht, dass die Dirac-Gleichung die gleiche Form hat, wie bei nicht dichteabhängigen Theorien (siehe auch Gl. (1.28)). Die wesentlichen Unterschiede zum herkömmlichen Modell sind die zusätzlichen Rearrangementbeiträge in der Selbstenergie.

Die Dichteabhängigkeit wurde an die Dirac-Brückner-Selbstenergien des Groningen NN-Potentials angepasst [Hof01]. Dabei wurde in Anlehnung an *Typel* und *Wolter* [TW99] für die Kopplungsfunktion folgender Ansatz vorgenommen :

$$\Gamma_m(\rho) = a_m \frac{(1 + b_m(\rho/\rho_0 + d_m)^2)}{(1 + c_m(\rho/\rho_0 + e_m)^2)}. \quad (1.48)$$

Wegen der Impulsabhängigkeit der Selbstenergien aus Brückner-Rechnungen wurde zusätzlich eine Impulskorrektur vorgenommen, welche auf einen zusätzlichen Term in isoskalaren Kanälen führt

$$\Gamma_m^{MC}(\rho) = \Gamma_m(\rho) * \sqrt{1 + G_m k_F^2}, \quad (1.49)$$

mit dem Fermi-Impuls $k_F = (\frac{3\pi^2}{2}\rho)^{1/3}$.

Die Parametersätze für die einzelnen Mesonen befinden sich im Anhang dieser Arbeit. Abbildung 1.2 veranschaulicht die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten. Die daraus resultierende Dichteabhängigkeit der effektiven Massen von Proton und Neutron stellt Abbildung 1.3 dar. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich diese mit steigender Asymmetrie (d.h. abnehmendem Verhältnis Z/A) und zunehmender Dichte stark voneinander unterscheiden. Dies ist eine Konsequenz aus dem an der Wechselwirkung beteiligten isovektor-skalaren δ -Meson, das einen *isospinabhängigen* Beitrag zur effektiven Masse liefert (vgl. Gleichung (1.46) und (1.28)).

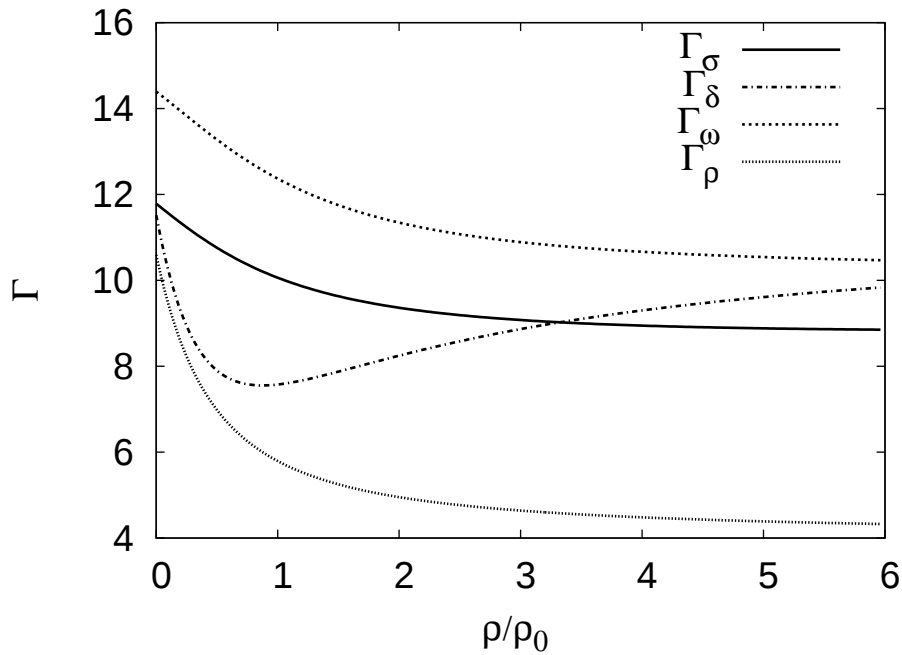


Abbildung 1.2: Die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten Γ_α vom σ, δ, ω und ρ Meson.

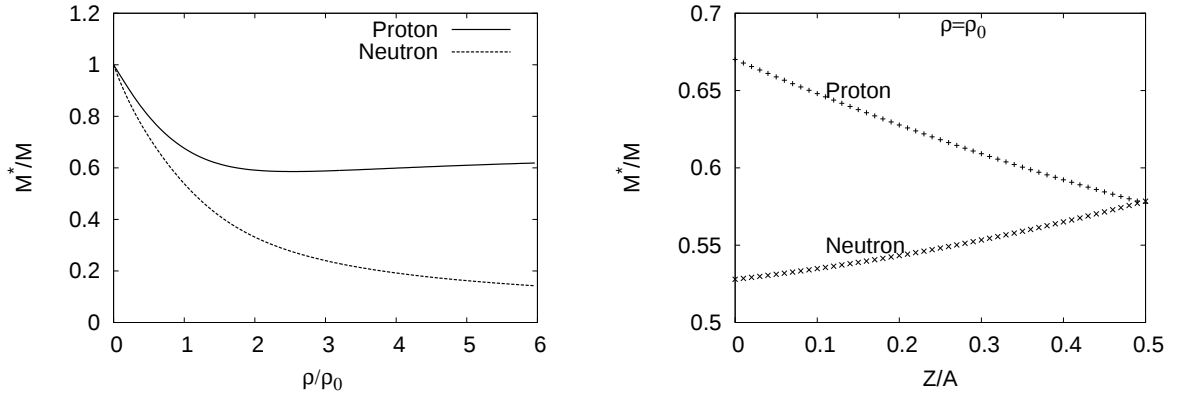


Abbildung 1.3: Die effektiven Massen von Proton und Neutron. Links in Abhängigkeit von der Dichte bei $Z = 0$, Rechts in Abhängigkeit von Z/A bei der Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$

1.8 Zustandsgleichung

Betrachtet man die Feldgleichungen (1.27), so müssen für unendliche Kernmaterie die Ableitungsterme bezüglich den Ortskoordinaten verschwinden, da ein solches System homogen und isotrop ist. Die Lösung der Dirac-Gleichung kann dann durch eine Fourier-Entwicklung im Impulsraum nach ebenen Wellen dargestellt werden. In Hartree-Näherung werden nur Einteilchenzustände positiver Energie betrachtet. Die Dirac-Gleichung im Medium lautet dann:

$$(\not{k}^* - M_b^*) u_b^*(k, s) = 0. \quad (1.50)$$

$u_b^*(k, s)$ steht für die Einteilchenzustände im Medium ($b = p, n$; $s = \pm \frac{1}{2}$). Dabei soll die modifizierte Massenschalenbedingung

$$k^{*2} - M_b^{*2} = 0$$

erfüllt sein. Für die Lösung der Dirac-Gleichung erhält man ganz analog zum wechselwirkungs-freien Fall:

$$u_b^*(k, s) = \sqrt{\frac{E_b^* + M_b^*}{2M_b^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}_b^*}{E_b^* + M_b^*} \end{pmatrix} \chi_s. \quad (1.51)$$

Hier ist $E_b^* = \sqrt{\mathbf{k}^{*2} + M_b^{*2}}$ die Einteilchenenergie im Medium. Wegen der Translationsinvarianz vereinfachen sich auch die Mesonenfeldgleichungen in unendlicher Kernmaterie zu folgenden Ausdrücken:

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = \Gamma_\sigma(\rho) \rho^s$$

$$\begin{aligned}
 m_\omega^2 A_0^{(\omega)} &= \Gamma_\sigma(\rho) \rho \\
 m_\delta^2 \phi_\delta &= \Gamma_\sigma(\rho) \rho_3^s \\
 m_\rho^2 A_0^{(\rho)} &= \Gamma_\sigma(\rho) \rho_3
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Dabei stellt ρ und ρ^s die Baryonen bzw. die skalare Dichte dar:

$$\begin{aligned}
 \rho = \langle \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi \rangle &= \sum_{b=p,n} \sum_{ss'} \int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \bar{u}_b^*(p, s') u_b^*(p, s) \\
 &= \sum_{b=p,n} \frac{k_{F_b}^3}{3\pi^2}
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

$$\begin{aligned}
 \rho^s = \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle &= \sum_{b=p,n} \sum_{ss'} \int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} u_b^{*\dagger}(p, s') u_b^*(p, s) \\
 &= \sum_{b=p,n} \frac{m_b^*}{2\pi^2} \left[k_{F_b} E_{F_b} - m_b^{*2} \ln \left(\frac{k_{F_b} + E_{F_b}}{m_b^*} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{1.54}$$

Zur Berechnung der Mesonenfelder müssen zunächst die effektiven Massen M_b^* bestimmt werden. Diese hängen jedoch über die skalaren Selbstenergien auch von den Mesonenfeldern und damit von den skalaren Dichten ab:

$$M_b^* = M - \Gamma(\rho) \phi_\sigma - \tau_b \Gamma_\delta(\rho) \phi_\delta. \tag{1.55}$$

Es liegt somit ein gekoppeltes Gleichungssystem vor. Dieses wird durch Bestimmung der Mesonenfelder aus ihren Feldgleichungen unter der Verwendung von Gleichung (1.54) gelöst [Hof01].

Zur Bestimmung der Energiedichte ist es notwendig, zunächst den *Energie-Impuls-Tensor* zu berechnen. Dieser ist gegeben durch die Definition

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\partial^\nu \phi_i) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{1.56}$$

Mit der DDRH-Lagrangedichte folgt

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \bar{\psi} [\gamma_\lambda \Sigma^{\lambda(r)} - \Sigma^{s(r)}] \psi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \delta, \pi, \eta} [2 \partial^\mu \Phi_i \partial^\nu \Phi_i - g^{\mu\nu} (\partial_\eta \Phi_i \partial^\eta \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\omega, \rho, \gamma} \left[(\partial^\nu A_\kappa^i) F_i^{\kappa\mu} - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} F_{\eta\kappa}^i F_i^{\eta\kappa} - m_i^2 A_\eta^i A^{i\eta} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{1.57}$$

Dabei treten hier Rearrangementenergien auf, die auf die Dichteabhängigkeit der Kopplungsfunktionale zurückzuführen sind und in linearen Feldtheorien nicht auftauchen. Nutzt man nun wieder aus, dass in unendlicher Kernmaterie die Ableitungen

der Mesonenfelder verschwinden, so vereinfacht sich $T^{\mu\nu}$ zu

$$T^{\mu\nu} = \sum_{b=p,n} 2 \int_{|k| < k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_b^*} \left[k_b^{*\mu} k_b^{*\nu} + k_b^{*\mu} (\Sigma_b^{\nu(0)} + \Sigma^{\nu(r)}) - k_b^{*\eta} \Sigma^{\eta(r)} g^{\mu\nu} \right] + g^{\mu\nu} \left[\sum_{i=\sigma\delta} m_i^2 \phi_i^2 - \sum_{j=\omega\rho} m_j^2 A_\eta^{(j)} A^{(j)\eta} \right], \quad (1.58)$$

Dabei wird die Energie-Impuls-Erhaltung

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

erfüllt (siehe auch Anhang).

Eine der wichtigsten Größen, die zur Beschreibung von Kernmaterie wichtig sind, ist die Grundzustandsenergie des Systems. Diese ist durch den Erwartungswert der nullten Komponente des Energie-Impuls-Tensors gegeben.

$$\begin{aligned} \varepsilon = \langle T^{00} \rangle &= 2 \sum_{b=n,p} \left[\int_{|k| < k_{F_b}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_b^{*2}} + \rho_b \Sigma_b^{0(0)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[m_\sigma^2 \Phi_\sigma^2 + m_\delta^2 \phi_\delta^2 - m_\omega^2 A_0^{(\omega)^2} - m_\rho^2 A_0^{(\rho)^2} \right] \\ &= \sum_{b=n,p} \frac{1}{4} [3E_{F_b} \rho_b + M_b^* \rho_b^s] + \sum_{b=n,p} \frac{1}{2} [\rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)}]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass aufgrund der sphärischen Symmetrie die raumartigen Komponenten der Selbstenergien verschwinden müssen und kanonischer und kinetischer Impuls gleich sind ($\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$). Der wesentliche Punkt dabei ist, dass sich die Rearrangement-Beiträge in Gleichung (1.59) gerade wegheben. Dies ermöglicht die Anpassung der dichteabhängigen Vertices an Dirac-Brückner Rechnungen [HKL01].

Die Zustandsgleichung gibt die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon $\varepsilon/\rho = E_b/A - M$ an. In Abbildung 1.5 wird diese in Abhängigkeit von der Dichte für verschiedene Verhältnisse von Z/A dargestellt, wobei Abbildung 1.4 die Ergebnisse für verschiedene Modell-Rechnungen veranschaulicht.

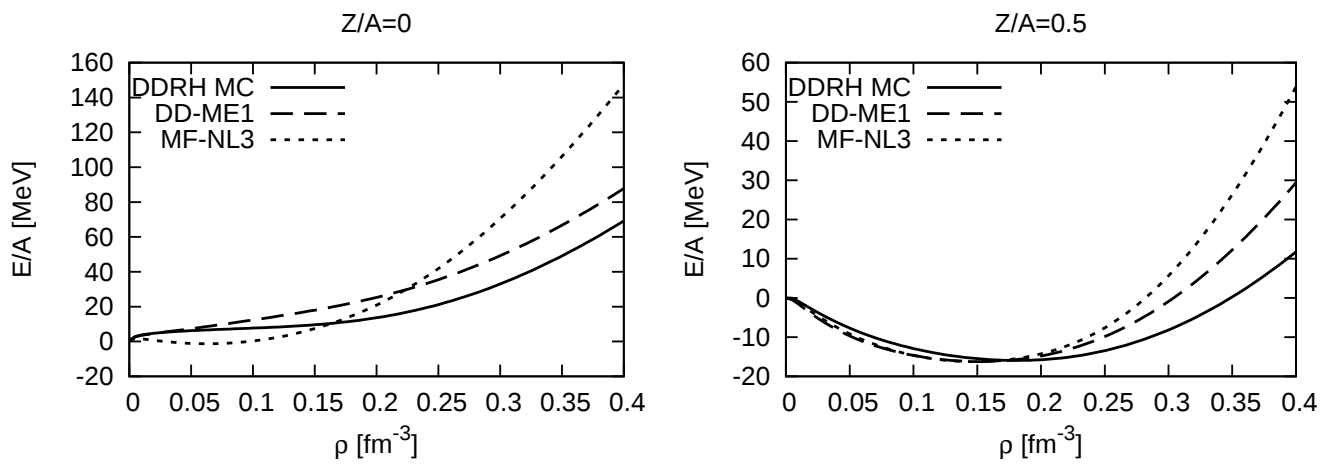


Abbildung 1.4: Gegenüberstellung der Zustandsgleichung für verschiedene Modelle. Während sich in symmetrischer Kernmaterie eine große Übereinstimmung zeigt, unterscheiden sich die Ergebnisse zunehmend mit steigender Asymmetrie.

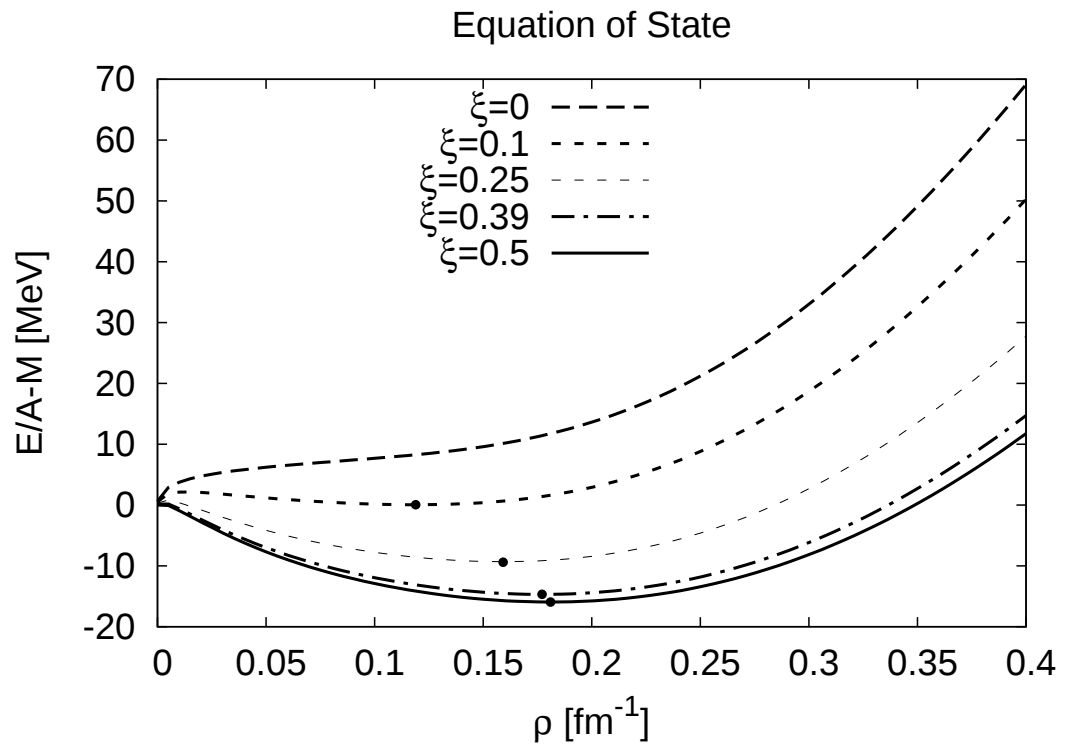


Abbildung 1.5: Zustandsgleichung mit den DDRH-Parametern in Abhängigkeit von ρ für Verschiedene Asymmetrien $\xi = Z/A$. Die punkt-gestrichelte Linie stellt das Ergebnis für $^{207}_{82}\text{Pb}$ dar. Die Minima der jeweiligen Kurven sind mit Punkten gekennzeichnet.

2 Landaus Fermi-Liquid Theorie

Die Landau Theorie der Fermi-Flüssigkeiten lieferte wichtige Beiträge zum Verständnis der Eigenschaften nicht-relativistischer Systeme wechselwirkender Fermionen. Diese Theorie wurde von *Baym* und *Chin* auf relativistische Systeme erweitert [BC76]. Die besonderen Eigenschaften der relativistischen Formulierung resultieren aus der Kovarianz unter Lorentz-Transformationen, die grundlegenden Annahmen der Landau-Migdal Theorie können jedoch übernommen werden, da sie ganz allgemein für niedrige Anregungen normaler Fermi-Systeme gelten. In diesem Abschnitt werden die Konzepte der Landau Theorie vorgestellt und die wesentlichen Unterschiede zwischen der relativistischen und nichtrelativistischen Formulierung hervorgehoben. Wir werden dabei die Bedeutung der *Landau-Migdal Parameter* ansprechen und diese in unserem DDRH-Modell berechnen.

2.1 Grundlagen

Landaus Theorie für Fermi-Flüssigkeiten (engl.: Landau Fermi-liquid Theory) ist eine semiphänomenologische Herangehensweise an wechselwirkende Fermisysteme bei kleinen Anregungsenergien. Die Elementaranregungen eines Fermigas werden unter diesem Aspekt als Quasiteilchen (QT) bezeichnet. Man nimmt an, dass es eine direkte Beziehung zwischen Anregungen niedriger Energie einer Fermiflüssigkeit in der Nähe der Fermioberfläche und den Anregungen eines nichtwechselwirkenden Fermigas gibt. Aufgrund von Wechselwirkungseffekten unterscheiden sich die QT-Eigenschaften, zum Beispiel ihre Masse, stark von den der freien Teilchen. Zusätzlich gibt es eine Restwechselwirkung der QT, die mit Hilfe der so genannten *Landau-Parameter* parametrisiert wird. In diesem Abschnitt werden wir die Grundlagen dieser Theorie und deren Grenzen vorstellen. Dazu gehen wir von der Beschreibung eines Fermigas aus, um danach zu Fermi-Flüssigkeiten und dem Quasiteilchen-Konzept überzugehen.

