

**Kurzreichweitige  
Korrelationen  
in asymmetrischer  
Kernmaterie**

Diplomarbeit

vorgelegt von  
**Patrick Konrad**  
aus Gießen

Institut für Theoretische Physik  
Justus-Liebig-Universität Gießen

Januar 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung . . . . .	7
2.2	Kernmaterie . . . . .	8
2.2.1	Isospin . . . . .	9
2.3	Die Greenfunktion in der Feldtheorie . . . . .	10
2.3.1	Die Einteilchen-Greenfunktion . . . . .	10
2.3.2	Zusammenhang zwischen $g^>$ und $g^<$ . . . . .	12
2.3.3	Die Spektralfunktion . . . . .	14
2.3.4	Die Hartree-Fock-Näherung . . . . .	15
2.4	Die Selbstenergie . . . . .	16
2.4.1	Interpretation von $\Sigma^{\geq}$ . . . . .	21
2.5	Zusammenhang zwischen $A(\vec{k}, \omega)$ und $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Polarisationswechselwirkung in Kernmaterie</b>	<b>25</b>
3.1	Numerische Realisierung und Näherungen . . . . .	25
3.2	Symmetrischer Kernmaterie . . . . .	27
3.3	Asymmetrische Kernmaterie . . . . .	27
3.3.1	Das Verhalten an der Fermikante . . . . .	31
3.4	Der Mittelfeld-Anteil . . . . .	32
3.4.1	Die Skyrme-Parametrisierung . . . . .	32
3.4.2	Die Zustandsgleichung . . . . .	35

<b>4 Die Spektralfunktion</b>	<b>39</b>
4.1 Symmetrische Kernmaterie . . . . .	39
4.1.1 Temperatur $T = 0$ . . . . .	39
4.1.2 Endliche Temperaturen und hohe Dichten . . . . .	41
4.2 Asymmetrischer Kernmaterie . . . . .	42
<b>5 Die Breite auf der Energieschale</b>	<b>51</b>
5.1 Symmetrische Kernmaterie . . . . .	51
5.2 Asymmetrischer Kernmaterie . . . . .	53
<b>6 Die Impulsverteilung</b>	<b>59</b>
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>63</b>
<b>A Greenfunktionen</b>	<b>65</b>
A.1 zeitunabhängige Greenfunktion . . . . .	65
A.2 zeitabhängige Greenfunktionen . . . . .	66
<b>B Die Bewegungsgleichung der Greenfunktion</b>	<b>69</b>
B.1 Die Feldoperatoren . . . . .	69
B.1.1 Die Bewegungsgleichung der Greenfunktion . . . . .	70

# Kapitel 1

## Einleitung

Der Beitrag der kurzreichweitigen Korrelationen zu den Eigenschaften von Kernmaterie ist ein bisher nur teilweise untersuchtes Gebiet in der Vielteilchentheorie der Kerne. Viele Eigenschaften von Kernmaterie, wie zum Beispiel Bindungsenergie und Sättigungsdichte lassen sich mit langreichweitigen Mittelfeld-Effekten erklären [Pr]. Allerdings dehnt sich die Spektralfunktion, die man aus Streuexperimenten mit Elektronen erhalten kann, in Energie und im Impuls viel weiter aus als mit Mittelfeld-Effekten erklärbar wäre.

Bisher wurden meist die kurzreichweitigen Korrelationen für symmetrische Kernmaterie mit Hilfe von aufwendigen vielteilchentheoretischen Rechnungen wie Brueckner-Hatree-Fock Verfahren [Bal] oder selbstkonsistente T-Matrix Rechnungen [Dih] durchgeführt.

Für die Modellbildung von Supernovae oder Neutronensternen und für die Beschreibung von Schwerionenkollisionen sind aber gerade auch kurzreichweitige Wechselwirkungen von asymmetrischer Kernmaterie von großem Interesse.

In dieser Arbeit wird die Breite auf der Energieschale und die Spektralfunktion von asymmetrischer Kernmaterie mit Hilfe eines selbstkonsistenten Verfahrens, welches auf der Transporttheorie [KaB] beruht, untersucht. (Einen guten Überblick über Quantentransporttheorie gibt Referenz [Bot]). Es wird die Annahme eines konstanten Matrixelementes gemacht um das Stoßintegral auszurechnen, mit dessen Hilfe man die Spektralfunktion erhält. Wie Rechnungen von J. Lehr [Le1, Le2] zeigen erhält man, trotz der drastischen Annahme eines konstanten Matrixelementes, eine sehr gute Übereinstimmung mit aufwendigeren vielteilchentheoretischen Rechnungen [Ben].

In Kapitel 2 wird ein allgemeiner Überblick über die Grundlagen des Modells gegeben. Alle notwendigen Größen werden eingeführt und erklärt. Am Ende

wird ein Zusammenhang zwischen der Selbstenergie und der Spektralfunktion hergeleitet, welcher als Grundlage für die selbstkonsistenten Rechnungen dient.

In Kapitel 3 wird die Realisierung und die Anwendung auf symmetrische und asymmetrische Kernmaterie beschrieben. Die Behandlung des Mittelfeld-Anteils erfolgt durch eine Skyrme-Parametrisierung.

In Kapitel 4-6 werden die gewonnenen Ergebnisse (Spektralfunktion, Breite und Impulsverteilung) diskutiert. Dabei werden zu Beginn jedes Kapitels nochmal die Ergebnisse von J. Lehr [Le1, Le2] und F. Frömel [Fr] für symmetrische Kernmaterie vorgestellt. Anschließend werden die gewonnenen Ergebnisse für asymmetrische Kernmaterie diskutiert.

Die Zusammenfassung und der Ausblick befindet sich in Kapitel 7. Im Anhang wird ein kurzer Überblick über den Greenfunktion-Formalismus gegeben.

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung

Die experimentellen Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung lassen sich noch immer nicht in einem einheitlichen Modell beschreiben. Vielmehr gibt es eine große Anzahl von Modellen, die in verschiedenen Bereichen der Kernphysik benutzt werden. So lassen sich beispielsweise die grundlegenden Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Streuung bei niedrigen Energien durch Ein-Pion-Austauschpotentiale (one-pion exchange potentials, OPEPs) gut beschreiben. Aus dem Experiment sind folgende Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Streuung bei niedrigen Energien bekannt:

1. kurze Reichweite von etwa 1fm
2. starke Abstoßung bei kurzen Abständen  $\leq 0.5$  fm
3. attraktiv für die größeren Abstände mit einer Tiefe von ungefähr 40 MeV
4. Abhängigkeit von Spin und Isospin

Die Eigenschaften der Nukleonen in Kernen lassen sich damit allerdings nicht befriedigend beschreiben. Offensichtlich wird das Streuverhalten durch die Anwesenheit vieler Nukleonen im Kern so beeinflusst, daß die Einführung einer effektiven Wechselwirkung sinnvoll erscheint. Diese Wechselwirkung hängt typischerweise von den lokalen Dichten im Kern ab.

Von besonderem Interesse ist dabei die Wechselwirkung der Nukleonen bei kleinen Abständen. In Schwerionen-Kollisionen und bei der Explosion von Supernovae treten Energien und Dichten auf, bei denen kurzreichweitige Wechselwirkungen eine große Rolle spielen.

Eine NN-Wechselwirkung sollte bestimmte Eigenschaften aufweisen. Das Nukleonpotential hängt von den Orten, Impulsen, Spins und Isospins der Nukleonen ab.

An das Potential werden Invarianzforderungen gestellt:

1. Translationsinvarianz
2. Galilei-Invarianz
3. Rotationsinvarianz
4. Isospininvarianz
5. Paritätsinvarianz
6. Zeitumkehrinvarianz

Dies führt in der nicht relativistischen Darstellung zu

$$v_{NN} = v_{00} + v_{10}\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2 + v_{01}\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 + v_{11}\vec{\tau}_1\vec{\tau}_2\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2 \quad (2.1)$$

plus Beiträge einer Rang-2 Tensor Wechselwirkung und Spin-Bahn Wechselwirkungen.

## 2.2 Kernmaterie

Besonders einfach werden kernphysikalische Berechnungen in unendlich ausgedehnter Kernmaterie. Ist die Dichte der Neutronen gleich der Dichte der Protonen, so spricht man von symmetrischer, sind die beiden Dichte aber verschieden von asymmetrischer Kernmaterie. Ein Grenzfall der asymmetrischen Kernmaterie ist die Neutronenmaterie, wie sich zum Beispiel in Neutronensternen vorkommt. Das Verhältnis  $Y = \frac{Z}{A}$  gibt die Asymmetrie der Kernmaterie an, dabei ist  $Z$  die Anzahl der Protonen und  $A$  die Anzahl aller Nukleonen.  $Y$  nimmt dabei Werte zwischen Null, reine Neutronenmaterie, und Eins, reine Protonenmaterie, an. Im Falle von symmetrischer Kernmaterie erhält man  $Y = 0.5$ . Wegen Isospinsymmetrie braucht man nur  $0 \leq Y \leq 0.5$  zu betrachten.

In Kernmaterie wird die Coulombkraft vernachlässigt, und somit können die Nukleonen nur durch Kernkräfte wechselwirken. Man geht auch davon aus, daß die Kernmaterie  $\beta$ -stabil ist, asymmetrische Kernmaterie soll also nicht durch  $\beta$ -Zerfall in symmetrische Kernmaterie übergehen.

Da man von einem homogenen Medium ausgeht, hängt die Energie eines Nukleons nicht mehr vom Ort, an dem sich ein Nukleon befindet, sondern vom Impuls des Nukleons ab. Aufgrund der Homogenität ist  $\rho = \text{const}$  und die Dichten  $\rho$  der Nukleonen und kinetischer Energiedichte  $\tau$  lassen sich in Abhängigkeit des Fermi-Impulses  $k_{fq}$  ( $q = n, p$ ) schreiben:

$$\rho_q = \frac{2}{3\pi^2} k_{fq}^3 \quad (2.2)$$

$$\tau_q = \frac{3}{5} (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{2m} \rho_q^{\frac{5}{3}} \quad (2.3)$$

An dieser Stelle sei angemerkt das in natürlichen Einheiten gerechnet wird ( $\hbar = c = 1$ ). Im weiteren wird hier ein Modell betrachtet mit dessen Hilfe auf einfache Weise Aussagen über die kurzreichweitigen Wechselwirkungen gemacht werden können.

### 2.2.1 Isospin

Für die Betrachtung von asymmetrischer Kernmaterie spielt die Isospinabhängigkeit der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung eine bedeutende Rolle. Während man bei symmetrischer Kernmaterie (gleiche Anzahl von Neutronen und Protonen) über den Isospin mitteln kann, muss man im Falle von asymmetrischer Kernmaterie Wechselwirkungen zwischen gleichen und ungleichen Nukleonen unterscheiden.

Da die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung invariant unter dem Austausch von Neutronen gegen Protonen ist, kann man das Proton und das Neutron als zwei verschiedene Zustände ein und des selben Teilchens auffassen, das als Nukleon bezeichnet wird. Man führt zwei Basiszustände ein, die dann durch Transformationen der  $SU(2)$ -Isospingruppe ineinander übergeführt werden.

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Der Operator der Gruppe ist der Isospin Operator  $\hat{t} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$ , wobei es sich bei  $\tau_x, \tau_y$  und  $\tau_z$  um die Paulimatrizen handelt.

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Die Protonen und Neutronen sind dabei Eigenzustände des Operators  $\tau_z$  mit den Eigenwerten  $\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$ . Dabei steht es einem frei, ob das Proton oder das Neutron den positiven Eigenwert bekommt. Hier wurde, wie es in den meisten kernphysikalischen Publikationen üblich ist, dem Proton der positive Eigenwert zugewiesen.

Um nun in einem Potential der Isospininvarianz Rechnung zu tragen braucht man einen skalaren Operator in Bezug auf Drehungen im Isospinraum. Daher kommen nur Terme in Frage, die entweder keine Isospinabhängigkeit oder aber Potenzen des Produktes  $\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2$  enthalten. Man kann aber zeigen, daß sich alle Potenzen von  $\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2$  durch  $\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2$  ausdrücken lassen [GrM]. Das Potential für die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung spaltet sich daher in zwei Teile auf, einem isospinabhängigen und einem isospinunabhängigen Teil.

$$v = v_0 + v_1 \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \quad (2.6)$$

## 2.3 Die Greenfunktion in der Feldtheorie

Ziel dieser Arbeit soll es sein, die Spektralfunktion und die Breite auf der Energieschale von Nukleonen in asymmetrischer Kernmaterie zu berechnen. Die Grundlage für das hier verwendete Modell beruhen auf der Quanten-Transporttheorie [KaB].

Mastubara führt 1955 Greenfunktionen zur Beschreibung von Vielteilchen-Systemen ein [Mas]. Im Jahre 1959 entwickelten Martin und Schwinger [MarS] weitergehende Techniken zur Behandlung von Vielteilchen-Systemen (Martin-Schwinger Hierarchie). Auf dieser Basis entwickelten Kadanoff und Bayme [KaB] eine vollständige Transporttheorie. Einen guten Überblick Quanten-Transporttheorie liefert [Bot].

### 2.3.1 Die Einteilchen-Greenfunktion

Um vielteilchentheoretische Aspekte zu untersuchen, eignet sich die Formulierung der nuklearen Vielteilchentheorie als nicht-relativistische Feldtheorie. Eine elegante Beschreibung erreicht man mit dem Greenfunktion Formalismus, der im folgenden Abschnitt vorgestellt wird. Die verschiedenen Green-

funktionen für ein Feld im Heisenberg-Bild definiert man folgendermaßen:

$$\begin{aligned} i\bar{g}(1, 2) &\equiv i\bar{g}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv \langle [\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2)]_+ \rangle \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} ig^>(1, 2) &\equiv ig^>(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv \langle \Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} ig^<(1, 2) &\equiv ig^<(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv -\langle \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2)\Psi(\vec{r}_1, t_1) \rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} ig^{ret}(1, 2) &\equiv ig^{ret}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv \theta(\tau_1 - \tau_2) \langle [\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2)]_+ \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} ig^{adv}(1, 2) &\equiv ig^{adv}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv -\theta(\tau_2 - \tau_1) \langle [\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2)]_+ \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} ig(1, 2) &\equiv ig(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \\ &\equiv \langle T[\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2)] \rangle \end{aligned} \quad (2.12)$$

Von besonderem Interesse werden dabei später die beiden Greenfunktionen  $ig^>(1, 2)$  und  $ig^<(1, 2)$  sein.

Bei  $T$  handelt es sich um den Zeitordnungsoperator, welcher ein Produkt von Operatoren in zeitliche Reihenfolge bringt. Der Operator mit dem größten Zeitargument wird von  $T$  ganz nach links geschoben, danach folgt der Operator mit dem zweitgrößten Zeitargument und so weiter. Für ein Produkt aus zwei Operatoren ergibt  $T$ :

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & \text{für } t_1 > t_2 \\ -B(t_2)A(t_1) & \text{für } t_2 > t_1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Bei endlichen Temperaturen  $T > 0$  ist  $\langle \hat{O} \rangle$  der thermische Mittelwert eines Operators  $\hat{O}$  für die großkanonischen Gesamtheit.

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle &= \frac{\sum_i \langle i | \hat{O} | i \rangle e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}}{\sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}} \\ &= \frac{Tr[\hat{O}e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}]}{Tr[e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})}]} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$\hat{H}$  ist der Hamilton-Operator,  $\hat{N}$  der Teilchenzahloperator,  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  die inverse Temperatur und  $\mu$  das chemische Potential.  $|i\rangle$  sind Eigenzustände mit den dazugehörigen Eigenwerten  $E_i$  und  $N_i$  in Bezug auf die Operatoren

$\hat{H}$  und  $\hat{N}$ .

Für  $T \rightarrow 0$  ist  $\langle \hat{O} \rangle \rightarrow \langle \Psi_0 | \hat{O} | \Psi_0 \rangle$ , wobei  $|\Psi_0\rangle$  der Grundzustand des Systems ist.

Aus den Definitionen der Greenfunktionen lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

$$(g^<(1, 2))^* = -g^<(1, 2) \quad (2.15)$$

$$(g^>(1, 2))^* = -g^>(1, 2) \quad (2.16)$$

$$(g^{ret}(1, 2))^* = g^{adv}(1, 2) \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}g^{ret}(1, 2) &= -i\frac{1}{2}(g^{ret}(1, 2) - g^{adv}(1, 2)) \\ &= -\frac{1}{2}(g^>(1, 2) - g^<(1, 2)) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Betrachtet man  $g^<(1, 2)$ , so fällt die große Ähnlichkeit mit dem Dichteoperator B.2 auf. Für  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  und  $t_1 = t_2$  gilt  $i \langle n(\vec{r}_1, t_1) \rangle = g^<(1, 1)$ .

$g^>(1, 2)$  ist die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort  $\vec{r}_1$  zur Zeit  $t_1$  zu finden, wenn man dem System ein Teilchen am Ort  $\vec{r}_2$  zur Zeit  $t_2$  hinzugefügt hat. Mit anderen Worten  $g^>(1, 2)$  beschreibt die Ausbreitung (Propagation) eines Teilchens von 2 nach 1. Physikalisch relevant ist dabei nur der Fall  $t_1 > t_2$ .  $g^>(1, 2)$  hingegen beschreibt die Ausbreitung eines Loches von 1 nach 2. Daraus folgt, daß  $g(1, 2)$  die Ausbreitung eines Teilchens für  $t_1 > t_2$  und die Ausbreitung eines Loches für  $t_2 > t_1$  beschreibt.

### 2.3.2 Zusammenhang zwischen $g^>$ und $g^<$

In einem translation- und rotationinvarianten System, wie es für unendlich ausgedehnte Kernmaterie der Fall ist, ist der Übergang in die Impulsdarstellung sinnvoll. Dies geschieht durch Fourier-Transformation bezüglich der Relativkoordinaten ( $\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ ).

$$f(\vec{k}, \tau) = \int d^3\rho e^{-i\vec{k}\vec{\rho}} f(\vec{\rho}, \tau) \quad (2.19)$$

und

$$f(\vec{k}, \omega) = \int d^3\rho e^{-i\vec{k}\vec{\rho} + i\omega\tau} f(\vec{\rho}, \tau) \quad (2.20)$$

So lassen sich die Feldoperatoren in 2ter Quantisierung mit Hilfe der Operatoren  $a_{\vec{k}}$  und  $a_{\vec{k}}^\dagger$ , welche Teilchen mit dem Impuls  $\vec{k}$  erzeugen oder vernichten,

ausdrücken.

