

Diplomarbeit

Lambda-Sigma-Mischung in exotischer Kernmaterie

vorgelegt von
Christoph Valentin
aus Wöllstadt

Betreuer:
Prof. Dr. Horst Lenske

Institut für Theoretische Physik I
Fachbereich 07 - Mathematik, Physik, Geographie

Justus-Liebig Universität Gießen

5. Mai 2009



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Theoretische Grundlagen	1
1.1 Die relativistische Hadronenfeldtheorie	1
1.1.1 Eigenschaften der NN-Wechselwirkung	1
1.1.2 Mesonen	1
1.1.3 Der Nukleonen-Propagator	3
1.1.4 Die QHD-Lagrangedichte	5
1.1.5 Die Mittelfeldnäherung	7
1.1.6 Die Giessen DDRH-Theorie	9
1.1.7 Zustandsgleichung	11
1.2 Dichteabhängige Y-N Feldtheorie	13
1.2.1 Die erweiterte Lagrangedichte	14
1.2.2 Zustandsgleichung für seltsame Kernmaterie	16
1.3 Lambda-Sigma-Mischung	17
1.3.1 Mischungsterme	17
1.3.2 Lösung des Eigenwertproblems	19
2 Diskussion der Ergebnisse	21
2.1 Kern- und Hyperkernmaterie	21
2.1.1 Berechnung der Kopplungskonstanten	21
2.1.2 Kernmaterie	21
2.1.3 Λ -Materie	22
2.1.4 Σ^0 -Materie	24
2.2 Lambda-Sigma-Mischung	24
2.2.1 Mischungspotential	25
2.2.2 Eigenwerte	26
2.2.3 Wahrscheinlichkeitsamplituden	26
2.2.4 Mischungswinkel	29
2.2.5 Einfluss des δ -Mesons	29
2.2.6 Einfluss des Massenunterschieds	33
2.2.7 Einfluss der Kopplungsstärken	34
2.2.8 Vergleich mit dem nichtrelativistischen Ansatz	35

Zusammenfassung und Ausblick	39
Anhang	41
.1 Relativistische Notation	41
.2 Dirac-Spinoren	43
.3 Nichtrelativistische Beschreibung	44
.4 Parametersatz	47
Literatur	50

Einleitung

1961 entwickelten Murray Gell-Mann und Georg Zweig unabhängig voneinander das Quarkmodell. Nachdem Wilhelm Wien 1898 feststellte, dass Wasserstoffatome die Teilchen mit der größten Ladung pro Masse sind, wurde der Wasserstoffkern, also das Proton, 1919 von Ernest Rutherford als Baustein aller schwereren Atomkerne identifiziert. 1932 schließlich entdeckte Sir James Chadwick aufbauend auf Arbeiten von Walther Bothe und dem Ehepaar Curie das Neutron als weiteren Kernbaustein. Mit diesen beiden Bausteinen konnten alle auf der Erde natürlich vorkommenden Elemente aufgebaut werden. Bethe und Weizsäcker entwickelten ausgehend vom *Tröpfchen-Modell* ihre berühmte Massenformel für große Kerne

$$M(A, Z) = NM_n + ZM_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}, \quad (0.1)$$

aus der die Bindungsenergie für die Nukleonen direkt abgeleitet werden kann. Gleichzeitig tauchten aber immer mehr Hinweise dafür auf, dass auch Protonen und Neutronen noch nicht die elementarsten Teilchen sind. Bei Experimenten insbesondere mit Höhenstrahlung traten immer mehr Teilchen auf, die man so nicht erklären konnte. Es mussten also eigenständige Teilchen sein, die zum Schluss einen wahren *Teilchen-Zoo* ergaben, ehe Gell-Mann und Zweig mit ihrem Modell Ordnung in die Vielfalt brachten. Die Ordnung wurde geschaffen, indem man für die bekannten Hadronen eine Substruktur definierte, die genannten Quarks. Unterschieden wird zwischen Up-, Down-, Strange-, Charm-, Bottom- und Top-Quark, die auch jeweils mit ihrem Anfangsbuchstaben abgekürzt werden. Proton und Neutron besitzen nur u- und d-Quarks. Da sie Bestandteile der bekannten Nuklide sind, werden sie als Nukleonen bezeichnet. Enthält ein Baryon mindestens ein s-Quark, so nennt man es Hyperon. Aus den möglichen Kombinationen von u-, d- und s-Quarks erhält man schließlich das Baryonoktett in Abbildung 0.1. Die anderen Quarks sind wesentlich massereicher und haben daher nur eine kurze Lebensdauer. Mit dem s-Quark lassen sich in Form des Λ -Teilchens aber auch relativ stabile Kerne bauen, was die Nuklidkarte zu Abbildung 0.2 erweitert. Hyperonen können also sowohl im Experiment erzeugt werden, als auch bei entsprechenden Umgebungsbedingungen z.B. in Neutronensternen natürlich existieren. Gerade für das Verständnis der astrophysikalischen Vorgänge ist das Verhalten von Hyperonen bei unterschiedlichen Umgebungsbedingungen von großem Interesse. Aber auch für einige Experimente sind Hyper-