2.1.1 Freies Fermigas

Ein System von N nichtwechselwirkenden Fermionen mit der Masse m , die sich in einem Kasten mit Volumen V befinden, wird als ein *freies Fermigas* bezeichnet. Jedes einzelne Teilchen kann durch seinen Impuls $\mathbf{p}$ und weitere innere Quantenzahlen α

beschrieben werden. Im Ortsraum ist der Zustand $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$ dann einfach eine ebene Welle:

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (2.1)$$

Die Eigenzustände des Systems werden eindeutig durch die Besetzungsfunktion $n_{\mathbf{p},\alpha}$ charakterisiert. Sie gibt dabei nichts anderes als die Anzahl der Teilchen, die sich in dem zugehörigen Einteilchenzustand befinden, an. Bei der Temperatur $T = 0$ ist diese Funktion im Grundzustand nichts anderes als die Stufenfunktion:

$$n_{\mathbf{p},\alpha}^0 = \theta(p_F - |\mathbf{p}|) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\mathbf{p}| < p_F \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

p_F ist dabei der Fermi-Impuls des Fermi-Gases. Die Gesamtenergie des Systems setzt sich aus den freien Einteilchenenergien zusammen:

$$E_0 = \sum_{\mathbf{p},\alpha} \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 n_{\mathbf{p},\alpha}^0. \quad (2.3)$$

Bei der Beschreibung angeregter Zustände des Systems ist es praktikabel, sich auf den Grundzustand zu beziehen. Dabei wird ein angeregter Zustand dadurch erzeugt, indem man eine bestimmte Anzahl von Teilchen aus dem Fermisee in Zustände außerhalb der Fermikugel bringt. Mit anderen Worten wird ein *Teilchen* oberhalb und ein *Loch* innerhalb der Fermikugel generiert. Man spricht dann von *Elementaranregungen* des Systems, die sich einfach durch die Differenz der neuen Besetzungsfunktion und der des Grundzustandes charakterisieren lassen [PN66]:

$$\delta n_{\mathbf{p},\alpha} = n_{\mathbf{p},\alpha} - n_{\mathbf{p},\alpha}^0. \quad (2.4)$$

Damit folgt auch die naheliegende Definition der Anregungsenergie des gesamten Systems:

$$\delta E = E - E_0 = \sum_{\mathbf{p},\alpha} \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 \delta n_{\mathbf{p},\alpha}. \quad (2.5)$$

Hebt man die Beschränkung der Teilchenzahlerhaltung auf und wechselt zum großkanonischen Ensemble, so wird das System nicht mehr durch seine Teilchenzahl, sondern durch das *chemische Potential* μ beschrieben. Dabei ist das chemische Potential die Änderung der Gesamtenergie durch Hinzufügen eines Teilchens in den niedrigsten verfügbaren Zustand:

$$\mu = E_0(N+1) - E_0(N). \quad (2.6)$$

Bei $T = 0$ ist das chemische Potential gerade die Fermienergie des Systems, was im übrigen auch für wechselwirkende Systeme gültig bleibt. Die zugehörige Energie ist

die freie Energie¹ des Systems $\Phi = E - \mu N$ bei $T = 0$. Die freie Anregungsenergie ist dann gegeben durch

$$\delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = \sum_{\mathbf{p},\alpha} (\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 - \mu) \delta n_{\mathbf{p},\alpha}. \quad (2.7)$$

Für einen angeregten Zustand gilt damit immer $\delta\Phi > 0$.

Wir wollen nun die Wechselwirkung zwischen den Fermionen 'einschalten' und damit das Konzept der Elementaranregungen auf die Beschreibung von Fermi-Flüssigkeiten ausdehnen.

2.1.2 Fermi-Flüssigkeiten

Wie beim freien Fermi-Gas wollen wir auch hier zunächst den Grundzustand des wechselwirkenden Systems beschreiben. Den Ausgangspunkt dafür bildet das freie Fermigas mit der Grundzustandsfunktion $n_{\mathbf{p},\alpha}^0$. Den Übergang zur Fermi-Flüssigkeit erhält man durch ein unendlich langsames Einschalten der Wechselwirkung zwischen den Fermionen. Damit wird sichergestellt, dass sich nichtentartete Eigenzustände des Systems eindeutig in Eigenzustände des wechselwirkenden Systems transformieren (Theorem von *Gell-Mann* und *Low* [FW71]). Die Landau-Theorie lässt sich allerdings nicht auf Systeme, bei denen Phasenübergänge in einem solchen adiabatischen Prozess stattfinden, anwenden. Der Grundzustand solcher Systeme ist nämlich mit einer Superposition von verschiedenen Eigenzuständen des Gases verbunden. Somit ist auch die eins-zu-eins Korrespondenz zwischen den Zuständen beider Systeme nicht mehr gewährleistet. Für normale, räumlich homogene und isotrope Systeme hingegen entwickelt sich der Grundzustand des wechselwirkenden Systems aus dem Grundzustand des Gases. Da in wechselwirkenden Systemen die Teilchen aneinander streuen und so neue Impulszustände besetzen können, ist die Besetzungszahlfunktion keine Stufenfunktion mehr. Der zur Verfügung stehende Phasenraum für die Endzustände solcher Streuprozesse wird durch das Pauli-Prinzip sowie Energie- und Impulserhaltung stark eingeschränkt. Aufgrund der eins-zu-eins Beziehung der wechselwirkenden Zustände zum freien System, haben wir nun die Möglichkeit angeregte Zustände der Fermi-Flüssigkeit mit Hilfe von *Elementaranregungen* zu beschreiben. Diese Elementaranregungen werden bei wechselwirkenden Systemen *Quasiteilchen* (QT) genannt.

2.1.3 Das Quasiteilchenkonzept

Versetzen wir uns in das Schwerpunktssystem des Grundzustands (Gesamtimpuls $\mathbf{P} = 0$) und betrachten wir zunächst den einfachsten angeregten Zustand des Gases, indem wir zum Grundzustand ein weiteres Teilchen mit dem Impuls $\mathbf{p}'$ ($|\mathbf{p}'| > p_F$)

¹Eher bekannt als das *Großkanonische Potential* $\Phi = \Phi(T, V, \mu)$. Der Begriff *freie Energie* wird hier in Anlehnung an die Literatur verwendet.

hinzufügen. Das System besitzt dann den Gesamtimpuls $\mathbf{p}'$. Aufgrund der Gesamtimpulserhaltung bei Teilchenkollisionen hat der entsprechende Zustand des wechselwirkenden Systems dann auch den Gesamtimpuls $\mathbf{p}'$. Das Teilchen außerhalb der Fermikugel wird nun umso stärker mit anderen Teilchen seiner Umgebung wechselwirken, je größer die Wechselwirkung ist.² Während seiner Bewegung durch das System beeinflusst dieses Teilchen die Teilchen in seiner Umgebung. Feldtheoretisch ausgedrückt bedeutet das, dass das ursprünglich *nackte* Teilchen durch Selbstenergiebeiträge *angezogen* (engl. dressed) ist und somit als QT betrachtet wird. Damit setzt sich der neue angeregte Zustand aus diesem QT mit Impuls $\mathbf{p}'$ und Energie $\varepsilon_{\mathbf{p}'}$ und dem wechselwirkenden Zustand zusammen. Ein *Quasiloche* wird ganz analog definiert, indem ein Teilchen aus dem Fermisee entfernt wird.

Im Gegensatz zum freien System haben die Quasi-Teilchen bzw. Quasi-Löcher wegen der möglichen Streuprozesse eine endliche Lebensdauer. Eine Definition der QT ist damit nur dann sinnvoll, wenn das adiabatische Einschalten der Wechselwirkung kürzer als die Lebensdauer der QT ist. Dies stellt zugleich eine grundsätzliche Einschränkung des QT-Konzepts dar. QT können folglich nur in den Bereichen definiert werden, in denen deren Lebensdauer hinreichend groß ist. Nur in diesem Fall lässt sich das *Gell-Mann* und *Low* Theorem anwenden. Damit ist das QT auch ein Eigenzustand des wechselwirkenden Systems.

Die Beschreibung von Elementaranregungen in einem endlichen Abstand zur Fermikante geschieht, indem die Wechselwirkung schneller eingeschaltet wird. Dies führt auf eine Superposition der Eigenzustände mit verschiedenen Energien. Betrachtet man den zur Verfügung stehenden Phasenraum bei Streuprozessen, so ergibt sich, dass bei $T = 0$ die Lebensdauer eines Quasiteilchens quadratisch mit der Anregungsenergie $(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)$ abnimmt.

$$\tau \sim (\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)^{-2} \quad (2.8)$$

Damit ist eine Definition der QT nur in einer hinreichend kleinen Umgebung um die Fermikante möglich. Außerhalb dieser Umgebung besitzen die QT keine wohldefinierten Energien und das gesamte Konzept ist nicht mehr anwendbar. Innerhalb dieser Umgebung lassen sich allerdings angeregte Zustände des wechselwirkenden Systems ganz analog zum freien Gas beschreiben. Dementsprechend führt man eine *QT-Besetzungsfunktion* $n_{\mathbf{p},\alpha}$ ein. Für den Grundzustand definiert man

$$n_{\mathbf{p},\alpha}^0 = \theta(p_F - |\mathbf{p}|). \quad (2.9)$$

Die Elementaranregungen werden wieder wie im wechselwirkungs-freien Fall beschrieben

$$\delta n_{\mathbf{p},\alpha} = n_{\mathbf{p},\alpha} - n_{\mathbf{p},\alpha}^0. \quad (2.10)$$

²Da das Einschalten der Wechselwirkung hinreichend langsam erfolgt, bleibt das System immer im Gleichgewicht.

Nun können QT auch untereinander wechselwirken. Diese QT-Wechselwirkung spielt eine entscheidende Rolle in Landaus Theorie der Fermi-Flüssigkeiten.

2.1.4 Quasiteilchen-Wechselwirkung

Wie oben schon erwähnt, ist in einem Fermi-Gas die Gesamtenergie des Systems durch die Summe aus den Einzelenergien der Teilchen gegeben. Es besteht daher ein einfacher linearer Zusammenhang zwischen der Energie des Systems und der Verteilungsfunktion $\delta n_{\mathbf{p},\alpha}$. Dieser Zusammenhang ist jedoch komplizierter, sobald eine Wechselwirkung zwischen den Konstituenten ins Spiel kommt. Die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen muss nämlich von deren Impulsen und Quantenzahlen abhängen. Demnach ist die Gesamtenergie des Systems ein *Funktional* der gesamten QT-Besetzungsfunktion. Wird einem System mit der QT-Verteilungsfunktion $n_{\mathbf{p},\alpha}$ ein QT mit den Quantenzahlen $(\mathbf{p}',\alpha')$ hinzugefügt, so ist die freie Energie dieses Quasiteilchens $\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'} - \mu$ gleichzeitig die Änderung der freien Energie des Gesamtsystems:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'} - \mu = \frac{\delta\Phi[\mathbf{p},\alpha]}{\delta n_{\mathbf{p}',\alpha'}}. \quad (2.11)$$

Die freie Energie dieses QT ist ebenfalls ein Funktional von der Besetzungsfunktion $n_{\mathbf{p},\alpha}$. Wird das QT zum Grundzustand hinzugefügt, so besitzt dieses die freie Energie $\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'}[n_{\mathbf{p},\alpha}^0] - \mu$. Diese Energie beinhaltet die kinetische und die Wechselwirkungsenergie mit den Teilchen im Fermisee. Letztere wird durch die Anwesenheit von QT verändert. Somit unterscheidet sich die QT-Energie $\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'}[n_{\mathbf{p},\alpha}^0]$ von $\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'}[n_{\mathbf{p},\alpha}]$ durch die QT-Wechselwirkungsenergie

$$\varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'}[n_{\mathbf{p},\alpha}] - \varepsilon_{\mathbf{p}',\alpha'}[n_{\mathbf{p},\alpha}^0] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'',\alpha''} f_{\mathbf{p}',\alpha',\mathbf{p}'',\alpha''}[n_{\mathbf{p},\alpha}] \delta n_{\mathbf{p}'',\alpha''}. \quad (2.12)$$

$f_{\mathbf{p},\alpha,\mathbf{p}',\alpha'}$ beschreibt die Wechselwirkung zwischen den QT. Zusammen mit Gleichung (2.11) folgt

$$f_{\mathbf{p}',\alpha',\mathbf{p}'',\alpha''} = \frac{\delta^2\Phi[n_{\mathbf{p},\alpha}]}{\delta n_{\mathbf{p}',\alpha'} \delta n_{\mathbf{p}'',\alpha''}}. \quad (2.13)$$

Landaus Grundidee basierte darauf, die funktionalen Abhängigkeiten approximativ durch eine Taylorentwicklung aufzulösen. Der Entwicklungsparameter ist dabei das Verhältnis der Anzahl der QT zur Gesamtteilchenzahl. Da $\delta n_{\mathbf{p},\alpha}$ auf die Umgebung der Fermikante beschränkt ist, ist dieser Parameter klein. Das System ist also - mit anderen Worten - nur schwach angeregt. In diesem Fall wird das Wechselwirkungsfunktional durch die Wechselwirkungsenergie zweier QT bei Abwesenheit anderer QT angenähert.

$$f_{\mathbf{p}',\alpha',\mathbf{p}'',\alpha''} = f_{\mathbf{p}',\alpha',\mathbf{p}'',\alpha''}[n_{\mathbf{p},\alpha}^0]. \quad (2.14)$$

Die Wechselwirkungsfunktion wird durch einen phänomenologischen Ansatz bestimmt. Zum Beispiel ist für ein räumlich isotropes und homogenes System mit Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen die allgemeinste Form der Wechselwirkung eine Linearkombination der Terme $1 \otimes 1, \sigma_i \otimes 1, 1 \otimes \sigma_i$ und $\sigma_i \otimes \sigma_j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Unter der Ausnutzung der Gesamtisotropie des Systems und bei verschwindender Spinpolarisation erhält man Terme der Form

$$f_{\mathbf{p}', \alpha', \mathbf{p}'', \alpha''} = f_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}^1 + f_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}^2 \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{p}' + f_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}^3 \boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{p}'' + f_{\mathbf{p}', \mathbf{p}''}^4 \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'' + \dots \quad (2.15)$$

Mit weiteren Spin-Bahn-Wechselwirkungen höherer Ordnung und Tensorwechselwirkungen der Form $(\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{p}_1) \otimes (\boldsymbol{\sigma}'' \cdot \mathbf{p}_2)$. Sieht man weiterhin von Kopplungstermen zwischen Orts- und Spinraum ab, so müssen alle Wechselwirkungsterme jeweils invariant unter Rotationen im Orts- bzw. Spinraum sein. Diese Symmetrie erfüllen nur Terme der Gestalt

$$f_{\mathbf{p}, \alpha, \mathbf{p}', \alpha'} = f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}^1 + f_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}^2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}'. \quad (2.16)$$

Mit zusätzlichem Isospin-Freiheitsgrad ergibt sich für den Wechselwirkungsterm der allgemeine Ausdruck:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{p}_1 \sigma_1, \mathbf{p}_2 \sigma_2} &= f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} + f'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 + g_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + g'(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \\ &+ h_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \frac{q^2}{p_F^2} S_{1,2}(q^2) + h'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \frac{q^2}{k_F^2} S_{1,2}(q^2) H \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$\mathbf{q}$ ist hier der Relativimpuls $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ und $S_{1,2}$ ist der Tensoroperator

$$S_{1,2}(\mathbf{q}) = \frac{3}{|\mathbf{q}|^2} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q}) - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2. \quad (2.18)$$

2.2 Landau-Migdal-Parameter

Da Quasiteilchen schon nach Voraussetzung nur in der Umgebung der Fermioberfläche sein dürfen, lassen sich die Koeffizientenfunktionen $f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}, f'_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}, g_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2}$ usw. in Gleichung (2.17) in diesen Fall mit Hilfe von *Landau-Migdal*-Parametern beschreiben. Da die Impulse auf die Fermioberfläche beschränkt sind, ist die einzige unabhängige Größe der Winkel θ zwischen $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$. Daher lassen sich die Koeffizientenfunktionen nach dem vollständigen Satz der *Legendre*-Polynome entwickeln:

$$f_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} = f(\cos \theta) = \sum_l f_l P_l(\cos \theta). \quad (2.19)$$

Die dimensionslosen Landau-Migdal-Parameter ergeben sich definitionsgemäß aus

$$F_l \equiv N_0(p_F) f_l, \quad (2.20)$$

dabei ist $N_0(p_F)$ die Dichte der Zustände an der Fermioberfläche

$$N_0(p_F) = \sum_i \left(\frac{n_i}{\varepsilon_i} \right)_{\varepsilon_i=\mu} = \nu \frac{p_F^2}{(2\pi)^2} \frac{dp}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{\nu p_F m^*}{2\pi^2} \quad (2.21)$$

Mit dem Entartungsfaktor ν aus inneren Freiheitsgraden, wie z.B. Spin und Isospin. Ist $f(\cos \theta)$ bekannt, so ergeben sich die einzelnen Landau-Migdal-Parameter durch Projektion

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d\cos \theta P_l(\cos \theta) f(\cos \theta). \quad (2.22)$$

Dies folgt einfach aus der Orthogonalität der Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^1 dx P_n(x) P_m(x) = \delta_{nm} \frac{2}{2n+1}.$$

Aufgrund der kurzen Reichweite der NN -Wechselwirkung nehmen die Größen der Landau-Migdal-Parameter stark mit der Multipolarität ab. Damit spielen die ersten Parameter die wichtigste Rolle bei der Beschreibung der Wechselwirkung. Sind diese bekannt, so können damit verschiedene statische Eigenschaften und Nichtgleichgewichtsphänomene des Systems beschrieben werden.

2.2.1 Berechnung der Landau-Migdal Parameter

Die Anregungszustände einer Fermiflüssigkeit werden mit Hilfe wechselwirkender QT beschrieben. Eine kleine Änderung der QT-Verteilungsfunktion δn führt zu einer Änderung der Energiedichte des Systems.

$$\delta E = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \varepsilon(p) \delta n(p) \quad (2.23)$$

Dies definiert gleichzeitig die QT-Energie ε . Dabei ist die Energiedichte ein Funktional der Verteilungsfunktion $E = E[n_{p\sigma}]$. Dies gilt natürlich auch für die QT-Energien. Die Variation von $\varepsilon(p)_\sigma$ definiert wiederum die Landau Fermi Wechselwirkung.

$$\delta \varepsilon(p)_{\sigma\tau} = \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\sigma\tau, \mathbf{p}'\sigma'\tau'} n_{\mathbf{p}'\sigma'\tau'}. \quad (2.24)$$

Gemäß der obigen Definition folgt für die Landau-Migdal-Parameter

$$F_l \equiv N_0(k_F) \frac{2l+1}{4} \sum_{\sigma\sigma'} \int \frac{d\Omega}{4\pi} P_l(\cos \theta) f_{\mathbf{p}\sigma, \mathbf{p}'\sigma'}. \quad (2.25)$$

Diese Formulierung gilt bis zu diesem Punkt ganz allgemein. Die resultierenden Effekte aus der kovarianten Formulierung unter Lorentztransformationen wurden von *Baym* und *Chin* [BC76] erläutert. Wir wollen an dieser Stelle die wesentlichen Punkte hervorheben.

- Die Variation von $n_{\mathbf{p}'}$ führt auf eine zusätzliche Variation des Impulses

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = v\gamma \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0 \delta n_{\mathbf{p}'}^0.$$

- Nichtrelativistisch hängt die QT Wechselwirkungsfunktion $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0$ für kleine Wechselwirkungen nur vom Relativimpuls $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ ab. Die relativistischen Transformationseigenschaften von $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0$ führen jedoch auf die Bedingung

$$\nabla_{\mathbf{p}}(\varepsilon_{\mathbf{p}}^0 f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0) + \nabla_{\mathbf{p}'}(\varepsilon_{\mathbf{p}'}^0 f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0) = 0.$$

Für die Eigenschaften von Fermi-Systemen folgen damit folgende Beziehungen

$$N_0(k_F) \frac{\partial \mu}{\partial n} = (1 + F_0). \quad (2.26)$$

Dabei ist das chemische Potential definiert durch

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} = \varepsilon_F. \quad (2.27)$$

Im Grenzfall schwacher Wechselwirkung folgt für die QT-Energie bzw. die Energiedichte:

$$\varepsilon_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}}^0 + \sum_{\sigma'} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0 n_{\mathbf{p}'} \quad (2.28)$$

$$E = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \varepsilon_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^0 n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} \quad (2.29)$$

Der zweite Teil beschreibt dabei die Wechselwirkungsenergie.

2.2.2 Bezug zu Makroskopischen Eigenschaften

Die Wechselwirkung zwischen den QT hat auch Auswirkungen auf makroskopischen Eigenschaften des Systems. Damit stehen einige LMP in direkter Verbindung zu observablen Größen. Wir wollen hier die Formeln für die jeweiligen Observablen zusammenfassen ([PN66], [Mat81])

- **Kompressibilität:**

Die Kompressibilität gibt an, wieviel Druck aufgewendet werden muss, um das Volumen des Systems zu ändern. Es gilt

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \\ &= \frac{3k_F^2}{E_F} (1 + F_0). \end{aligned} \quad (2.30)$$

- **Symmetrieenergie:**

Der vierte Term in Gleichung (0.1) sorgt für ein Gleichgewicht zwischen der Protonen- und Neutronenzahl. Die Symmetrie-Energie a_4 (oft auch als a_s bezeichnet) ist damit gegeben durch die zweite Ableitung der Energiedichte nach der isovektordichte ρ_3 und steht in direktem Bezug zum Isektor-Parameter F'_0

$$\begin{aligned} a_4 &\equiv \left. \frac{\rho}{2} \frac{\partial^2 E'}{\partial \rho_3^2} \right|_{n_3=0, j_B=j_3=0} \\ &= \frac{k_F^2}{6E_F} (1 + F'_0). \end{aligned} \quad (2.31)$$

- **Magnetische Suszeptibilität**

Die magnetische Suszeptibilität χ ist ein Maß für die Stärke der magnetischen Polarisation eines Systems, die durch ein äußeres Magnetfeld erzeugt wird.

$$\chi = \frac{\gamma}{4} \frac{N_0}{1 + F'_0}. \quad (2.32)$$

γ ist hier das gyromagnetische Verhältnis des Protons.

2.3 Linear Response

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtung bildet ein Vielteilchensystem im Gleichgewicht. Dieses soll durch einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator H beschrieben werden. Zum Zeitpunkt t_0 soll nun eine äußere zeitabhängige Störung mit dem Hamiltonoperator $H_{ex}(t)$ eingeschaltet werden. Die Frage ist nun, wie sich die zeitliche Entwicklung einer Observablen ändert. Diese Fragestellung ist Gegenstand der Linear-Response Theorie, deren Formalismus wir an dieser Stelle skizzieren wollen.