Schreibt man nun zum Beispiel  $g^>$  mit Hilfe der  $a_{\vec{k}}$  und  $a_{\vec{k}}^\dagger$  um, so folgt:

$$\begin{aligned}
ig^>(\vec{k}, \tau) &= \langle a_{\vec{k}}(t)a_{\vec{k}}^\dagger(t') \rangle = \sum_m \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_m)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}]} \langle m | a_{\vec{k}}(t)a_{\vec{k}}^\dagger(t') | m \rangle \\
&= \sum_{m,l} \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_m)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}]} \langle m | e^{i\hat{H}t} a_{\vec{k}} e^{-i\hat{H}t} | l \rangle \langle l | e^{i\hat{H}t'} a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\hat{H}t'} | m \rangle \\
&= \sum_{m,l} \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_m)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}]} e^{-i\tau(E_l - E_m)} |\langle l | a_{\vec{k}} | m \rangle|^2 \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Durch Fourier-Transformation bezüglich der Zeit bekommt man den entsprechenden Ausdruck in Abhängigkeit der Energie  $\omega$ .

$$ig^>(\vec{k}, \omega) = 2\pi \sum_{m,l} \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_m)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}]} |\langle l | a_{\vec{k}}^\dagger | m \rangle|^2 \delta(\omega + E_m - E_l) \quad (2.22)$$

Auf die gleiche Weise bekommt man auch den Ausdruck für  $g^<$ .

$$ig^<(\vec{k}, \omega) = -2\pi \sum_{m,n} \frac{e^{-\beta(E_m - \mu N_m)}}{\text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H} - \mu \hat{N})}]} |\langle n | a_{\vec{k}} | m \rangle|^2 \delta(\omega + E_n - E_m) \quad (2.23)$$

Aus den beiden Gleichungen kann man leicht den Zusammenhang zwischen  $g^<$  und  $g^>$  herleiten:

$$g^<(\vec{k}, \omega) = -e^{-\beta(\omega - \mu)} g^>(\vec{k}, \omega) \quad (2.24)$$

Betrachtet man die Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}
-ig^<(\vec{k}, \omega) &= -i \int d^3\rho \int d\tau e^{-i\vec{k}\vec{\rho} + i\omega\tau} g^<(\rho, \tau) \\
&= \int d^3\rho \int d\tau e^{-i\vec{k}\vec{\rho} + i\omega\tau} \langle \hat{n}(\rho, \tau) \rangle = \langle n(\vec{k}, \omega) \rangle \quad (2.25)
\end{aligned}$$

so erkennt man, daß die  $-g^<(\vec{k}, \omega)$  der mittleren Dichte der besetzten Zustände (Teilchendichte) mit dem Impuls  $k$  und der Energie  $\omega$  entspricht. Im Gegensatz dazu läßt sich  $g^>(\vec{k}, \omega)$  als die mittlere Dichte der unbesetzten Zustände (Lochdichte) interpretieren [KaB].

### 2.3.3 Die Spektralfunktion

Die Spektralfunktion ist definiert als die Differenz über den Schnitt entlang der reellen Energieachse.

$$A(\vec{k}, \omega) \equiv i\bar{g}(\vec{k}, \omega) = i[g^>(\vec{k}, \omega) - g^<(\vec{k}, \omega)], \quad (2.26)$$

$A(\vec{k}, \omega)$  wird später noch eine sehr große Rolle spielen. Mit Hilfe von Gleichung 2.24 kann man  $g^>$  und  $g^<$  in Abhängigkeit der Spektralfunktion umschreiben:

$$ig^>(\vec{k}, \omega) = A(\vec{k}, \omega)(1 - f(\vec{k}, \omega)) \quad (2.27)$$

$$-ig^<(\vec{k}, \omega) = A(\vec{k}, \omega)f(\vec{k}, \omega) \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

Die Funktion  $f(\omega)$  entspricht der Wahrscheinlichkeit der Besetzung eines Zustandes mit der Energie  $\omega$ . Daher kann man die Spektralfunktion als eine Funktion zur Gewichtung der besetzten bzw. unbesetzten Zustände interpretieren [KaB].

Die Besetzungswahrscheinlichkeit für Fermionen im thermodynamischen Gleichgewicht ist durch die Fermi-Dirac-Verteilung  $f(\omega) = \frac{1}{e^{\beta(\omega-\mu)}+1}$  gegeben.

Da die Fermi-Dirac-Verteilung für den Grenzfall  $T \rightarrow 0$  in eine Stufenfunktion übergeht, folgt für  $g^>$  und  $g^<$ :

$$T \rightarrow 0$$

$$ig^>(\vec{k}, \omega) = A(\vec{k}, \omega)\theta(\omega - \mu) \quad (2.30)$$

$$ig^<(\vec{k}, \omega) = -A(\vec{k}, \omega)\theta(\mu - \omega) \quad (2.31)$$

Woran man sofort erkennt, daß  $g^>$  für  $\omega < \mu$  und  $g^<$  für  $\omega > \mu$  verschwinden.

Man kann zeigen, daß für Fermionen  $A(\vec{k}, \omega)$  eine positiv definite reelle Funktion ist [Ec]. Sie erfüllt folgende Normierung:

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} A(\vec{k}, \omega) = 1 \quad (2.32)$$

Kennt man die Spektralfunktion, so kann man alle physikalisch relevanten Größen mit ihrer Hilfe bestimmen.

Aus den Gleichung 2.18 und der Definition der Spektralfunktion kann man die wichtige Beziehung zwischen der retardierten Greenfunktion und der Spektralfunktion bestimmen.

$$\text{Im}g^{ret}(\vec{k}, \omega) = A(\vec{k}, \omega) \quad (2.33)$$

### 2.3.4 Die Hartree-Fock-Näherung

Geht man nun von der im Anhang hergeleiteten Bewegungsgleichung (Gleichung B.9) für die Einteilchen-Greenfunktion aus, so benötigt man eine Näherung für die Zweiteilchen-Greenfunktion. Die Einteilchen-Greenfunktion  $g(1, 1')$  beschreibt die Propagation eines Teilchens, welches zum Zeitpunkt  $t_1$  dem System hinzugefügt wird und zum Zeitpunkt  $t_{1'}$  wieder aus dem System entfernt wird.

$$g(1, 1') \overline{=} \longrightarrow 1' \quad (2.34)$$

Dementsprechend beschreibt die Zweiteilchen-Greenfunktion  $g_2(1, 2, 1', 2')$  die Propagation zweier Teilchen, die zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  dem System hinzugefügt werden und zu den Zeitpunkten  $t_{1'}$  und  $t_{2'}$  wieder aus dem System entfernt werden. Im Allgemeinen korreliert die Bewegung der beiden Teilchen, da sie sie miteinander wechselwirken.

In erster Näherung kann man diese Korrelation vernachlässigen, so daß sich die beiden Teilchen unabhängig voneinander im System bewegen.

$$\begin{aligned}
 g_2(1, 2, 1', 2') &= \begin{array}{c} \text{---} \longrightarrow \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{---} \longrightarrow \text{---} \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \longrightarrow \text{---} \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \end{array} \\
 &= g(1, 1')g(2, 2') - g(1, 2')g(2, 1') \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

Auf diese Weise faktorisiert die Zweiteilchen-Greenfunktion  $g_2$  in zwei Einteilchen-Greenfunktionen, wobei der zweite Term aus der Ununterscheidbarkeit der beiden Teilchen entsteht.

Setzt man nun diese Näherung in die Bewegungsgleichung für die Einteilchen-Greenfunktion ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 (i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m})g(1, 1') &= \delta(t_1 - t_{1'})\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) \quad (2.36) \\
 -i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2) \{g(1, 1')g(2, 2^+) - g(1, 2^+)g(2, 1')\} &|_{t_1=t_2}
 \end{aligned}$$

Da nun  $t_{2+}$  infinitesimal größer als  $t_2$  ist, folgt:

$$\begin{aligned} ig(2, 2^+) &= -ig^<(2, 2^+) = - \langle \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \Psi(\vec{r}_2, t_{2+}) \rangle \\ &= \langle n(\vec{r}_2, t_2) \rangle \end{aligned} \quad (2.37)$$

Daher folgt nun für den ersten Term in der zweiten Zeile:

$$-i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2) g(1, 1') g(2, 2^+) = \int d^3r_2 v(r_1 - r_2) \langle n(\vec{r}_2) \rangle g(1, 1') \quad (2.38)$$

Dies ist der sogenannte Hartree-Term. Er beschreibt ein Vielteilchensystem als die Bewegung unabhängiger Teilchen in einem gemittelten Potential, welches durch die anderen Teilchen erzeugt wird.

In einem translation-invarianten System sind sowohl die Dichte als auch das Potential konstant. Daher folgt nach einer Fourier-Transformation von Gleichung 2.37:

$$\left[ \omega - \frac{k^2}{2m} + nv - \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v(\vec{k} - \vec{k}') \langle n(k') \rangle \right] g(\vec{k}, \omega) = 1 \quad (2.39)$$

Dies ist die Hartree-Fock-Gleichung, welche man auch durch Variation des Energiefunktionalen hätte herleiten können. Der letzte Term auf der linken Seite entsteht dabei aus der Ununterscheidbarkeit der Teilchen.

Eine Lösung der Hartree-Fock-Gleichung führt auf eine ähnliche Spektralfunktion wie im Fall der freien Teilchen. Allerdings ist sie um die Energie, welche durch die Hartree-Fock Terme entsteht, verschoben.

$$A(\vec{k}, \omega) = \delta(\omega - (k^2/2m) - nv + \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} v(\vec{k} - \vec{k}') \langle n(k') \rangle) \quad (2.40)$$

## 2.4 Die Selbstenergie

Mit Hilfe von Feynman-Regeln läßt sich die Greenfunktion diagrammatisch berechnen, für  $T=0$  findet man die Regeln in jedem Buch über Vielteilchen-

theorie und für endliche Temperaturen unter anderem in [Das, Dan].

$$g = \text{diagram with double arrow} \\ = \text{diagram with single arrow} + \text{diagram with wavy line} + \text{diagram with cloud} + \dots$$

Als Selbstenergieeinschub bezeichnet man einen beliebigen Teil eines Diagramms, der mit dem Rest nur durch eine einlaufende und auslaufende Linie verbunden ist. Die Summe aller Selbstenergieeinschübe bezeichnet man als die Selbstenergie  $\Sigma$ .

$$\text{diagram with double arrow} = \text{diagram with single arrow} + \text{diagram with semi-circle labeled } \Sigma \quad (2.41)$$

So gilt zum Beispiel in erster Ordnung für die Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma(1, 1') &= \frac{\text{diagram with wavy line}}{1 \quad 1'} + \frac{\text{diagram with cloud}}{1 \quad 1'} \\ &= [\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) \int d^3r_2 v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) (-i) g^0(\vec{r}_2, t_1, \vec{r}_2, t_1) \\ &\quad + v(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) i g^0(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_{1'}, t_{1'})] \delta(t_1 - t_{1'}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Die Dyson-Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen Selbstenergie und Greenfunktion dar (siehe z.B.[FeW]).

$$g(1, 1) = g^0(1, 1') + \int_C d^3r_2 d^3r_3 g^0(1, 2) \Sigma(2, 3) g(3, 1') \quad (2.43)$$

Wobei  $g^0$  die freie Greenfunktion ist. Sie ist Lösung der freien Schrödinger-Gleichung.

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right) g(1, 1') = \delta(1 - 1') \quad (2.44)$$

Mit Hilfe der Dyson-Gleichung erhält man eine Gleichung für die Greenfunktion, welche Ähnlichkeit mit Gleichung B.9 hat.

$$(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m})g(1, 1') = \delta(1, 1') + \int d^3r_2 \Sigma(1, 2)g(2, 1') \quad (2.45)$$

Offensichtlich entspricht

$$-i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2)g_2(1, 1', 2, 2^+) = \int d^3r_2 \Sigma(1, 2)g(2, 1') \quad (2.46)$$

Somit kann man nun die Greenfunktion systematisch mit Hilfe einer Entwicklung der Selbstenergie ausrechnen.

Setzt man nun die Näherung der Selbstenergie erster Ordnung in Gleichung 2.42 ein, so erhält man eine Gleichung, die Ähnlichkeit mit der Hartree-Fock Näherung hat .

$$(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m})g(1, 1') = \delta(t_1 - t_1')\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_1') \quad (2.47)$$

$$-i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2)\{g(1, 1')g_0(2, 2^+) - g(1, 2^+)g_0(2, 1')\} |_{t_1=t_2}$$

Allerdings treten hier teilweise an Stelle der Greenfunktion  $g$  die Greenfunktion  $g_0$  für ein freies Teilchen auf. Der Grund dafür liegt darin, daß nur Diagramme erster Ordnung verwendet wurden. Da man im Medium aber ein Teilchen lediglich für kurze Zeiten, als frei ansehen kann, kann man nun  $g^0$  durch  $g$  ersetzen. Dies bedeutet nichts anderes als das man alle Feynmandiagramme in einer bestimmten Näherung aufsummiert, da man so eine Wechselwirkung der Teilchen im Zwischenzustand zulässt. Die Näherung erster Ordnung ist also die Hartree-Fock-Näherung.

Entwickelt man die Selbstenergie bis zur zweiten Ordnung, so bleiben zwei Diagramme übrig, die nicht in der Aufsummierung der Hartree-Fock-Diagramme enthalten sind.

$$\Sigma^C(1, 1') = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} \quad (2.48)$$

Dies sind Beiträge zur Polarisations-Selbstenergie in 2. Ordnung, welche in der Literatur auch manchmal Born-Diagramme genannt werden. Für das erste Diagramm erhalten wir

$$\Sigma_{bd}(1, 1') = \int d^3r_2 \int d^3r_2' v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)v(\vec{r}_2' - \vec{r}_1') \times [g(1, 1')g(2, 2')g(2, 2')] |_{t_2=t_1, t_2'=t_1'} \quad (2.49)$$

und für das Austausch-Diagramm

$$\begin{aligned} \Sigma_{be}(1, 1') = & \int d^3r_2 \int d^3r_{2'} v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) v(\vec{r}_{2'} - \vec{r}_{1'}) \\ & \times [g(1, 2')g(2, 1')g(2, 2')] |_{t_2=t_1, t'_2=t'_1}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Im Gegensatz zu den Hartree-Fock-Diagrammen, sind die Born-Diagramme nicht mehr zeitlich lokal, das heißt  $t_1 \neq t'_1$ . Bei den Hartree-Fock-Diagrammen sorgte gerade die Delta-Funktion  $\delta(t_1 - t'_1)$  dafür, daß unser Ausdruck zeitlich lokal war. Man kann daher, analog zur Greenfunktion, die Selbstenergie in einen Anteil für  $t_1 > t_{1'}$  und  $t_1 < t_{1'}$  aufspalten.

$$\Sigma^C(1, 1_{1'}) = \theta(t_1 - t_{1'})\Sigma^>(1, 1') + \theta(t_{1'} - t_1)\Sigma^<(1, 1') \quad (2.51)$$

Bei dem Anteil zur Selbstenergie, der durch die Hartree-Fock-Näherung hervorgerufen ist, ist dies durch die zeitliche Lokalität allerdings nicht möglich.

Ersetzt man nun in Gleichungen 2.49 und 2.50  $g$  durch die entsprechenden Ausdrücke von  $g^{\lessgtr}$  für die Annahme  $t_1 > t_{1'}$  bzw.  $t_1 < t_{1'}$  so erhält man die entsprechenden Ausdrücke für  $\Sigma_{bd}^{\lessgtr}$  und  $\Sigma_{be}^{\lessgtr}$ .

$$\begin{aligned} \Sigma_{bd}^{\lessgtr}(1, 1') = & \int d^3r_2 \int d^3r_{2'} v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) v(\vec{r}_{2'} - \vec{r}_{1'}) \\ & \times [g^{\lessgtr}(1, 1')g^{\lessgtr}(2, 2')g^{\lessgtr}(2, 2')] |_{t_2=t_1, t'_2=t'_1} \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{be}^{\lessgtr}(1, 1') = & \int d^3r_2 \int d^3r_{2'} v(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) v(\vec{r}_{2'} - \vec{r}_{1'}) \\ & \times [g^{\lessgtr}(1, 2')g^{\lessgtr}(2, 1')g^{\lessgtr}(2, 2')] |_{t_2=t_1, t'_2=t'_1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Für die Diagramme im Energie-Impuls-Raum bekommt man mit Hilfe der

Feynmanregeln:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^>(\vec{k}, \omega) &= i \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right] \\
 &= \int \frac{d\omega_2 d^3 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\vec{k} + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\
 &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) [(v(k - k_3))^2 - v(k - k_3)v(k - k_4)] \\
 &\quad \times g^<(\vec{k}_2, \omega_2) g^>(\vec{k}_3, \omega_3) g^>(\vec{k}_4, \omega_4) \tag{2.54}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma^<(\vec{k}, \omega) &= i \left[ \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \right] \\
 &= \int \frac{d\omega_2 d^3 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\vec{k} + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\
 &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) [(v(k - k_3))^2 - v(k - k_3)v(k - k_4)] \\
 &\quad \times g^>(\vec{k}_2, \omega_2) g^<(\vec{k}_3, \omega_3) g^<(\vec{k}_4, \omega_4) \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie bezüglich  $k_3$  und  $k_4$  kann man folgende Umformung benutzen:

$$\begin{aligned}
 |M|^2 &\equiv (v(k - k_3))^2 - v(k - k_3)v(k - k_4) \\
 &= \frac{1}{2}(v(k - k_3) - v(k - k_4))^2 \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

Daher lassen sich die Gleichungen 2.54 und 2.55 kompakter schreiben.

Da sich die beiden Diagramme aber nur in den Potentialen unterscheiden, die Propagatoren aber gleich sind, genügt es eigentlich, daß erste Diagramm auszuwerten. Mit anderen Worten, das Austauschdiagramm ist in dem Matrixelement  $|M|^2$  schon enthalten.

Benutzt man Beziehung 2.24 in den Gleichungen 2.54 und 2.55, so erhält man die gleiche Beziehung zwischen  $\Sigma^>$  und  $\Sigma^<$  wie zwischen den beiden Greenfunktionen  $g^>$  und  $g^<$ .

$$\Sigma^> = -e^{\beta(\omega - \omega_f)} \Sigma^< \tag{2.57}$$

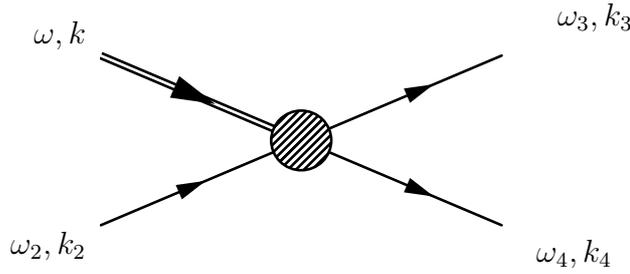
Es liegt daher Nahe, analog zu der Spektralfunktion folgende Größe einzuführen

$$\Gamma(\omega, k) \equiv i(\Sigma^>(\omega, k) - \Sigma^<(\omega, k)), \quad (2.58)$$

welche sich später als die inverse Lebensdauer eines Zustandes ( $\Gamma = 1/\tau$ ) herausstellen wird.

### 2.4.1 Interpretation von $\Sigma^{\gtrless}$

Ein Teilchen mit der Energie  $\omega$  und dem Impuls  $\vec{k}$  stößt mit einem Teilchen der Energie  $\omega_2$  und dem Impuls  $\vec{k}_2$ . Nach dem Stoß sollen sich die beiden Teilchen nicht mehr in den anfänglichen Zuständen, sondern in den Zuständen mit den Energien  $\omega_3, \omega_4$  und den Impulsen  $\vec{k}_3, \vec{k}_4$  befinden.



Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu  $|M|^2 \equiv (v(k - k_3))^2 - v(k - k_3)v(k - k_4)$  mal einer Delta-Funktion, die die Energie und Impulserhaltung sicher stellt.

Um nun eine Stoßrate zu bekommen, muß man den differentiellen Wirkungsquerschnitt mit der Dichte der einlaufenden Teilchen  $-ig^<(\omega_2, k_2)$  und der Dichte aller auslaufenden Teilchen  $ig^>(\omega_3, k_3)$  und  $ig^>(\omega_4, k_4)$  multiplizieren und über alle internen Impulse und Energien integrieren. Dies führt dann auf die Gleichungen 2.54.

$$\begin{aligned} \Sigma^>(\vec{k}, \omega) &= \int \frac{d\omega_2 d^3 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(\vec{k} + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4) \\ &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) |M|^2 \\ &\quad \times g^<(\vec{k}_2, \omega_2) g^>(\vec{k}_3, \omega_3) g^>(\vec{k}_4, \omega_4) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Bei  $\Sigma^>(\omega, k)$  handelt es sich also um eine Stoßrate, die ein Teilchen aus dem Zustand  $\omega, k$  heraus streut. In einem System mit niedriger Dichte ( $\beta\mu \rightarrow$

$-\infty$ ) kann man  $\Sigma^<(\omega, k)$  gegenüber  $\Sigma^>(\omega, k)$  vernachlässigen und somit bestimmt  $\Sigma^>(\omega, k)$  die Lebensdauer eines Zustandes.