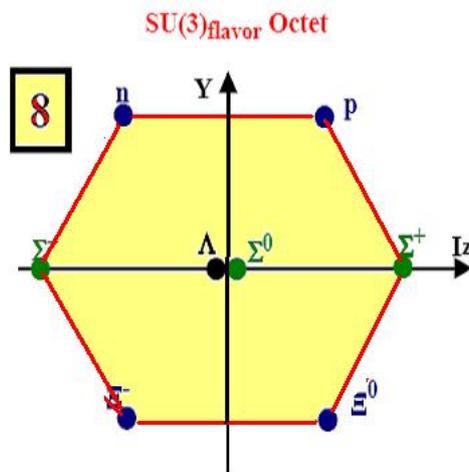


Abbildung 0.1: Baryonenoktet

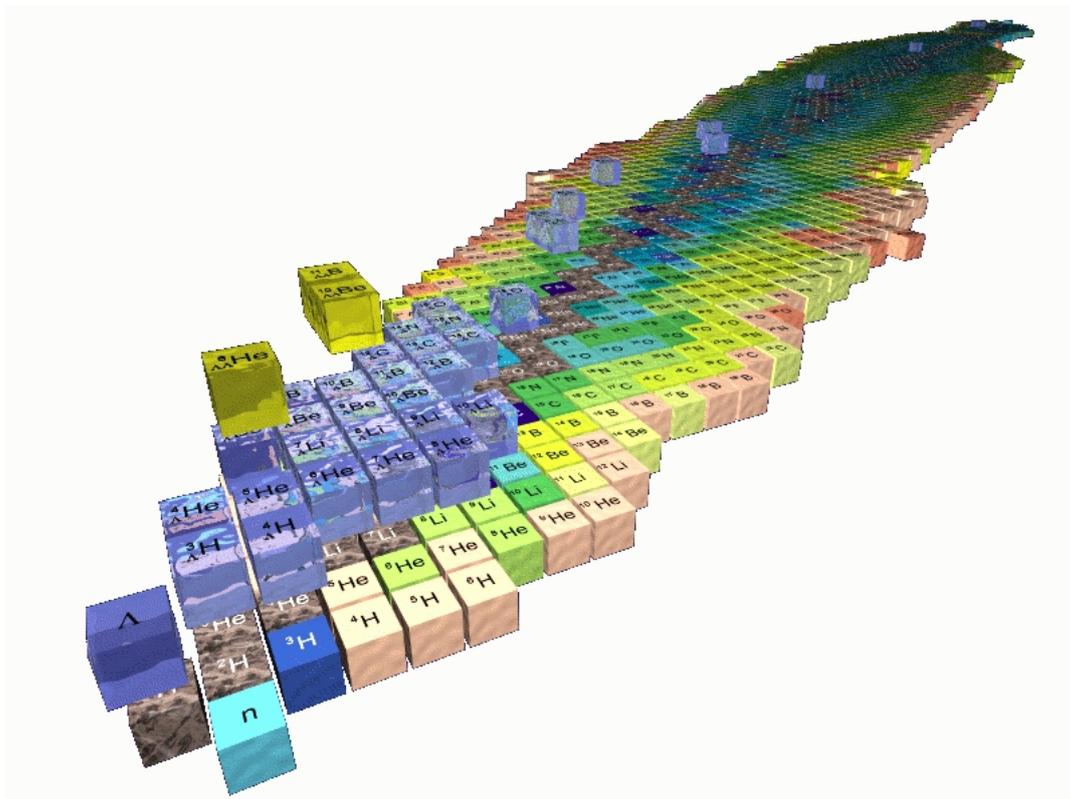


Abbildung 0.2: Erweiterte Nuklidkarte

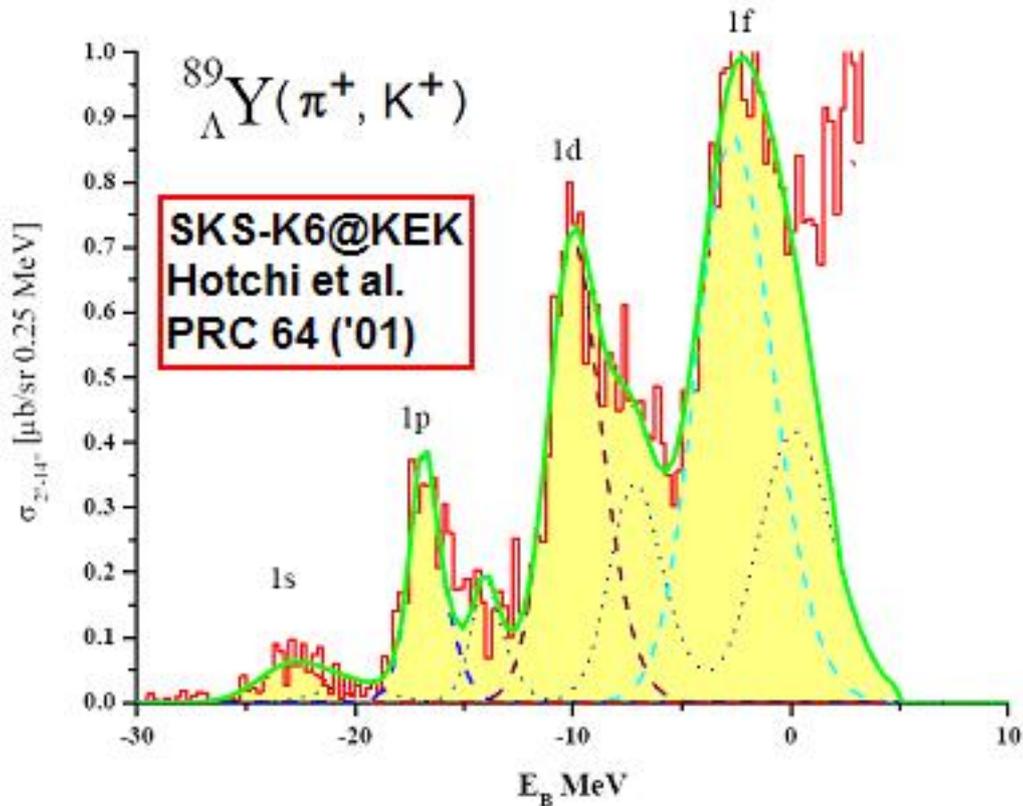


Abbildung 0.3: Experimentell gemessene Spektralfunktion eines Λ -Teilchens in einem schweren Atomkern: Schalenstruktur bis hinunter zu den am tiefsten gebundenen 1-s Zuständen sind klar erkennbar [Hot01]