Sei $O(t, \mathbf{x})_S$ ein beliebiger Operator im Schrödingerbild und $H' = H + H_{ex}(t)$, dann ist die Größe der zu O gehörenden Observablen gegeben durch

$$\delta \langle O(x) \rangle \equiv \langle \tilde{\psi} | O | \tilde{\psi} \rangle - \langle \psi | O | \psi \rangle, \quad (2.33)$$

mit

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{\psi}(t)\rangle = H' |\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (2.34)$$

Damit folgt

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} |\psi(t_0)\rangle, \quad |\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (2.35)$$

$U(t, t_0)$ ist der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild. Für schwache Störungen kann U nach H_{ex} entwickelt werden und es folgt in linearer Näherung

$$\delta \langle O(t, \mathbf{x}) \rangle = i \int_{t_0}^t dt' \langle \psi(t_0) | [H_{ex}(t'), O(t, \mathbf{x})] | \psi(t_0) \rangle. \quad (2.36)$$

Dies stellt einen linearen Zusammenhang zwischen den externen und induzierten Störungen dar. Gehen wir nun von einer Störung in Form eines äußeren Stromes aus:

$$H_{ex}(t) = d^3 \int d^4 x' (\bar{\psi}(x') \Gamma^\alpha \psi(x')) V_\alpha(x'). \quad (2.37)$$

Wobei Γ_α hier für eine beliebige γ -Matrix stehen soll und V_α das Wechselwirkungspotential ist. Für die dadurch induzierten Potentiale folgt damit

$$\delta \langle V_\mu(t, \mathbf{x}) \rangle = -i \int_{t_0}^t d^4 x' \langle [V_\mu(x), V_\nu(x')] \rangle (\bar{\psi}(x') \Gamma^\nu \psi(x')). \quad (2.38)$$

Der umgekehrte Fall einer Störung in Form eines äußeren Potentials führt auf induzierte Ströme

$$\delta \langle \bar{\psi}(x) \Gamma^\mu \psi(x) \rangle = \int_{t_0}^t d^4 x' V_\mu(x') \langle A, B \rangle. \quad (2.39)$$

Dies Definiert gleichzeitig die Korrelationsfunktion. Die induzierten Ströme im System haben die gleichen Frequenzen wie die äußeren Ströme. Da die Berechnung der Antwortfunktion unter Verwendung des Wicktheorems nur für zeitgeordnete Produkte möglich ist [PS95], definiert man das entsprechende zeitgeordnete Produkt.

Diagrammatisch ist die Korrelationsfunktion nichts anderes als das volle Polarisationsdiagramm. Innerhalb eines Vielteilchensystems beinhaltet es sowohl *Teilchen-Loch*- als auch *Teilchen-Antiteilchen* Beiträge.

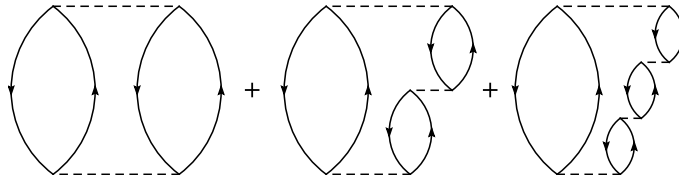
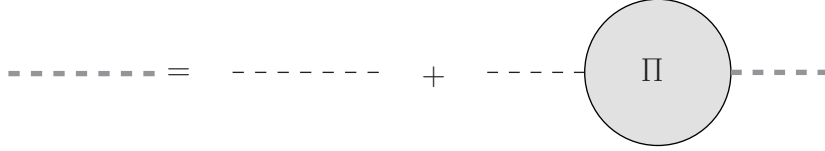


Abbildung 2.1: Diagramme innerhalb der RPA

Die diagrammatische Struktur der vollen Korrelationsfunktion ist im allgemeinen Fall sehr komplex. Es ist daher zweckmäßig einen *irreduziblen* Polarisationspropagator $\Pi^{\mu\nu}$ einzuführen, der nur solche Diagramme beinhaltet, die nicht durch zerschneiden

einer Austauschlinie in zwei separate Diagramme zerlegt werden können. Mit dieser Definition ergibt sich folgende Dyson-Gleichung für den Vektor-Mesonen Propagator

$$D_{\mu\nu}(k) = D_{\mu\nu}^0(k) - D_{\mu\alpha}^0(k)\Pi^{\alpha\beta}(k)D_{\beta\nu}(k) \quad (2.40)$$



Der Polarisations-Tensor $\Pi^{\mu\nu}$ kann in einen *longitudinalen* und (Π_L) einen *transversalen* Anteil (Π_T) zerlegt werden. Diese Zerlegung bietet nicht nur rechentechnisch einen Vorteil, sondern stellt eine Projektion auf die unabhängigen physikalischen Freiheitsgrade dar. In weiteren Rechnungen wählen wir stets eine Basis mit

$$k^\mu = (k^0, 0, 0, |\mathbf{k}|). \quad (2.41)$$

Damit folgen die Beziehungen für Π_L und Π_T :

$$\Pi_L = \Pi^{33}(k) - \Pi^{00}(k) \quad (2.42)$$

$$\Pi_T(k) = \Pi^{11}(k) = \Pi^{22}(k) \quad (2.43)$$

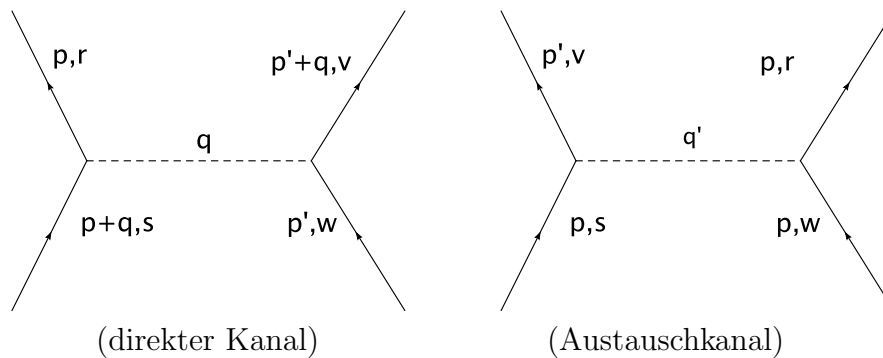
$$\Pi^{30}(k) = \Pi^{03}(k) = \frac{k_0|\mathbf{k}|}{k_\mu k^\mu} \Pi_L(k) \quad (2.44)$$

$$\Pi^{00}(k) = \frac{|\mathbf{k}|^2}{k_\mu k^\mu} \Pi_L(k) \quad (2.45)$$

$$\Pi^{33}(k) = \frac{k_0^2}{k_\mu k^\mu} \Pi_L(k). \quad (2.46)$$

2.4 Beiträge der Mesonen zur Gesamtwechselwirkung

Da in der Landau-Theorie sich alle an Streuprozessen beteiligten Zustände in der Nähe der Fermikante befinden, wird die Kinematik enorm vereinfacht. Infolge von Energie- und Impulserhaltung an jedem Vertex, sind nur folgende Prozesse erlaubt:



Damit setzt sich die Gesamtamplitude aus dem direkten und dem Austausch-Kanal zusammen:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\text{dir}} + \mathcal{M}^{\text{exc}}. \quad (2.47)$$

Die Austauschsterme lassen sich mit Hilfe der Fierz-Transformation (siehe Anhang) in direkte Terme umrechnen. Wir erhalten damit Ausdrücke in der Form

$$(\bar{u}(\mathbf{p})G_i u(\mathbf{p}))(\bar{u}(\mathbf{p}')G_i u(\mathbf{p}')),$$

wobei G_i 4x4 Matrizen sind ($G_i \in \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu \gamma_5, \gamma_5\}$). Im Folgenden werden wir die einzelnen Terme als $\mathcal{F}_S, \mathcal{F}_V, \mathcal{F}_T, \mathcal{F}_A$ bzw. $\mathcal{F}_P$ bezeichnen. Für $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = k_F$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_S &= \frac{M^2}{E_f^2} \\ \mathcal{F}_V &= \frac{M^2}{E_f^2} \left(1 + \frac{q^2}{2M^2} \right) \\ \mathcal{F}_T &= 2 \frac{M^2}{E_f^2} \left(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}' \left(1 + \frac{q^2}{2M^2} \right) + \frac{2(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}') - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p}') - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p})}{2M^2} \right) \\ \mathcal{F}_A &= \frac{M^2}{E_f^2} \left(-\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}' + \frac{2(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p}') - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}')(\boldsymbol{\sigma}' \mathbf{p}')}{2M^2} \right) \\ \mathcal{F}_P &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Wir wollen nun die Beiträge der einzelnen Mesonen zu der Gesamten Wechselwirkung berechnen

$$f = f^\sigma + f^\delta + f^\omega + f^\rho + f^\pi + f^\eta. \quad (2.49)$$

2.4.1 σ -Meson

Mit Hilfe der Fierz-Transformation und den obigen Definitionen folgt für den Austauschterm im σ -Kanal

$$\begin{aligned} f^\sigma &= \frac{1}{4} \frac{g_\sigma^2}{q^2 + m_\sigma^2} (-\mathcal{F}_S - \mathcal{F}_V - \frac{1}{2} \mathcal{F}_T + \mathcal{F}_A) \\ &= -\frac{1}{2E_F^2} \frac{g_\sigma^2}{q^2 + m_\sigma^2} (M^2 + \frac{q^2}{4} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\sigma}' (M^2 + \frac{q^2}{4})). \end{aligned} \quad (2.50)$$

2.4.2 δ -Meson

Da das δ -Meson ein isovektor Teilchen ist, beinhaltet es im Wechselwirkungsterm ein zusätzliches Produkt aus $\boldsymbol{\tau}$ Matrizen. Dieses lässt sich ebenfalls mit Hilfe der Fierz-Transformation umordnen. Es gilt

$$\boldsymbol{\tau}_{12} \boldsymbol{\tau}_{43} = \frac{1}{2} (3 - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}') \quad (2.51)$$

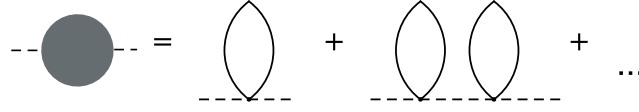


Abbildung 2.3: Effektive Teilchen-Loch irreduzible Wechselwirkung in RPA

und man erhält damit

$$f^{(\delta)} = f^{(\sigma)} \frac{1}{2} (3 - \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\tau}'). \quad (2.52)$$

2.4.3 ω -Meson

Wie bereits oben schon erwähnt muss bei Vektormesonen eine effektive Wechselwirkung bestimmt werden, die zusätzliche Antiteilchen-Teilchen Beiträge enthält. Dazu müssen die Antiteilchen-Teilchen Terme des Polarisationsensors in RPA berechnet werden (Abb. 2.2).

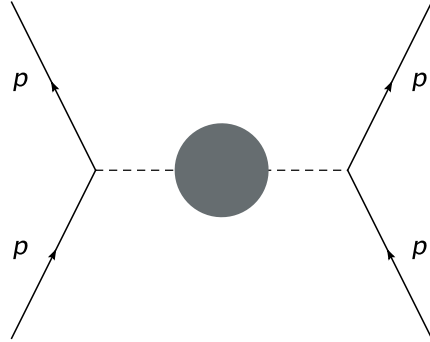


Abbildung 2.2: QT Wechselwirkung im Vektormeson-Kanal

Isoliert man die Teilchen-Antiteilchen-Beiträge, so ergibt sich für ein Ring-Diagramm der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi_0^{\mu\nu} = & i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{4E_p E_{p+q}} \left[\frac{S_1^{\mu\nu} (1 - \theta_p)}{(p_0 - E_p + i\epsilon)(p_0 + \omega + E_{p+q} - i\epsilon)} \right. \\ & \left. + \frac{S_2^{\mu\nu} (1 - \theta_{p+q})}{(p_0 + \omega - E_{p+q} + i\epsilon)(p_0 + E_p - i\epsilon)} \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

wobei $\theta_p \equiv \theta(p_F - |\mathbf{p}|)$ und

$$S_1^{\mu\nu} = \text{Tr} [\gamma^\mu (E_p \gamma_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} + M^*) \gamma^\nu (E_{p+q} \gamma_0 + (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \boldsymbol{\gamma} - M^*)]$$

$$\mathcal{S}_2^{\mu\nu} = \text{Tr} [\gamma^\mu (E_{p+q} \gamma_0 - (\mathbf{p} + \mathbf{q}) \boldsymbol{\gamma} + M^*) \gamma^\nu (E_p \gamma_0 + (\mathbf{p}) \boldsymbol{\gamma} - M^*)]$$

gelten soll. Für den Fall niedriger Anregungen wird der Grenzwert $q \rightarrow 0$ berechnet. Unter Vernachlässigung der Vakuumbeiträge und Ausnutzung des Residuenkalküls für die Integration in der komplexen p_0 Ebene folgt damit

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{|q| \rightarrow 0} \Pi^{\mu\nu} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\theta_p}{4E_p^3} \text{Tr} [\gamma^\mu (E_p \gamma_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} + M^*) \gamma^\nu (E_p \gamma_0 + \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} - M^*)]. \quad (2.54)$$

Durch die Auswertung der Spur sieht man sofort, dass die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Polarisationsensors Π^{ii} sind. Unter Ausnutzung von Rotationsinvarianz erhalten wir in diesem Spezialfall den analytischen Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi^{ii} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\theta_p}{4E_p^3} 4(2M^{*2} + \frac{4}{3}p^2) \\ &= \frac{1}{3\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{p^2 dp}{E_p^3} (3M^{*2} + 2p^2) = \frac{1}{3\pi^2} \frac{k_F}{E_F}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Folglich erhält man für unterschiedliche Protonen- und Neutronen-Dichten

$$\begin{aligned} \Pi^{ii} &= \Pi^{ii}(p_{F_n}, M_n^*) + \Pi^{ii}(p_{F_p}, M_p^*) \\ &= \frac{\rho_n}{E_{F_n}} + \frac{\rho_p}{E_{F_p}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die effektive Wechselwirkung ergibt sich aus Diagramm (2.2)

$$f_{pp'} = V^2 \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p') + V^2 \bar{u}(p) \gamma^i u(p) \sum_{n=1}^{\infty} (V^2 \Pi^{ii})^n \bar{u}(p') \gamma_i u(p') \quad (2.57)$$

V^2 steht hier für den Wechselwirkungsvertex, der in Modellen mit dichteunabhängigen Kopplungskonstanten g_ω^2/m_ω^2 beträgt. Eine Dichteabhängigkeit führt hingegen auf zusätzliche Rearrangementanteile.

2.4.4 ρ -Meson

Die Berechnung der effektiven Wechselwirkung für das ρ -Meson ist analog. Allerdings muss beachtet werden, dass das ρ -Meson Isospin trägt und somit der Polarisationsensor aus Antineutron-Proton ($\bar{N}P$) bzw. Antiproton-Neutron ($\bar{P}N$) Anteilen besteht.

$$\begin{aligned} \Pi_{\bar{N}P}^{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} \left[\frac{\tilde{\mathcal{S}}_1^{\mu\nu} (1 - \theta_p)}{E_p^N E_{p+q}^P (p_0 - E_p^N + i\epsilon)(p_0 + \omega + E_{p+q}^P - i\epsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{\mathcal{S}}_2^{\mu\nu} (1 - \theta_{p+q})}{E_p^P E_{p+q}^N (p_0 + \omega - E_{p+q}^N + i\epsilon)(p_0 + E_p^P - i\epsilon)} \right]. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dabei bedeutet $E_p^{N/P} = \sqrt{M_{N/P}^{*2} + \mathbf{p}^2}$. Dementsprechend beinhalten die Spurterme die effektiven Proton und Neutronmassen:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_1^{\mu\nu} &= \text{Tr} [\gamma^\mu (E_p^N \gamma_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} + M_N^*) \gamma^\nu (E_{p+q}^P \gamma_0 + (\mathbf{p} + \mathbf{q})\boldsymbol{\gamma} - M_P^*)] \\ \tilde{\mathcal{S}}_2^{\mu\nu} &= \text{Tr} [\gamma^\mu (E_{p+q}^N \gamma_0 - (\mathbf{p} + \mathbf{q})\boldsymbol{\gamma} + M_N^*) \gamma^\nu (E_p^P \gamma_0 + (\mathbf{p})\boldsymbol{\gamma} - M_P^*)].\end{aligned}$$

Für den Polarisationsensor im ρ -Kanal gilt somit

$$\Pi = \Pi_{\bar{N}P} + \Pi_{\bar{P}N} \quad (2.59)$$

Damit ist die effektive Wechselwirkung im direkten ρ -Kanal gegeben durch

$$f_{pp'}^{(\rho)} = V^2 \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p') + \bar{u}(p) \gamma^\mu u(p) \left(\sum_{n=1}^{\infty} V^2 \Pi^{\mu\mu} \right) \bar{u}(p') \gamma_\mu u(p'). \quad (2.60)$$

2.5 Landau-Migdal-Parameter im DDRH Modell

Die Energiedichte lässt sich anhand der nullten Komponente des Energie-Impuls-Tensors ausdrücken. In unserem Modell ist dieser durch Gleichung (1.57) gegeben und wir erhalten damit folgenden Ausdruck

$$E = T^{00} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} (n_B^2 + \mathbf{j}_B^2) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} (n_3^2 + \mathbf{j}_3^2) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s^2 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} n_{(3)s}^2 + \sum_i n_i E_i^*. \quad (2.61)$$

Hierbei benutzen wir folgende Definitionen für die einzelnen Dichten bzw. Ströme

$$\begin{aligned}n_B &= \sum_i n_i, & n_s &= \sum_i n_i \frac{M_i^*}{E_i^*} \\ n_{(3)} &= \sum_i n_i \tau_i, & n_{(3)s} &= \sum_i n_i \tau_i \frac{M_i^*}{E_i^*},\end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{j}_B = \sum_i n_i \frac{\mathbf{k}_i^*}{E_i^*}, \quad \mathbf{j}_{(3)} = \sum_i n_i \frac{\tau_i \mathbf{k}_i^*}{E_i^*}. \quad (2.63)$$

$n_i = n_i(k_i, \tau_i, \sigma_i)$ steht für die Besetzungszahl der Quasinukleonen und $E_i^* = \sqrt{\mathbf{k}^{*2} + M_i^{*2}}$ ist die Energie des i -ten Teilchens. Die effektiven Massen M_i^* sind gegeben durch

$$M_i^* = M - \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} n_s - \tau_i \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} n_{(3)s}. \quad (2.64)$$

Aus der ersten Variation der Energiedichte erhalten wir für die QT-Energien

$$\varepsilon_i = E_i^* + \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} n_B + \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \tau_i n_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial n_i} \frac{n_B^2}{m_\omega^2} + \frac{\partial \Gamma_\rho^2}{\partial n_i} \frac{n_{(3)}^2}{m_\rho^2}}_{\varepsilon_i^r}. \quad (2.65)$$

Aufgrund der Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten ergibt sich ein zusätzlicher Beitrag ε_i^r zur herkömmlichen QT-Energie. ε_i^r enthält nur Rearrangement-Beiträge vom ω - und ρ -Kanal, da sich die Beiträge von den isoskalaren Mesonen wegheben.