Auf die gleiche Weise sieht man, daß es sich bei  $\Sigma^<(\omega, k)$  um eine Stoßrate handelt, die ein Teilchen in den Zustand  $\omega, k$  hinein streut, wenn der Zustand  $\omega, k$  vorher nicht besetzt war. Die gesamte Zerfallsrate ist daher durch Gleichung 2.58 gegeben.

Dies entspricht folgender Näherung für die Zweiteilchen-Greenfunktion:

$$\begin{aligned}
 g_2(1, 2, 1', 2') = & \text{Diagram 1} \\
 = & \text{Diagram 2} \\
 + & \text{Diagram 3} \\
 & \text{Diagram 4} \\
 & \text{Diagram 5}
 \end{aligned}
 \tag{2.60}$$

Diese Näherung trägt Stöße zwischen zwei Teilchen Rechnung. Während in der Hartree-Fock-Näherung, die beiden Teilchen sich unabhängig von einander bewegt haben, werden hier Stöße zwischen Teilchen berücksichtigt.

## 2.5 Zusammenhang zwischen $A(\vec{k}, \omega)$ und $\Sigma(\vec{k}, \omega)$

Auch für die retardierte Greenfunktion kann man eine Bewegungsgleichung ähnlich der für die kausale Greenfunktion herleiten. Eine genaue Rechnung hierzu findet sich in [Dan].

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m}\right) g^{ret}(1, 1') - \int_{t_0}^{\infty} d^3 r_2 \Sigma^{ret}(1, 2) g^{ret}(2, 1') = \delta(1 - 1') \tag{2.61}$$

Die retardierte Selbstenergie teilt sich dabei in einen Mittelfeld-Anteil, der durch die Hartree-Fock-Diagramme entsteht, und einen Kollisionsanteil, der durch die Born-Diagramme entsteht, auf.

$$\Sigma^{ret}(1, 2) = \Sigma_{HF}(1, 2) + \Sigma_B^{ret}(1, 2) \tag{2.62}$$

## 2.5. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN $A(\vec{k}, \omega)$ UND $\Sigma(\vec{k}, \omega)$ 23

Dabei besteht der selbe Zusammenhang zwischen den Selbstenergien des Kollisionsanteil wie zwischen den Greenfunktionen.

$$\Sigma_B^{ret}(1, 2) = \theta(t_1 - t_2)(\Sigma^>(1, 2) - \Sigma^<(1, 2)) \quad (2.63)$$

Durch Fouriertransformation ( $t_0 \rightarrow -\infty$ ) erhält man aus Gleichung 2.61:

$$g^{ret}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - \frac{k^2}{2m} - \Sigma^{ret}(\vec{k}, \omega)} \quad (2.64)$$

Die retadierte Selbstenergie  $\Sigma_B^{ret}(\vec{k}, \omega)$  besitzt dabei einen Imaginärteil und einen Realteil, welche durch die Kramers-Kroning-Relation mit einander verbunden sind.

$$\text{Re}\Sigma_B^{ret}(\vec{k}, \omega) = -P \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im}\Sigma_B^{ret}(\vec{k}, \omega')}{\omega - \omega'} \quad (2.65)$$

Wie leicht zu zeigen ist, gilt der gleiche Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil von  $\Sigma_B^{ret}(\vec{k}, \omega)$  und der Breite  $\Gamma(\vec{k}, \omega)$ , wie zwischen dem Imaginärteil der retardierten Greenfunktion und der Spektralfunktion (Gleichung 2.33).

$$\text{Im}\Sigma_B^{ret}(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{2}\Gamma(\vec{k}, \omega) \quad (2.66)$$

Die Fourier-Transformation des zeitlich lokalen Mittelfeld-Anteils enthält allerdings keinen Imaginärteil. Daher ergibt sich für den Real- und Imaginärteil der retardierten Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \text{Re}\Sigma(\vec{k}, \omega) &= \Sigma_{HF}(\vec{k}, \omega) + P \int \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\Gamma(\vec{k}, \omega')}{\omega - \omega'} \\ \text{Im}\Sigma(\vec{k}, \omega) &= \text{Im}\Sigma_B(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{2}\Gamma(\vec{k}, \omega) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Bestimmt man nun den Imaginärteil der retardierten Greenfunktion und benutzt man die Gleichungen für die Selbstenergie, so erhält man für die Spektralfunktion:

$$A(\vec{k}, \omega) = \frac{\Gamma(\vec{k}, \omega)}{(\omega - \frac{k^2}{2m} - \Sigma_{HF}(\vec{k}, \omega) - \text{Re}\Sigma^{ret}(\vec{k}, \omega))^2 + (\frac{\Gamma(\vec{k}, \omega)}{2})^2} \quad (2.68)$$



# Kapitel 3

## Polarisationswechselwirkung in Kernmaterie

### 3.1 Numerische Realisierung und Näherungen

Aus dem vorherigen Kapitel ist der Zusammenhang zwischen Selbstenergie und Spektralfunktion bekannt. Kennt man die Selbstenergie, kann man die Spektralfunktion direkt ausrechnen. Benutzt man die Gleichungen 2.54 und 2.55 mit den Beziehungen, die zwischen den Greensfunktionen und den Spektralfunktionen gelten (Gleichungen 2.27 und 2.28), so erkennt man, daß die Selbstenergie wiederum von der Spektralfunktion abhängt.

An dieser Stelle sei erwähnt, daß unser System aufgrund der Symmetrie nur vom Betrag des Impulses abhängt.

$$\begin{aligned}\Sigma^>(k, \omega) &= -i \int \frac{d\omega_2 d^3 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k + \vec{k}_2 - k_3 - k_4) \\ &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) |M(k, \omega)|^2 A(k_2, \omega_2) f(k_2, \omega_2) \\ &\quad A(k_3, \omega_3) (1 - f(k_3, \omega_3)) A(k_4, \omega_4) (1 - f(k_4, \omega_4))\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\Sigma^<(k, \omega) &= i \int \frac{d\omega_2 d^3 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_3 d^3 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_4 d^3 k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k + k_2 - k_3 - k_4) \\ &\quad \times \delta(\omega + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) |M(k, \omega)|^2 A(k_2, \omega_2) (1 - f(k_2, \omega_2)) \\ &\quad A(k_3, \omega_3) f(k_3, \omega_3) A(k_4, \omega_4) f(k_4, \omega_4)\end{aligned}\quad (3.2)$$

Da in den Gleichungen zur Bestimmung der Selbstenergie die Spektralfunktion (Gleichungen 3.1 und 3.2 wiederum auftaucht, liegt es nahe ein iteratives

Verfahren zu benutzen. Ausgehend von einer ersten Schätzung der Zerfallsbreite berechnet man die Spektralfunktion (Gleichung 2.68). Diese benutzt man um die Selbstenergie auszurechnen. Mit Hilfe der Selbstenergie erhält man die Breite auf der Energieschale. Dies wird solange fortgesetzt bis Konvergenz erreicht wird.

$$\Gamma(k, \omega) \rightarrow A(k, \omega) \rightarrow \Sigma(k, \omega) \rightarrow \Gamma(k, \omega) \rightarrow \dots$$

In der Sprache der Feynman-Diagramme bedeutet dieses Verfahren nichts anderes, als eine unendliche Aufsummierung aller Diagramme in der Näherung zweiter Ordnung.

Besonders einfach würden die Integrale in Gleichungen 3.1 und 3.2, wenn man ein konstantes Matrixelement hätte. Im Allgemeinen ist das Matrixelement  $|M|^2$  impulsabhängig. Ein konstantes Matrixelement würde einer Punktwechselwirkung entsprechen, da man durch Fouriertransformation einer konstanten Funktion eine Deltafunktion im Ortsraum erhält. Rechnungen von J.Lehr [Le1, Le2] und F.Frömel [Fr] zeigen, daß man gute Ergebnisse mit einem konstanten Matrixelement erzielt.

Durch die Delta-Funktionen reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade. Zieht man nun das Matrixelement vor das Integral und führt die Integration über  $k_4, \omega_4$  und die beiden Winkel  $\phi_2$  und  $\phi_3$  aus, so vereinfachen sich die Gleichungen für die Selbstenergien.

$$\begin{aligned} \Sigma^>(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} \\ &\times A(k_2, \omega_2) f(k_2, \omega_2) A(k_3, \omega_3) (1 - f(k_3, \omega_3)) \\ &\times \int dk_4 k_4 A(k_4, \omega_4) (1 - f(k_4, \omega_4)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^<(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} \\ &\times A(k_2, \omega_2) (1 - f(k_2, \omega_2)) A(k_3, \omega_3) f(k_3, \omega_3) \\ &\times \int dk_4 k_4 A(k_4, \omega_4) f(k_4, \omega_4) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dabei sind  $k_{tot} = |\vec{k} + \vec{k}_2|$  und  $\omega_4 = \omega + \omega_2 - \omega_3$ .

## 3.2 Symmetrischer Kernmaterie

Für symmetrische Kernmaterie muß man keine Unterscheidung zwischen Neutronen und Protonen machen, man erhält eine Spektralfunktion für Nukleonen. Man kann daher alle Formeln aus dem vorangegangenen Abschnitt direkt übernehmen.

Im Falle  $T = 0$  sind alle Zustände bis zur Fermikante besetzt  $k \leq k_f$  und die Zustände darüber unbesetzt. Dies hat Konsequenzen auf die Streuraten  $\Sigma^{\geq}$ . Stoßen zwei Nukleonen mit den Energien  $\omega$  und  $\omega_2$ , so ergibt sich, wenn die beiden Nukleonen später die Energien  $\omega_3$  und  $\omega_4$ , welche unterschiedlich zu den anfänglichen Energien sein sollen, aufgrund der Energieerhaltung:

$$\omega + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 \quad (3.5)$$

Da der Zustand  $\omega_2$  vorher besetzt sein musste, folgt  $\omega_2 \leq \omega_f$ . Die beiden Endzustände müssen hingegen oberhalb der Fermikante liegen ( $\omega_3, \omega_4 > \omega_f$ ), da die Endzustände nicht besetzt sein dürfen. Dies führt zu folgender Abschätzung für  $\omega$ :

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2 < \omega_f + \omega_f - \omega_f = \omega_f \quad (3.6)$$

Ebenso kann man eine Abschätzung für den umgekehrten Prozess finden, in dem zwei Nukleonen mit den Zuständen  $\omega_3, \omega_4$  in die unbesetzten Zustände  $\omega$  und  $\omega_2$  streuen. Dieses mal müssen sich  $\omega_3$  und  $\omega_4$  als besetzte Zustände unterhalb der Fermikante befinden, während sich  $\omega_2$  als unbesetzter Zustand oberhalb der Fermikante befindet. Dies führt auf folgende Abschätzung:

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2 > \omega_f + \omega_f - \omega_f = \omega_f \quad (3.7)$$

Daher folgt für die Breite:

$$\Sigma^>(k, \omega) = 0 \Rightarrow \Gamma(k, \omega) = -\Sigma^<(k, \omega) \quad \text{für } \omega \leq \omega_f \quad (3.8)$$

$$\Sigma^<(k, \omega) = 0 \Rightarrow \Gamma(k, \omega) = \Sigma^>(k, \omega) \quad \text{für } \omega \geq \omega_f \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow \Gamma(k, \omega) = 0 \quad \text{für } \omega = \omega_f \quad (3.10)$$

Nukleonen an der Fermikante sind also quasistabil.

## 3.3 Asymmetrische Kernmaterie

Im Falle von asymmetrischer Kernmaterie muß zwischen Stößen gleicher Nukleonen und zwischen Stößen verschiedener Nukleonen unterschieden werden.

Man erhält daher eine Spektralfunktion für Protonen und eine für Neutronen. Bei der Berechnung der Selbstenergie muß man allerdings vorsichtig sein, welche Diagramme man berücksichtigt.

Das Matrixelement lässt sich mit Hilfe der Landau-Migdal-Parameter in einen isoskalaren und einen isovektoriellen Anteil zerlegen [Mi, Ta]. Man führt dazu die dimensionslose Größe  $\Phi$  ein.

$$\Phi = M \frac{\partial \epsilon(k)}{\partial |\vec{k}|} \Big|_{|\vec{k}|=k_f} = F + F' \vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2 \quad (3.11)$$

Für die Streuung gleicher Nukleonen (nn- und pp-Stöße) erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi^{nn} &= F + F' \\ \Phi^{pp} &= F + F' \end{aligned} \quad (3.12)$$

Und für die Stöße ungleicher Nukleonen (np-Stöße):

$$\Phi^{np} = F - F'$$

Dabei wurden hier nur solche Stöße betrachtet, bei denen keine Ladung ausgetauscht wurde. Im Falle, daß Ladung ausgetauscht wird, ist  $\Phi$  durch  $F'$  bestimmt:

$$\Phi_{exch}^{np} = 2F'$$

Geht man davon aus das nur energetisch niedrig liegende Zustände angeregt werden, wird das System von der Wechselwirkung nahe der Fermikannte bestimmt sein. Da die Wechselwirkung an der Fermifläche nur vom Impulsübertrag und Winkel der einlaufenden Teilchen abhängt [Mi], lässt sich die Streuamplitude mit Hilfe von Legendre-Polynome entwickeln:

$$M(p, p') = \sum_l M_l P_l(\cos \theta) \quad (3.13)$$

Der Vergleich von Experiment und Theorie zeigt, daß die nullte Ordnung der Entwicklung den größten Beitrag liefert. Die Inkompressibilität  $K$  ist direkt mit dem Parameter  $F_0$  und die Symmetrie-Energie  $a_4$  mit  $F'_0$  verbunden [Ta].

$$\begin{aligned} K &= 3mk_f^3(1 + F_0) \\ a_4 &= \frac{1}{6}mk_f^3(1 + F'_0) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Berechnungen der Landau-Migdal-Parameter und ein Vergleich mit dem Experiment zeigen, daß die Parameter  $F_0, F_1$  [Ta] bei der Sättigungsdichte der Kernmaterie und Dichten darüber hinaus dominieren. Daher kann man die Stöße zwischen Nukleonen vernachlässigen, bei denen Ladung ausgetauscht wird, denn diese werden ja gerade von den Parametern  $F'$  bestimmt. Außerdem kann man das gleiche Matrix-Element für Stöße zwischen gleichen und ungleichen Nukleonen annehmen. Diese Näherungen führen zur wesentlichen Vereinfachung der Rechnungen für asymmetrische Kernmaterie.

Für die Selbstenergie bleiben also nur noch 2 Terme übrig. Der eine für Stöße mit Nukleonen gleichen Typs und der andere für Stöße mit Nukleonen verschiedenen Typs.

$$\Sigma_p = \begin{array}{c} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \quad p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \quad p \end{array} + \begin{array}{c} n \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \quad p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad p \quad p \end{array}$$
  

$$\Sigma_n = \begin{array}{c} n \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n \quad n \quad n \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n \quad n \quad n \end{array} + \begin{array}{c} p \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n \quad n \quad n \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ n \quad n \quad n \end{array}$$

Die Feynmandiagramme sind dabei auf ein schematische Art zu verstehen, da die Austauschdiagramme nicht explizit dargestellt wurden. Ersetzt man nun die entsprechenden Ausdrücke in den Formeln für die Selbstenergien, so erhält man die Formeln für die Neutronen und Protonen Selbstenergien. Die Austauschsterme sind dabei im Matrixelement  $M$  enthalten.

Mit Hilfe von Gleichung 2.56 kann man nun die Streurrate aus dem Zustand

$(k, \omega)$  aufschreiben:

$$\begin{aligned} \Sigma_p^>(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 & (3.15) \\ &\times \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} A_p(k_3, \omega_3) (1 - f_p(k_3, \omega_3)) \\ &\times [A_p(k_2, \omega_2) f_p(k_2, \omega_2) \int dk_4 k_4 A_p(k_4, \omega_4) (1 - f_p(k_4, \omega_4)) \\ &\quad + A_n(k_2, \omega_2) f_n(k_2, \omega_2) \int dk_4 k_4 A_n(k_4, \omega_4) (1 - f_n(k_4, \omega_4))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n^>(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 & (3.16) \\ &\times \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} A_n(k_3, \omega_3) (1 - f_n(k_3, \omega_3)) \\ &\times [A_n(k_2, \omega_2) f_n(k_2, \omega_2) \int dk_4 k_4 A_n(k_4, \omega_4) (1 - f_n(k_4, \omega_4)) \\ &\quad + A_p(k_2, \omega_2) f_p(k_2, \omega_2) \int dk_4 k_4 A_p(k_4, \omega_4) (1 - f_p(k_4, \omega_4))] \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für die Streuung in den Zustand  $(k, \omega)$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_p^<(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 & (3.17) \\ &\times \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} A_p(k_3, \omega_3) f_p(k_3, \omega_3) \\ &\times [A_p(k_2, \omega_2) (1 - f_p(k_2, \omega_2)) \int dk_4 k_4 A_p(k_4, \omega_4) f_p(k_4, \omega_4) \\ &\quad + A_n(k_2, \omega_2) (1 - f_n(k_2, \omega_2)) \int dk_4 k_4 A_n(k_4, \omega_4) f_n(k_4, \omega_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_n^<(k, \omega) &= -i \frac{|M|^2}{(2\pi)^6} \int d\omega_2 \int d\omega_3 \int dk_3 k_3^2 & (3.18) \\ &\times \int dk_2 k_2^2 \frac{d \cos \theta_2}{k_{tot} k_3} A_n(k_3, \omega_3) f_n(k_3, \omega_3) \\ &\times [A_n(k_2, \omega_2) (1 - f_n(k_2, \omega_2)) \int dk_4 k_4 A_n(k_4, \omega_4) f_n(k_4, \omega_4) \\ &\quad + A_p(k_2, \omega_2) (1 - f_p(k_2, \omega_2)) \int dk_4 k_4 A_p(k_4, \omega_4) f_p(k_4, \omega_4)] \end{aligned}$$

Ganz analog wie für symmetrische Kernmaterie kann man mit Hilfe der Selbstenergien, die Spektralfunktion und die Breiten der Protonen und Neutronen bestimmen. Die Rechnung wird mit konstanter Breite für die Nukleonen initialisiert. Aus dem Breiten bestimmt man die Spektralfunktionen, welche wiederum als Grundlagen zur Berechnung der Breiten dienen. Man iteriert so lange, bis Konvergenz erreicht wird.