ronen sehr interessant. So sagen die Pauli-Regeln, dass keine zwei identischen Teilchen im selben Zustand vorkommen dürfen. Es ist also sehr schwierig mit Protonen und Neutronen Zustände zu vermessen, die schon mit Protonen und Neutronen besetzt sind. Ein Λ -Teilchen hingegen kann einfach den gleichen Zustand annehmen. Dies ist gut in Abbildung 0.3 zu sehen. Ähnlich scharfe Linien sind mit Protonen und Neutronen nicht möglich.

Experimentelle Untersuchungen, die sich mit der Erforschung von Hyperonen beschäftigen, sind das CBM-Experiment (Compressed Baryonic Matter) am FAIR-Projekt der GSI in Darmstadt, bei dem sehr hohe Dichten erreicht werden sollen sowie die Hyperkernerzeugung mit Antiprotonen am PANDA Experiment, der MaMi-Beschleuniger in Mainz, der Hyperonen durch Elektronenbeschuss erzeugt

$$e^- + p^+ \longrightarrow \Lambda + K^+ + e^-.$$

und der CEBAF Beschleuniger am Jefferson Laboratory in Newport News in den USA.

Diese Arbeit untersucht daher das Verhalten von Hyperonen in Kernmaterie. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Mischungsverhalten von Λ - und Σ^0 -Teilchen. Die Mischung der beiden Teilchen ergibt sich dabei aus nichtdiagonalen Selbstenergien. Diese entstehen in Isospin-*asymmetrischen* Vielteilchensystemen. Grundlage der Untersuchung ist die dichteabhängige relativistische Hadronenfeldtheorie (DDRH).

Im ersten Teil der Arbeit werden die theoretischen Grundlagen vorgestellt. Dies beinhaltet einen kurzen Abriss über feldtheoretische Beschreibungen von Kernmaterie. Anhand dessen wird dann der Gießener Ansatz einer dichteabhängigen Beschreibung erläutert. Im nächsten Schritt werden die Hyperonen in das Modell integriert, bevor dann der Mischungsvorgang dargestellt wird. Im zweiten Teil werden dann kurz Ergebnisse für seltsame Kernmaterie präsentiert, bevor verschiedene Einflussgrößen auf das Mischungsverhalten untersucht werden. Dazu gehört neben der Dichte vor allem die Isospinasymmetrie des Systems. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf dem Isektor-Skalarfeld. Dieses ist in bisherigen Rechnungen nicht enthalten, hat aber, wie diese Arbeit zeigen wird, erheblichen Einfluss auf das Mischungsverhalten. Die Ergebnisse werden dann mit einem nichtrelativistischen Ansatz verglichen. Auch der Einfluss von verschiedenen Vereinfachungen des Systems wird untersucht.

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Die relativistische Hadronenfeldtheorie

Bevor die Einzelheiten der Mischung von Λ - und Σ -Teilchen besprochen werden, sollen im folgenden Kapitel die Grundlagen der relativistischen Quantenfeldtheorie, die Basis dieser Arbeit ist, besprochen werden. Ausgangspunkt für die Beschreibung der effektiven Wechselwirkung von Nukleonen im Medium ist immer die Untersuchung der freien NN-Wechselwirkung.

1.1.1 Eigenschaften der NN-Wechselwirkung

Zahlreiche Untersuchungen an Atomkernen haben ergeben, dass die Kernkräfte sehr kurzreichweitig sind. Man unterscheidet für gewöhnlich zwischen drei Bereichen. Im Hard-Core-Bereich ($r \leq 0.5\text{fm}$) ist die Wechselwirkung stark repulsiv und sorgt somit für einen Mindestabstand zwischen den Nukleonen und ist damit für das Volumen des Kerns verantwortlich. Im intermediären Bereich ($0.5\text{fm} \leq r \leq 2\text{fm}$) muss die Wechselwirkung attraktiv sein, während sie im langreichweitigen Bereich ($r \geq 2\text{fm}$) langsam an Bedeutung verliert. Die NN-Wechselwirkung setzt sich insgesamt aus tensoriellen Anteilen, sowie Beiträgen der Spin-Bahn, Spin-Spin und Isospinwechselwirkung zusammen.

In der Quantenelektrodynamik wird zur Beschreibung der Wechselwirkung zweier geladener Teilchen der Austausch von Photonen eingeführt. Bereits 1935 beschrieb *Yukawa* die Wechselwirkung von Nukleonen mit dem Austausch von Mesonen. Das Feld dieses massereichen Teilchens muss die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, die für ein Skalarfeld gegeben ist als:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Phi(x) = g \bar{\Psi}(x) \Psi(x). \quad (1.1)$$

Ψ ist das Nukleonenfeld, das gleichzeitig auch Quelle des Mesonenfeldes mit der Stärke g ist. Die genaue Parametrisierung der NN-Wechselwirkung durch Fits an gemessenen NN-Streuphasen wurde z.B. in der Doktorarbeit von Frank Hofmann [Hof01] beschrieben und soll hier nicht wiederholt werden.