Die QT-Wechselwirkung f_{ij} erhalten wir wie oben beschrieben aus der Variation der QT-Energie.

$$\begin{aligned} f_{ij} = & \frac{1}{m_\omega^2} \left[\Gamma_\omega^2 - \Gamma_\omega^2 \frac{\mathbf{k}_i^*}{E_i^*} \frac{\partial \mathbf{j}_B}{\partial n_j} + 3 \frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial n_i} n_B + \frac{\partial^2 \Gamma_\omega^2}{\partial n_i \partial n_j} n_B^2 \right] \\ & + \frac{1}{m_\rho^2} \left[\Gamma_\rho^2 \tau_i \tau_j - \Gamma_\rho^2 \frac{\mathbf{k}_i^*}{E_i^*} \frac{\partial \mathbf{j}_{(3)}}{\partial n_j} + \frac{\partial \Gamma_\rho^2}{\partial n_i} (\tau_i + 2\tau_j) n_{(3)} + \frac{\partial^2 \Gamma_\rho^2}{\partial n_i \partial n_j} n_{(3)}^2 \right] \\ & + M_i^* \frac{\partial M_i^*}{\partial n_j} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Im Falle unendlicher Kernmaterie verschwinden alle Dreier-Ströme und es gilt $\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$. Nutzen wir weiterhin aus, dass in der Landau-Theorie Quasiteilchen gleichverteilt sind, so folgt zusammen mit (2.64) und (2.63)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i^*}{\partial n_j} = & \left[-\frac{M_j^*}{E_j^*} \left(\frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} + \tau_i \tau_j \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \right) - \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial n_j} \frac{n_s}{m_\sigma^2} - \frac{\partial \Gamma_\delta^2}{\partial n_j} \frac{n_{3s}}{m_\delta^2} \tau_i \right] \kappa_i \\ & - \left(\frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial n_j} \frac{n_s}{m_\sigma^2} + \frac{\partial \Gamma_\delta^2}{\partial n_j} \tau_i \frac{n_{(3)s}}{m_\delta^2} \right) \kappa_i \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{j}_B}{\partial n_j} &= \left(\frac{\mathbf{k}_j}{E_j} - \alpha_3^\rho \beta \frac{\tau_j \mathbf{k}_j}{E_j} \right) \gamma \\ \frac{\partial \mathbf{j}_{(3)}}{\partial n_j} &= \tau_j \frac{\mathbf{k}_j}{E_j} \beta - \alpha_3^\omega \beta \left(\frac{\mathbf{k}_j}{E_j} - \alpha_3^\rho \beta \frac{\tau_j \mathbf{k}_j}{E_j} \right) \gamma, \end{aligned} \quad (2.68)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \left[1 + \sum_l \frac{n_l}{E_l^*} \left(\frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \mathbf{k}_l^2 + \tau_l \tau_i \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \mathbf{k}_l^2 \right) \right]^{-1} \\ \alpha^\omega &= \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \sum_i \frac{n_i}{E_i^3} \left(\frac{2}{3} \mathbf{k}_i^2 + M_i^{*2} \right) \\ \alpha^\rho &= \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \sum_i \frac{n_i}{E_i^3} \left(\frac{2}{3} \mathbf{k}_i^2 + M_i^{*2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_3^\omega &= \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \sum_i \tau_i \frac{n_i}{E_i^3} \left(\frac{2}{3} \mathbf{k}_i^2 + M_i^{*2} \right) \\
 \alpha_3^\rho &= \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \sum_i \tau_i \frac{n_i}{E_i^3} \left(\frac{2}{3} \mathbf{k}_i^2 + M_i^{*2} \right) \\
 \beta &= (1 + \alpha^\rho)^{-1} \\
 \gamma_B &= (1 + (\alpha^\omega - \alpha_3^\rho \alpha_3^\omega \beta))^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Setzt man das in Gleichung (2.66) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 f_{ij} &= \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} + \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \tau_i \tau_j \beta \\
 &\quad - \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{M_i^* M_j^*}{E_i E_j} \kappa_i - \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \frac{M_i^* M_j^*}{E_i E_j} \tau_i \tau_j \kappa_i \\
 &\quad - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{E_i E_j} \left(\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} - \alpha_3^\rho \beta \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \tau_j - \alpha_3^\omega \beta \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \tau_i \right) \gamma - \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{\tau_i \tau_j \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{E_i E_j} \beta (1 + \beta \alpha_3^\rho \alpha_3^\omega \gamma) \\
 &\quad + f_{ij}^r,
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

mit dem Rearrangementanteil

$$\begin{aligned}
 f_{ij}^r &= 2 \frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{m_\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_\omega^2}{\partial \rho^2} \frac{\rho^2}{m_\omega^2} - M_i^* \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho} \frac{n_s}{m_\sigma^2} \kappa_i \\
 &\quad + \frac{\partial \Gamma_\rho^2}{\partial \rho} \frac{n_{(3)}}{m_\rho^2} (\tau_i + \tau_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_\rho^2}{\partial \rho^2} \frac{n_{(3)}^2}{m_\rho^2} - M_i^* \frac{\partial \Gamma_\delta^2}{\partial \rho} \frac{n_{(3)s}}{m_\delta^2} \tau_i \kappa_i \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{n_s^2}{m_\sigma^2} \frac{\partial^2 \Gamma_\sigma^2}{\partial n_i \partial n_j} - \frac{n_s}{m_\sigma^2} \frac{\partial n_s}{\partial n_j} \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial n_i} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{n_{3s}^2}{m_\delta^2} \frac{\partial^2 \Gamma_\delta^2}{\partial n_i \partial n_j} - \frac{n_s}{m_\delta^2} \frac{\partial n_s}{\partial n_j} \frac{\partial \Gamma_\delta^2}{\partial n_i}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass in der Hartree-Näherung die Vertex-Funktionale durch Funktionen des Erwartungswertes von $\hat{\rho}$ ersetzt werden können $\langle \Gamma_\alpha(\hat{\rho}) \rangle = \Gamma_\alpha(\rho)$ [HKL01]. Damit folgt unmittelbar ($\rho \equiv n_B$)

$$\frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial n_i} = \frac{\partial \Gamma_\alpha}{\partial \rho} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial n_i}}_{=1}.$$

Der erste Term von Gleichung (2.70) steht für die direkte Wechselwirkung von Vektormesonen mit Energie und Impuls gleich Null. Der zweite lässt sich auf den Austausch von skalaren Mesonen zurückführen, wobei der dritte Term sich als eine durch mikroskopische Ströme induzierte *magnetische* Wechselwirkung zwischen den Quasiteilchen interpretieren lässt. Für symmetrische Kernmaterie verschwindet die skalare

und die isoskalare Dichte ($n_{(3)} = n_{(3)s} = 0$) sowie $\alpha_3^{\omega/\rho}$. Für diesen Spezialfall vereinfacht sich Gleichung (2.70) zu ($M_i^* \equiv M^* \forall i$)

$$\begin{aligned}
 f_{ij} = & \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} - \frac{\mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{E_i E_j} \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \gamma + \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \tau_i \tau_j \beta \\
 & - \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{\tau_i \tau_j \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j}{E_i E_j} \beta \\
 & - \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{M^{*2}}{E_j} \kappa - \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \frac{M^{*2}}{E_j} \tau_i \tau_j \kappa \\
 & + 2 \frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{m_\omega^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Gamma_\omega^2}{\partial \rho^2} \frac{\rho^2}{m_\omega^2} - M^* \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho} \frac{n_s}{m_\sigma^2} \kappa_i \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\rho_s^2}{m_\sigma^2} \frac{\partial^2 \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho^2} - \frac{\rho_s}{m_\sigma^2} \frac{\partial n_s}{\partial n_j} \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho}.
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Demnach folgt für die Landau-Migdal-Parameter

$$\begin{aligned}
 f_l^{ij} = & \frac{(2l+1)}{2} \int f_{ij} |_{|\mathbf{k}_i|=|\mathbf{k}_j|=k_F} P_l(\cos \theta_{ij}) d \cos \theta_{ij} \\
 f_0^{ij} = & \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} - \frac{M^{*2}}{E_F} \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \kappa + \tau_i \tau_j \left(\frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \beta - \frac{M^{*2}}{E_F} \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \kappa \right) \\
 & + 3 \underbrace{\frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{m_\omega^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\omega^2}{\partial \rho^2} \frac{\rho^2}{m_\omega^2} - M^* \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho} \frac{n_s}{m_\sigma^2} \kappa}_{\equiv f_0^r}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

$$f_1^{ij} = -\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{k_F^2}{E_F^2} \gamma - \tau_i \tau_j \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{k_F^2}{E_F^2} \beta. \tag{2.74}$$

Die Rearrangementterme treten folglich nur bei f_0 auf. Vergleicht man dieses Ergebnis mit Rechnungen mit konstanten Vertex-Termen und ohne das δ -Meson [Mat81], so stellt man fest, dass f_1^{ij} im Falle symmetrischer Kernmaterie mit diesen Ergebnissen übereinstimmt. Das δ -Meson und die jeweiligen Rearrangement -Beiträge spielen somit nur bei f_0^{ij} eine Rolle. Dabei wirkt sich der δ -Kanal nur auf den iso-antisymmetrischen Landau Parameter $f_0' \equiv \frac{1}{2}(f_0^{ij}|_{\tau_i=\tau_j} - f_0^{ij}|_{\tau_i=-\tau_j})$ aus:

$$f_0' = \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \beta - \frac{M^{*2}}{E_F} \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \kappa. \tag{2.75}$$

Für den allgemeinen Fall von isospin-asymmetrischer Kernmaterie folgt

$$f_0 = \frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} - \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{M_c^+}{E_F^n E_F^p} - \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \frac{M_c^-}{E_F^n E_F^p} + 3 \frac{\partial \Gamma_\omega^2}{\partial \rho} \frac{\rho}{m_\omega^2} + \frac{\partial^2 \Gamma_\omega^2}{\partial \rho^2} \frac{\rho^2}{m_\omega^2} - M_{np}^+ \frac{\partial \Gamma_\sigma^2}{\partial \rho} \frac{n_s}{m_\sigma^2}$$

$$+\frac{\partial^2 \Gamma_\rho^2}{\partial \rho^2} \frac{n_{(3)}^2}{m_\rho^2} - M_{pn}^- \frac{\partial \Gamma_\delta^2}{\partial \rho} \frac{n_{(3)s}}{m_\delta^2} \quad (2.76)$$

$$f'_0 = \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \beta - \frac{\Gamma_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{M_c^-}{E_F^n E_F^p} - \frac{\Gamma_\delta^2}{m_\delta^2} \frac{M_c^+}{E_F^n E_F^p} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{1}{(E_F^p E_F^n)^2} (\mathcal{K}_+^2 - \alpha_3^\rho \beta k_{np}) \gamma \\ &\quad - \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{1}{(E_F^p E_F^n)^2} (\mathcal{K}_-^2 (\beta(1 + \beta \alpha_3^\rho \alpha_3^\omega \gamma)) - \alpha_3^\omega \beta \gamma k_{np}) \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} f'_1 &= -\frac{\Gamma_\omega^2}{m_\omega^2} \frac{1}{(E_F^p E_F^n)^2} (\mathcal{K}_-^2 - \alpha_3^\rho \beta k_{np}) \gamma \\ &\quad - \frac{\Gamma_\rho^2}{m_\rho^2} \frac{1}{(E_F^p E_F^n)^2} (\mathcal{K}_+^2 (\beta(1 + \beta \alpha_3^\rho \alpha_3^\omega \gamma)) - \alpha_3^\omega \beta \gamma k_{np}) \end{aligned} \quad (2.79)$$

mit

$$\begin{aligned} M_c^\pm &= M_p(E_F^n M_p \pm E_F^p M_n) \kappa_p + M_n(M_n E_p \pm M_p E_n) \kappa_n \\ M_{np}^\pm &= \frac{1}{2} (M_n \kappa_n \pm M_p \kappa_p) \\ \mathcal{K}_\pm &= \frac{1}{4} (E_F^n k_{F_p} \pm E_F^p k_{F_n}) \\ k_{np} &= \frac{1}{4} (E_F^p k_{F_n} - E_F^n k_{F_p}) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Dabei haben wir zwischen der iso-symmetrischen (f_{ij}^s) bzw. -antisymmetrischen (f_{ij}^a) QT-Wechselwirkung unterschieden [PN66]:

$$\begin{aligned} f_{ij}^s &\equiv \frac{1}{4} (f_{ij}|\tau_i=\tau_j=1 + f_{ij}|\tau_i=\tau_j=-1 + f_{ij}|\tau_i=-1, \tau_j=1 + f_{ij}|\tau_i=1, \tau_j=-1) \\ f_{ij}^a &\equiv \frac{1}{4} (f_{ij}|\tau_i=\tau_j=1 + f_{ij}|\tau_i=\tau_j=-1 - f_{ij}|\tau_i=-1, \tau_j=1 - f_{ij}|\tau_i=1, \tau_j=-1). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Man sieht auch, dass das δ -Meson sowohl zu f_0 als auch zu f'_0 beiträgt. Der Vergleich der LMP mit dem Ergebnis für Isospin-symmetrische Kernmaterie zeigt, dass aufgrund der unterschiedlichen effektiven Massen zwischen Neutron und Proton zusätzliche Beiträge in f_0 und f'_0 auftreten. Dies trifft bei Modellen mit gleichen effektiven Massen natürlich nicht zu, und das skalare-isoskalare Meson trägt dort nur zum symmetrischen LMP f_0 und das skalare-isovektor Meson nur zum iso-antisymmetrischen LMP f'_0 bei.

2.6 Diskussion der Ergebnisse

Wir wollen nun die Beiträge der einzelnen Mesonen zu den Landau-Migdal Parametern untersuchen und die Ergebnisse für verschiedene Modelle diskutieren. Abbildung 2.4 zeigt die LMP in Abhängigkeit von den einzelnen Mesonen-Beiträgen bei $Z = 0$. Betrachten wir zunächst F_0 , so können wir deutlich den repulsiven Charakter vom ω -Meson und den attraktiven vom skalaren σ -Meson erkennen. Dabei überwiegt im Bereich kleiner Dichten ($\rho < 0.12 \text{ fm}^{-3}$) die langreichweitige Attraktion, während bei hohen Dichten die Wechselwirkung von der Repulsiven Kraft des isoskalarenvektor Mesons dominiert. Dieser Effekt verstärkt sich mit steigender Symmetrie (Abb. 2.5). Der Vergleich der durchgezogenen mit der gestrichelten Kurve zeigt, dass die Rearrangement-Terme insbesondere bei hohen Dichten insgesamt einen zusätzlichen repulsiven Anteil zur Wechselwirkung beitragen. Das δ -Meson hingegen hat nur einen geringen Einfluss auf F_0 (punktiert-gestrichelte Kurve) und liefert im Bereich größerer Dichten eine zusätzliche attraktive Kraft bei.

Beim isospin-asymmetrischen Landau-Parameter F'_0 ist der vom δ -Meson kommende attraktive Anteil hingegen nicht mehr zu vernachlässigen. Dieser führt insgesamt auf deutlich kleinere Werte von F'_0 . Dieser Charakter zeigt sich auch deutlich bei F'_1 und F'_1 .

Abbildungen 2.6 und 2.7 stellen die Ergebnisse der LMP für verschiedene Modelle gegenüber. Es zeigt sich, dass die impulskorrigierte Parametrisierung (DDRH-MC) für F_0 insbesondere bei hohen Dichten deutlich größere Werte ergibt, als die ursprüngliche DDRH-1 Parametrisierung. Dieser Effekt lässt sich auf die deutlich höheren Rearrangement-Beiträge im DDRH-MC Modell zurückführen. Auffallend ist auch das grundsätzlich unterschiedliche Verhalten der isospin-asymmetrischen Parameter F'_1 und F'_0 . Während bei der phänomenologischen Parametrisierung von Vretenar und Ring (DD-ME1 [Vre05]), bei der das δ -Meson nicht enthalten ist, F'_0 bei steigender Dichte abfällt, ist bei Rechnungen mit DDRH-1 und DDRH-MC Parametern ein Anstieg zu sehen.

Zum Schluss wollen wir noch die Ergebnisse für die Symmetrieenergie, Gleichung (2.31), vergleichen. Da a_4 von F'_0 abhängt, liefert der δ -Meson-Austausch wichtige Beiträge zu dieser Größe. Man sieht daher den deutlichen Unterschied zwischen Modellen ohne δ -Meson und solchen, in denen das Delta-Meson als Austauscheteilchen enthalten ist (Abbildung 2.8). Für unser Modell mit impulskorrigierten Vertizes erhält bei der Sättigungsdichte $\rho_0 = 0.18 \text{ fm}^{-3}$ ist $a_4 \approx 27 \text{ MeV}$.

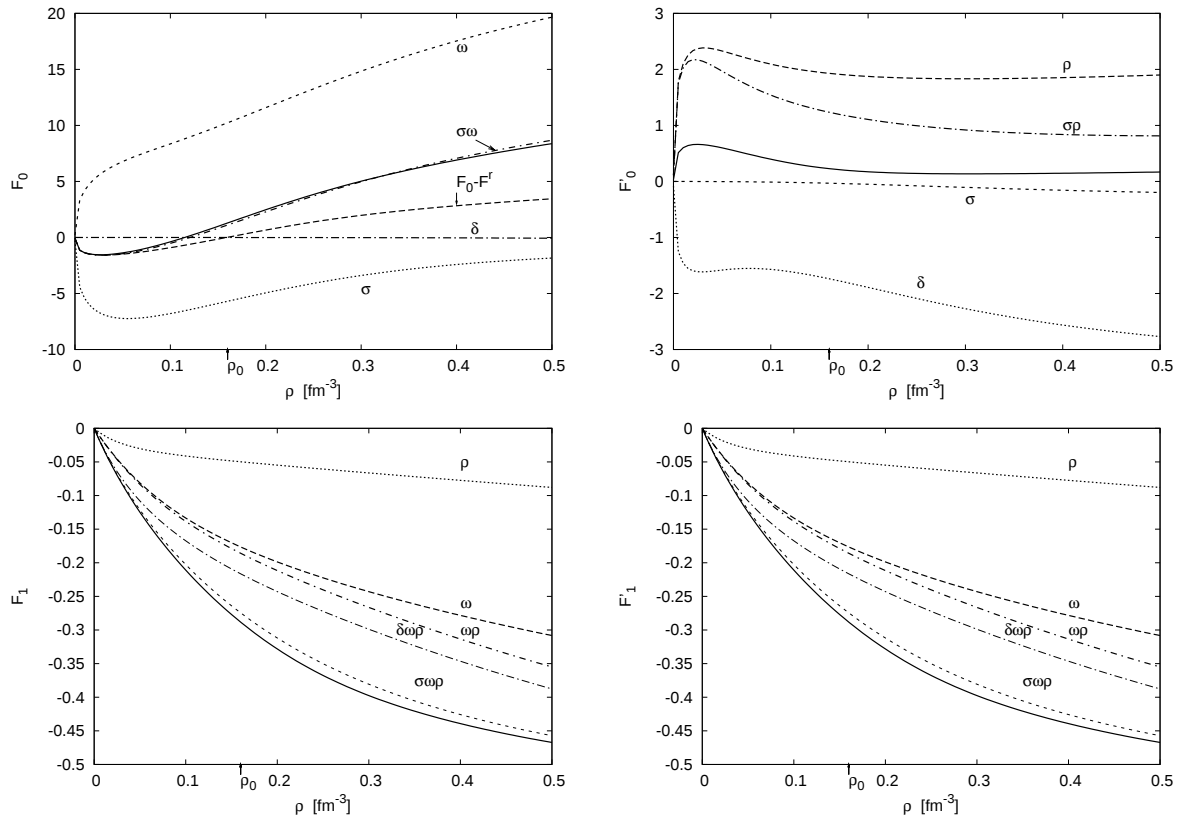


Abbildung 2.4: Die Beiträge der einzelnen Mesonen zu den jeweiligen LMP. Die durchgezogene Kurve enthält dabei jeweils alle Kanäle

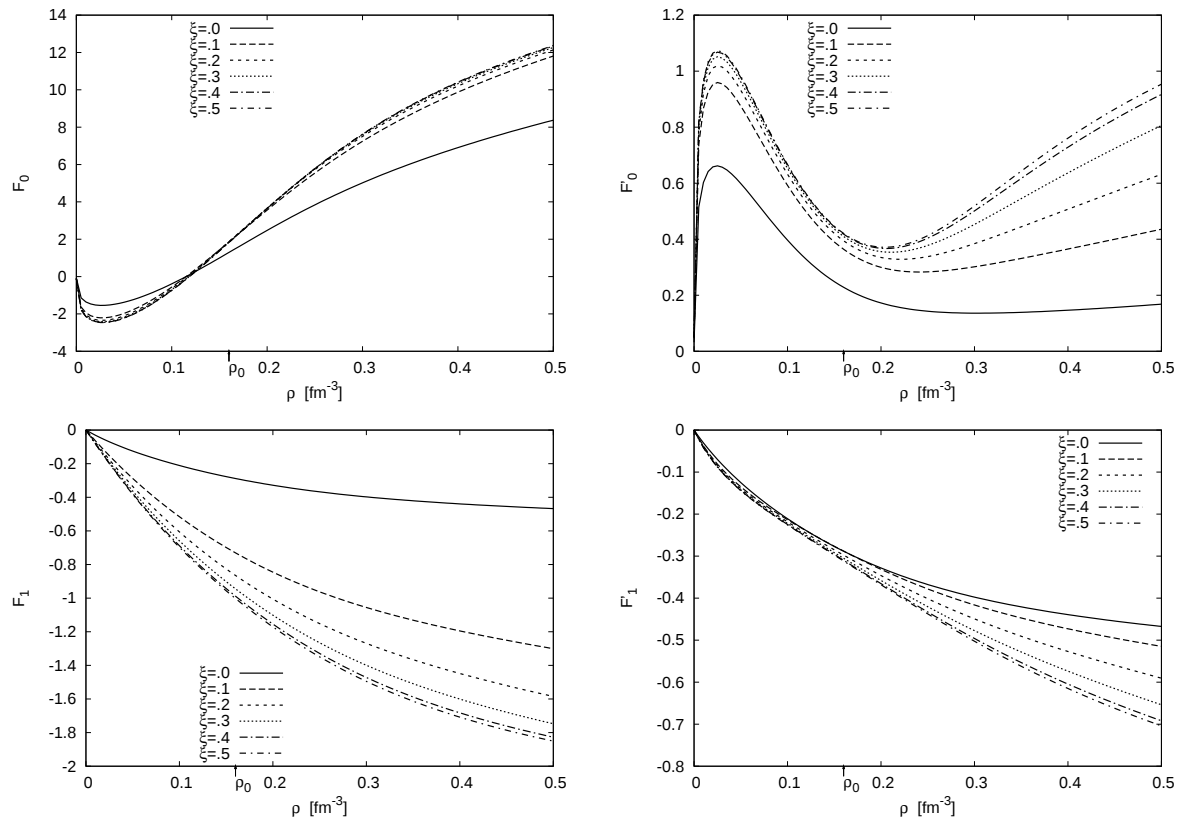


Abbildung 2.5: Die Isospin- Abhängigkeit der LMP. $\xi = Z/A$

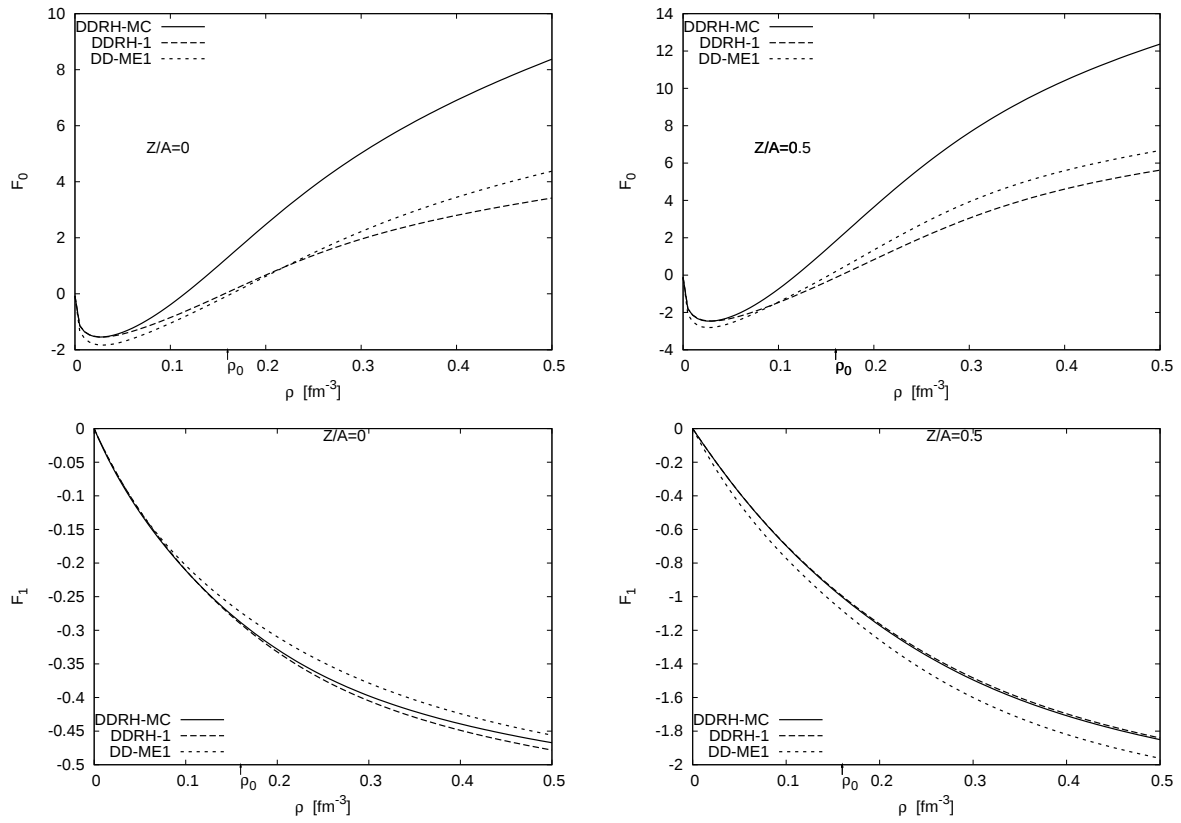


Abbildung 2.6: F_0 und F_1 im Vergleich mit verschiedenen dichteabhängigen Modellen.