### 3.3.1 Das Verhalten an der Fermikante

Betrachtet man sich nun die Energiebilanz der streuenden Nukleonen im Falle  $T = 0$ : Ein Nukleon mit der Energie  $\omega$  streut an einem Nukleon mit der Energie  $\omega_2$ , danach haben die Teilchen die Energien  $\omega_3$  und  $\omega_4$ . Für die Energiebilanz erhält man:

$$\omega = \omega_3 + \omega_4 - \omega_2 \quad (3.19)$$

Handelt es sich bei dem einlaufenden Teilchen um ein Proton, so kann dieses nur in einen Zustand oberhalb der Protonen-Fermienergie gestreut werden ( $\omega_3 > \omega_{fp}$ ). Das Proton kann nur mit einem Nukleon unterhalb der jeweiligen Fermikante streuen. Streut es mit einem Proton, so ist  $\omega_2 \leq \omega_{fp}$ , streut es aber mit einem Neutron, so ist  $\omega_2 \leq \omega_{fn}$ . Das zweite Nukleon kann aber auch nur in einen unbesetzten Zustand oberhalb der Fermienergie streuen. Für ein Proton gilt  $\omega_4 > \omega_{fp}$  und für ein Neutron  $\omega_4 > \omega_{fn}$ . Man kann also die Energie des einlaufenden Protons abschätzen:

pp-Stoß

$$\omega > \omega_{fp} + \omega_{fp} - \omega_{fp} = \omega_{fp} \quad (3.20)$$

pn-Stoß

$$\omega > \omega_{fp} + \omega_{fn} - \omega_{fp} = \omega_{fn} \quad (3.21)$$

Woraus  $\Sigma_p^> = 0$  für  $\omega < \omega_{fp}$  folgt.

Betrachtet man sich nun den umgekehrten Prozess in dem zwei Nukleonen aus dem Medium miteinander stoßen und sich später in den Zuständen  $\omega$  und  $\omega_2$  befinden. Der Zustand mit der Energie  $\omega$  sei dabei vorher nicht besetzt. In diesem Falle sind  $\omega_3 < \omega_{fp}$  und  $\omega_4 < \omega_{fp}$  für einen pp-Stoß und  $\omega_4 < \omega_{fn}$  für einen pn-Stoß. Da  $\omega_2$  in einen freien Endzustand gestreut wird, gilt  $\omega_2 > \omega_{fp}$  für einen pp-Stoß und  $\omega_2 > \omega_{fn}$ . Daraus folgt folgende Abschätzung:

pp-Stoß

$$\omega < \omega_{fp} + \omega_{fp} - \omega_{fp} = \omega_{fp} \quad (3.22)$$

pn-Stoß

$$\omega < \omega_{fp} + \omega_{fn} - \omega_{fn} = \omega_{fp} \quad (3.23)$$

Und somit ist  $\Sigma_p^< = 0$  für  $\omega > \omega_{fp}$ . Nach einer ganz analogen Betrachtung für Neutronen erhält man das selbe Ergebnis.  $\Sigma^>$  verschwindet also unterhalb und  $\Sigma^<$  oberhalb der Fermienergie der jeweiligen Nukleonen.

Protonen

$$\begin{aligned} \Sigma_p^> &= 0 \quad \text{für} \quad \omega \leq \omega_{fp} \\ &\Rightarrow \Gamma_p(k, \omega) = -\Sigma_p^<(k, \omega) \\ \Sigma_p^< &= 0 \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_{fp} \\ &\Rightarrow \Gamma_p(k, \omega) = \Sigma_p^>(k, \omega) \\ \Sigma_p &= 0 \quad \text{für} \quad \omega = \omega_{fp} \\ &\Rightarrow \Gamma_p(k, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Neutronen

$$\begin{aligned} \Sigma_n^> &= 0 \quad \text{für} \quad \omega \leq \omega_{fn} \\ &\Rightarrow \Gamma_n(k, \omega) = -\Sigma_n^<(k, \omega) \\ \Sigma_n^< &= 0 \quad \text{für} \quad \omega \geq \omega_{fn} \\ &\Rightarrow \Gamma_n(k, \omega) = \Sigma_n^>(k, \omega) \\ \Sigma_n &= 0 \quad \text{für} \quad \omega = \omega_{fn} \\ &\Rightarrow \Gamma_n(k, \omega) = 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sowohl die Spektralfunktion als auch die Breite verschwinden ganz analog dem symmetrischen Fall an der Stelle der Fermienergie.

## 3.4 Der Mittelfeld-Anteil

### 3.4.1 Die Skyrme-Parametrisierung

Mit der Annahme eines konstanten Matrixelementes lässt sich der Mittelfeld-Anteil der Selbstenergie nicht mehr selbstkonsistent berechnen. Man kann aber mit Hilfe einer Skyrme-Parametrisierung dem Mittelfeld-Anteil Rechnung tragen. Die Skyrme-Wechselwirkung erlaubt es, auf einfache Weise die

Hartree-Fock Energie, also den Mittelfeld-Anteil, als ein Funktional der Dichten auszudrücken. In dieser Arbeit wurde von folgender parametrisierten Wechselwirkung ausgegangen:

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= t_0(1 + x_0 P_\sigma) \delta(\vec{r}) \quad \text{zentraler Term} \\
&+ \frac{1}{2} t_1 (1 + x_1 P_\sigma) [\vec{P}'^2 \delta(\vec{r}) + \delta(\vec{r}) \vec{P}'^2] \\
&+ t_2 (1 + x_2 P_\sigma) \vec{P}' \delta(\vec{r}) \vec{P}' \quad \text{nicht lokale Terme} \\
&+ \frac{1}{6} t_3 (1 + x_3 P_\sigma) [\rho_p(\vec{r}_1) + \rho_n(\vec{r}_2)]^\sigma \quad \text{dichteabhängiger Term} \\
&+ i W_0 \vec{\sigma} [\vec{P}' \times \delta(\vec{r}) \vec{P}'] \quad \text{Spin-Orbit Term} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\
\vec{P} &= \frac{1}{2i} (\vec{\nabla}_1 - \vec{\nabla}_2) \quad \text{dabei wirkt } \vec{P}' \text{ auf die linke Seite} \\
\vec{\sigma} &= \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2 \quad \text{dabei ist } \vec{\sigma} \text{ der Spinoperator} \\
P_\sigma &= (1 + \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) / 2
\end{aligned}$$

Die Bindungsenergie läßt sich dann in ein räumliches Integral einer Hamiltondichte schreiben. Eine ausführlichere Herleitung findet sich zum Beispiel in [Ch] oder [VaB].

$$E = \langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int \mathcal{H}(\vec{r}) d^3 r \tag{3.27}$$

In finden den Referenzen [VaB] und [GrM] finden sich genauere Herleitungen der Hamiltondichte. Nach längere Rechnung findet sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{K} + \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_{eff} + \mathcal{H}_{fin} + \mathcal{H}_{so} + \mathcal{H}_{sg} + \mathcal{H}_{Coul} \tag{3.28} \\
\mathcal{K} &= \frac{1^2}{2m} \tau \\
\mathcal{H}_0 &= \frac{1}{4} t_0 [(2 + x_0) \rho^2 - (2x_0 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)] \\
\mathcal{H}_3 &= \frac{1}{24} t_3 \rho^\sigma [(2 + x_3) \rho^2 - (2x_3 + 1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)] \\
\mathcal{H}_{eff} &= \frac{1}{8} [t_1(2 + x_1) + t_2(2 + x_2)] \tau \rho \\
&+ \frac{1}{8} [t_2(2x_2 + 1) - t_1(2x_1 + 1)] (\tau_p \rho_p + \tau_n \rho_n)
\end{aligned}$$

Dabei sind  $\rho = \rho_p + \rho_n$  und  $\tau = \tau_p + \tau_n$  Dichten, mit der Definition der Dichten für Neutronen und Protonen ( $q = p, n$ ):

$$\rho_q(\vec{r}) = \sum_i |\phi_i^q(\vec{r})|^2 n_i^q \quad (3.29)$$

$$\tau_q(\vec{r}) = \sum_i |\vec{\nabla} \phi_i^q(\vec{r})|^2 n_i^q \quad (3.30)$$

Dabei ist  $n_i^q$  die Besetzungszahl.

Hier wurden dabei nur die Terme betrachtet, die später für Kernmaterie eine Rolle spielen.  $\mathcal{K}$  is der Term der kinetischen Energie,  $\mathcal{H}_0$  ein lokaler Term,  $\mathcal{H}_3$  ein dichteabhängiger Term und  $\mathcal{H}_{eff}$  ein effektiver Masse Term.

Im Allgemeinen treten noch spinabhängige Terme, Oberflächenterme oder ein Coulomb-Term auf. Da diese aber für unendlich ausgedehnte Kernmaterie kein Rolle spielen wird hier auf die Literatur verwiesen (siehe [Ch]).

Die Parameter werden schließlich möglichst gut an experimentellen Größen wie zum Beispiel Bindungsenergie oder Sättigungsdichte angepasst.

Der Mittelfeld-Anteil stammt aus den Hartree-Fock Diagrammen und ist abhängig vom Impuls und der Dichte  $\Sigma_{HF} = \Sigma_{HF}(k, \rho)$ . Führt man eine Taylorentwicklung des Mittelfeld-Anteils der Selbstenergie um den Fermi-Impuls  $k_f$  durch, so erhält man:

$$\Sigma_{HF}(k, \rho) \approx \Sigma_{HF}(k_f, \rho) + (k^2 - k_f^2) \Sigma'_{HF}(k_f, \rho) + \dots \quad (3.31)$$

Führt man eine effektive Masse ein, so kann man den impulsabhängigen Anteil ( $\propto k^2$ ) mit in den Term der kinetischen Energie schreiben.

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} (1 + 2m \Sigma'_{HF}) \quad (3.32)$$

So lässt sich der erste Term des Nenners der Spektralfunktion (Gleichung 2.68) mit Hilfe der effektiven Masse umschreiben:

$$\frac{k^2}{2m} + \Sigma_{HF}(k, \rho) + Re \Sigma^{ret}(k, \omega) \approx \frac{k^2}{2m^*} + U_{eff}(\rho) + Re \Sigma^{ret}(k, \omega) \quad (3.33)$$

$U_{eff}$  ist dabei der impulsunabhängige Teil des Mittelfeld-Anteils.

Die effektive Masse und das effektive Potential ergeben sich aus dem Ener-

giedichtefunktional 3.28 ( $q = p, n$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m_q^*} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau_q} &= \frac{1}{2m_q} + \frac{1}{8}[t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)]\rho \\ &+ \frac{1}{8}[t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)]\rho_q \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} U_{eff} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_q} &= \frac{1}{4}t_0[2(2+x_0)\rho - 2(2x_0+1)\rho_q] \\ &+ \frac{1}{24}t_3\rho^\sigma[2(2+x_3)\rho - 2(2x_3+1)\rho_q] \\ &+ \frac{1}{24}\sigma t_3\rho^{\sigma-1}[(2+x_3)\rho^2 - (2x_3+1)(\rho_p^2 + \rho_n^2)] \\ &+ \frac{1}{8}[t_1(2+x_1) + t_2(2+x_2)]\tau + \frac{1}{8}[t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)]\tau \end{aligned} \quad (3.35)$$

### 3.4.2 Die Zustandsgleichung

Kernmaterie läßt sich als ein Fermigas in einem Volumen  $V$  beschreiben, dabei ist  $V$  so groß, daß sich Oberflächeneffekte vernachlässigen lassen. Für die Energie pro Nukleon erhält man:

$$\frac{E}{A}(\rho) = \frac{V}{A}\mathcal{E}(\rho) = \frac{\mathcal{E}(\rho)}{\rho} \quad (3.36)$$

Mit Hilfe des Energiedichtefunktionals 3.28 erhält man die Zustandsgleichung für asymmetrische Kernmaterie:

$$\begin{aligned} \frac{E}{A}(Y, \rho) &= \frac{3}{5} \frac{1^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{2}{3}} F_{\frac{5}{3}} + \frac{1}{8}t_0\rho[2(x_0+2) - (2x_0+1)F_2] \\ &+ \frac{1}{48}t_3\rho^{\sigma+1}[2(x_3+2) - (2x_3+1)F_2] \\ &+ \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \rho^{\frac{5}{3}} \{ [t_1(x_1+2) + t_2(x_2+2)]F_{\frac{5}{3}} \\ &+ \frac{1}{2}[t_2(2x_2+1) - t_1(2x_1+1)]F_{\frac{8}{3}} \} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hierbei ist  $F_m(Y) = 2^{m-1}[Y^m + (1-Y)^m]$ , wobei es sich bei  $2^{m-1}$  um einen Normierungsfaktor handelt, der dafür sorgt, das  $F_m(0.5) = 1$ .

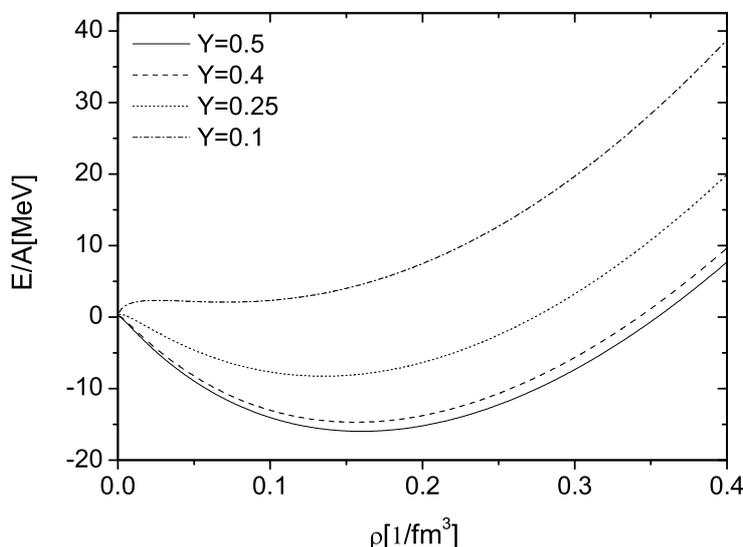


Abbildung 3.1: Zustandsgleichung für asymmetrische Kernmaterie berechnet mit Hilfe der Skyrme-Wechselwirkung SLy230a.

Abbildung 3.1 zeigt die Zustandsgleichung von Kernmaterie für verschiedene Verhältnisse von Protonen und Neutronen, wie man sie mit Hilfe der Skyrme-Wechselwirkung SLy230a [Ch] erhält.

Symmetrische Kernmaterie besitzt ein Minimum bei  $\rho \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$ , welches in etwa der Dichte im Zentrum von Atomkernen entspricht. Am Sättigungspunkt beträgt die Bindungsenergie etwa  $-16 \text{ MeV}$ . Das Verhalten von Kernmaterie bei hohen Dichten und hohen Temperaturen, wie sie bei der Kollision von Atomkernen entstehen können, ist dabei weitgehend unbekannt. Es werden dabei verschiedene Effekte diskutiert, wie zum Beispiel einen Phasenübergang zu einem Quark-Gluonen-Plasma oder aber ein metastabiler gebundener Zustand. Von großem Interesse ist auch das Verhalten der Kernmaterie bei hoher Asymmetrie, welches auch weitgehend unbekannt ist. Man weiß aber, daß reine Neutronenmaterie nicht gebunden ist. Neutronensterne, die ja aus neutronenreicher Materie bestehen, sind nur aufgrund ihrer großen Masse gravitativ gebunden.

In Abbildung 3.1 erkennt man, daß die Bindungsenergie für größer werdende Asymmetrie kleiner wird. Für  $Y = 0.1$  tritt kein gebundener Zustand mehr auf.

$t_0$ ( $MeV \cdot fm^3$ )	-2490.23
$t_1$ ( $MeV \cdot fm^5$ )	489.53
$t_2$ ( $MeV \cdot fm^5$ )	-566.58
$t_3$ ( $MeV \cdot fm^{3+3\sigma}$ )	13803.0
$x_0$	1.1318
$x_1$	-0.8426
$x_2$	-1.0
$x_3$	-1.9219
$\sigma$	-1/6
$W_0$ ( $MeV \cdot fm^5$ )	131.0

Tabelle 3.1: Die Parameter der Skyrme-Wechselwirkung SLy230a[Ch]. Der Vollständigkeit halber wurde auch der Spin-Orbit Parameter  $W_0$  angegeben.



# Kapitel 4

## Die Spektralfunktion

### 4.1 Symmetrische Kernmaterie

#### 4.1.1 Temperatur $T = 0$

Rechnungen mit diesem Modell für symmetrische Kernmaterie wurden zuerst von J. Lehr in [Le1] durchgeführt. Die Gleichungen wurden auf einem  $(k, \omega)$ -Gitter gelöst. Der Energiebereich lag zwischen  $-0.5$  und  $0.5$  GeV mit einem maximalen Impuls  $k_{max} = 1.25$  GeV. Der Abstand im Gitter betrug sowohl für den Impuls als auch für die Energie  $0.5$  MeV. Die untersuchte Kernmaterie hatte einen Fermi-Impuls von  $k_f = 1.33 fm^{-1}$ , eine Dichte von  $\rho = 0.16 fm^{-3}$  und eine Bindungsenergie pro Nukleon von  $\omega = -16$  MeV. Das Matrixelement wurde so gewählt, daß eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von [Ben] erzielt wurde. Dies führt auf ein Matrixelement von  $(\overline{M^2})^{1/2} = 207$  MeV  $fm^3$ , welches einem konstanten Wirkungsquerschnitt von  $20$  mb in einem On-Shell-Prozess entsprechen würde. Es wurde mit einer konstanten kleinen Breite von  $\Gamma = 0.1$  MeV gestartet. Nach 5 Iterationen war keine Änderung der Spektralfunktion mehr zu erkennen.

In 6.1 ist die normierte Spektralfunktion  $P(\omega, k) = NA(\omega, k)$  für verschiedene Impulse in Abhängigkeit der Energie  $\omega$  unterhalb der Fermienergie dargestellt. Die Normierungskonstante  $N$  entspricht dabei der selben Normierung wie in [Ben]. Die gepunktete Linie entspricht der Spektralfunktion nach der ersten Iteration, die durchgezogene Linie der Spektralfunktion nach 5 Iterationen und die gestrichelte Linie dem Ergebnis von [Ben]. Trotz der drastischen Annahme eines konstanten Matrixelementes und der Vernachlässigung von dispersiven Effekten, gibt es eine sehr gute Übereinstimmung mit den

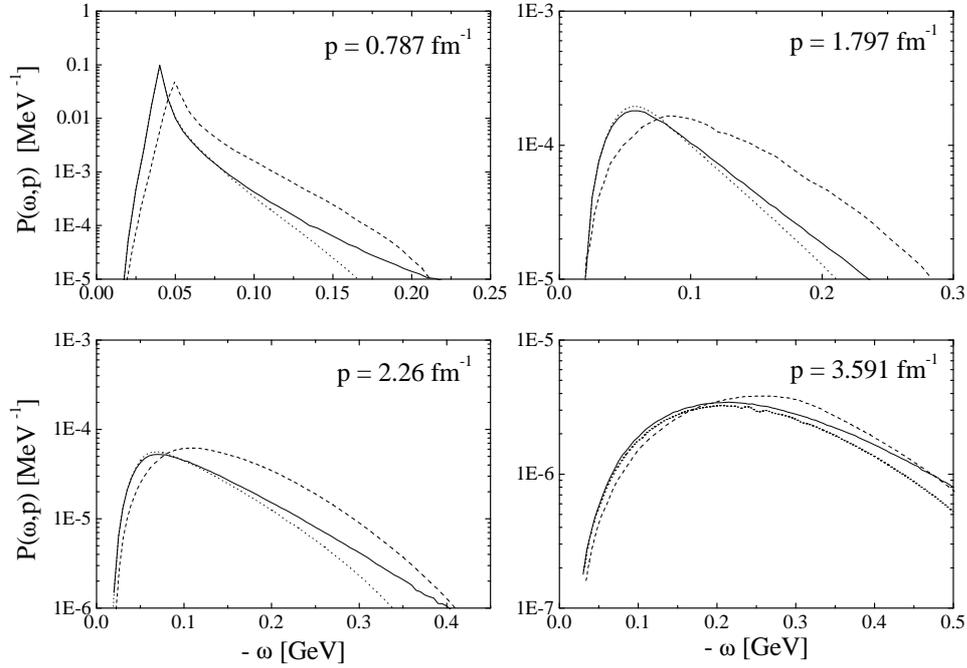


Abbildung 4.1: Spektralfunktion im Vergleich mit den Ergebnissen aus [Ben], entnommen aus [Le1].