1.1.2 Mesonen

Das Ein-Boson-Austausch-Potential (One-Boson-Exchange-Potential) enthält die Beiträge von sechs Mesonen (σ , δ , ω , ρ , π und η). Gleichung 1.1 geht für die An-

Meson	σ	δ	ω	ρ	η	π
I, J^P	0, 0 ⁺	1, 0 ⁺	0, 1 ⁻	1, 1 ⁻	0, 0 ⁻	1, 0 ⁻
Masse [MeV]	571	962	784	776	548	139
$g^2/4$	7.4	1.67	11.7	0.42	2.0	14.16
Λ^2 [GeV ²]	1300	1300	1300	1300	1300	1300
Kopplung Γ_i	$\mathbb{1}$	$\tau\mathbb{1}$	γ_μ	$\tau\gamma_\mu$	γ_5	$\tau\gamma_5$

Tabelle 1.1: Parameter und Eigenschaften der einzelnen Mesonen

nahme eines unendlich schweren Kerns in

$$(-\Delta + m^2) \Phi(\mathbf{r}) = g\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.2)$$

über. Gelöst wird die Klein-Gordon-Gleichung durch die Green-Funktion

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.3)$$

Damit lautet die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\Phi(r) = \int d^3r' G(r, r') \rho(r'). \quad (1.4)$$

Leicht ersichtlich ist hier die endliche Reichweite für Massen ungleich Null. Im Grenzfall $m \rightarrow 0$ ergibt sich hingegen für das Potential gerade das Coulombpotential

$$V(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{1}{r}. \quad (1.5)$$

Allerdings haben Mesonen und Nukleonen im Gegensatz zu Elektronen und Photonen eine Substruktur, sie können also anders als zunächst vermutet keine fundamentalen Wechselwirkungen darstellen. Die Mesonentheorie ist aber in der Lage eine effektive Beschreibung von Nukleonensystemen zu liefern. Dabei sollte sie sich aus den fundamentalen Ansätzen der Quantenchromodynamik für den Grenzfall des Niederenergiebereichs ergeben.

Tabelle 1.1 gibt die Eigenschaften der für das OBE-Potential relevanten Mesonen wieder. Dabei legt die Masse die Reichweite der Wechselwirkung fest, während g die Stärke der Kopplung beschreibt. Das Verhältnis $(g/m)^2$ ist daher ein gutes Maß dafür, wie groß der Beitrag des einzelnen Mesons zum OBE-Potential ist. Die Art der Kopplung der Mesonen an das Nukleonfeld beschreibt den Charakter der einzelnen Beiträge. Das Pion beschreibt dabei den langreichweitigen Teil der Wechselwirkung. Die schwereren ω - und ρ -Mesonen haben eine wesentlich kürzere Reichweite, wobei das ω -Meson für die starke Repulsion bei

kurzen Abständen verantwortlich ist. Ferner liefert es Beiträge zur Spin-Bahn-Wechselwirkung. Das σ -Meson kann in der Natur nicht als scharfer Massenzustand gemessen werden. Allerdings wird ein skalares, isoskalares Meson mit einer Masse von ca. 500 MeV zur Beschreibung der Attraktion im intermediären Bereich benötigt. Erzeugt werden die attraktiven Kräfte durch 2π -Austauschterme, die durch das hier verwendete σ -Meson sehr gut parametrisiert werden [KDH94]. Das δ -Meson liefert auf Grund seiner großen Masse und geringen Kopplungsstärke nur einen geringen Beitrag zum Ein-Bosonen-Austauschpotential.

Das η -Meson ist wie das π -Meson ein pseudoskalares Meson, allerdings liefert es auf Grund seiner größeren Masse und kleineren Kopplungskonstanten einen wesentlich geringeren Beitrag zur Gesamtwechselwirkung. Dieser ist allerdings wegen dem Isospin 0 Teil der isospinunabhängigen Tensorkraft.

Da es sich bei den beschriebenen Wechselwirkungen um keine Fundamentalwechselwirkungen handelt, werden, um Beiträge von zu hohen Impulsen abzuschneiden, an alle Vertizes Formfaktoren

$$F(k^2) = \frac{\Lambda_i^2 - m_i^2}{\Lambda_i^2 - k^2} \quad (1.6)$$

multipliziert, welche die endliche Größe des Nukleons berücksichtigen. Die Vektor-Wechselwirkungen werden dadurch regularisiert.

1.1.3 Der Nukleonen-Propagator

Die quantenmechanische Beschreibung des Vielteilchensystems benötigt eine Formulierung, die Teilchenerzeugung und -vernichtung beinhaltet, was zum Formalismus der zweiten Quantisierung führt. Jeder quantenmechanische Zustand i wird dabei von dem Erzeugungsoperator \hat{a}_i^\dagger erzeugt, bzw. vom Vernichtungsoperator \hat{a}_i vernichtet. Für den Vakuumzustand gilt dann definitionsgemäß:

$$a_i|0\rangle = 0. \quad (1.7)$$

Die Operatoren müssen dann den Vertauschungs- (Bosonen) bzw. Antivertauschungsrelationen genügen

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger \right]_{\pm} = \delta_{ij} \quad (1.8)$$

$$\left[\hat{a}_i, \hat{a}_j \right]_{\pm} = \left[\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger \right]_{\pm} = 0. \quad (1.9)$$

Durch die Definition von lorentzkovarianten Feldoperatoren $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$, schafft man den Übergang von einer klassischen zur Quantenfeldtheorie. Zustandsvektoren im Hilbertraum beschreiben dann die Zustände im betrachteten System. Für die