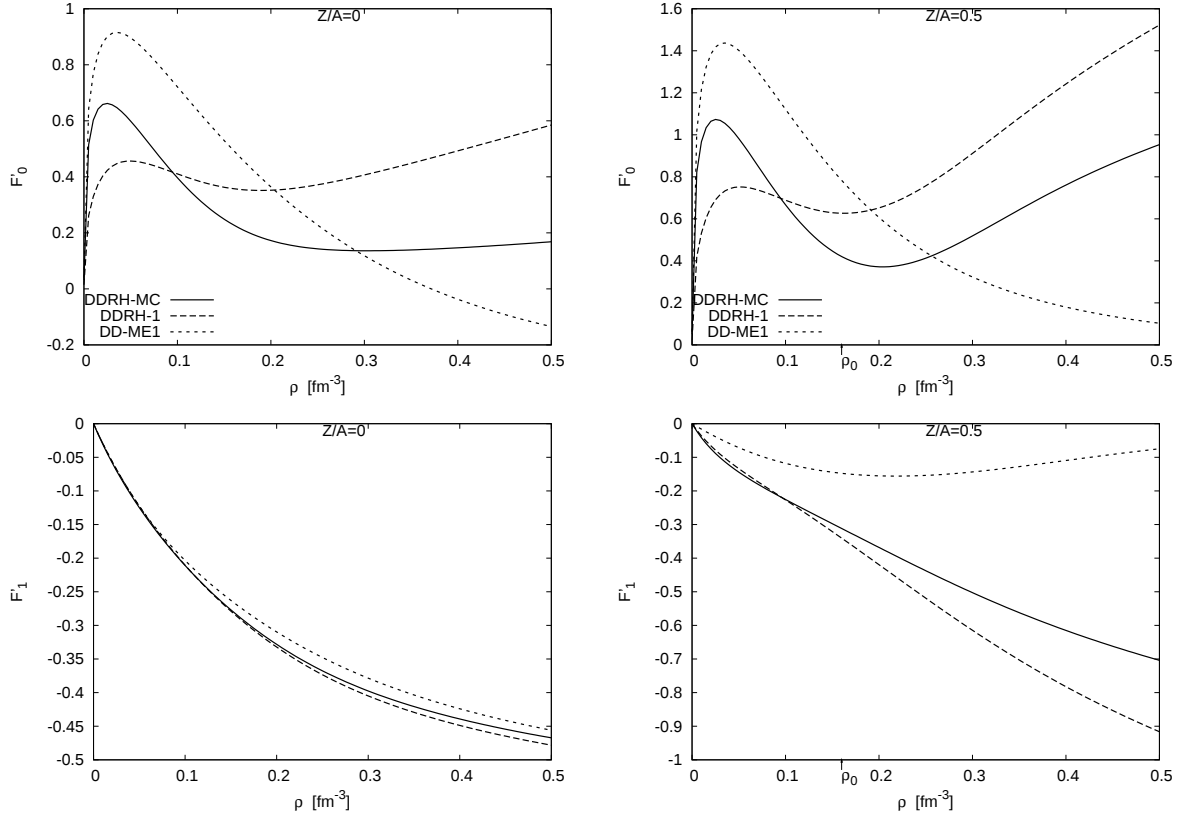


Abbildung 2.7: F'_0 und F'_1 im Vergleich mit verschiedenen dichteabhängigen Modellen.

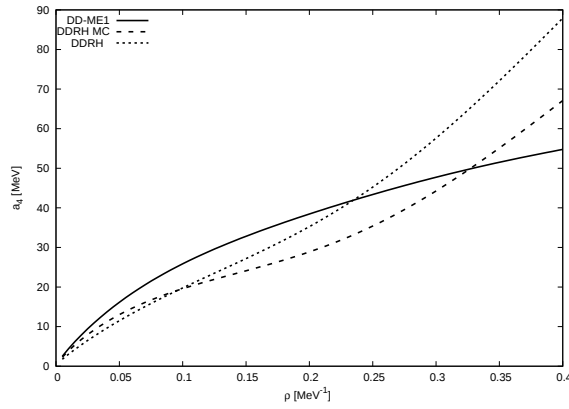


Abbildung 2.8: Die Symmetrienergie in Abhängigkeit von der Dichte. Gezeigt werden Rechnungen für verschiedene Parametrisierungen. Der Beitrag des δ -Mesons zur Symmetrie-Energie ist dabei auffallend stark.

3 Relativistische RPA

Die Mittelfeldnäherung geht von einem Vielteilchensystem unkorrelierter Nukleonen aus. Damit lassen sich Grundzustandseigenschaften sehr gut beschreiben. Will man jedoch zu angeregten Zuständen übergehen, so müssen Korrelationseffekte berücksichtigt werden. In der *Random-Phase*-Näherung werden Anregungen auf dem Grundzustand mittels Teilchen-Loch Zuständen berechnet. Die Beschreibung solcher Zustände führt auf die Berechnung von Ring-Diagrammen, wobei das *Kohn-Sham* Theorem die Garantie dafür liefert, dass die Anpassung der Modellparameter an die Grundzustandseigenschaften der Kernmaterie auch für angeregte Zustände gültig ist. In diesem Abschnitt soll der relativistische RPA Formalismus vorgestellt und anschließend die Ergebnisse für verschiedene Modelle miteinander verglichen werden.

3.1 Herleitung der RRPA

Die relativistischen RPA-Gleichungen werden aus der Antwort (engl. Response) der Dichtematrix auf eine äußere Störung abgeleitet. Analog zum nicht-relativistischen Fall stellt die RPA einen Grenzfall der zeitabhängigen relativistischen Mittelfeld-Näherung dar, deren Herleitung hier skizziert werden soll [Vre05]. Man nimmt an, dass die äußere Störung von einem harmonischen zeitabhängigen Einteilchenoperator

$$\hat{F}(t) = \hat{F}e^{-i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{i\omega t} \quad (3.1)$$

erzeugt wird. In zweiter Quantisierung lässt er sich schreiben als

$$\hat{F}(t) = \sum_{kl} f_{kl}(t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_l. \quad (3.2)$$

Betrachten wir nun die Einteilchendichtematrix

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.3)$$

wobei die Dirac-Spinoren ψ_i der Bewegungsgleichung des zeitabhängigen relativistischen Hartree-Fock-Problems genügen müssen:

$$i\partial_t \psi_i = \hat{h}(\hat{\rho}) \psi_i. \quad (3.4)$$

$\hat{h}$ ist der Dirac-Hamilton Operator ($\hat{h}(\hat{\rho}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p} + \mathbf{V}) + \beta m + \hat{V}$) mit dem relativistischen Potential $\hat{V}_{kl} = \sum_{mn} V_{knlm} \rho_{mn}$. Ganz analog zum nicht-relativistischen Fall folgt für die Bewegungsgleichung des Dichteoperators unter Einbeziehung des Störfeldes

$$i\partial_t = [\hat{h}(\hat{\rho}) + \hat{F}, \hat{\rho}]. \quad (3.5)$$

Für den Dichteoperator gilt die Beziehung $\hat{\rho}^2(t) = \hat{\rho}(t)$. Dies bedeutet insbesondere, dass die Eigenwerte der stationären Grundzustandsdichte $\hat{\rho}^0$ entweder 0 (unbesetzte Zustände) oder 1 (besetzte Zustände) sind. Wir dürfen nicht vergessen, dass, im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall, auch Zustände negativer Energie berücksichtigen werden müssen, da diese ebenfalls Lösungen der Dirac-Gleichung sind. Um das Problem zu vereinfachen, geht man von einem leeren Dirac-See aus (No-Sea-Approximation). Der Eigenwert der Dichtematrix für diese Zustände ist in diesem Fall daher 0. Demnach folgt für die Diagonaldarstellung des Dichteoperators im Grundzustand:

$$\rho_{kl}^0 = \delta_{kl} \rho_k = \begin{cases} 0 & \text{für unbesetzte Zustände oberhalb des Fermisees} \\ 1 & \text{für besetzte Zustände innerhalb des Fermisees} \\ 0 & \text{für unbesetzte Zustände im Diracsee.} \end{cases}$$

Sei $\hat{\rho}^0$ die Dichtematrix im stationären Grundzustand, dann ist im Grenzfall kleiner Amplituden eine Entwicklung von $\hat{\rho}$ um $\hat{\rho}^0$ bis zur ersten Ordnung eine gute Näherung,

$$\hat{\rho} \approx \hat{\rho}^0 + \delta\hat{\rho}(t).$$

Dabei sind die einzigen nichtverschwinden Elemente von $\delta\hat{\rho}$: $\delta\hat{\rho}_{ph}, \delta\hat{\rho}_{hp}, \delta\hat{\rho}_{\alpha h}$ und $\delta\hat{\rho}_{h\alpha}$ [Vre05]. Man erhält diese durch die Lösung von Gleichung (3.5). In linearer Näherung vereinfacht sich diese zu

$$i\partial_t \delta\hat{\rho} = [\hat{h}^0, \delta\hat{\rho}] + \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho} \delta\rho, \hat{\rho}^0 \right] + [\hat{F}, \hat{\rho}^0], \quad (3.6)$$

mit

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho} \delta\rho = \sum_{ph} \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho_{ph}} \delta\rho_{ph} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho_{hp}} \delta\rho_{hp} \right] + \sum_{\alpha h} \left[\frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho_{\alpha h}} \delta\rho_{\alpha h} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \rho_{h\alpha}} \delta\rho_{h\alpha} \right].$$

Ausgehend von der Tatsache, dass $\hat{h}_{kl}^0 = \delta_{kl} \varepsilon_k$ in der stationären Basis diagonal ist, erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (\omega - \varepsilon_p + \varepsilon_h) \delta\rho_{ph} &= f_{ph} + \sum_{p'h'} (V_{ph'hp'} \delta\rho_{p'h'} + V_{pp'h'h'} \delta\rho_{h'p'}) \\ &+ \sum_{\alpha'h'} (V_{ph'h\alpha'} \delta\rho_{\alpha'h'} + V_{p\alpha'h'h'} \delta\rho_{h'\alpha'}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\omega - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_h) \delta \rho_{\alpha h} &= f_{\alpha h} + \sum_{h'} (V_{ph'h p'} \delta \rho_{p' h'} + V_{pp' h h'} \delta \rho_{h' p'}) \\
 &\quad + \sum_{\alpha' h'} (V_{ph' h \alpha'} \delta \rho_{\alpha' h'} + V_{p \alpha' h h'} \delta \rho_{h' \alpha'}) \\
 (\omega - \varepsilon_h + \varepsilon_p) \delta \rho_{hp} &= f_{hp} + \sum_{p' h'} (V_{hh' p p'} \delta \rho_{p' h'} + V_{hp' p h'} \delta \rho_{h' p'}) \\
 &\quad + \sum_{\alpha' h'} (V_{hh' p \alpha'} \delta \rho_{\alpha' h'} + V_{h \alpha' p h'} \delta \rho_{h' \alpha'}) \\
 (\omega - \varepsilon_h + \varepsilon_\alpha) \delta \rho_{h\alpha} &= f_{h\alpha} + \sum_{p' h'} (V_{hh' \alpha p'} \delta \rho_{p' h'} + V_{hp' \alpha h'} \delta \rho_{h' p'}) \\
 &\quad + \sum_{\alpha' h'} (V_{hh' \alpha \alpha'} \delta \rho_{\alpha' h'} + V_{h \alpha' \alpha h'} \delta \rho_{h' \alpha'})
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

oder in Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} X \\ -Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Dabei sind die RRPA Matrizen A und B gegeben durch

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} \omega_{ph} \delta_{pp'} \delta_{hh'} & 0 \\ 0 & \omega_{\alpha h} \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{hh'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{ph' h p'} & V_{ph' h \alpha'} \\ V_{\alpha h' h p'} & V_{\alpha h' h \alpha'} \end{pmatrix} \\
 B &= \begin{pmatrix} V_{pp' h h'} & V_{p \alpha h h'} \\ V_{\alpha p' h h'} & V_{\alpha \alpha' h h'} \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

und die Amplituden X und Y sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{pmatrix} \delta \rho_{ph} \\ \delta \rho_{\alpha h} \end{pmatrix} \\
 Y &= \begin{pmatrix} \delta \rho_{hp} \\ \delta \rho_{h\alpha} \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Die Vektoren F und $\bar{F}$ stellen das äußere Feld dar

$$F = \begin{pmatrix} f_{ph} \\ f_{\alpha h} \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} f_{hp} \\ f_{h\alpha} \end{pmatrix}
 \tag{3.11}$$

Die Antwort der Dichtematrix auf eine äußere Störung mit einer harmonischen Zeitabhängigkeit lässt sich anhand der Polarisationsfunktion Π beschreiben

$$\delta \rho_{pq} = \sum_{p' q'} \Pi_{pp' q' q'}(\omega) f_{p' q'}, \tag{3.12}$$

$\omega_{\alpha\beta}$ ist hier die unkorrelierte Teilchen-Loch-Anregungsenergie.

In dieser Formulierung haben wir also nicht nur mit Teilchen p oberhalb der Fermikante und Löchern h innerhalb des Fermisees zu tun, sondern auch mit Teilchen α im Dirac-See. Damit beinhaltet der RRPA Konfigurationsraum nicht nur gewöhnliche ph -Zustände, sondern auch αh -Konfigurationen, das heißt Paare, die aus Zuständen des besetzten Fermi-Sees und Zuständen negativer Energie des leeren Dirac-Sees, gebildet werden. Die besetzten Zustände positiver Energie können zu jeder Zeit t sowohl mit positiven als auch negativen Lösungen überlappen. Die RPA-Gleichungen können entweder durch Diagonalisieren der RPA Matrix im Konfigurationsraum oder durch Berechnung der Response-Funktion anhand der Dyson Gleichung im Impulsraum gelöst werden. In beiden Fällen müssen die Spinoren und die Mittel-Felder, die zur stationären Lösung des Grundzustandes gehören, bestimmt werden.

In der Mittel-Feld-Näherung wird die Dirac-Gleichung und die Klein-Gordon Gleichungen der Mesonen-Felder selbstkonsistent gelöst. Aus dem Spektrum der Einnukleon-Zustände ergibt sich der RRPA Konfigurationsraum. Dieser besteht aus ph und αh Paaren, die den Forderungen nach Drehimpuls-, Paritäts- und Isospinerhaltung genügen müssen. Die Anzahl der Basiszustände wird durch zwei Cut-Off Parameter bestimmt: die maximale ph und die minimale αh Energie. Innerhalb dieser Basis wird die RPA Matrix für die selbe Effektive Wechselwirkung errechnet, die den Grundzustand festlegt.

3.1.1 Die Korrelationsfunktion

In diesem Abschnitt wird die Herleitung der RPA-Response-Funktion dargestellt. Ausgehend von der Hartree-Näherung betrachten wir die Korrelationsfunktionen in Ring-Näherung und leiten daraus die Dyson-Gleichung für den Polarisationspropagator ab [KS85].

Die Korrelationsfunktion wird definiert durch

$$G[A(x), B(y)] = \langle T[SA(x)B(y)] \rangle. \quad (3.13)$$

Dabei ist $A = \bar{\psi}_H(x)\Gamma_A\psi_H(x)$, $B = \bar{\psi}_H(x)\Gamma_B\psi_H(x)$ und Γ_A, Γ_B seien zunächst beliebige 4x4 Matrizen. Für die Streuamplitude S gilt

$$S = T \exp \left(ig_a \int d^4 : \bar{\psi}_H(x)\Gamma^a\psi_H V_a(x) : \right). \quad (3.14)$$

Sei nun $G_0[A, B]$ die Korrelationsfunktion, die zum Ringdiagramm niedrigster Ordnung gehört, dann gilt:

$$G_0[A(x), B(y)] = Tr[\Gamma_A G_H(x-y)\Gamma_B G_H(y-x)]. \quad (3.15)$$

$G_H(x-y) = \langle T[\psi_H(x)\bar{\psi}_H(y)] \rangle$ ist der Hartree-Propagator im Ortsraum. Die Addition

aller Ringdiagramme führt auf eine Integralgleichung für die vollständige Korrelationsfunktion,

$$\begin{aligned}\tilde{G}[A(x), B(y)] &= G_0[A(x), B(y)] \\ &\quad - ig_a g_b \int d^4 x' dy' G_0[A(x), F^a(x')] \\ &\quad \times D_{ab}(x' - y') \tilde{G}[F^b(y'), B(y)].\end{aligned}\quad (3.16)$$

$D_{ab}(x-y)$ beschreibt den freien Mesonenpropagator. In Gleichung (3.16) werden nicht-verbundene Diagramme durch die Subtraktion des Grundzustandserwartungswertes $\langle A(x) \rangle = -i \text{Tr} \Gamma_A G_H(x - x^+)$ von der Korrelationsfunktion ausgeschlossen. Daher erhält man in Gleichung 3.16 statt $G[A(x), B(y)]$

$$\begin{aligned}\tilde{G}[A(x), B(y)] &= G[A(x), B(y)] - \langle A(x) \rangle \langle B(y) \rangle \\ &= G[A(x), B(y)] + (\text{Tr} \Gamma_A G_H(x - x^+)) (\text{Tr} \Gamma_B G_H(y - y^+)).\end{aligned}$$

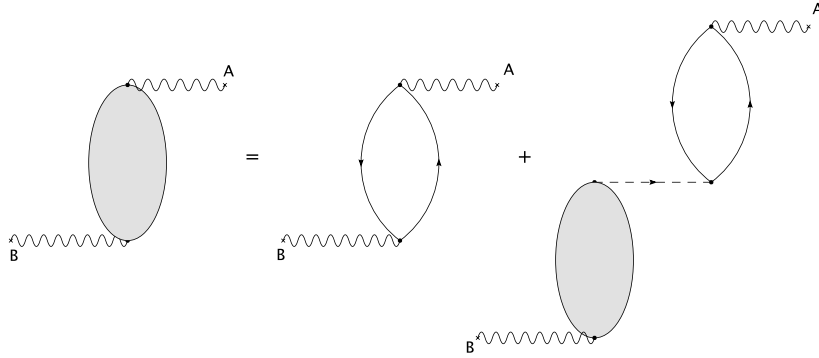


Abbildung 3.1: Diagrammatische Darstellung von Gleichung (3.16). Dabei stehen durchgezogene Linien für den Baryonen-Propagator G_H , während die geschweifte Linie für freie Mesonen-Propagatoren steht.