Ergebnissen von Benhar et al., die mit sehr viel aufwändigeren, voll vielteilchentheoretischen Verfahren erreicht wurden. Es lässt sich daraus folgern, daß die Spektralfunktion im Lochsektor unabhängig einer speziellen Energie- und Impulsabhängigkeit ist. Vielmehr spielen Phasenraumeffekt eine große Rolle.

Wie man erkennt, wird die Lage und die Höhe des Peaks durch die erste Iteration schon sehr gut erreicht. Dies rechtfertigt den normalerweise in der Vielteilchentheorie verwendeten störungstheoretischen Ansatz. An der Stelle der Fermienergie verschwindet die Spektralfunktion, da dort die Breite verschwindet, welche im Zähler der Spektralfunktion steht. Weitere Iterationen führen zu einer Verteilung von Intensität weg von den Peaks in die Randgebiete. Streuprozesse höherer Ordnung haben also den gleichen Effekt wie eine Erhöhung der Kopplungsstärke.

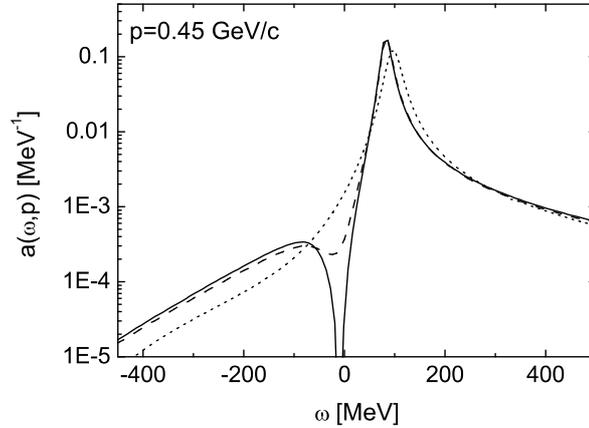


Abbildung 4.2: Spektralfunktion für die Temperaturen  $T=0$  MeV (durchgezogene Linie),  $T=10$  MeV (gestrichelte Linie) und  $T=50$  MeV (gepunktete Linie) bei der Sättigungsdichte der Kernmaterie, entnommen aus [Fr]. Der Impuls beträgt  $k=0.45$  GeV.

#### 4.1.2 Endliche Temperaturen und hohe Dichten

Rechnungen für endliche Temperaturen und hohe Dichten wurden von F. Frömel durchgeführt [Fr]. In den Rechnungen wurde allerdings für den Mittelfeld-Anteil eine andere Skyrme-Wechselwirkung als die in dieser Arbeit verwendet. Für die von F.Frömel verwendete Wechselwirkung erhält man eine Bindungsenergie von  $-16$  MeV und ein Massenverhältnis  $m^*/m = 0.76$  bei einem Fermi-Impuls von  $k_f = 1.29 \text{ fm}^{-1}$ . Für das Mittelfeld-Potential erhält man  $U_{eff} = -61.6$  MeV. Das Matrixelement wurde so gewählt, um die Ergebnisse von Benhar [Ben] am absoluten Nullpunkt zu reproduzieren. Das Matrixelement ergibt sich zu  $(\overline{M^2})^{1/2} = 309 \text{ MeV fm}^3$ . Außerdem wurde noch ein Formfaktor, der Prozesse mit großem Energie- und Impulsübertrag unterdrückt, eingeführt.

Abbildung 4.2 zeigt die Spektralfunktion der Nukleonen in Kernmaterie bei normaler Dichte der Kernmaterie für verschiedenen Temperaturen. Man sieht deutlich, daß die Energielücke an der Fermienergie für  $T=10$  MeV aufweicht. Für  $T=50$  MeV ist die Energielücke beinahe ganz verschwunden. Dieser Effekt lässt sich mit der Aufweichung der Fermikante bei endlichen Temperaturen erklären, da bei endlichen Temperaturen auch Zustände oberhalb der Fermikante besetzt werden. Somit sind die Zustände an der Fermikante nicht mehr quasi-stabil.

Abbildung 4.3 zeigt die Spektralfunktion für verschiedene Dichten bei einer

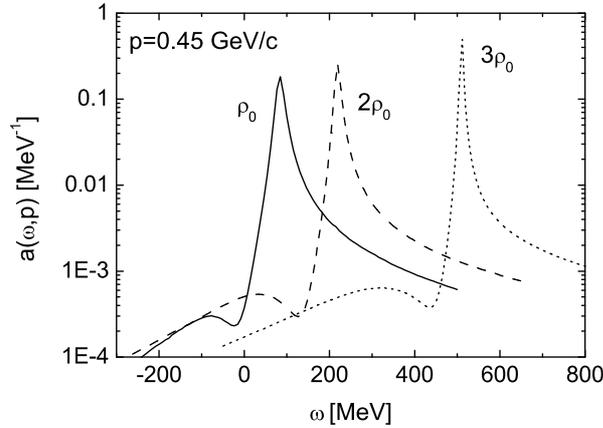


Abbildung 4.3: Spektralfunktion für verschiedene Dichten bei einer konstanten Temperatur von  $T=10$  MeV und einem Impuls von  $k=0.45$  GeV, entnommen aus [Fr].

Temperatur von  $T=10$  MeV. Da das chemische Potential von der Dichte abhängt sind die drei Kurven auf der Energie-Achse verschoben. Die zunehmende Erhöhung der Quasi-Teilchen-Peaks ergibt sich daraus, daß mit zunehmender Dichte die Peaks näher an die Fermi-Energie rücken. Nahe der Fermikante gibt es weniger Zustände in die gestreut werden kann, dies führt zu einer Erhöhung des Peaks.

## 4.2 Asymmetrischer Kernmaterie

Die Rechnungen für asymmetrische Kernmaterie wurden ebenfalls auf einem  $(\omega, k)$ -Gitter mit  $-0.5 \text{ GeV} \leq \omega \leq 0.5 \text{ GeV}$  und  $k \leq 1.25 \text{ GeV}$  durchgeführt. Die Abstände betragen  $0.5 \text{ MeV}$  in beide Richtungen. Für die Rechnungen wurde das gleiche Matricelement ( $(\overline{M^2})^{1/2} = 309 \text{ MeV } fm^3$ ) wie in [Fr] angenommen. Es wurden Rechnungen für symmetrische Kernmaterie und neutronenreiche Materie ( $Z/A=0.25$  und  $Z/A=0.1$ ) durchgeführt.

In Tabelle 4.1 ist der Fermi-Impuls, die effektive Masse, das effektive Potential und die Fermienergie für Neutronen und Protonen bei verschiedenen Verhältnissen von Neutronen und Protonen dargestellt. Die Ergebnisse wurden mit Hilfe der SLy230a [Ch] Skyrme-Wechselwirkung erhalten. Wie man erkennt, nimmt die effektive Masse des Protons mit kleiner werdendem Verhältnis  $Z/A$  zu, während sie für die Neutronen abnimmt.

$Z/A$	0.5	0.25	0.1
$k_{fp}[fm^{-1}]$	1.33	1.06	0.78
$k_{fn}[fm^{-1}]$	1.33	1.53	1.62
$m_p$ [MeV]	654.0	770.7	863.2
$m_n$ [MeV]	654.0	567.9	526.4
$U_{effp}$ [MeV]	-68.9	-80.6	-92.7
$U_{effn}$ [MeV]	-68.9	-68.1	-73.0
$\omega_{fp}$ [MeV]	-16.0	-52.3	-79.0
$\omega_{fn}$ [MeV]	-16.0	11.7	24.2

Tabelle 4.1: Fermi-Impuls, effektive Masse, effektives Potential und Fermienergie für Protonen und Neutronen bei Sättigungsdichte von Kernmaterie ( $\rho = 0.16 fm^{-3}$ ). Die Ergebnisse wurde mit der SLy230a[Ch] Skyrme-Wechselwirkung berechnet.

Abbildungen 4.4 und 4.5 zeigen einen Vergleich der Protonen- und Neutronen-Spektralfunktion bei der Sättigungsdichte von  $\rho = 0.16 fm^{-3}$ . In Abbildung 4.4 ist das Protonen-Neutronen-Verhältnis  $Y=0.1$  und in Abbildung 4.5  $Y=0.25$ . Um die Impulsabhängigkeit zu verdeutlichen, wurden Schnitte bei verschiedenen Impulsen gemacht. Für die Fermienergie verschwindet die Spektralfunktion wie erwartet. Der Quasiteilchen-Peak der Neutronen zeigt eine größere Abhängigkeit vom Impuls, als der Quasiteilchen-Peak der Protonen. Für einem Impuls von  $k=0.385$  GeV liegt der Neutronen-Peak bei einer kleineren Energie als der Protonen-Peak. Während bei einem Impuls von  $k=0.677$  GeV der Neutronen-Peak bei einer höheren Energie als der der Protonen liegt. Dies gilt sowohl bei  $Z/A=0.25$  als auch  $Z/A=0.1$ .

Ein ähnlicher Effekt ist in den Abbildungen 4.6 und 4.7 zu erkennen. Abbildung 4.6 zeigt die Spektralfunktion für Protonen bei verschiedenen Verhältnissen von Protonen und Neutronen. Die Impulsabhängigkeit des Quasiteilchen-Peak scheint mit kleiner werdenden Verhältnis  $Z/A$  kleiner zu werden. In den hier betrachteten Fällen ist die Impulsabhängigkeit für symmetrische Kernmaterie am größten. Bei den Neutronen ist der Effekt gerade umgekehrt. Wie Abbildung 4.7 zeigt, wird die Impulsabhängigkeit des Quasiteilchen-Peaks für Neutronen mit kleiner werdendem Verhältnis  $Z/A$  größer. Hier zeigt sich die kleinste Impulsabhängigkeit für symmetrische Kernmaterie.

Die Verbreiterung der Peaks ist wie im symmetrischen Fall auf die Entfernung zur Fermikante zurückzuführen. Ein Teilchen in einem Zustand nahe der Fermienergie kann in weniger Endzustände streuen. Der dazugehörige Peak ist daher schmaler und höher. Wie in den Abbildungen 4.4, 4.6 und 4.7 zu erkennen ist, sind die Peaks nahe der Fermienergie schmaler und höher als

Peaks, die weiter entfernt sind.

Da alle Rechnungen bis zu diesem Punkt ohne Realteil durchgeführt worden sind, kann die Impulsabhängigkeit der Quasiteilchen-Peaks nicht mit dispersiven Effekten durch den Realteil erklärt werden. Wie Abbildung 4.8 zeigt, hat der Realteil keinen Einfluss auf die Lage und Höhe des Quasiteilchen-Peaks. Der Realteil macht sich lediglich bei hohen Energien und im Lochsektor bemerkbar.

Der Effekt der Impulsabhängigkeit läßt sich mit Hilfe der effektiven Masse erklären. Wie schon vorher gezeigt worden ist, läßt sich die Spektralfunktion in der Hartree-Näherung mit Hilfe der effektiven Masse und des effektiven Potentials schreiben:

$$A(k, \omega) = \delta(\omega - (k^2/2m^*) - U_{eff})$$

Da das effektive Potential impulsunabhängig ist, wird die Impulsabhängigkeit alleine vom zweiten Term in der Deltafunktion bestimmt. Geht man nun von verschiedenen effektiven Massen aus, so wird die Impulsabhängigkeit für eine kleinere Masse größer. Da die effektive Masse der Protonen mit kleiner werdendem Verhältnis  $Z/A$  größer wird, nimmt die Impulsabhängigkeit ab. Bei den Neutronen wird die effektive Masse mit kleiner werdendem Verhältnis  $Z/A$  kleiner, somit nimmt die Impulsabhängigkeit zu. Da für den Fall  $Z/A < 0.5$  die effektive Masse der Protonen größer ist, als die der Neutronen, zeigen die Neutronen eine größere Impulsabhängigkeit. Der Effekt der Impulsabhängigkeit der Quasiteilchen-Peaks kann also alleine durch einen Mittelfeld-Effekt erklärt werden.

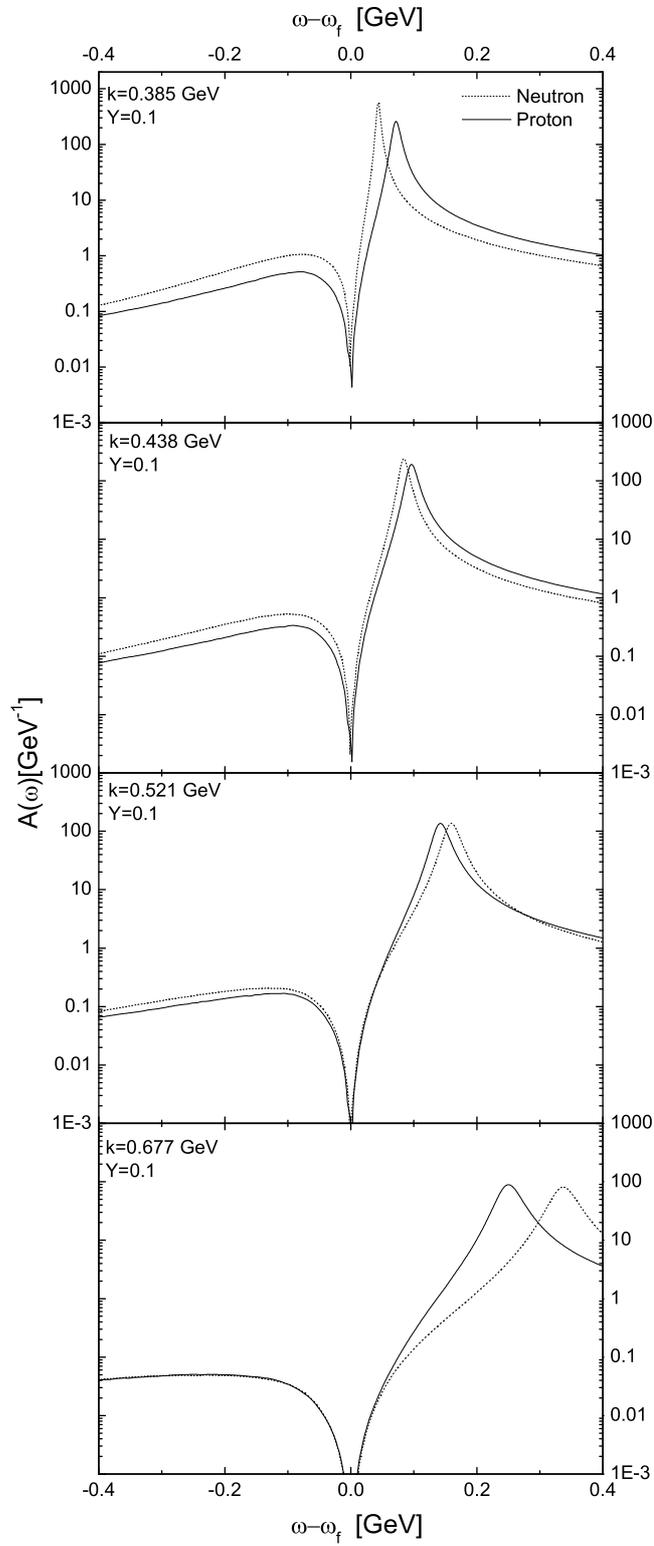


Abbildung 4.4: Spektralfunktionen der Protonen und Neutronen im Vergleich für  $Y=0.1$  bei verschiedenen Impulsen.

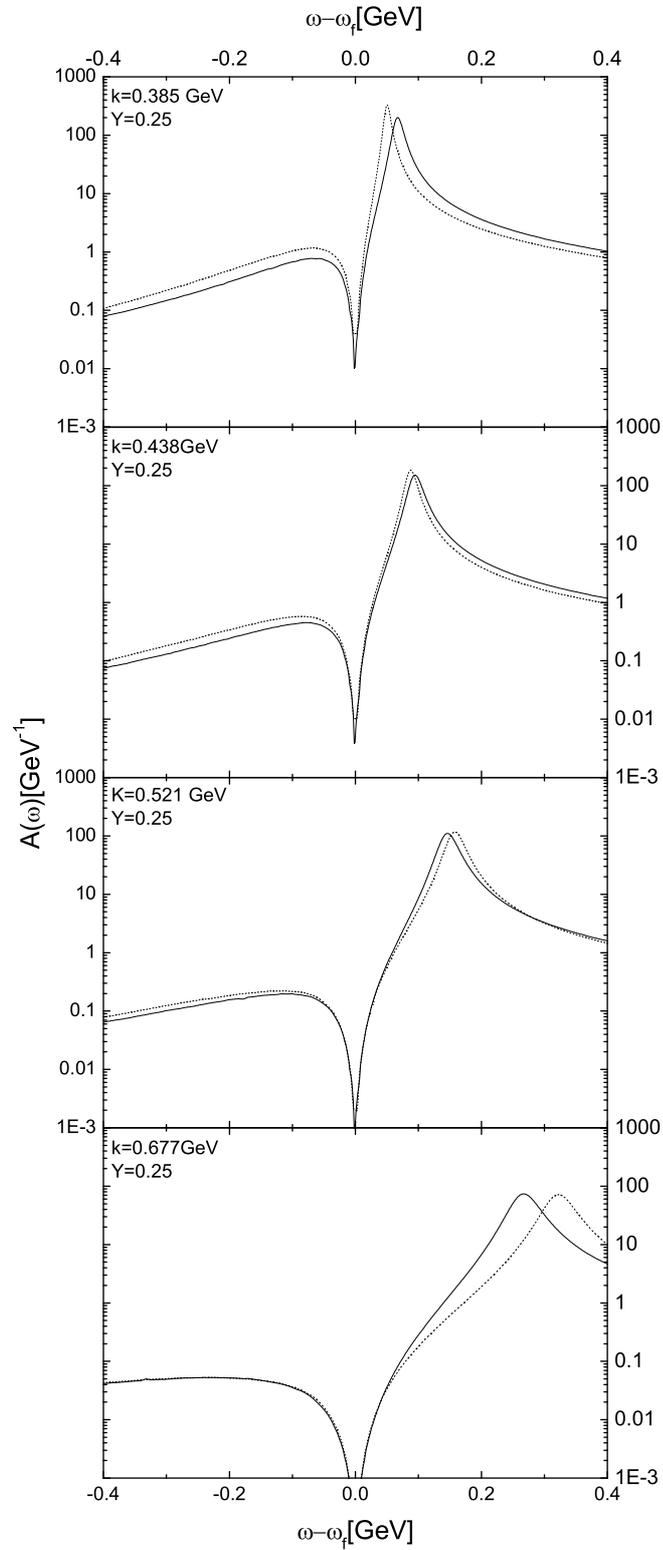


Abbildung 4.5: Spektralfunktionen der Protonen und Neutronen im Vergleich für  $Y=0.25$  bei verschiedenen Impulsen.