Feldoperatoren werden die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', t) \right]_{\pm} = \delta_{\alpha,\beta} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (1.10)$$

$$\left[\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}', t) \right]_{\pm} = \left[\hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}, t), \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}', t) \right]_{\pm} = 0 \quad (1.11)$$

gefordert. Die Bosonen sind dabei durch ein Minus, die Fermionen durch das Plus gekennzeichnet. Die Fermionen gehorchen als Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen der Fermi-Dirac-Statistik. Daher gilt die Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - m)\hat{\psi} = 0. \quad (1.12)$$

Der Feldoperator kann nach freien Lösungen $\phi = u(p)e^{-ipx}$ der Diracgleichung entwickelt werden

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M}{E_p}} \left(\hat{b}(p, s)u(p, s)e^{-ipx} + \hat{d}^\dagger(p, s)v(p, s)e^{+ipx} \right), \quad (1.13)$$

wobei \hat{b}^\dagger und \hat{b} die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für die Teilchen und \hat{d}^\dagger und \hat{d} für die Antiteilchen sind. Dabei haben die Spinoren u und v die explizite Form

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + M}{2M(E_p + M)}u(0, s) \quad (1.14)$$

$$v(p, s) = \frac{-\not{p} + M}{2M(E_p + M)}v(0, s). \quad (1.15)$$

$u(, s)$ und $v(0, s)$ sind hier die Einheitsspinoren im Ruhesystem, die der Gleichung

$$(\not{p} - M)u(p, s) = 0 \quad (1.16)$$

$$(\not{p} + M)v(p, s) = 0 \quad (1.17)$$

genügen. Der Feynman-Propagator $G_{\alpha\beta}$ für Baryonen in einem System nicht wechselwirkender Fermionen wird üblicherweise als Grundzustandserwartungswert des zeitgeordneten Produkts zweier Feldoperatoren an unterschiedlichen Raum-Zeit-Punkten definiert [SW68]:

$$iG_{\alpha\beta}(x - y) = \langle \Psi_0 | T[\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(y)] | \Psi_0 \rangle \quad (1.18)$$

Im Grundzustand sollen nur Baryonen positiver Energie bis zum Fermiimpuls k_f enthalten sein. Der Zeitordnungsoperator definiert sich dann wie folgt:

$$T[\hat{\psi}_\alpha(x), \hat{\psi}_\beta(y)] = \begin{cases} \hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\psi}_\beta(y) & \text{für } x^0 \geq y^0 \\ \pm \hat{\psi}_\alpha(y)\hat{\psi}_\beta(x), & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.19)$$

Das Plus gilt hier für Bosonen, das Minus für Fermionen. Durch Fouriertransformation erhält man

$$G_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G_{\alpha\beta}(k). \quad (1.20)$$

Im Impulsraum ist der Propagator durch

$$G_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{2E(k)} \left[(\gamma_\mu K^\mu + M)_{\alpha\beta} \left(\frac{1 - \theta_k}{k_0 - E(k) + i\epsilon} + \frac{\theta_k}{k_0 - E(k) - i\epsilon} \right) + (\gamma_\mu \tilde{K}^\mu - M)_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{k_0 + E(k) - i\epsilon} \right) \right] \quad (1.21)$$

gegeben, mit

$$\gamma_\mu K^\mu = \gamma_0 E(k) - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \quad (1.22)$$

$$\gamma_\mu \tilde{K}^\mu = \gamma_0 E(k) + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k} \quad (1.23)$$

$$\theta_k = \theta(k_f - |\mathbf{k}|). \quad (1.24)$$

Durch den ersten Term werden Baryonen beschrieben, die oberhalb der Fermikante propagieren, den zweiten hingegen kann man als die Bewegung von Löchern im Fermisee interpretieren. Die Propagation von Antibaryonen wird durch den dritten Term beschrieben. Wenn ($|\mathbf{k}| \ll M$) gilt, also im nichtrelativistischen Grenzfall, wird der Nukleonen-Propagator zu

$$G_{\alpha\beta}(k) = \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{1 - \theta_p}{k_0 - E(k) + i\epsilon} + \frac{\theta_k}{k_0 - E(k) - i\epsilon} \right] \quad (1.25)$$

reduziert. Wird der erste und letzte Term aus Gleichung 1.21 zusammengefasst ergibt sich eine weitere Möglichkeit $G_{\alpha\beta}$ darzustellen:

$$G_{\alpha\beta} = (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{k_\mu^2 - M^2 + i\epsilon} + i\pi\delta(k_0 - E(k))\theta_k \right] = G_F + G_D \quad (1.26)$$

Entsprechend beschreibt G_F die Bewegung freier Baryonen und Antibaryonen und wird als Feynman-Propagator bezeichnet. Der dichteabhängige oder Materie-Propagator G_D hingegen beschreibt die Bewegung der Löcher im Fermisee.

1.1.4 Die QHD-Lagrangedichte

Die Lagrangedichtefunktion ist in der Quanten-Hadro-Dynamik (QHD) eine Funktion der Nukleonen- und Mesonenfelder. Sie setzt sich zusammen aus

$$\mathcal{L}_N = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - M] \psi \quad (1.27)$$

für das freie Nukleonen-Feld, wobei mit ψ der Nukleonenspinor und mit M die Masse des Nukleons bezeichnet wird. Hier wird später zwischen Proton und Neutron sowie den verschiedenen Hyperonen unterschieden.