Abbildung 3.1 stellt Gleichung (3.16) nochmal diagrammatisch dar. Aufgrund von Impulserhaltung lässt sich die Fouriertransformierte von G auch folgendermaßen zerlegen:

$$G[A(-\mathbf{k}), B(\mathbf{k}', \omega)] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \Pi_{\alpha\beta}(k).$$

Somit lässt sich Gleichung (3.16) umformulieren zu:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \Pi_{\alpha\beta}^{(0)} + V_\alpha \Pi_{\alpha\eta}^{(0)} \Pi_\alpha^\eta, \quad (3.17)$$

mit

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(0)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\Gamma_\alpha G_H(p+k) \Gamma_\beta G_H(p)]. \quad (3.18)$$

Bei der Herleitung wird vorausgesetzt, dass $k \neq (0, \mathbf{0})$ ist und die Relation für die Baryonen-Stromerhaltung $k_\mu \Pi^{\mu\alpha} = k_\mu \Pi^{\alpha\mu} = 0$ ausgenutzt. Man beachte, dass in Gleichung (3.18) eine Summe über η impliziert wird. Die Matrizen Γ_α ergeben sich aus den Wechselwirkungstermen der entsprechenden Mesonen. In unserem Fall sind diese Elemente der Menge $\{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_5 \gamma_\mu, \sigma^{\mu\nu}\} \otimes \{\boldsymbol{\tau}, \mathbb{1}\}$

3.1.2 Die Rearrangementanteile der Wechselwirkung

Die Wechselwirkungs-Vertices V_α beinhalten die dichteabhängigen Kopplungskonstanten $\hat{\Gamma}_i(\hat{\rho}_G)$. In unserem Ansatz wählen wir für das Dichtefunktional die Vektordichteabhängigkeit $\rho_G = a_m \hat{\rho}_\mu^{(m)} \hat{\rho}^{(m)\mu}$. Für die Variation von $\mathcal{L}_{int}$ nach der Dichte folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \hat{\rho}_\mu(m)} &= \hat{\Gamma}^2 \hat{\rho}^\mu(m) D_m + \sum_{m'} \frac{\partial G^2}{\partial \hat{\rho}_G} \frac{\delta \hat{\rho}_G}{\delta \hat{\rho}_\mu(m')} \hat{\rho}_\nu(m') \hat{\rho}^\nu(m') D'_m \\ &= \hat{\Gamma}^2 \hat{\rho}^\mu(m) D_m + a_m \hat{\rho}^\mu(m) \sum_{m'} \frac{\partial G^2}{\partial \hat{\rho}_G} \frac{\delta \hat{\rho}_G}{\delta \hat{\rho}_\mu(m')} \hat{\rho}_\nu(m') \hat{\rho}^\nu(m') D_{m'}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die zweifache Variation ergibt das Wechselwirkungspotential

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}_{int}}{\delta \hat{\rho}^\alpha(m) \delta \hat{\rho}_\beta(m')} = \delta_{mm'} \delta_{\alpha\beta} \hat{\Gamma}^2 D_m + \hat{V}_{\alpha\beta}^{(r)}. \quad (3.20)$$

Im Spezialfall von $\rho_G = m_v \rho_\mu \rho^\mu$ ergibt sich für den zusätzlichen Rearrangement-Term:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{\alpha\beta}^{(r)}(mm') &= \frac{\partial \hat{\Gamma}_{m'}}{\partial \hat{\rho}_G} \frac{\delta \hat{\rho}_G}{\delta \hat{\rho}^\alpha(m)} \hat{\rho}^\beta(m') D_{m'} + \frac{\delta}{\delta \hat{\rho}^\alpha(m)} \left(a_{m'} \hat{\rho}^\beta(m') \sum_{m''} \frac{\partial \hat{\Gamma}_{m''}^2}{\partial \hat{\rho}_G} \hat{\rho}_\mu(m'') \hat{\rho}^\mu(m'') \right) \\ &= \delta_{mm'} \delta_{mm_v} \left[2 \frac{\partial \hat{\Gamma}_{m'}^2}{\partial \hat{\rho}_G} \hat{\rho}_B D_m + \sum_{m''} \frac{\partial \hat{\Gamma}_{m''}^2}{\partial \hat{\rho}_G} \hat{\rho}_\mu(m'') \hat{\rho}^\mu(m'') D_{m''} \right. \\ &\quad \left. + \hat{\rho}_B^2 \sum_{m''} \frac{\partial^2 \hat{\Gamma}_{m''}^2}{\partial \hat{\rho}_G^2} \hat{\rho}_\mu(m'') \hat{\rho}^\mu(m'') D_{m''} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dieser Rearrangement-Term taucht daher nur im ω -Kanal auf. Bildet man nun den Erwartungswert, so folgt

$$\begin{aligned} V_\omega^{(r)} &\equiv \langle V^{(r)}(m_v) \rangle = \\ &\quad + \left(\frac{5}{4} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_\omega^2 \right) \rho + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Gamma_\omega^2 \right) \rho^2 \right) D_\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_\sigma^2 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Gamma_\sigma^2 \right) D_\sigma \rho_s^2 \right. \\
 & + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_\delta^2 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Gamma_\delta^2 \right) D_\delta \rho_s^{(3)2} \\
 & \left. + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \Gamma_\rho^2 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \Gamma_\rho^2 \right) D_\rho \rho^{(3)2} \right]. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Folglich enthält der Rearrangement-Term Anteile, die von den Isovektordichten abhängen. Somit ist der Rearrangementbeitrag ebenfalls Isospinabhängig. Abbildung 3.2 zeigt den Rearrangementbeitrag in den Extremfällen $Z/A = 0.5$ und $Z/A = 0$. Es ist deutlich erkennbar, dass dieser einen großen Beitrag zur Wechselwirkung liefert. Abbildung 3.3 zeigt die Rearrangementbeiträge der einzelnen Mesonen.

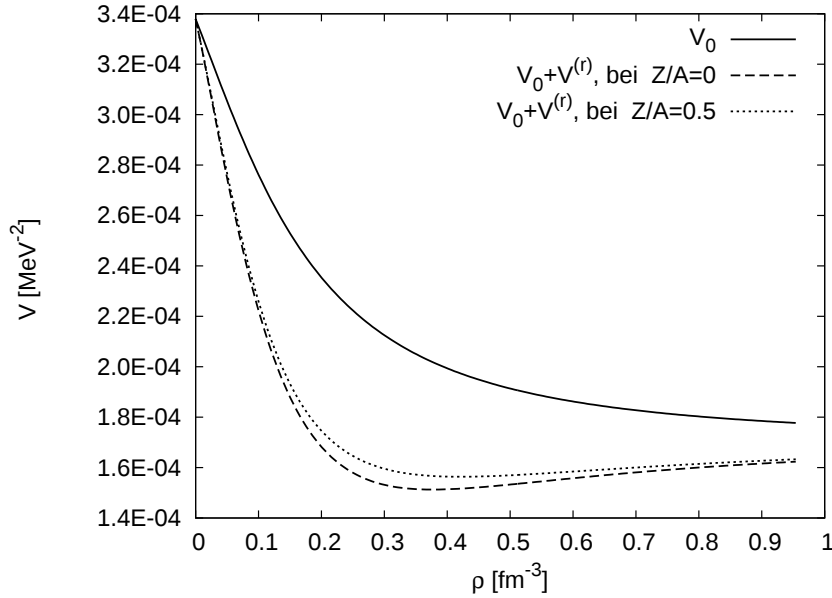


Abbildung 3.2: Der Rearrangementbeitrag im ω -Kanal in Abhängigkeit von der Dichte in symmetrischer Kern- reiner Neutronenmaterie. Die durchgezogene Linie stellt das Potential ohne Dichteabhängigkeit dar, während die gestrichelte und gepunktete Kurven jeweils die Rearrangementbeiträge enthalten.

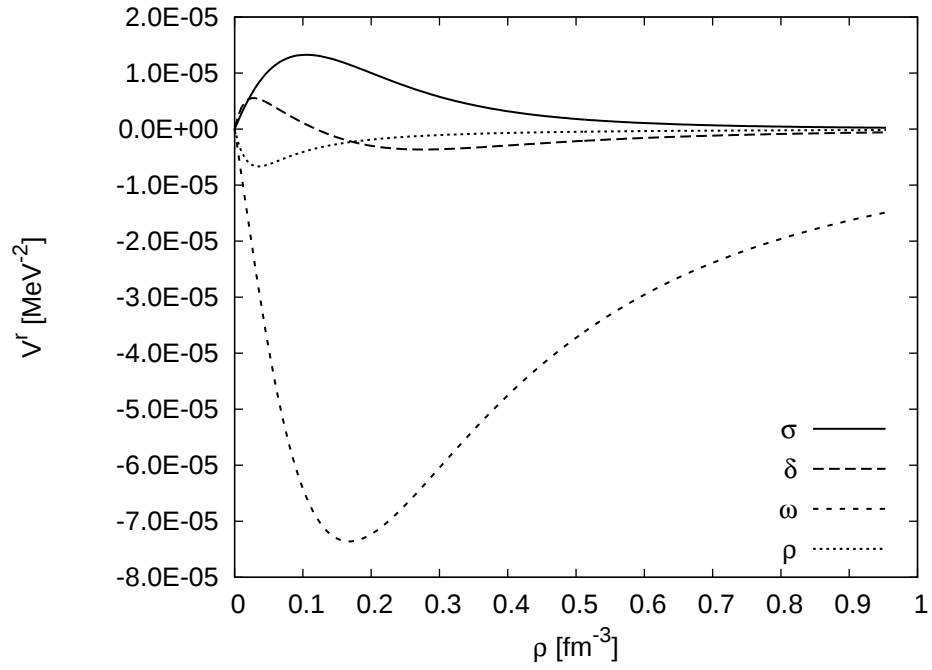


Abbildung 3.3: Die Beiträge der einzelnen Mesonenkanäle zu V^r .

3.2 Response Funktion

3.2.1 Allgemeine Struktur

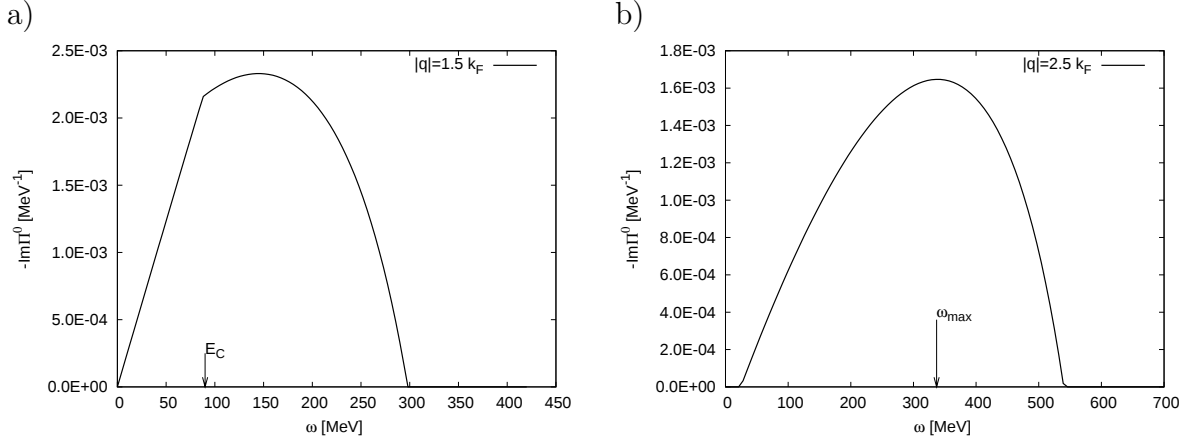


Abbildung 3.4: Der Imaginärteil des Polarisationsensors bei $Z/A = 0$ und $\rho = \rho_0$. **a)** Ergebnis für Impulstransfer $|\mathbf{q}| = 1.5k_F = 420 \text{ MeV}$. Der Knick an der Stelle $\omega = E_C \equiv E_{k_F} - E_{k_F - \mathbf{q}}$ resultiert aus dem durch das Pauli-Prinzip eingeschränkten Phasenraum. **b)** Plot für $|\mathbf{q}| = 2.5k_F = 700 \text{ MeV}$. Das Maximum befindet sich an der Stelle $\omega_{\max} = E_{k_F + \mathbf{q}} - E_{k_F}$

In diesem Kapitel wollen wir die Effekte von Teilchen-Loch-Korrelationen auf die Response-Funktion untersuchen. Bevor wir mit der Diskussion der Ergebnisse beginnen, wollen wir zunächst das Verhalten der Response-Funktion veranschaulichen. Wie in *Kapitel 2* beschrieben, untersuchen wir hier den longitudinalen Anteil der Responsefunktion

$$R_L = -\frac{3}{8\pi^2(k_{F_p}^3 + k_{F_n}^3)} \text{Im}\Pi_L. \quad (3.23)$$

Der Longitudinalanteil enthält die zeitlichen Komponenten von den Vektormesonen und die ersten räumlichen Komponenten der skalaren und der Vektormesonen.¹ Wir diskutieren zunächst die allgemeine Form der Response-Funktion. Schauen wir uns dazu die in Abbildung 3.4 dargestellten Ergebnisse für $-\text{Im}\Pi^0(\omega, \mathbf{q})$ bei festgehaltenem $q \equiv |\mathbf{q}|$ an. Um das Verhalten der Response-Funktion verstehen zu können, ist es zunächst wichtig anzumerken, dass der Imaginärteil von Π proportional zur Absorptionswahrscheinlichkeit des Viererimpuls-Übertrags $(\omega, \mathbf{q})$ an das Fermi-System ist. Dabei wird ein Teilchen mit Impuls $|\mathbf{k}| < k_F$ aus der Fermi-Kugel heraus gestreut

¹Wir wählen das Koordinatensystem, so dass $\mathbf{k} = (|\mathbf{k}|, 0, 0)$ gilt. Siehe auch Anhang

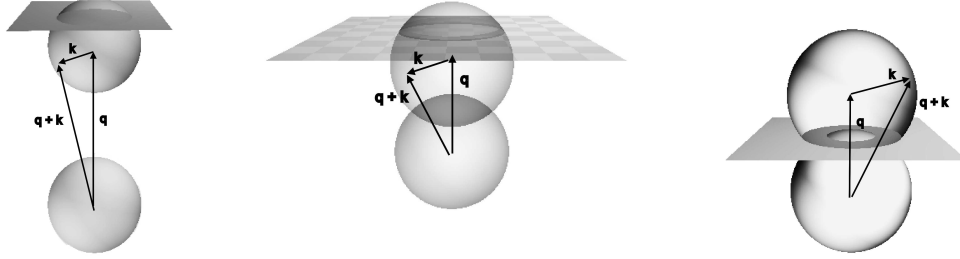


Abbildung 3.5: Veranschaulichung der Integrationsfläche von $\text{Im}\Pi$. Die Ebene resultiert aus der Energieerhaltung, während die zwei Kugeln durch die Forderung $|\mathbf{k}| < k_F$ gegeben sind. Falls die Ebene beide Kugeln schneidet, bleibt als Integrationsfläche nur eine Ringscheibe übrig (Abbildung rechts)

($|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_F$). Bei diesem Prozess muss die Energieerhaltung gewährleistet werden, was in der Rechnung durch $\delta(\omega - (E_{k+q} - E_k))$ berücksichtigt wird. Die Integration läuft über die gesamte Fermi-Kugel, während der Vektor $(\mathbf{k} + \mathbf{q})$ aufgrund des Pauli-Prinzips außerhalb dieser Kugel liegen muss, das heißt $|\mathbf{q} + \mathbf{k}| > k_F$.² Für $|q| < 2k_F$ überschneidet sich die Streu-Kugel mit der Fermikugel (siehe auch Abbildung 3.5). Die Integration erstreckt sich damit über die Schnittfläche zwischen der Streu-Kugel und der durch die δ -Funktion definierten Ebene. Falls die Fläche nicht den verbotenen Bereich schneidet, entspricht dies einer Kreisscheibe im Inneren der Fermi-Kugel. Ist jedoch $\omega < (E_{k_F} - E_{k_F-q})$, so bleibt für den erlaubten Streubereich nur eine Ringscheibe übrig (Abbildung 3.5 rechts). Dieser Sachverhalt macht sich in Abbildung 3.4 (a) durch einen Knick der Kurve an der Stelle $\omega = (E_{k_F+q} - E_{k_F})$ bemerkbar. Ist hingegen $|q| > 2k_F$, so überlagern sich die zwei Kugeln nicht und ein solcher Knick taucht daher auch nicht auf.

In Abbildung 3.4 ist $-\text{Im}\Pi^0$ für $|q| = 1.5k_F^0$ und $|q| = 2.5k_F^0$ dargestellt ($k_F^0 \approx 280$ MeV ist der Fermiimpuls bei der Sättigungsdichte). Das Maximum in Abbildung 3.4 (b) ist der so genannte *quasielastische Peak*, welcher nichts anderes als die kinematische Beziehung zwischen dem Energie- und Impulsübertrag an ein ruhendes Teilchen darstellt. Das heißt für die Streuung an einem Teilchen wäre die Response-Funktion proportional zur Deltafunktion an der Stelle $(E_{k+q} - E_k)$. Die Verbreiterung des quasielastischen Peaks resultiert aus der Fermibewegung der Nukleonen im Kern, wobei die Halbwärtsbreite ein direktes Maß für den Fermi-Impuls des Systems liefert.[FW71]

²In dieser Arbeit wurden Rechnungen für beliebige Asymmetrien durchgeführt und daher auch zwischen Fermiimpuls von Protonen und Neutronen unterschieden. Um die Diskussion an dieser Stelle jedoch nicht unnötig zu verkomplizieren, beschränken wir uns auf den Isospinsymmetrischen Fall

Der volle Polarisations-Propagator beinhaltet die Aufsummation aller Ringdiagramme niedrigster Ordnung. $\text{Im}\Pi$ beschreibt damit die Propagation eines *Teilchen-Loch-Paares* im wechselwirkenden Medium. Dies führt natürlich auf eine Verschiebung des Maximums. In Abbildung 3.6 zeigen wir die Ergebnisse von $-\text{Im}\Pi_L$ in Abhängigkeit von der Asymmetrie $\xi = Z/A$ (bei $\rho = \rho_0$) für verschiedene Kanäle.

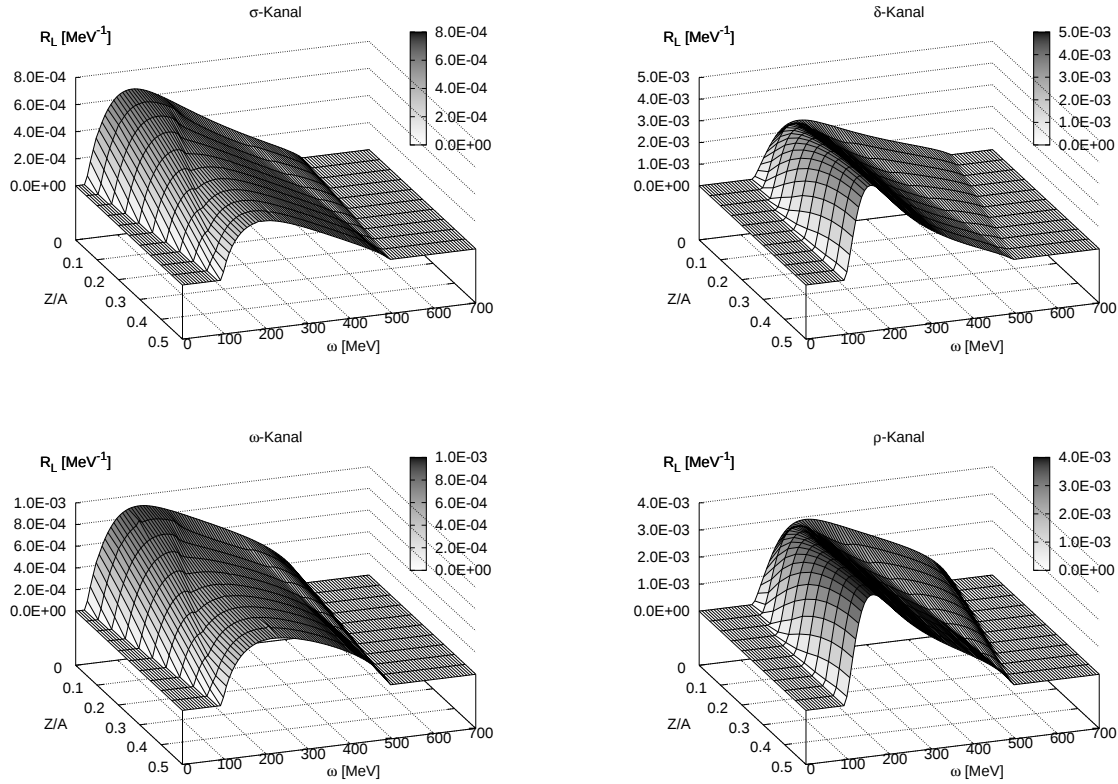


Abbildung 3.6: Der longitudinale Anteil der Response bei $\rho = \rho_0$ in Abhängigkeit von der Asymmetrie Z/A und dem Energietransfer $\omega \equiv q_0$ bei einem Impulsübertrag von 700 MeV.