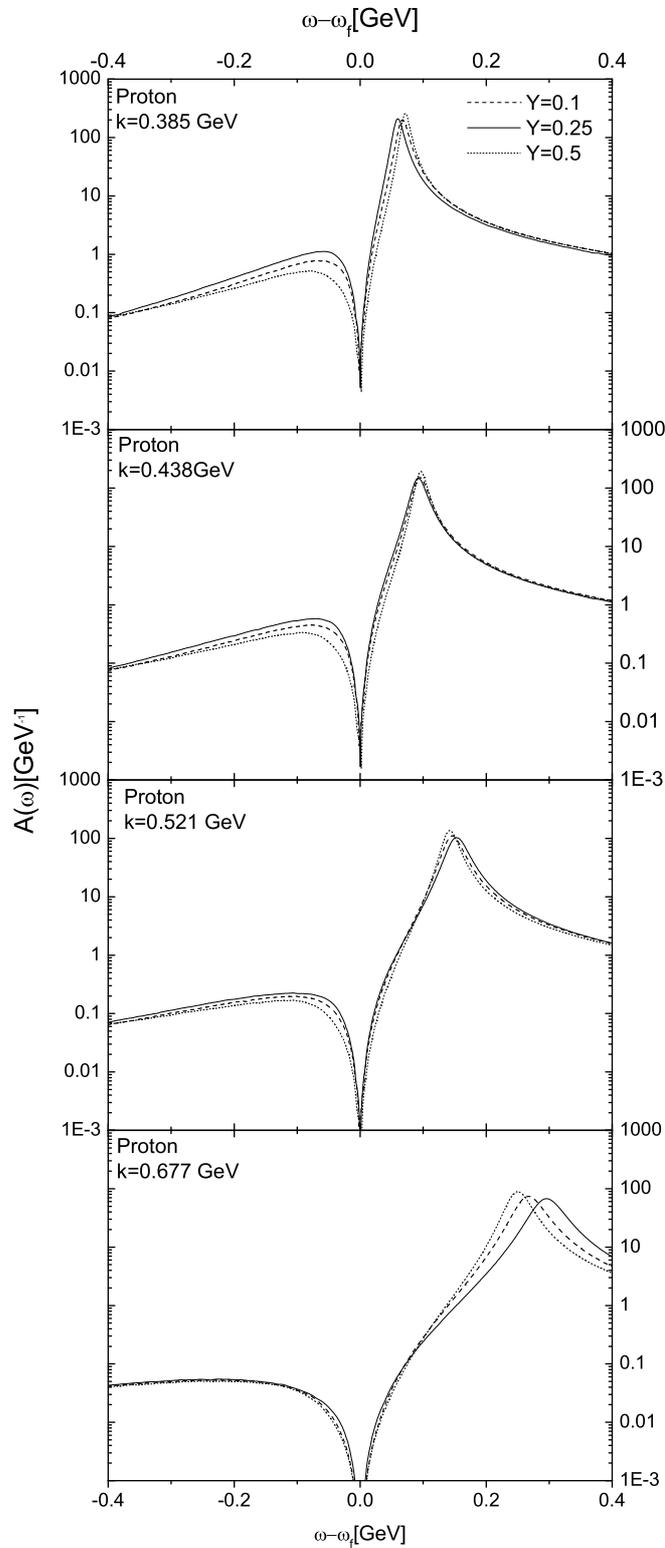


Abbildung 4.6: Die Spektralfunktionen der Protonen bei verschiedenen Protonen-Neutronen Verhältnissen und verschiedenen Impulsen.

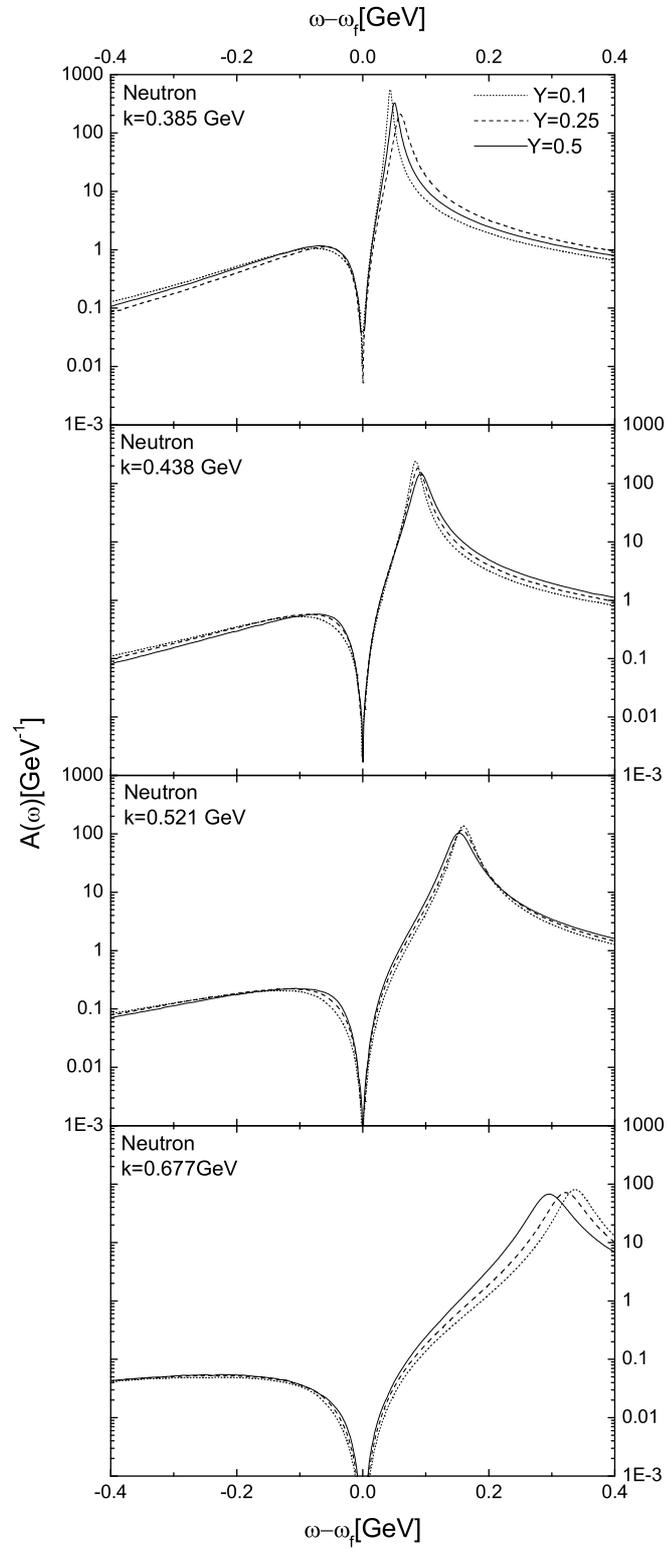


Abbildung 4.7: Die Spektralfunktionen der Neutronen bei verschiedenen Protonen-Neutronen Verhältnissen und verschiedenen Impulsen.

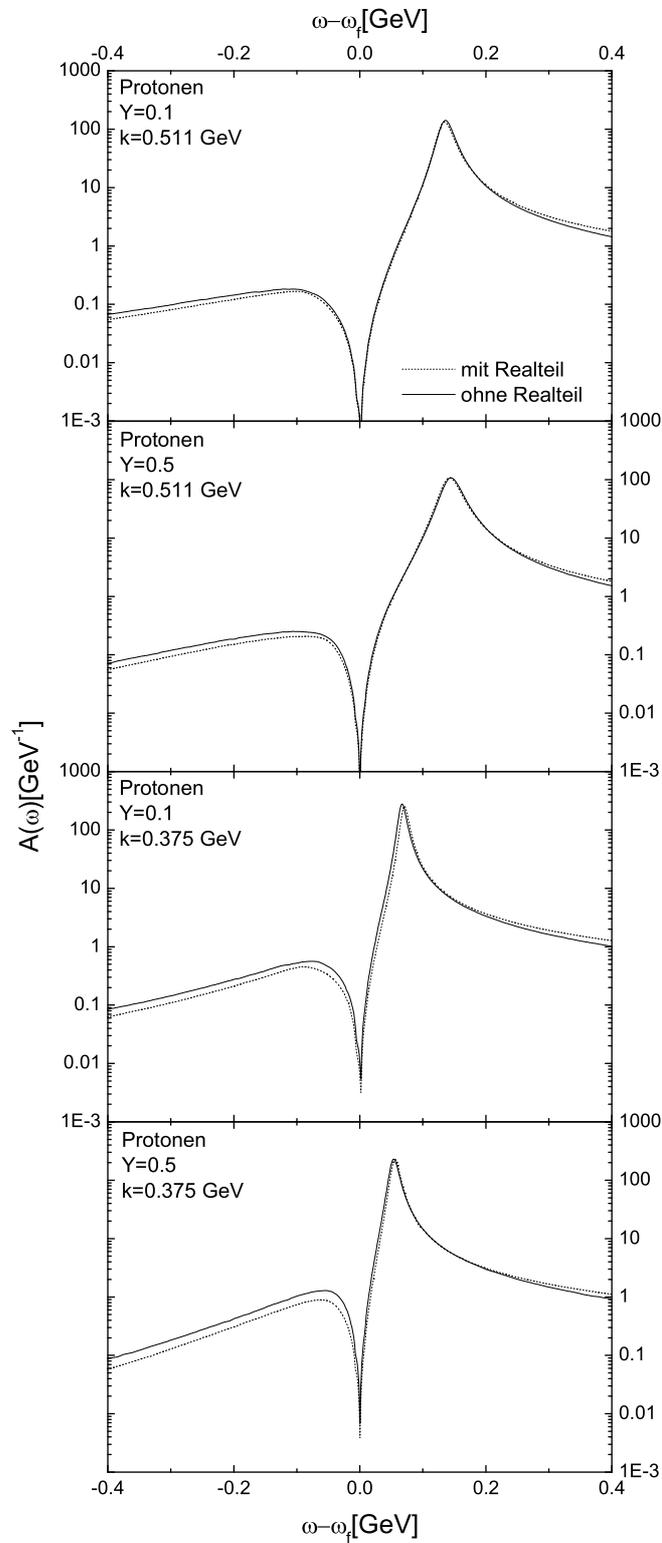


Abbildung 4.8: Spektralfunktionen der Protonen mit und ohne Realteil



# Kapitel 5

## Die Breite auf der Energieschale

Die Breite auf der Energieschale entspricht der inversen Lebensdauer von Nukleonen in einem Zustand. Hat ein Nukleon in einem Zustand eine niedrige Lebensdauer in Kernmaterie, so bedeutet dies eine hohe Rate an Wechselwirkungen oder mit anderen Worten, es gibt viele Korrelationen für diesen Zustand. Eine niedrige Lebensdauer bedeutet aber eine große Breite. Daher kann man die Breite auf der Energieschale als ein Maß für die Korrelationen eines Zustandes ansehen.

### 5.1 Symmetrische Kernmaterie

Abbildung 5.1 zeigt die Abhängigkeit der Breite auf der Energieschale für symmetrische Kernmaterie von der Temperatur und Dichte. Wegen der Abhängigkeit des chemischen Potentials von der Dichte der Nukleonen muß man vorsichtig sein bei welcher Energie und bei welchem Impuls man die Breite auf der Energieschale vergleicht, daher wurde hier eine Mittelung über alle besetzten Zustände vorgenommen [Fr].

Wie man in Abbildung 5.1 sieht nimmt die Breite auf der Energieschale  $\langle \Gamma_{on} \rangle$  beinahe linear mit der Temperatur zu. Für hohe Temperaturen ab etwa 45 MeV ist die Abhängigkeit von der Temperatur schwächer. Die Abhängigkeit der Breite  $\langle \Gamma_{on} \rangle$  von der Dichte zeigt ein komplizierteres Verhalten, für Dichten unterhalb der doppelten Sättigungsdichte ( $\rho < 2\rho_0$ ) nimmt die Breite mit zunehmender Dichte wie man naiv erwarten würde zu. Bei Dichten oberhalb von  $2\rho_0$  ist die Abhängigkeit der Breite von der Dichte

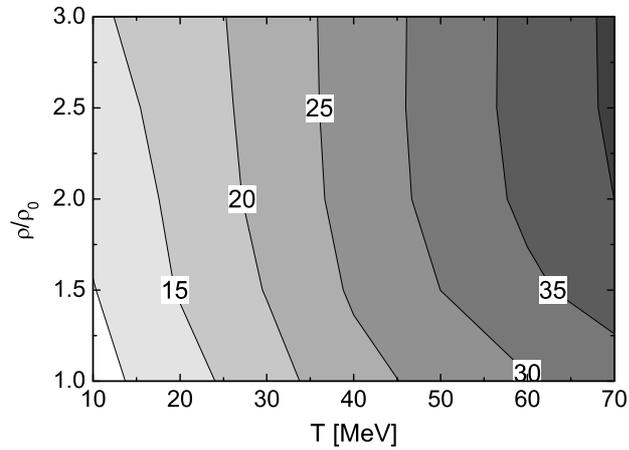


Abbildung 5.1: Die die gemittelte Breite auf der Energieschale  $\langle \Gamma_{on} \rangle$  in der  $(T, \rho)$ -Ebene ( $\Gamma$  in MeV), entnommen aus [Fr].

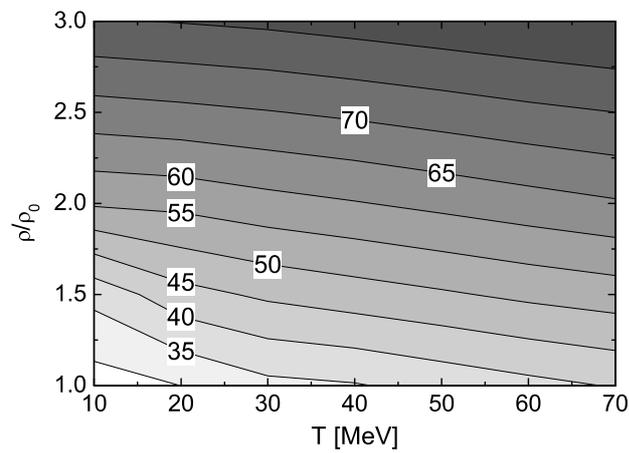


Abbildung 5.2: Die die gemittelte Breite auf der Energieschale  $\langle \Gamma_{on} \rangle$  mit Pauli-Blocking in der  $(T, \rho)$ -Ebene ( $\Gamma$  in MeV), entnommen aus [Fr].

nur noch sehr schwach. Es setzt also eine Sättigung der kurzreichweitigen Korrelationen ein. Ganz deutlich wird dieser Effekt bei Temperaturen über 30 MeV. Der Effekt läßt sich mit Hilfe des Pauli-Blocking erklären. Pauli-Blocking führt zu einer Unterdrückung von Nukleon-Nukleon Stößen. Bei einer höheren Dichte werden mehr Endzustände geblockt. Auf der anderen Seite stehen dem Nukleon allerdings auch mehr Stoßpartner zur Verfügung, dies scheint aber nicht auszureichen um dem Blocking-Effekt zu kompensieren. Betrachtet man sich die Stoßrate eines Nukleons mit der Energie  $\omega$  und dem Impuls  $k$  (Gleichung 3.1), so sieht man, daß zwei Endzustände und ein Anfangszustand eingehen. Da die Endzustände aber geblockt sind, spielt das Pauli-Blocking die größere Rolle. In Abbildung 5.2 ist die gemittelte Breite auf der Energieschale dargestellt. Die Rechnungen wurden aber ohne Pauli-Blocking durchgeführt. Wie man erkennt, nimmt nun die Breite mit höher werdender Dichte zu. Dies entspricht dem naiv zu erwartenden Bild.

## 5.2 Asymmetrischer Kernmaterie

Wie auch im Falle von symmetrischer Kernmaterie kann man die Breite auf der Energieschale als ein Maß für die kurzreichweitigen Korrelationen benutzen. Abbildung 5.3 zeigt die Breite auf der Energieschale der Protonen für verschiedene Verhältnisse von Neutronen zu Protonen. An der Stelle der Fermienergie verschwindet die Breite wie erwartet. Für Energien unterhalb der Fermienergie (Lochsektor) ist die Breite für neutronenreiche Kernmaterie kleiner als für symmetrische Kernmaterie. Die Korrelationen nehmen also ab. Oberhalb der Fermikante ist die Breite zunächst kleiner für neutronenreiche Kernmaterie. Für Energien oberhalb von 3 GeV wird die Breite allerdings leicht größer für neutronenreiche Kernmaterie. Bei hohem Impuls der Protonen besteht allerdings nur ein kleiner Unterschied zwischen symmetrischer und asymmetrischer Kernmaterie.

Die Breite auf der Energieschale von Neutronen verhält sich allerdings anders. Wie Abbildung zeigt, ist die Breite unterhalb der Fermienergie für neutronenreiche Kernmaterie zunächst größer, als für symmetrische Kernmaterie. Für Energien nahe der Fermienergie wird sie allerdings im neutronenreichen Fall kleiner. Oberhalb der Fermienergie ist deutlich eine Abnahme der Breite für neutronenreiche Kernmaterie zu erkennen. Im Gegensatz zu den Protonen, wo bei hohem Impuls nur ein kleiner Unterschied der Breiten für symmetrische und asymmetrische Kernmaterie zu erkennen ist, gibt es immer noch einen großen Unterschied der Breiten bei Energien oberhalb der Fermienergie.

Um ein besseres Verständnis des Verhaltens der Breiten zu bekommen, be-

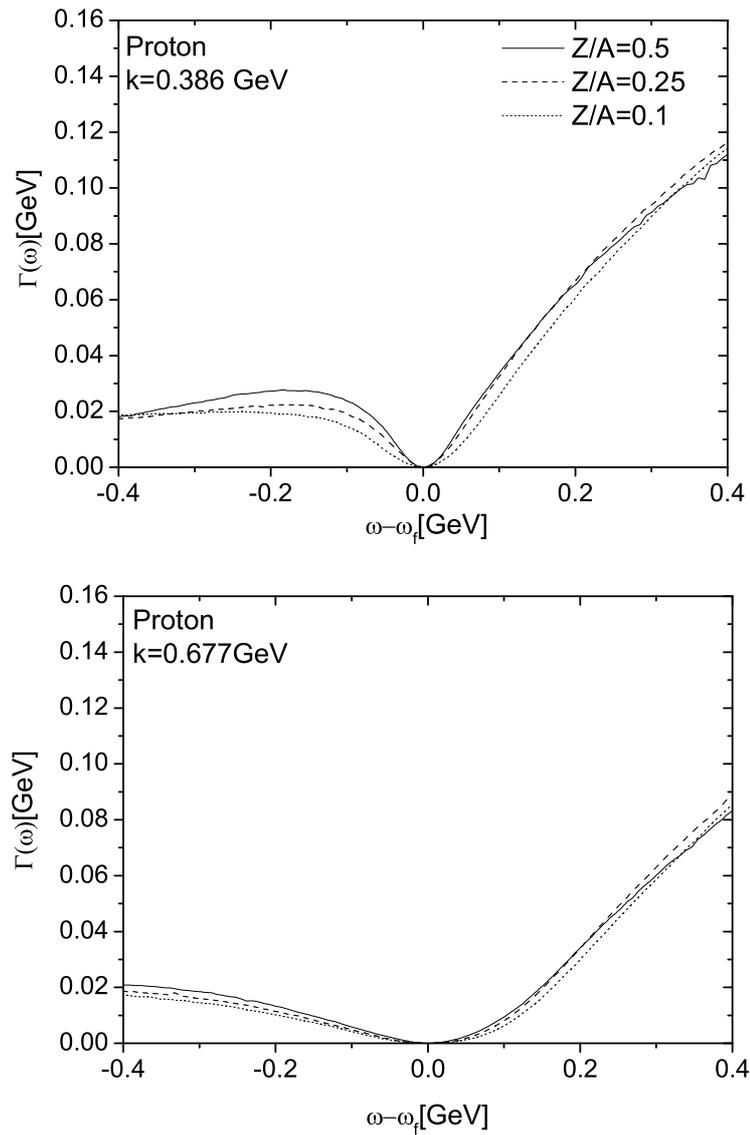


Abbildung 5.3: Die Breite auf der Energieschale für Protonen bei verschiedenem Impuls und verschiedenen Protonen-Neutronen Verhältnissen.