Die freien Mesonenfelder werden durch \mathcal{L}_m beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = & \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \delta, \pi, \eta} (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\omega, \rho, \gamma} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^i F_i^{\mu\nu} - m_i^2 A_\mu^i A^{i\mu} \right) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Die skalaren Mesonen-Felder werden hier durch Φ_i und die vektoriellen durch $A^{(i)\mu}$ dargestellt. Der Feldstärketensor der Vektormesonen bzw. des Photons $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ wird mit $F_{\mu\nu}$ abgekürzt.

Die Wechselwirkung von Nukleonen- und Mesonen-Feldern wird durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \bar{\psi} g_\sigma \psi + \bar{\psi} g_\delta \boldsymbol{\tau} \Phi_\delta \psi \\ & + \bar{\psi} g_\pi \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \Phi_\pi \psi + \bar{\psi} g_\eta \gamma^5 \Phi_\eta \psi \\ & - \bar{\psi} g_\omega \gamma_\mu A_\omega^\mu \psi - \bar{\psi} g_\rho \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \mathbf{A}_\rho^\mu \psi - e \bar{\psi} \hat{Q} \gamma_\mu A_\gamma^\mu \psi \end{aligned} \quad (1.29)$$

beschrieben. Für die komplette Lagrangedichte erhält man dann

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_N + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int}. \quad (1.30)$$

Die g_i bezeichnen die Kopplungskonstanten der jeweiligen Mesonen (vgl. [SW68]), die aber in der dichteabhängigen Hadronenfeldtheorie von der Dichte des Mediums abhängen [HKL01]. Der Dichteabhängigkeit wird später ein eigener Abschnitt gewidmet. τ ist der Isospinoperator und $\hat{Q} = \frac{1+\tau_3}{2}$ der Ladungsoperator. Aus der Lagrangedichtefunktion erhält man mittels der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} = 0 \quad (1.31)$$

die Bewegungsgleichungen der einzelnen Felder.

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \Phi_\sigma = g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (1.32)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\delta^2) \Phi_\delta = g_\delta \bar{\psi} \boldsymbol{\tau} \psi \quad (1.33)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\eta^2) \Phi_\eta = g_\eta \bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad (1.34)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2) \Phi_\pi = g_\pi \bar{\psi} \gamma^5 \boldsymbol{\tau} \psi \quad (1.35)$$

$$\partial_\nu F^{(\omega)\mu\nu} + m_\omega^2 A^{(\omega)\mu} = g_\omega \bar{\psi} \boldsymbol{\tau} \gamma^\mu \psi \quad (1.36)$$

$$\partial_\nu F^{(\rho)\mu\nu} + m_\rho^2 \mathbf{A}^{(\rho)\mu} = g_\rho \bar{\psi} \boldsymbol{\tau} \gamma^\mu \psi \quad (1.37)$$

$$\partial_\nu F^{(\gamma)\mu\nu} = e \hat{Q} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.38)$$

Definiert man die skalare *Selbstenergie* als $\Sigma^s = g_\sigma \Phi_\sigma + g_\delta \boldsymbol{\tau} \Phi_\delta$ und die vektorielle *Selbstenergie* als $\Sigma^\mu = g_\omega A^\mu + g_\rho \boldsymbol{\tau} \mathbf{A}^\mu$, dann ergibt sich für die Baryonenfelder die Dirac-Gleichung als

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma^\mu) - (M - \Sigma^s)] \Psi = 0. \quad (1.39)$$

Betrachtet man die Selbstenergien in der Dirac-Gleichung 1.39 als Modifikationen von Impuls und Masse, so kann man mit den Definitionen $M^* = M - \Sigma^s$ und $p_\mu^* = p_\mu - \Sigma^\mu$ Gleichung 1.39 als Dirac-Gleichung freier Baryonen mit Masse M^* und Impuls p^* umschreiben:

$$(\not{p}^* - M^*) \Psi = 0 \quad (1.40)$$

Auch wenn der Ansatz als modifizierte Dirac-Gleichung einfach erscheint, da eine quasi wechselwirkungsfreie Bewegung von Nukleonen mit der effektiven Masse M^* und dem effektiven Impuls p^* beschrieben wird, so ist im Allgemeinen eine exakte Lösung der Feldgleichungen 1.38 und 1.40 nicht möglich. Es müssen also Näherungen vorgenommen werden, die den betrachteten Fall möglichst gut nachbilden. Ein erster Ansatz ist daher die Mittelfeldnäherung für Kernmaterie, die im Folgenden erläutert werden soll.

1.1.5 Die Mittelfeldnäherung

Da sich Bewegungsgleichungen für mehrere Teilchen in der Regel nicht mehr analytisch berechnen lassen und man auch numerisch schnell an Grenzen stößt, wird versucht die komplexen Vielteilchenwechselwirkungen durch ein effektives Potential zu parametrisieren. Das effektive Potential ersetzt also die Wechselwirkung mit vielen Teilchen durch die von einem Teilchen gespürte Wechselwirkung. Dieser Ansatz ist insbesondere für Kerne mit großer Nukleonenzahl recht erfolgreich. Für große skalare und vektorielle Baryondichten nimmt die Stärke der Quellterme in den Mesonenfeldgleichungen 1.38 zu [FW71] und damit die Quantenfluktuationen in Relation zum Erwartungswert ab. Wenn die Quellterme im Wesentlichen ihrem Erwartungswert entsprechen, kann man aber auch die Feldgleichungen durch ihre Erwartungswerte annähern:

$$\hat{\Phi}_i \longrightarrow \langle \hat{\Phi}_i \rangle \Phi_i^0. \quad (1.41)$$