3.2.2 Beitrag der einzelnen Mesonen-Kanäle

Schauen wir uns nun das Ergebnis für einen Impulsübertrag von $|\mathbf{k}| = 700$ MeV in reiner Neutronenmaterie bei der Sättigungsdichte an (Abbildung 3.7). Die punktierte Kurve stellt das Ergebnis für den wechselwirkungsfreien Fall dar, während die dünngestrichelte nur den Austausch von σ -Mesonen beinhaltet (d.h. alle anderen Kopplungskonstanten werden 0 gesetzt). Der Vergleich dieser beiden Kurven zeigt

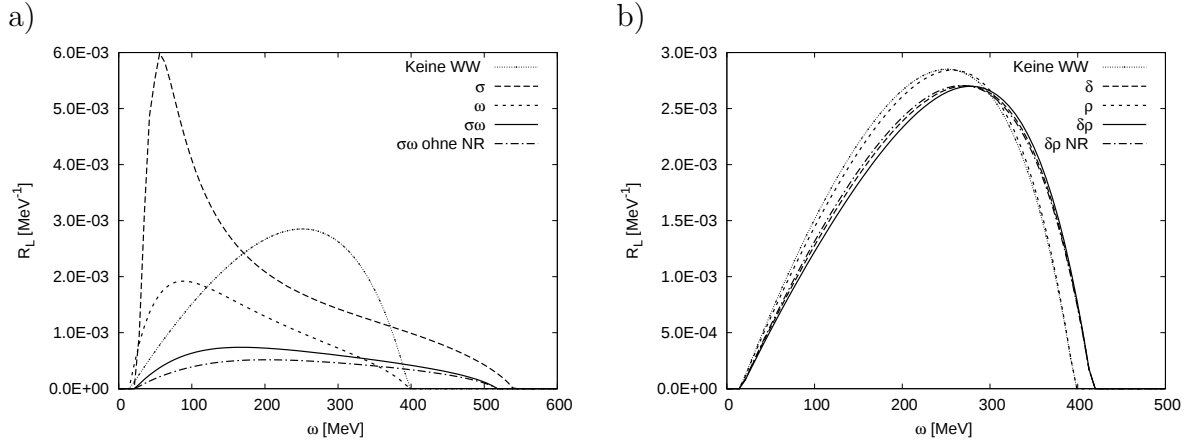


Abbildung 3.7: Longitudinale Response-Funktion als Funktion des Energieübertrags ω bei festgehaltenem Impulstransfer $|\mathbf{k}| = 700$ MeV. Untersucht werden die Beiträge der einzelnen Mesonen. Die gepunktete Kurve stellt die Response für den wechselwirkungsfreien Fall ($\Gamma_\sigma = \Gamma_\delta = \Gamma_\omega = \Gamma_\rho = 0$) dar. Die anderen Kurven sind die RPA Ergebnisse mit den in der Legende aufgeführten Mesonen. Die punkt-gestrichelten Kurven (NR) zeigen das Ergebnis für dichteunabhängige Kopplungsvertices, d.h. ohne Rearrangement-Terme. **a)** Beiträge aus den isoskalaren Kanälen. Anhand der dünn gestrichelten Linie erkennt man, dass die WW im σ -Kanal das Maximum stark nach links verschiebt und ein scharfer Peak sich abzeichnet. Dieser Effekt wird von der attraktiven Teilchen-Loch Korrelation aufgehoben (punkt-gestrichelte Kurve). **b)** Gegenüberstellung der Ergebnisse für die Beiträge aus isovektor-Kanälen.

eine deutliche Verschiebung des Maximums in Richtung kleiner Energien, wobei sich ein scharfer Peak abzeichnet. Dieser Sachverhalt lässt sich hauptsächlich auf die reduzierte effektive Masse der Nukleonen zurückführen. Das System wird dabei instabil gegenüber Dichtefluktuationen für $g_\sigma^2 > 6.2$ und $|\mathbf{k}| = 700$ MeV. Der scharfe Peak weist auf eine Singularität der Dispersionsgleichung $\det U_L = 0$ in der Nähe der reellen Achse hin [KY83]. Dieser Effekt wird jedoch durch *Teilchen-Loch-Korrelationen* völlig aufgehoben, wie man an der punkt-gestrichelten Kurve erkennen kann.

Betrachten wir nun die Beiträge aus dem Austausch von δ und ρ -Meson (Abbildung 3.7 b). Im Vergleich mit dem wechselwirkungsfreien Fall bewirkt das ρ -Meson eine Verschiebung des Maximums der Response-Funktion in Richtung größerer Anregungsenergien. Dieser Effekt wird mit Hinzunahme des δ -Mesons zusätzlich verstärkt. Vergleicht man allerdings die punkt-gestrichelte mit der durchgezogenen Kurve, so sieht man, dass die Rearrangement-Beiträge im δ - ρ -Kanal attraktive Anteile, wenn auch nur geringfügig, zur Teilchen-Loch-Korrelation liefern. Damit haben die isovektoriellen Beiträge ein entgegengesetztes Verhalten gegenüber den isoskalaren Anteilen,

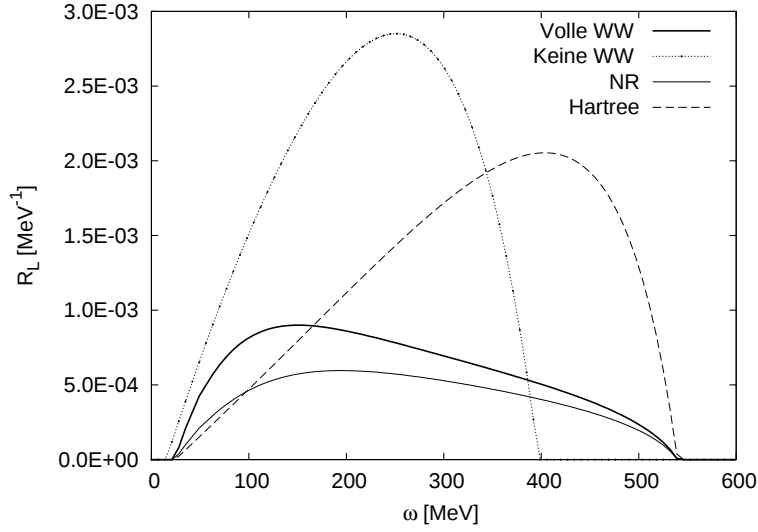


Abbildung 3.8: Gegenüberstellung der Response-Funktion für den wechselwirkungsfreien Fall, Hartree-Näherung und RPA. Dabei zeigt die dicke durchgezogene Kurve das Ergebnis mit dichteabhängigen Vertices, während die dünne das Resultat für konstante Kopplungen (NR) darstellt.

wobei insgesamt der repulsive Charakter der Umordnungseffekte überwiegt.

Die dünne, durchgezogene Kurve in Abbildung 3.8 a) stellt das Ergebnis ohne Rearrangement-Beiträge dar. Hier zeigt sich deutlich, dass diese Beiträge einen zusätzlichen repulsiven Anteil zu Teilchen-Loch-Korrelationen liefern. Insgesamt erkennt man auch, dass die Response-Funktion mit voller Wechselwirkung in RPA kleinere Werte annimmt als die für den wechselwirkungsfreien Fall (dünn gestrichelte Kurve in Abb. 3.8 a). Diese zusätzliche Abschwächung ist hier eine Konsequenz der in RPA enthaltenen Grundzustands-Korrelationen.

Abbildung 3.9 stellt die Ergebnisse für verschiedene Modelle gegenüber. Beim DD-ME1 Modell wurde die Dichteabhängigkeit auf phänomenologischem Wege angepasst, dabei ist das δ -Meson als Austauschteilchen im Modell nicht enthalten. Man sieht, dass für diese Parametrisierung die Response-Funktion insgesamt deutlich kleinere Werte annimmt, wobei die Position des Maximums sich nur kaum verändert. Setzt man in unseren Rechnungen die Kopplungskonstante des δ -Mesons $\Gamma_\delta(\rho) = 0$, so erhält man die punkt-gestrichelte Kurve. Damit zeigt sich deutlich, dass der Beitrag des δ -Mesons für Teilchen-Loch-Korrelationen eine wichtige Rolle spielt und insgesamt einen zusätzlich repulsiven Charakter hat.

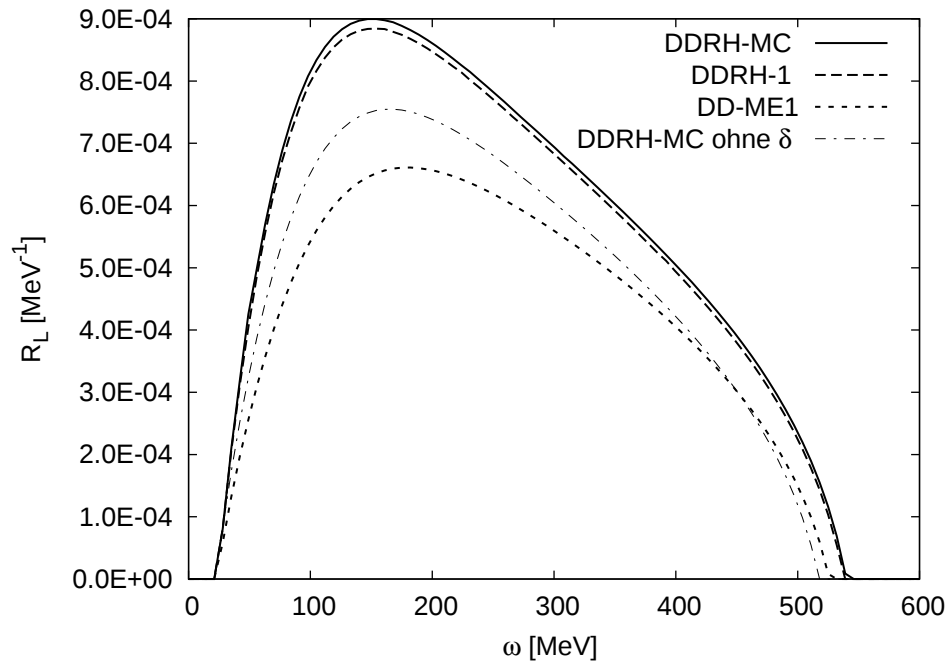


Abbildung 3.9: Vergleich der Response-Funktion für reine Neutronenmaterie. Die einzelnen Kurven stellen die Ergebnisse mit den jeweiligen Modellparametern dar. Es zeigt sich ein deutlicher Unterschied gegenüber der phänomenologischen DD-ME1 Parametrisierung.

4 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden Korrelationseffekte im Rahmen der relativistischen, dichteabhängigen Hadronenfeldtheorie (DDRH) für unendliche Kernmaterie untersucht. Es wurden dafür die dichteabhängigen Kopplungs-Vertices aus Dirac-Brückner Rechnungen verwendet [HKL01]. Im Gegensatz zu phänomenologischen Ansätzen (z.B. DD-ME1 [Vre05]) stellt dieser Ansatz eine mikroskopische Herangehensweise dar. In Kapitel 1 wurden die Grundlagen der relativistische Hadronenfeldtheorie vorgestellt und die besonderen Eigenschaften einer dichteabhängigen Formulierung hervorgehoben. Am Ende dieses Kapitels wurde die Zustandsgleichung für unendliche Kernmaterie mit dem phänomenologischen Ansatz verglichen.

Ausgehend von Landaus Theorie der Fermi-Flüssigkeiten wurde im zweiten Kapitel das Quasiteilchen-Konzept. Wir haben die Bedeutung der Landau-Migdal Parameter (LMP) hervorgehoben und diese im DDRH-Modell berechnet. Anschließend haben wir die Beiträge der einzelnen Mesonen zu den jeweiligen LMP untersucht. Aufgrund der unterschiedlichen effektiven Massen von Proton und Neutron, haben wir im Vergleich zu Ansätzen, die den δ -Meson Austausch nicht enthalten, zusätzliche Terme in f_0 und f'_0 erhalten. Dadurch tragen isovektor Mesonen auch zu dem isoskalaren LM-Parametern bei, obgleich dieser Effekt nur sehr geringfügig ist. Eine dichteabhängige Formulierung der Wechselwirkung führt auch auf zusätzliche Ableitungen der Vertices nach der Dichte. Diese Terme werden als Umordnungseffekte (engl. Rearrangement) des Systems interpretiert.

Wir haben im Rahmen dieser Arbeit gezeigt, dass diese Rearrangement-Terme, insbesondere bei hohen Dichten, zusätzliche repulsive Anteile zur Wechselwirkung liefern. Der Vergleich der Rechnungen mit dem phänomenologischen DD-ME1-Ansatz zeigte insbesondere bei den isovektor LM-Parametern deutliche Unterschiede, wobei bei höheren Dichten sich gar ein entgegengesetztes Verhalten abzeichnet. Dies liegt vor allem daran, dass im DD-ME1-Modell die Parameter an isospin-symmetrische Grundzustandseigenschaften von Kernen angefügt wurden, während der mikroskopische Ansatz aus Dirac-Brückner-Rechnungen eine allgemeinere Betrachtung des Problems darstellt und somit zusätzliche Eigenschaften der Wechselwirkung im Isevektor-Kanal beinhaltet.

Zur Untersuchung von Korrelationseffekten wurde in dieser Arbeit die Response-Funktion in Ring-Näherung (RPA) berechnet. Auch hier haben wir die Bedeutung der zusätzlichen Rearrangement-Terme hervorgehoben. Die Ergebnisse haben nicht

nur gezeigt, dass Teilchen-Loch-Korrelationen in Kernmaterie eine signifikante Auswirkung auf die Response-Funktion haben, sondern auch zusätzliche repulsive Beiträge sowohl aus dem skalaren-isovektor Austauschkanal als auch aus Umordnungseffekten aufgedeckt.

In zukünftigen Untersuchungen wäre es sicherlich zum einen interessant die Ergebnisse mit experimentellen Daten aus der quasielastischen Elektron-Streuung an Kernen zu vergleichen. Für ein endliches Nukleonen-System könnte dazu eine Lokale-Dichte-Näherung vorgenommen werden [WB87]. Zum anderen ist es möglich, die Rechnungen zur Erforschung Angeregter Zustände in Hyperkernen zu erweitern.

A Notation und Konventionen

In dieser Arbeit wird durchgehend das natürliche Einheitensystem mit

$$\hbar = c = 1$$

verwendet. Mit $\hbar c \approx 197 \text{ MeV fm}$ Die Raum-Zeit Koordinaten werden durch kontravariante Vierervektoren dargestellt

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$$

Der zugehörige Kovariante Vektor ist gegeben durch

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z) = g_{\mu\nu} x^\nu$$

Dabei verwenden die Metrik von Bjorken und Drell [BD93][BD65] mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Soweit nicht anders erwähnt werden Vierervektoren als x dargestellt und Dreiervektoren durch Fettdruck $\boldsymbol{x}$ gekennzeichnet. Kontraktionen aus γ_μ und einem Vierervektor werden mit dem Feynman-Slash abgekürzt

$$\not{x} \equiv \gamma_\mu x^\mu$$

Es gilt die einsteinische Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren. Die partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\boldsymbol{\nabla}), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \boldsymbol{\nabla}) \quad (\text{A.2})$$

Die γ -Matrizen erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\gamma_\mu, \gamma_\nu = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (\text{A.3})$$

Dabei lautet die in dieser Arbeit verwendete explizite Darstellung der γ -Matrizen [BD65]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist $\mathbb{1}$ die 2x2 Einheitsmatrix und σ^i sind die Pauli-Spinmatrizen. Diese sind definiert als

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Deren wichtige Eigenschaften sind

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ \sigma_i, \sigma_j &= 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^\dagger &= \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \\ \gamma_5^\dagger &= -\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_5 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dabei steht γ_5 für folgende Kombination der γ -Matrizen

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma_5 \quad (\text{A.8})$$

Kontraktionen von γ -Matrizen können gemäß den folgenden Relationen vereinfacht werden:

$$\begin{aligned} a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu &= a_\mu b^\mu - i \sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \\ \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2 \gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\rho &= 4 g^{\nu\rho} \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2 \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Für die Spurbildung von γ -Matrizen erweisen sind folgende Beziehungen nützlich:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathbb{1}] &= 4 \\ \text{Tr}[\text{ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen}] &= 0 \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4 g^{\mu\nu} \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] &= 4 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ \text{Tr}[\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu] &= \text{Tr}[\gamma_\mu b^\mu \gamma_\nu a^\nu] = 4 a_\mu b^\mu \\ \text{Tr}[\gamma_5] &= 0 \\ \text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

A.1 Dirac-Spinoren

Die allgemeine Lösung der freien Dirac-Gleichung

$$(\not{k} - m) \Psi(x) = 0$$

kann als Entwicklung nach ebenen Wellen dargestellt werden,

$$\Psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{m}{E_k}} [b(k, s)u(k, s)e^{-ikx} + d^\dagger(k, s)v(k, s)e^{ikx}]. \quad (\text{A.11})$$

Dabei beschreiben die Spinoren $u(k, s)$ und $v(k, s)$ Eigenzustände mit positiver bzw. negativer Energie und erfüllen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} [\not{k} - m]u(k, s) &= 0 \\ [\not{k} + m]v(k, s) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Diese erfüllen für gewöhnlich die Normierungsbedingung:

$$\begin{aligned} \bar{u}(k, s')u(k, s) &= -\bar{v}(k, s')v(k, s) = \delta_{ss'} \\ u^\dagger(k, s')u(k, s) &= v^\dagger(k, s')v(k, s) = \frac{E_k}{m} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Wobei $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$ und $\bar{v} = v^\dagger \gamma_0$ die konjugierten Spinoren sind. Mit dieser Normierung ergibt sich folgende explizite Form der Spinoren:

$$u(k, s) = \sqrt{\frac{E_k + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}}{E_k + m} \end{pmatrix} \chi_s \quad (\text{A.14})$$

Mit $E_k \equiv \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ und den Pauli-Spinoren

$$\chi_{s=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{s=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

In unendlicher Kernmaterie lassen sich die stationären Lösungen

$$u^* = \begin{pmatrix} u_n^* \\ u_p^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^* = \begin{pmatrix} v_n^* \\ v_p^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

der modifizierten und nach Isospin separierten Dirac-Gleichung

$$[\not{k}^* - m_b^*]u_b^*(k, s) = 0, \quad (b = p, n) \quad (\text{A.17})$$

explizit angeben. Der unterschied zur Lösung der freien Dirac-Gleichung besteht lediglich darin, dass die freien Größen E, k und m durch die Mediumabhängigen Größen E^*, k^* und m^* ersetzt werden müssen [Hof01]

$$u(k, s) = \sqrt{\frac{E_k^* + m^*}{2m^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}^*}{E_k^* + m^*} \end{pmatrix} \chi_s \quad (\text{A.18})$$

A.2 Energie-Impuls-Tensor

An dieser Stelle berechnen wir den Energie-Impuls-Tensor ausgehend von der QHD-Lagrangedichte (1.22) mit dichteabhängigen Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\bar{\psi}[i\gamma_\eta\partial^\eta - M]\psi \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\delta,\pi,\eta} [2\partial^\mu\Phi_i\partial^\nu\Phi_i - g^{\mu\nu}(\partial_\eta\Phi_i\partial^\eta\Phi_i - m_i^2\Phi^2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2}\sum_{\omega,\rho,\gamma} \left[(\partial^\nu A_\kappa^i)F_i^{\kappa\mu} - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}F_{\eta\kappa}^i F_i^{\eta\kappa} - m_i^2 A_\eta^i A^{i\eta} \right) \right] \\
 &\quad + g^{\mu\nu}\bar{\psi}[\gamma_\lambda\Sigma^{\lambda(0)} - \Sigma^{s(0)}]\psi \\
 &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi - g^{\mu\nu}\bar{\psi}[\gamma_\lambda\Sigma^{\lambda(r)} - \Sigma^{s(r)}]\psi \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sum_{\sigma,\delta,\pi,\eta} [2\partial^\mu\Phi_i\partial^\nu\Phi_i - g^{\mu\nu}(\partial_\eta\Phi_i\partial^\eta\Phi_i - m_i^2\Phi^2)] \\
 &\quad - \frac{1}{2}\sum_{\omega,\rho,\gamma} \left[(\partial^\nu A_\kappa^i)F_i^{\kappa\mu} - g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}F_{\eta\kappa}^i F_i^{\eta\kappa} - m_i^2 A_\eta^i A^{i\eta} \right) \right] \quad (A.19)
 \end{aligned}$$

Die Selbstenergie-Anteile $\Sigma^{(0)}$ und $\Sigma^{(0)r}$ wurden dabei in Abschnitt 1.7 definiert. Mit Verwendung der Dirac-Spinoren aus Gl. A.18 folgt

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \sum_b \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_b^*} [k^{*\mu}(k^{*\nu} + \Sigma^{(0)\nu} + \Sigma^{(r)\nu}) - k_{b\lambda}^* \Sigma^{\lambda(r)} g^{\mu\nu}] \\
 &\quad + g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \sum_{\sigma\delta\pi\eta} m_i^2 \Phi_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\omega,\rho} m_i^2 A_\eta^i A_i^\eta \right] \quad (A.20)
 \end{aligned}$$

Für die nullte Komponente folgt damit

$$\begin{aligned}
 T^{00} &= \sum_b \frac{2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_b^*} [k^{*0}(k^{*0} + \Sigma^{(0)0} + \Sigma^{(r)0}) - k_{b\lambda}^* \Sigma^{\lambda(r)}] \\
 &\quad + g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \sum_{\sigma\delta\pi\eta} m_i^2 \Phi_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\omega,\rho} m_i^2 A_\eta^i A_i^\eta \right] \quad (A.21)
 \end{aligned}$$

Energie-Impuls-Erhaltung

An dieser Stelle soll gezeigt werden, dass der Energie-Impuls-Erhaltungssatz gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für den Energie-Impuls-Tensor gilt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (A.22)$$

Für die Ableitung des kinetischen Terms in Gleichung A.19 folgt

$$\partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi) = i(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\partial^\nu\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\partial^\nu\psi)$$

Aus der Dirac-Gleichung und der zugehörigen Gleichung für das konjugierte Baryonenfeld

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu(i\vec{\partial}^\mu - \Sigma^\mu) - M^*\right]\psi &= 0 \\ \bar{\psi}\left[\gamma_\mu(i\overleftarrow{\partial}^\mu + \Sigma^\mu) + M^*\right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) &= 0 \\ (\partial^\nu\bar{\psi})i\gamma_\mu\vec{\partial}^\mu\psi &= \bar{\psi}(\partial^\nu[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*])\psi + (\partial^\nu\bar{\psi})[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*]\psi \\ &\quad + \bar{\psi}[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*](\partial^\nu\psi) - \bar{\psi}i\gamma_\mu(\vec{\partial}^\mu\partial^\nu\psi) \\ (\partial^\nu\bar{\psi})i\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}^\mu\psi &= -\bar{\psi}(\partial^\nu[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*])\psi - (\partial^\nu\bar{\psi})[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*]\psi \\ &\quad - \bar{\psi}[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*](\partial^\nu\psi) - \bar{\psi}i\gamma_\mu(\overleftarrow{\partial}^\mu\partial^\nu\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

und man erhält

$$\partial_\mu (i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi) = \bar{\psi}(\partial^\nu[\gamma_\mu\Sigma^\mu + M^*])\psi \quad (\text{A.25})$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} -\partial_\mu\gamma^{\mu\nu}\bar{\psi}[\gamma_\eta\Sigma^{\eta(r)} - \Sigma^{s(r)}]\psi &= -\bar{\psi}(\partial^\nu[\gamma_\eta\Sigma^{\eta(r)} - \Sigma^{s(r)}])\psi \\ &\quad - [(\partial^\nu\bar{\psi}\gamma_\eta\psi)\Sigma^{\eta(r)} - (\partial^\nu\bar{\psi}\psi)\Sigma^{s(r)}] \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Die Divergenz der Selbstenergien in Gleichung (A.25) enthält auch Ableitungen der Vertices und man kann leicht verifizieren, dass sich diese für den Fall der vektoriellen Dichteabhängigkeit (VDD) gerade mit den Vektor-Rearrangementenergien wegheben. Die Energie-Impuls-Erhaltung wird damit nur dann gegeben, wenn die Rearrangementselbstenergien mit berücksichtigt werden [HW64].