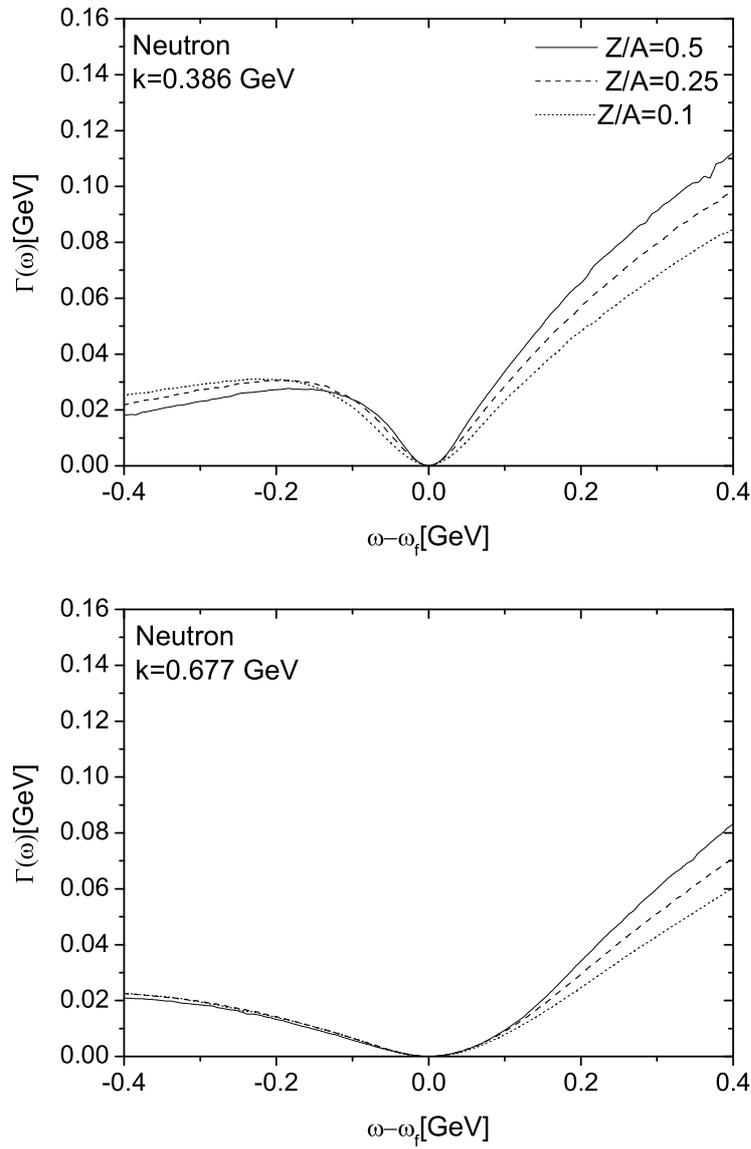


Abbildung 5.4: Die Breite auf der Energieschale für Neutronen bei verschiedenen Impulsen und verschiedenen Protonen-Neutronen Verhältnissen.

trachtet man sich am besten Abbildungen 5.5 und 5.6. Abbildung 5.5 vergleicht den Anteil der Breite der Protonen, der aus Stößen mit Protonen steht, mit dem Anteil, der durch Stöße mit Neutronen entsteht. Das Verhältnis der Protonen zur Anzahl der Nukleonen beträgt  $Z/A=0.1$ , es besteht also ein großer Überschuß an Neutronen. Wie man deutlich erkennt, wirkt sich dies auf die Breiten aus. Durch den großen Überschuß an Neutronen werden Stöße mit Neutronen wahrscheinlicher als Stöße mit Protonen. Daher liefern die Stöße mit Neutronen einen wesentlich größeren Beitrag zur gesamten Breite.

Auch für die Breite der Neutronen ist dies zu erkennen (Abbildung 5.6). Auch hier liefern die Stöße mit Neutronen den größeren Beitrag. Der Vergleich der Anteile, der aus Stößen mit Neutronen entsteht, zeigt höhere Korrelationen im Lochsektor für Neutronen als für Protonen. Für hohe Energien sind allerdings die Korrelationen für Neutronen höher. Um in einen Protonen-Loch-Zustand mit Hilfe von Neutronen-Streuung hinein zu streuen, benötigt man einen besetzten Protonenzustand, einen besetzten und einen unbesetzten Neutronenzustand. Im Gegensatz dazu benötigt man zwei unbesetzte und einen besetzten Neutronenzustand, wenn man in einen Neutronen-Loch-Zustand hineinstreuen will. Durch die höhere Dichte an Neutronen sind aber wesentlich mehr Neutronenzustände besetzt, als Protonen-Zustände. Dies macht die Streuung in einen Neutronen-Loch-Zustand wahrscheinlicher als eine Streuung in einen Protonen-Loch-Zustand. Dies führt zu einer größeren Breite für die Neutronen im Lochsektor.

Für hohe Energien ist der Effekt gerade umgekehrt. Um aus einen Protonenzustand über den Neutronkanal hinauszustreuen, benötigt man einen unbesetzten Protonen-Zustand, in den hinein gestreut wird, sowie einen besetzten und einen unbesetzten Neutronenzustand. Für einen Neutronen-Neutronen Stoß benötigt man hingegen einen besetzten und zwei unbesetzte Neutronenzustände. Da es aber mehr besetzte Neutronenzustände gibt, ist die Streuung der Protonen über den Neutronenkanal wahrscheinlicher. Dies führt zu einer größeren Breite für die Protonen. Da die Breiten nahe der Fermienergie klein werden, es gibt weniger Zustände mit den gestreut werden kann, nimmt die Breite der Protonen im Bereich der zwischen den beiden Fermienergien zu, während die Breite der Neutronen abnimmt. Die Effekte werden größer je größer der Neutronenüberschuß ist, dies führt zu dem beobachteten Verhalten der Breite der Nukleonen.

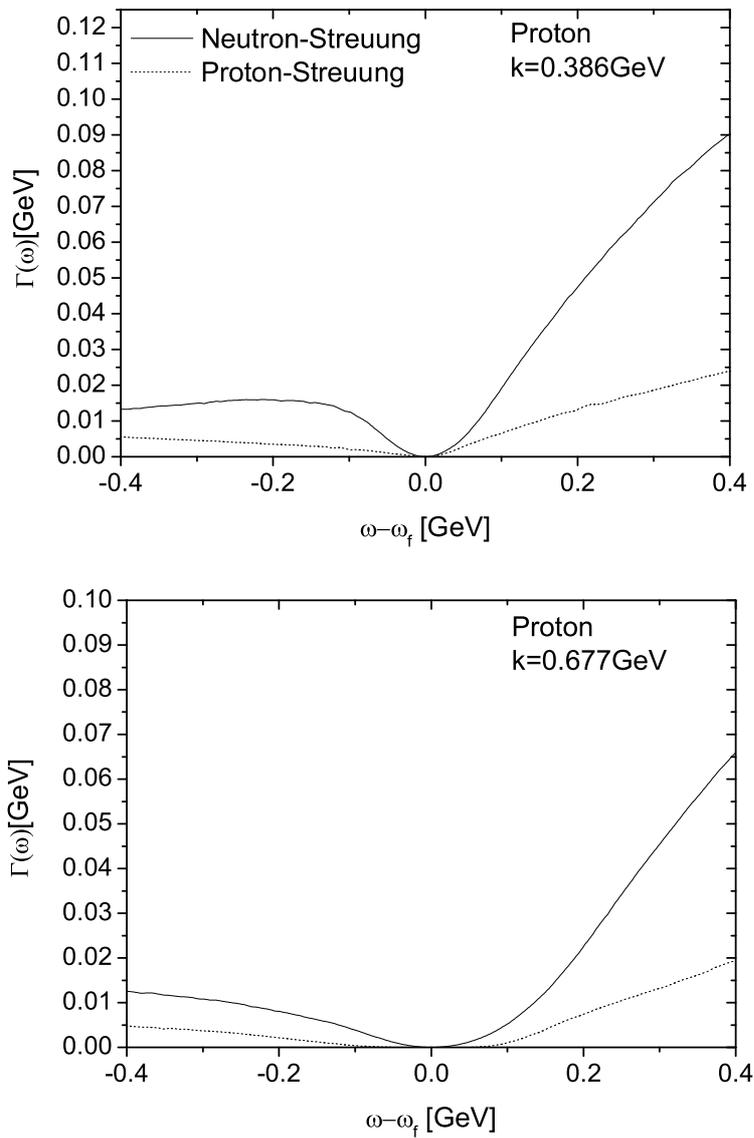


Abbildung 5.5: Die Breite auf der Energieschale für Protonen, aufgeteilt nach Proton-Proton (gepunktete Linie) und Proton-Neutron Streuung (durchgezogene Linie).

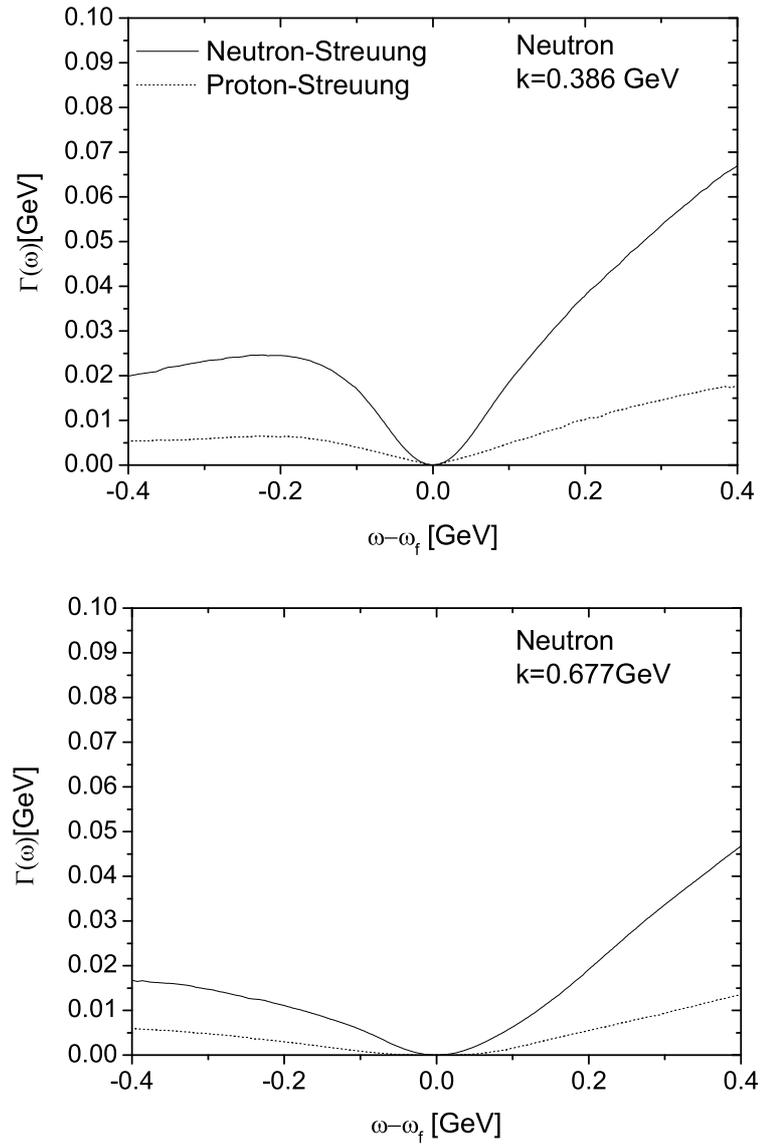


Abbildung 5.6: Die Breite auf der Energieschale für Neutronen aufgeteilt nach Neutron-Proton (gepunktete Linie) und Neutron-Neutron (durchgezogene Linie) Streuung.

# Kapitel 6

## Die Impulsverteilung

Mit der Spektralfunktion kann man die Impulsverteilung von Nukleonen in Kernmaterie bestimmen.

$$n(k) = \int_{-\infty}^{\omega_f} d\omega A(\omega, k) \quad (6.1)$$

In 6.1 ist die Impulsverteilung für Nukleonen in symmetrischer Kernmaterie dargestellt. Die durchgezogene Linie ist das Ergebnis von [Le1] und die gestrichelte Linie aus [Ben]. Die Datenpunkte sind experimentelle Daten von Ciofi et al. [Ci], die allerdings nicht für Kernmaterie sondern endliche Kerne gemessen worden sind. Unkorrelierte Kernmaterie hätte eine scharfe Fermikante, durch kurzreichweitige Korrelationen werden allerdings Zustände oberhalb der Fermienergie angeregt, welche sich in Form eines langen 'Schwanzes' in der Impulsverteilung bemerkbar machen. Man erkennt auch hier die guten Übereinstimmungen mit den Rechnungen von [Ben]. Auffällig ist allerdings der Anstieg der durchgezogenen Linie in der Nähe der Fermikante. Rechnungen mit einem schematischen Modell, bei denen eine empirische Breite benutzt wurde und weitere Rechnungen von J. Lehr [Le2] zeigen, daß dies auf den fehlenden Realteil zurückzuführen ist. Die Impulsverteilung ist abhängig von der Kopplungsstärke, eine Erhöhung führt zu einer größeren Wechselwirkung der Nukleon und damit würden mehr Zustände oberhalb der Fermikante besetzt werden und die Fermikante würde aufgeweicht werden. Somit liesse sich eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreichen.

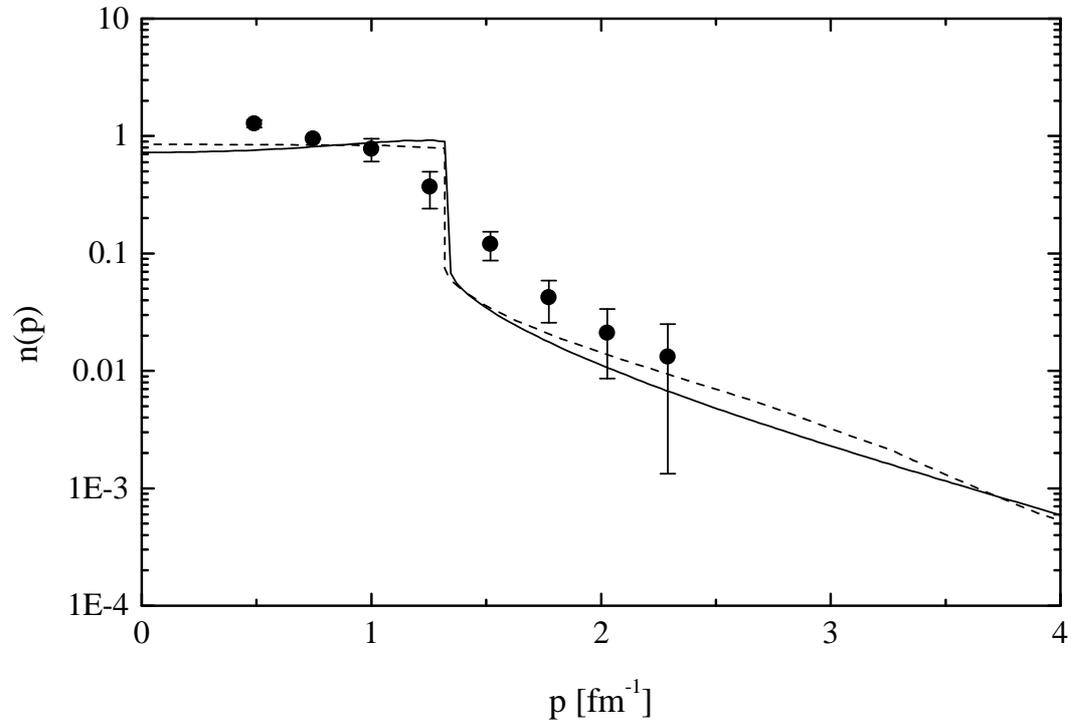


Abbildung 6.1: Impulsverteilung in symmetrischer Kernmaterie in Vergleich mit experimentellen Daten und [Ben], entnommen aus [Le1]

Abbildungen 6.2 zeigt die Impulsverteilung der Protonen in symmetrischer und asymmetrischer Kernmaterie. Deutlich ist die Verschiebung der Fermikante zu erkennen. In neutronenreicher Kernmaterie liegt die Fermienergie der Protonen niedriger als in symmetrischer Kernmaterie, dies macht sich durch eine Verschiebung der Fermikante in der Impulsverteilung deutlich. Der selbe Effekt ist auch in der Impulsverteilung der Neutronen (Abbildung 6.3) zu erkennen. Da die Fermienergie für Neutronen in neutronenreicher Kernmaterie allerdings höher liegt, als für symmetrische Kernmaterie, findet in der Impulsverteilung der Neutronen eine Verschiebung der Fermikante zu größeren Werten statt.

Ein Unterschied der beiden Verteilungen findet sich allerdings in der Region großer Impulse. Für Protonen ist die Besetzung der Zustände bei großen Impulsen für alle Verhältnisse nahe zu gleich, während für Neutronen im

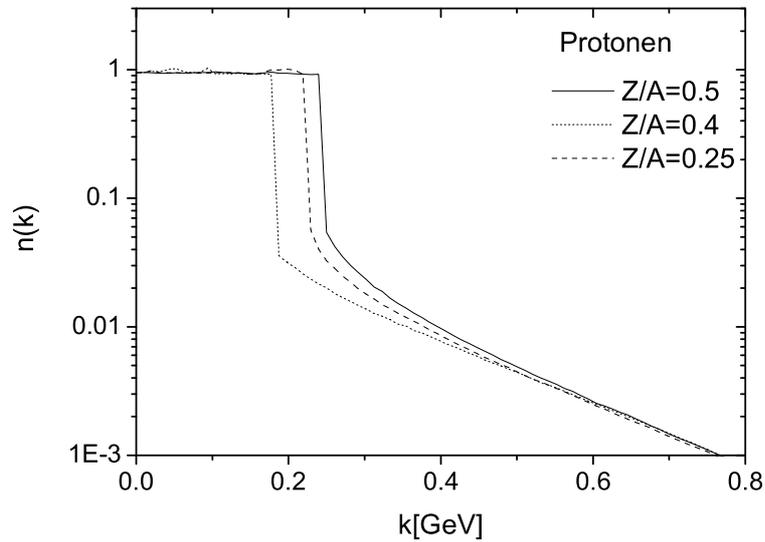


Abbildung 6.2: Impulsverteilung der Protonen in asymmetrischer Kernmaterie für verschiedenen Verhältnisse von Protonen zu Neutronen.

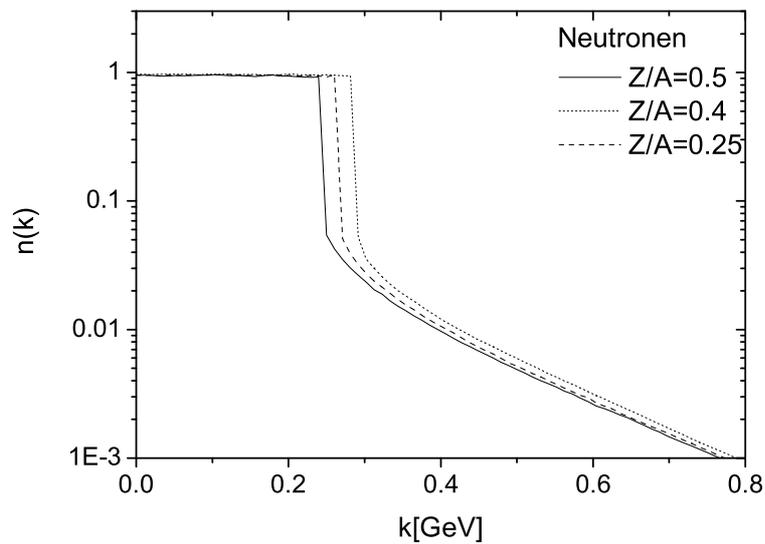


Abbildung 6.3: Impulsverteilung der Neutronen in asymmetrischer Kernmaterie für verschiedenen Verhältnisse von Protonen zu Neutronen.