Zum Hartree-Grundzustand tragen die pseudoskalaren oder -vektoriellen Mesonen (π und η) nicht bei. Diese werden also in der weiteren Betrachtung nicht beachtet. Allerdings sind sie in den dichteabhängigen effektiven Kopplungen enthalten im Gegensatz zu phänomenologischen konstanten Kopplungen. Siehe dazu

auch [Hof01, Mittelfeld- oder Hartree-Näherung].

$$\bar{\Psi}\Psi \longrightarrow \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = \rho^s = \rho_n^s + \rho_p^s \quad (1.42)$$

$$\bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}\Psi \longrightarrow \langle \bar{\Psi}\boldsymbol{\tau}_i\Psi \rangle \delta_{i3} = \langle \bar{\Psi}\tau_3\Psi \rangle = \rho_3^s = \rho_n^s - \rho_p^s \quad (1.43)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \longrightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi \rangle \delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\Psi \rangle = \rho = \rho_n + \rho_p \quad (1.44)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \longrightarrow \langle \bar{\Psi}\gamma_\mu\boldsymbol{\tau}\Psi \rangle \delta_{\mu 0} = \langle \bar{\Psi}\gamma_0\boldsymbol{\tau}_3\Psi \rangle = \rho_3 = \rho_n - \rho_p \quad (1.45)$$

Fügen wir den hier betrachteten Protonen und Neutronen noch Hyperonen bei, so verändern sich natürlich auch die entsprechenden Dichten. Allerdings muss bei der Berechnung der Mesonenfelder berücksichtigt werden, dass diese andere Kopplungsstärken besitzen, so dass auf der rechten Seite der Mesonenfeldgleichungen 1.38 nicht die Summe der Dichten auftaucht. Stattdessen wird über die Produkte aus Kopplungsstärke und jeweiliger Dichte summiert. Bei den Rechnungen zum Lambda-Sigma-Mischung wurde Kernmaterie aus Protonen und Neutronen verwendet, der immer nur ein *Prüfteilchen* beigefügt wurde. Der Anteil des einen Teilchens am Gesamtfeld ist dann vernachlässigbar und die verwendeten Potentiale errechnen sich nur aus den Feldern der Protonen- und Neutronenmaterie. Zur Vereinfachung werden im Folgenden die Hyperonen weggelassen und erst später noch einmal betrachtet.

Die Mesonenfeldgleichungen 1.38 werden dann zu einfachen Differentialgleichungen klassischer Felder (vgl: [Kei99]):

$$(-\nabla^2 + m_\sigma^2) \phi_\sigma = g_\sigma \rho^s \quad (1.46)$$

$$(-\nabla^2 + m_\delta^2) \phi_\delta = g_\delta \rho_3^s \quad (1.47)$$

$$(-\nabla^2 + m_\omega^2) A^{0(\omega)} = g_\omega \rho \quad (1.48)$$

$$(-\nabla^2 + m_\rho^2) A^{0(\rho)} = g_\rho \rho_3 \quad (1.49)$$

$$-\nabla^2 A^{0(\gamma)} = -e\rho_p. \quad (1.50)$$

Des Weiteren können verschiedene Symmetrien ausgenutzt werden:

Räumliche Symmetrien können oft ausgenutzt werden, um Dreierortsvektoren auf zwei oder eine Dimension zu reduzieren. Geht man von Kernmaterie aus, liegt Translationsinvarianz vor und man kann die so vereinfachte Dirac-Gleichung analytisch lösen.

Zeitumkehrinvarianz bewirkt, dass alle Ströme in den Kernen, bzw. in der Kernmaterie unterdrückt sind. Die räumlichen Komponenten der Vierervektoren $A^{(i)\mu}, \rho^\mu$ und ρ_3^μ verschwinden und es bleiben lediglich die zeitlichen Komponenten $A^{(i)0}, \rho^0$ und ρ_3^0 übrig.

Ladungserhaltung eines abgeschlossenen Systems bewirkt die Erhaltung der dritten Iso-Komponente des Iovektors ρ^0 . In diesem Fall wird sie mit ρ_3 bezeichnet.

Parität beschreibt das Verhalten eines physikalischen Systems unter Raumspiegelung. Wird das System bei der Raumspiegelungstransformation in sich selbst überführt, spricht man von positiver Parität. Bei negativer Parität tritt hingegen bei der Transformation ein Vorzeichenwechsel auf. Die Transformation von Spinoren sieht dann wie folgt aus:

$$\psi'(\mathbf{x}', t) = \psi'(-\mathbf{x}, t) = e^{i\phi} \gamma^0 \psi(-\mathbf{x}', t). \quad (1.51)$$

Das definiert den Paritätsoperator also

$$P = e^{i\phi} \gamma^0 P^0, \quad (1.52)$$

wobei P^0 die innere Raumspiegelung bewirkt ($\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$) und $e^{i\phi}$ ein unbeobachteter Phasenfaktor ist. Die inneren Paritäten von Teilchen und Antiteilchen sind entgegengesetzt, da die Ruhezustände positiver und negativer Energie zwar Eigenzustände von P sind, aber entgegengesetzte Eigenwerte besitzen.