A.3 Die Fierz-Transformation

Bei der Berechnung von Austauschtermen ist es oft sehr nützlich, Produkte von Bilinearformen umzuordnen. Sei Γ_i gegeben durch $(\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5)$, dann gilt

$$(\bar{\psi}_1\Gamma_i\psi_2)(\bar{\psi}_3\Gamma^i\psi_4) = \sum_j F_{ij}(\bar{\psi}_1\Gamma_j\psi_4)(\bar{\psi}_3\Gamma^j\psi_2) \quad (\text{A.27})$$

Für Fermionen sind die Koeffizienten F_{ij} durch die folgende Matrix gegeben

$$F = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & -2 & -4 \\ 12 & 0 & -2 & 0 & -12 \\ -4 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

B Der Polarisationspropagator

An dieser Stelle erläutern wir die Berechnung des Polarisationspropagators in RPA. Der Polarisationspropagator ist gegeben durch die Lösung der Dyson Gleichung

$$\Pi(A, B) = \Pi^0(A, B) + \Pi^0(A, C)V_C\Pi(C, B) \quad (\text{B.1})$$

$\Pi_0(A, B)$ ist der Einring-Term und ist in der Literatur auch als die *relativistische Lindhardt Funktion* bekannt

B.1 Polarisierungsterme

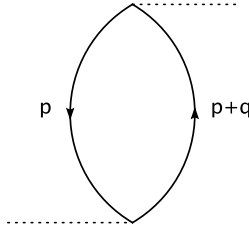


Abbildung B.1: Das Ein-Ring-Diagramm

Gemäß den Feynmanregeln erhält man für das Ein-Ring-Diagramm folgenden Ausdruck

$$\Pi_0(\Gamma_A, \Gamma_B) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\Gamma_A G_0(p+q) \Gamma_B G_0(p)] \quad (\text{B.2})$$

Dabei seien Γ_A und Γ_B beliebige 4x4 Matrizen und G_0 der Nukleonen-Propagator.

$$\begin{aligned} G_0(p) &= (\not{p} + M) \left[\frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} + \frac{i\pi}{E_p} \delta(p_0 - E_p) \Theta(k_F - p) \right] \\ &= G_F + G_D \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Die divergenten Vakuum-Terme in Gleichung B.2 werden in der No-Sea-Näherung vernachlässigt und wir berechnen daher nur die Dichteabhängigen Anteile Π_D

$$\Pi^0(\Gamma_A, \Gamma_B) \equiv \Pi_D^0(\Gamma_A, \Gamma_B)$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Theta_p}{E_p} \delta(p_0 - E_p) \left[\frac{S^{A,B}(p, q)}{(p+q)^2 - M^2 + i\varepsilon} + \frac{S^{A,B}(p, -q)}{(p-q)^2 - M^2 + i\varepsilon} \right] \\
&\quad + i\pi^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\Theta_p \Theta_{p+q}}{E_p E_{p+q}} \delta(p_0 + \omega - E_{p+q}) \delta(p_0 - E_p) S^{A,B}(p, q) \quad (B.4)
\end{aligned}$$

Wobei $\Theta_p = \Theta(k_F - |\mathbf{p}|)$, $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$ gilt, und $S^{A,B}$ wie folgt definiert ist

$$S^{A,B}(p, q) = \text{Tr}[\Gamma_A(\not{p} + \not{q} + M)\Gamma_B(\not{p} + M)] \quad (B.5)$$

Nach ausgeführter Integration über p_0 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Pi &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \left[\frac{S^{A,B}(p, q)|_{p_0=E_p}}{(E_p + \omega)^2 - E_{p+q}^2 + i\epsilon} + \frac{S^{A,B}(p, -q)|_{p_0=E_p}}{(E_p - \omega)^2 - E_{p-q}^2 + i\epsilon} \right] \\
&\quad + i\pi^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\Theta_{p+q}}{E_p E_{p+q}} S^{A,B}(p, q)|_{p_0=E_p} \delta(E_p + \omega - E_{p+q}) \quad (B.6)
\end{aligned}$$

Für die Berechnung des Vollen Polarisationspropagators ist die Auswertung der Terme $\Pi_s \equiv \Pi(1, 1)$, $\Pi_v^{\mu\nu}(\gamma^\mu, \gamma^\nu)$, $\Pi_{1,\gamma^m u}^\mu$ erforderlich.

$$\begin{aligned}
2\pi\Pi_s &= 2(4M^2 + \mathbf{q}^2)(I_0(q) + I_0(-q)) + 4\omega(I_1(q) - I_1(-q)) + 4(\Omega(q) + \Omega(-q)) \\
&\quad + i\pi^2(8M^2 - 2q_\mu q^\mu)K_0(q) \quad (B.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\pi\Pi_v &= 8(I_2(q) + I_2(-q)) + 4\omega(I_1(q) - I_1(-q)) - 2\mathbf{q}^2(I_0(q) + I_0(-q)) \\
&\quad - 4(\Omega(q) + \Omega(-q)) + i\pi^2(8K_2(q) + 8\omega K_1 + 2q_\mu q^\mu K_0) \quad (B.8)
\end{aligned}$$

$$\Pi_{sv} = 8M(I_1) + 4M\omega I_0 \quad (B.9)$$

Die einzelnen Funktionen seien dabei wie folgt definiert

$$\begin{aligned}
I_n(q) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \theta_p E_p^{n-1} \frac{1}{(E_p + \omega)^2 - E_{p+q}^2 + i\varepsilon} \\
&\quad - \frac{2\pi}{(2\pi)^3} \int \frac{dp \, p^2 d\cos\vartheta}{2E_p E_{p+q}} \left[\frac{1}{E_{p+q} + E_p + \omega - i\varepsilon} + \frac{1}{E_{p+q} - E_p - \omega - i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{2\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{2q} \int dp \, p E_p^{n-1} \left[\int_{E_-^+}^{E_+^+} \frac{dx}{x + \omega - i\varepsilon} + \int_{E_-^-}^{E_+^-} \frac{dx}{x - \omega - i\varepsilon} \right] \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2 q} \left(\int_0^{k_F} dp \, E_p^{n-1} \ln \left| \frac{(E_+^+ + \omega)(E_+^- - \omega)}{(E_-^+ + \omega)(E_-^- - \omega)} \right| \right. \\
&\quad \left. + \pi i \int_0^{k_F} dp \, E_p^{n-1} [\theta(E_+^+ > -\omega > E_-^+) + \theta(E_+^- > \omega > E_-^-)] \right) \quad (B.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n(q) &= \frac{1}{q} \int dp \, E_p^{n-1} \Theta(E_F - E_p - \omega) \Theta(E_+^- > \omega E_-^-) \\
\Omega(q) &= \frac{1}{q} \int dp \, \frac{p}{E_p} \left[\int_{E_-^+}^{E_+^+} \frac{x^2 - 2E_p x}{x + \omega - i\varepsilon} + \int_{E_-^-}^{E_+^-} \frac{x^2 + 2E_p x}{x - \omega - i\varepsilon} \right] \quad (B.11)
\end{aligned}$$

Bei der Rechnung wurde die Substitution $\cos \vartheta \rightarrow E_{p+q} \pm E_p$ vorgenommen und wir benutzen die Definition $E_{\pm}^+ = E_{p\pm q} + E_p$ bzw. $E_{\pm}^- = E_{p\pm q} - E_p$. Im letzten Schritt verwenden wir die Identität

$$\frac{1}{\alpha \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{\alpha} \mp i\pi\delta(\alpha), \quad (\text{B.12})$$

wobei $\mathcal{P}$ für den Cauchyschen Hauptwert steht. Der Realteil von I_n muss dabei numerisch berechnet werden.

B.1.1 Lösung der Dyson-Gleichung

Teilt man Π in Real- und Imaginärteil auf, so folgt mit der Dyson-Gleichung:

$$\begin{aligned} \text{Re}\Pi(A, B) &= \text{Re}\Pi^0(A, B) + \text{Re}\Pi^0(A, C)V_C\text{Re}\Pi(C, B) - V_C\text{Im}\Pi^0(A, C)\text{Im}\Pi(C, B) \\ \text{Im}\Pi(A, B) &= \text{Im}\Pi^0(A, B) + \text{Re}\Pi^0(A, C)V_C\text{Im}\Pi(C, B) + V_C\text{Im}\Pi^0(A, C)\text{Re}\Pi(C, B) \end{aligned}$$

Dies ergibt insgesamt ein $2N^2$ Gleichungssystem, das mit einem herkömmlichen Gaußalgorithmus gelöst wird.

C Parametersätze

In der vorliegenden Arbeit wurden die Rechnungen für folgende Modelle durchgeführt:

- **DD-ME1** [NVFR02]:
Phänomenologischer Ansatz mit σ, ω und δ -Meson. Die Kopplungskonstanten haben die Dichteabhängigkeit

$$\begin{aligned}\Gamma_i(\rho) &= a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2} \quad \text{für } i = \sigma, \omega \\ \Gamma_\rho(\rho) &= \Gamma_0 \cdot \exp[-a_\rho(x - 1)]\end{aligned}\tag{C.1}$$

Dabei ist $x = \rho/\rho_0$. Die Koeffizienten wurden so gewählt, dass die Grundzustand-Eigenschaften (Bindungsenergie, Ladungsradius) von sphärischen Kernen wiedergegeben werden.

	a_i	b_i	c_i	d_i
σ	14.4683	0.9781	1.5342	0.4661
ω	17.8954	0.8525	1.3566	0.4957

$$G_0 = 3.8053, a_\rho = 0.5008$$

Tabelle C.1: Koeffizienten für die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten im DD-ME1 Modell [NVFR02].

- **DDRH-MC** [HKL01]:
Dichteabhängige Parametrisierung aus Dirac-Brückner Rechnungen mit σ, δ, ω und ρ -Meson-Austausch und *impulskorrigierten* Vertices:

$$\begin{aligned}\Gamma_i(\rho) &= a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + e_i)^2} \cdot \sqrt{1 + G_i k_F} \quad \text{für } i = \sigma, \omega \\ \Gamma_i(\rho) &= a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + e_i)^2} \quad \text{für } i = \delta, \rho\end{aligned}\tag{C.2}$$

Es wurde folgender Koeffizienten-Satz gewählt

	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i	G_i
σ	13.1334	0.4258	0.6578	0.7914	0.7914	0.00804
δ	19.1023	1.3653	2.3054	0.0693	0.5388	-
ω	15.1640	0.3474	0.5152	0.5989	0.5989	0.00103
ρ	19.6270	1.7566	8.5541	0.778	0.5746	-

Tabelle C.2: Koeffizienten für die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten im DDRH-MC Modell.

- **DDRH-1:**

Die Dichteabhängige Parametrisierung der Vertices ohne Impulskorrektur entspricht Gleichung (C.2) mit $G_{\sigma/\omega} = 0$. Dies führt auf folgenden Koeffizientensatz:

	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
σ	13.1334	0.4258	0.6578	0.7914	0.7914
δ	19.1023	1.3653	2.3054	0.0693	0.5388
ω	15.1640	0.3474	0.5152	0.5989	0.5989
ρ	12.8373	2.4822	5.8681	0.3671	0.3598

Tabelle C.3: Koeffizienten für die Dichteabhängigkeit der Kopplungskonstanten im DDRH-1 Modell.

- **NL3 [LKP97]:**

In diesem Modell wird keine Dichteabhängigkeit der Kopplungsstärken angesetzt. Der Wechselwirkungs-Anteil der Lagrangedichte enthält jedoch eine zusätzliche nichtlineare Selbstwechselwirkung des σ -Felds

$$U(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2 + \frac{1}{3}g_2\sigma^3 + \frac{1}{4}g_3\sigma^4 \quad (\text{C.3})$$

Die Kopplungskonstanten wurden auch hier an die Grundeigenschaften von Kernen gefittet:

$g_\sigma = 10.217$	$g_\omega = 12.868$	$g_\rho = 4.474$
$g_2 = -10.431$	$g_3 = -28.885$	

Tabelle C.4: Die Masse der Mesonen als Parameter der jeweiligen Modelle.

Zu den Parametersätzen der Modelle gehört auch die Masse der Mesonen, die in der folgenden Tabelle zusammengefasst sind

	m_σ	m_δ	m_ω	m_ρ
DD-ME1	549.526	-	783.000	763.000
DDRH	549.526	983.000	783.000	763.000
NL3	508.194	980.000	782.501	763.000

Tabelle C.5: Die Masse der Mesonen in MeV als Parameter der jeweiligen Modelle.

D Literaturverzeichnis

- [AP97] AKAMAL, A. ; PANDHARIPANDE, V.R.: Phys. Rev. C 56, 2261, 1997
- [BC76] BAYM, G. ; CHIN, S.A.: *Landau Theory of Relativistic Fermi Liquids*. Nuclear Physics A262 527-538, 1976
- [BD65] BJORKEN, J. D. ; DRELL, S.D.: *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill Book Company, 1965
- [BD93] BJORKEN, J. D. ; DRELL, S.D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*. BI-Wiss-Verl. Mannheim, 1993
- [Bis98] BISHOP, R.F.: *Microscopic Quantum Many-Body Theories and Their Applications*. Springer, 1998
- [BM90] BROCKMANN, R. ; MACHLEIDT, R.: Phys. Rev. C 42, 1965, 1990
- [Bru55] BRUECKNER, K.A.: Phys. Rev. 97, 1353, 1955
- [CSDV70] COESTER, F. ; S.COHEN ; DAY, B.D. ; VINCENT, C.M.: Phys. Rev. C 1, 769, 1970
- [DG90] DREIZLER, R.M. ; GROSS, E.U.K.: *Density Functional Theory: An Approach to the Quantum Many-Body Problem*. Springer Verlag, 1990
- [FW71] FETTER, A. L. ; WALECKA, J. D.: *Quantum Theory of Many-particle systems*. McGraw-Hill Publishing Company, 1971
- [HKL01] HOFMANN, F. ; KEIL, C.M. ; LENSKE, H.: *Density dependent hadron field theory for asymmetric nuclear matter and exotic nuclei*. Nuclear Physics C 64,034314, 2001
- [Hof01] HOFMANN, F.: *Doktorarbeit*. Justus Liebig Universität Giessen, 2001
- [HW64] HOHENBERG, P. ; W.KOHN: Phys. Rev. B 136,864, 1964
- [JL98] JONG, F. de ; LENSKE, H.: Phys. Rev. C 58, 890, 1998
- [KS65] KOHN, W. ; SHAM, L.J.: Phys. Rev. A 140 - 1133, 1965

- [KS85] KURASAWA, Haruki ; SUZUKI, Toshio: *Quasielastic Electron Scattering in the Relativistic $\sigma\omega$ Model*. Nuclear Physics A445,685,705, 1985
- [KY83] KURASAWA, H. ; YUKAWA, T.: Physics Letters 129 B, 162, 1983
- [LKP97] LALAZISSIS, G.A. ; KÖNIG, J. ; P.RING: Phys. Rev. C 55, 540, 1997
- [Mat81] MATSUI, R.: *Fermi-Liquid Properties of Nuclear Matter in a Relativistic Mean-Field Theory*. Nucl. Phys. A370, 365-388, 1981
- [MP00] MÜTHER, H. ; POLLS, A.: Nucl. Phys. 45, 243, 2000
- [NVFR02] NIKSIĆ, T. ; VRETENAR, D. ; FINELLI, P. ; RING, P.: Phys. Rev. C 66, 024306, 2002
- [PN66] PINES, David ; NOZIERES, Philippe: *The Theory of Quantum Liquids*. W.A. Benjamin, INC, 1966
- [PS95] PESKIN, M.E. ; SCHROEDER, D.V.: *Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995
- [SB91] SCHMIDT, K.E. ; BINDER, D.M.: *Monte Carlo Methods III*. Springer, 1991
- [Sch04] SCHWABL, F.: Springer-Verlag, 2004
- [SDE92] SPEICHER, C. ; DREIZLER, R.M. ; ENGEL, E.: Ann. Phys. (NY)213 - 312, 1992
- [SPW86] SCHIAVILLA, R. ; PANDHARIPANDE, V.R. ; WIRINGA, R.B.: Nucl. Phys. A 449, 219, 1986
- [Tho70] THOMPSON, F. H.: *Three-Dimensional Bethe-Salpeter Equation Applied to the Nucleon-Nucleon Interaction*. Phys. Rev. D1,110, 1970
- [TW99] TYPEL, S. ; WOLTER, H.H.: *Relativistic mean field calculations with density dependent meson-nucleon coupling*. Nuclear Physics A656,331, 1999
- [VBFF95] VALCARCE, A. ; BUCHMANN, A. ; F.FERNANDEZ ; FÄSSLER, A.: Phys. Rev. C 51, 1480, 1995
- [Vre05] VRETENAR, D.: Physics Reports 409,101-259, 2005
- [WB87] WEHRBERGER, K. ; BECK, F.: Physical Rev. C 35, 298, 1987
- [WS68] WALECKA, J. D. ; SEROT, B.: *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem*. Plenum Press, New York, 1968

Danksagung

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme im Institut und die optimalen Arbeitsbedingungen.

Herrn Prof. Dr. Horst Lenske danke ich für die sehr engagierte Betreuung, die aufschlussreichen Diskussionen und die Motivation während meiner Diplomarbeit.

Bei den Mitarbeitern des Instituts möchte ich mich für die gute Arbeitsatmosphäre bedanken. Oliver Buß und Frank Frömel danke ich für die sehr gute Computer-Administration und schnelle Problemlösung aller PC-Angelegenheiten. Oli danke ich besonders dafür, dass er trotz leerer Kasse immer für volle Getränkeflaschen gesorgt hat. Dank Tina Leitner hat mein Kaffee-Spiegel nie den kritischen Bereich unterschritten. Danken möchte ich auch Urnaa Badarch, die - insbesondere während der Anfangsphase - immer ein offenes Ohr für Fragen hatte.

Ein besonderer Dank geht auch an Abdul Ahad Ataie, der für eine angenehme Atmosphäre in unserem Büro gesorgt hat - ohne ihn hätten die Pflanzen die heißen Sommertage wohl nicht überstanden. Auch möchte ich mich bei ihm für die zahlreichen - nicht nur physikalischen - Diskussionen bedanken. Fabian Eichstädt und David Kalok danke ich für die Unterhaltung im „Party-Zimmer“. Die zahlreichen Koch-Abende mit Abdul, Fabian und David und viele andere Unternehmungen haben für eine gute Abwechslung und die Würze im Physik-Studium gesorgt.

Des weiteren möchte ich mich bei Elke Jung für ihre Hilfsbereitschaft und die unkomplizierte Erledigung aller „Papier“-Angelegenheiten bedanken.

Besonders danke ich meinen Eltern - meiner Mutter dafür, dass sie nicht nur für ein finanziell sorgenfreies Studium gesorgt hat, sondern auch bei anderen Problemen immer da war und meinem Vater für die vielen aufbauenden Gespräche - trotz der großen Entfernung stand er immer zu meiner Seite und hat mir immer wieder Kraft gegeben.

Nicht zuletzt danke ich meiner Freundin Franziska für ihre Unterstützung und die schöne Zeit mit ihr. Mit ihr zu leben und ihr immer näher kommen zu dürfen bedeutet mir sehr viel.

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe,
ohne andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Giessen, den