Fälle von neutronenreicher Materie mehr Zustände für große Impulse besetzt sind, als im Falle von symmetrischer Kernmaterie. Während die Verteilung der Neutronen für alle Verhältnisse gleich stark abfällt, fällt die Verteilung für Protonen im Falle der größten Asymmetrie am schwächsten ab.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden die Spektralfunktion, Breite auf der Energieschale und die Impulsverteilung von asymmetrischer Kernmaterie für verschiedene Proton-Neutron-Verhältnisse berechnet. Die Grundlage des Modells kam dabei aus der Transporttheorie. Mit Hilfe von Stoßintegralen wurde die Selbstenergie berechnet. Der Zusammenhang zwischen Selbstenergie und Spektralfunktion wurde benutzt, um die Spektralfunktion selbstkonsistent zu berechnen.

Durch die Annahme eines konstanten Matrixelementes wurde die Berechnung der Stoßintegrale wesentlich vereinfacht. Trotz der Vereinfachung führt dies zu einer guten Übereinstimmung mit vielteilchentheoretischen Rechnungen für symmetrische Kernmaterie. Zur Berechnungen der Selbstenergie für die Nukleonen in asymmetrischer Kernmaterie wurde zwischen Stößen gleicher und ungleicher Nukleonen unterschieden. Da der isospinabhängige Teil des Matrixelementes im Bereich der Sättigungsdichte wesentlich kleiner ist, als der isospinunabhängige Teil, wurden Stöße, bei denen Ladung ausgetauscht wird, vernachlässigt. Außerdem wurde das gleiche Matrixelement für Stöße zwischen gleichen und ungleichen Partnern angenommen. Dem Mittelfeld-Anteil wurde durch eine Skyrme-Parametrisierung Rechnung getragen.

Der Vergleich der Spektralfunktionen für asymmetrische Kernmaterie bei verschiedenen Impulsen zeigt eine Impulsabhängigkeit der Lage des Quasi-Teilchen-Peaks. Dieser Effekt läßt sich durch die unterschiedliche effektive Masse der Nukleonen erklären.

Da es sich bei der Breite um die inverse Lebensdauer handelt, kann sie als ein direktes Maß für die Korrelationen der Nukleonen in Kernmaterie ansehen. Für Neutronen ist eine deutliche Abnahme der Breite oberhalb der Fermienergie für neutronenreiche Materie zu beobachten, während für Pro-

tonen nur eine leichte Abnahme zu sehen ist. Im Bereich unterhalb der Fermienergie ist eine Zunahme der Korrelationen für Neutronen zu beobachten, während die Korrelationen für Protonen abnehmen. Das beobachtete Verhalten der Breiten läßt sich durch Quantenstatistik erklären. Besonders hilfreich ist dabei die Betrachtung der Anteile, die durch Streuung an Protonen bzw. Neutronen entstehen.

In Zukunft wäre es interessant, durch eine Verfeinerung der Wechselwirkung zu einem voll selbstkonsistenten Verfahren überzugehen. Der Anteil des Mittelfeldes könnte somit auch iterativ berechnet werden. Außerdem ist eine Erweiterung auf endliche Temperaturen und eine Anwendung auf Kernmaterie mit Hyperonenbeimischung möglich.

# Anhang A

## Greenfunktionen

### A.1 zeitunabhängige Greenfunktion

Die Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}'; z)$  welche die Gleichung

$$(z - L(\vec{r}))G(\vec{r}, \vec{r}'; z) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.1})$$

löst, nennt man Greenfunktion. Dabei ist  $L(\vec{r})$  ein linearer, zeitunabhängiger und hermitescher Differential-Operator, der eine vollständige Basis von Eigenfunktionen  $\phi_n(\vec{r})$  besitzt.

$$L(\vec{r})\phi_n(\vec{r}) = \lambda_n\phi_n(\vec{r}) \quad (\text{A.2})$$

$$\int d^3r \phi_n^*(\vec{r})\phi_m(\vec{r}) = \delta_{nm} \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_n \phi_n(\vec{r})\phi_n^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{A.4})$$

Da der Operator  $L(\vec{r})$  hermitisch ist, sind alle Eigenwerte  $\lambda_n$  reell. Im speziellen Fall, daß alle  $\lambda_n \neq z$  kann man leicht sehen, daß

$$G(\vec{r}, \vec{r}'; z) = \sum_n \frac{\phi(\vec{r})\phi^*(\vec{r}')}{z - \lambda_n} \quad (\text{A.5})$$

Gleichung A.1 löst.

$G(\vec{r}, \vec{r}'; z)$  ist eine analytische Funktion in der komplexen Ebene, mit Polen erster Ordnung auf der reellen Achse.

Für eine ausführliche Analyse wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, wie z.B. [Ec].

## A.2 zeitabhängige Greenfunktionen

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - L(\vec{r})\right)g(\vec{r}, \vec{r}', t - t') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t') \quad (\text{A.6})$$

$$g(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} g(\omega) \quad (\text{A.7})$$

Bei  $g(\omega)$  handelt es sich auch um eine analytische Funktion mit Polstellen auf der positiven reellen Achse. Um nun das Integral A.7 ausführen zu können, muß man einen Weg in der komplexen eben Ebene wählen, der die Polstellen vermeidet. Da es nur drei physikalisch relevante Wege gibt, definiert man sich folgende Funktionen:

$$g^{ret}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(\omega + is) \quad \text{retadierte Greens-Funktion} \quad (\text{A.8})$$

$$g^{adv}(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(\omega - is) \quad \text{advansierte Greens-Funktion} \quad (\text{A.9})$$

$$g^-(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(\omega - i\bar{\epsilon}(\omega)s) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{mit } \bar{\epsilon}(x) = \theta(x) - \theta(-x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Setzt man  $g^{ret}$  in Gleichung A.7 ein, so kann man für  $\tau < 0$  das Integral in der unteren komplexen Halbebene schließen. Da die Pole von  $g^{ret}$  aber in der oberen komplexen Halbebene liegen, folgt sofort  $g^{ret}(\tau) = 0$ . Die retardierte Greenfunktion stellt also eine Lösung unserer Gleichung A.6 für Zeiten größer Null dar.

Auf gleiche Weise kann man zeigen, daß  $g^{adv}(\tau) = 0$  für  $\tau > 0$  gilt.

$$g(\omega) = \lim_{s \rightarrow 0^+} g(\omega + i\bar{\epsilon}(\omega)s) \quad (\text{A.11})$$

Gleichung A.11 nennt man die (gewöhnliche) Greens-Funktion. Da man nur drei unabhängige Wege hat und  $g^{ret} + g^{adv} = g + g^-$  kann man die Greens-Funktion durch  $g^{ret}$ ,  $g^{adv}$  und  $g^-$  ausdrücken.

Mit Hilfe der vier Green-Funktionen, kann man sich nun Lösungen für die homogene Gleichung  $\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - L(\vec{r})\right)f(\vec{r}, \vec{r}', t - t') = 0$  definieren:

$$g^> = g - g^{adv} \quad (\text{A.12})$$

$$g^< = g - g^{ret} \quad (\text{A.13})$$

$$\bar{g} = g^{ret} - g^{adv} = g^> - g^< \quad (\text{A.14})$$

Mit Hilfe von Gleichungen A.12,A.13 und A.14 kann man nun die Greenfunktionen in Abhängigkeit der homogenen Lösung ausdrücken.

Besitzt man also die homogene Lösung einer Differentialgleichung der Form  $(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - L(\vec{r}))f(\vec{r}, \vec{r}', t - t') = 0$ , so kann man die Greenfunktionen bestimmen.

$$g(\tau) = \theta(\tau)g^>(\tau) + \theta(-\tau)g^<(\tau) \quad (\text{A.15})$$

$$g(\tau)^{ret} = \theta(\tau)\bar{g}(\tau) \quad (\text{A.16})$$

$$g(\tau)^{adv} = \theta(\tau)\bar{g}(\tau) \quad (\text{A.17})$$

$$g(\tau)^- = -\theta(\tau)g^<(\tau) - \theta(-\tau)g^>(\tau) \quad (\text{A.18})$$



# Anhang B

## Die Bewegungsgleichung der Greenfunktion

### B.1 Die Feldoperatoren

Zur Beschreibung eines quantenmechanischen Vielteilchensystemes benutzt man Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der Heisenberg-Darstellung. Wirkt der Erzeugungsoperator  $\Psi^\dagger(\vec{r}, t)$  rechts auf einen Zustand, so wird ein Teilchen am Raum-Zeit-Punkt  $(\vec{r}, t)$  erzeugt. Wirkt hingegen der zu  $\Psi^\dagger(\vec{r}, t)$  adjungierte Vernichtungs-Operator  $\Psi(\vec{r}, t)$  auf einen Zustand rechts, so wird ein Teilchen am Raumzeitpunkt  $(\vec{r}, t)$  vernichtet.

Für Fermionen besitzen die Operatoren  $\Psi^\dagger(\vec{r}, t)$  und  $\Psi(\vec{r}, t)$  folgende Vertauschungsreaktionen:

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger(\vec{r}_1, t)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t) + \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t)\Psi^\dagger(\vec{r}_1, t) &= 0 \\ \Psi(\vec{r}_1, t)\Psi(\vec{r}_2, t) + \Psi(\vec{r}_2, t)\Psi(\vec{r}_1, t) &= 0 \\ \Psi(\vec{r}_1, t)\Psi^\dagger(\vec{r}_2, t) + \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t)\Psi(\vec{r}_1, t) &= \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Alle anderen physikalisch relevanten Operatoren können nun durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ausgedrückt werden, wie zum Beispiel der Teilchendichteoperator:

$$\hat{n}(\vec{r}, t) = \Psi^\dagger(\vec{r}, t)\Psi(\vec{r}, t)\quad (\text{B.2})$$

Durch das Vernichten und gleichzeitige Erzeugen eines Zustandes am Raum-Zeit-Punkt  $(\vec{r}, t)$  mißt er die Anzahl der Zustände an diesem Raum-Zeit-Punkt. Durch Integration über den ganzen Raum erhält man somit die gesamte Anzahl der Teilchen im System.

$$\hat{N}(t) = \int d^3r \Psi^\dagger(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) \quad (\text{B.3})$$

Auf gleiche Weise läßt sich der Hamiltonoperator durch die Feldoperatoren ausdrücken.

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) &= \int d^3r_1 \frac{\nabla \Psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \nabla \Psi(\vec{r}_1, t_1)}{2m} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r_2 \Psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2) v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \Psi(\vec{r}_1, t_1) \Psi(\vec{r}_2, t_2) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Mit Hilfe der Bewegungsgleichung in der Heisenbergdarstellung und den Vertauschungsrelationen B.1 erhält man die Bewegungsgleichungen, die  $\Psi(\vec{r}, t)$  und  $\Psi^\dagger(\vec{r}, t)$  erfüllen müssen.

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right) \Psi(\vec{r}_1, t_1) &= \int d^3r_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \Psi(\vec{r}_2, t_2) \Psi(\vec{r}_1, t_1) \\ \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right) \Psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1) &= \Psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1) \int d^3r_2 v(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_2) \Psi(\vec{r}_2, t_2) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

### B.1.1 Die Bewegungsgleichung der Greenfunktion

Aus den Bewegungsgleichungen B.5 der Feldoperatoren, kann man eine Bewegungsgleichung für die Greenfunktion  $g$  herleiten.

$$\begin{aligned} &< T \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m} \right) \Psi(\vec{r}_1, t_1) \Psi(\vec{r}_{1'}, t_{1'}) \right] > \\ &= - \int d^3r_2 v(r_1 - r_2) < T(\Psi(\vec{r}_1, t_1) \Psi(\vec{r}_2, t_2) \Psi^\dagger(\vec{r}_2, t_{2+}) \Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'})) > |_{t_2=t_1} \\ &= -i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2) g_2(1, 1', 2, 2^+) |_{t_2=t_1} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Bei  $g_2(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2, \vec{r}_{1'}, t_{1'}, \vec{r}_2, t_{2+})$  handelt es sich um die Zweiteilchen-Greenfunktion. Die Notation  $t_{2+}$  bedeutet, daß  $t_{2+}$  infinitesimal größer als  $t_2$  ist, um somit die richtige Ordnung der Operatoren aus Gleichung B.5 zu gewährleisten. Um nun Gleichung B.6 als eine Gleichung für unsere Einteilchen-Greenfunktion umschreiben zu können, muß man die Zeitableitung aus der Zeitordnungsoperation herausziehen. Im Gegensatz zu der räumlichen Ableitung

kommutiert die zeitliche Ableitung nicht mit dem Zeitordnungsoperator  $T$ .

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t_1} \langle T(\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'})) \rangle \\
 = & \frac{\partial}{\partial t_1} (\theta(t_1 - t_{1'})\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'}) - \theta(t_{1'} - t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'})\Psi(\vec{r}_1, t_1)) \\
 = & (\delta(t_1 - t_{1'})\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'}) + \delta(t_1 - t_{1'})\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'})\Psi(\vec{r}_1, t_1)) \\
 & + \theta(t_1 - t_{1'})\frac{\partial\Psi(\vec{r}_1, t_1)}{\partial t_1}\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'}) - \theta(t_{1'} - t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'})\frac{\partial\Psi(\vec{r}_1, t_1)}{\partial t_1} \\
 = & \delta(t_1 - t_{1'})\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) + \langle T\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(\Psi(\vec{r}_1, t_1)\Psi^\dagger(\vec{r}_{1'}, t_{1'}))\right) \rangle \quad (\text{B.7})
 \end{aligned}$$

Benutzt man nun dieses Ergebnis mit Gleichung B.6, so erhält man die Bewegungsgleichung der Einteilchen-Greenfunktion.

$$\begin{aligned}
 & \left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m}\right)g(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) = \quad (\text{B.8}) \\
 & \delta(t_1 - t_{1'})\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) - i \int d^3r_2 v(r_1 - r_2)g_2(1, 1', 2, 2^+) |_{t_1=t_2}
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung bestimmt die Einteilchen-Greenfunktion in Abhängigkeit der Zweiteilchen-Greenfunktion  $g_2$ . Auf ähnliche Weise hätte man auch eine Gleichung für  $g_2$  in Abhängigkeit der Dreiteilchen-Greenfunktion  $g_3$  finden können und so weiter. Da es im Allgemeinen unmöglich ist  $g_2$  exakt zu berechnen, löst man die Gleichung B.9 mit Hilfe von Näherungen für  $g_2$ . Im Gegensatz zur Definitions-Gleichung A.1 für die Greenfunktionen im Anhang unterscheidet sich Gleichung B.9 um einen Term, der durch die Wechselwirkung der Teilchen entsteht.

Betrachtet man den speziellen Fall eines freien Teilchens, so vereinfacht sich Gleichung B.9 zu:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\nabla_1^2}{2m}\right)g(1, 1') = \delta(t_1 - t_{1'})\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_{1'}) \quad (\text{B.9})$$

Durch eine Fourier-Transformation der Greenfunktion  $g(1, 2)$  erhält man eine Gleichung die Fourierkoeffizienten.

$$\left(\omega - \frac{k^2}{2m}\right)g(k, \omega) = 1 \quad (\text{B.10})$$

Für die Spektralfunktion erhält man nach längerer Rechnung:

$$A(k, \omega) = 2\pi\delta(\omega - (k^2/2m)) \quad (\text{B.11})$$

Das bedeutet, daß in Abwesenheit einer Wechselwirkung ein Teilchen mit dem Impuls  $\vec{k}$  nur die Energie  $\frac{k^2}{2m}$  haben kann. Dies entspricht genau dem Ergebnis welches man erwarten würde.

# Literaturverzeichnis

- [Bal] M.Baldo (Ed.), Nuclear Methods and the Equation of State, Vol. 9 of International Review of Nuclear Physics, World Scientific, Singapore 1999
- [Ben] O.Benhar, A.Fabrocini, S.Fantoni, Nucl. Phys. A505 (1989) 267, Nucl. Phys. A550 (1992) 201
- [Bot] W.Botermans, R.Malfliet, Quantum Transport Theory of Nuclear Matter, Phys. Rep. 198 (1990) 115
- [Ch] E.Chabanat, P.Bonche, P.Haensel, J.Meyer, R.Schaeffer, A Skyrme Parametrization from Subnuclear to Neutron Star Densities
- [Ci] C.Ciofi delgi Atti, E.Pace und G. Salme, Phys. Rev. C43(1991) 1153
- [Dan] P.Danielewicz, Quantum Theory of Nonequilibrium Processes, Annals of Physics 152, 239-304 (1984)
- [Das] Ashok Das, Das Finite Temperature Field Theory, World Scientific Publishing 1997
- [Dih] W.H.Dickhoff, C.C.Gearhart, E.P.Roth, A.Polls, A.Ramos, Phys.Rev., C60 (1999) 064319
- [Ec] E.N.Economou, Green's Functions in Quantum Physics, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1990
- [FeW] A.L.Fetter, J.D.Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems, MacGraw-Hill Inc., 1971
- [Fr] F.Frömel, H.Lenske, U.Mosel, Nucl. Phys. A723 (2003) 544
- [GaH] W.Gasser, E.Heiner, K.Elk, Greensche Funktionen in Festkörpern- und Vielteilchenphysik, WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH 2001

- [GrM] W.Greiner, J.Maruhn , Kernmodelle, Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt am Main, 1995
- [KaB] L.Kadanoff, G.Bayme, Quantum Statistical Mechanics, W.A.Benjamin, Inc., New York 1962
- [Le1] J.Lehr, M.Effenberger, H.Lenske, S.Leupold und U.Mosel Transport Theoretical Approach to the Nucleon Spectral Function in Nuclear Matter, Phys. Lett. B483 (2000) 324
- [Le2] J.Lehr, H.Lenske, S.Leupold, U.Mosel, Nucl. Phys. A703 (2002) 393
- [MarS] P.C.Martin, J.Schwinger, Phys. Rev. 115 (1959) 1342
- [Mas] T.Mastubara, Prog. Theor. Phys. 14 (1955) 351
- [Mi] A.B.Migdal, Theory of finite Fermi systems, Interscience Publisher, 1967
- [Pr] M.A.Preston, R.K. Bhaduri, Structure of the Nucleus, Addison-Wesley Publishing Company, 1975
- [Ta] K.Tanaka, W.Bentz, A.Arima, EOS and Fermi-liquid properties in the  $1/N$  expansion of relativistic many-body theory, Nuclear Physics A555 (1993), 151-214
- [VaB] D.Vautherin, D.M.Brink, Phys. Rev. C5 (1972) 626

## **Danksagung**

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut.

Herrn Prof. Dr. Horst Lenske danke ich für die sehr gute Betreuung und sein engagiertes Interesse an meiner Arbeit. Auch danke ich ihm für die Durchsicht meiner Manuskripte.

Frank Frömel danke ich für das Überlassen seiner Programme und für sehr viele hilfreiche Anregungen.

Elke Jung möchte ich für die administrative Hilfe danken.

Dem Institut für theoretische Physik I danke ich für viel 'Cheese and Wine' und 'Good New Physics'. Des Weiteren danke ich meinen Eltern und meinen Großeltern für die Unterstützung während meines ganzen Studiums.

Für orthographische Hilfe danke ich Joachim Jung. Als letztes möchte ich all meinen Freunden danken, die mich auch in schwierigen Zeiten ertragen mussten.

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst habe, ohne andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.