1.1.6 Die Giessen DDRH-Theorie

Bisher haben wurde immer der einfache Fall von konstanten Kopplungsstärken betrachtet, wie sie ähnlich schon im rein phänomenologischen Walecka-Modell [SW68] verwendet wurden. Dort war man nur von einer Kopplung an zwei Mesonenfeldern (σ und ω) ausgegangen und hatte die Kopplungsstärken g_σ und g_ω an die Sättigungseigenschaften von Kernmaterie angepasst. Dieses Modell war so erfolgreich, dass es nach und nach auch für endliche Kerne angepasst wurde. Eine Erweiterung bestand in der Einführung des isovektoriellen Vektormesons ρ und des Photons, welches die Coulombrepulsion nachbildet. Weitere Fortschritte waren die Einführung von nichtlinearen Termen in den Mesonenfeldern, die für die Beschreibung von Oberflächeneigenschaften nötig sind und dort gute Ergebnisse liefern. Die zusätzlichen Parameter werden durch einen Fit an Kerneigenschaften bestimmt. Der Nachteil dieser Herangehensweise besteht darin, dass die zusätzlichen Terme physikalisch nicht ausreichend begründet werden können. Der alternative Ansatz zur Beschreibung von Oberflächeneigenschaften und der Kompressibilität besteht darin, die Kopplungskonstanten nicht als einfache Werte zu begreifen, sondern als

effektive Beschreibung der NN-Wechselwirkung aus realistischen NN-Potentialen

[Hof01]. Diese dichteabhängige Hadronenfeldtheorie wird dann als DDRH (density dependent relativistic hadron field theory) bezeichnet (siehe auch: [Len04]). Die konstanten Kopplungen (g_σ , g_δ , g_ω und g_ρ) werden jetzt als Funktionale

($\hat{\Gamma}_\sigma$, $\hat{\Gamma}_\delta$, $\hat{\Gamma}_\omega$ und $\hat{\Gamma}_{\rho_0}$) von Baryonen-Feldoperatoren angesetzt. Um die Lorentz-Invarianz der Theorie zu gewährleisten werden die Vertizes als Funktionale $\hat{\Gamma}_\alpha(\bar{\Psi}, \Psi)$ von Lorentz-skalaren Bilinearformen $\hat{\rho}_0(\bar{\Psi}, \Psi)$ gewählt. Darin ist das Walecka-Modell als Grenzfall für $\hat{\rho}/\rho_0 = 1$ enthalten. Es folgt $\hat{\Gamma}_\alpha = \text{const.} = g_\alpha$.

Der genaue Ansatz für die Dichten wird in der Doktorarbeit von Frank Hofmann [Hof01] beschrieben und soll hier nicht wiederholt werden. Berechnen wir die Euler-Lagrange-Gleichungen mit dichteabhängigen Kopplungen, so treten bei den Baryonenfeldgleichungen zusätzliche Terme auf. Hier wirkt sich die Variationsableitung von \mathcal{L} bezüglich $\bar{\Psi}$ auch auf die Vertizes $\hat{\Gamma}_\alpha(\hat{\rho}_0)$ aus. Wir erhalten:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_{int}}{\delta \bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \bar{\psi}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial \hat{\rho}_0} \frac{\delta \hat{\rho}_0}{\delta \bar{\psi}}. \quad (1.53)$$

Der linke Teil ergibt wieder die Selbstenergien, während der rechte Teil neu ist und als Rearrangement-Beitrag zu den Selbstenergien bezeichnet wird. Diese Effekte treten auch bei nichtrelativistischen Rechnungen auf und werden physikalisch mit dynamischen Umordnungen des nuklearen Mediums durch Polarisationseffekte erklärt. Wie bei den herkömmlichen Selbstenergien aus Gleichung 1.39 können auch die Rearrangementteile in einen skalaren und einen vektoriellen Anteil zerlegt werden.

$$\hat{\Sigma}^{\mu(r)} = \frac{\partial \Gamma_\omega}{\partial \rho} A_0^{(\omega)} \rho + \frac{\partial \Gamma_\rho}{\partial \rho} A_0^{(\rho)} \rho_3 \quad (1.54)$$

$$\hat{\Sigma}^{s(r)} = \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial \rho} \Phi_\sigma \rho^s + \frac{\partial \Gamma_\delta}{\partial \rho} \Phi_\delta \rho_3^s \quad (1.55)$$

Damit können die neuen Selbstenergien definiert werden:

$$\hat{\Sigma}^\mu = \hat{\Sigma}^{\mu(0)} + \hat{\Sigma}^{\mu(r)} \quad \hat{\Sigma}^s = \hat{\Sigma}^{s(0)} + \hat{\Sigma}^{s(r)} \quad (1.56)$$

Mit deren Hilfe dann die Dirac-Gleichung für die Baryonen wie folgt geschrieben werden können [HKL01]:

$$\left[\gamma_\mu \left(i\partial^\mu - \hat{\Sigma}^\mu \right) - \left(M - \hat{\Sigma}^s \right) \right] \psi = 0. \quad (1.57)$$

Diese behält also ihre Struktur.

Als Ansatz für die Parametrisierung der Kopplungsfunktionen wurde in Anlehnung an [TW99]

$$\Gamma_i(\rho) = a_m \frac{1 + b_i \left(\frac{\rho}{\rho_0} + d_i \right)^2}{1 + c_i \left(\frac{\rho}{\rho_0} + e_i \right)^2} \quad (1.58)$$

gewählt, der an das Groningen NN-Potential angepasst wurde [Hof01]. Selbstenergien aus Brücknerrechnungen sind impulsabhängig und benötigen daher eine Impulskorrektur [Fed06], die einen zusätzlichen Term in isoskalaren Kanälen führt

$$\Gamma_i^{MC}(\rho) = \Gamma_i(\rho) \sqrt{1 + G_i k_F^2}, \quad (1.59)$$

mit dem Fermi-Impuls $k_F = \left(\frac{3\pi^2}{2}\rho\right)^{\frac{1}{3}}$.

1.1.7 Zustandsgleichung

Für unendliche Kernmaterie können jetzt leicht Lösungen für die Dirac-Gleichung gefunden werden, da die Ableitungen nach den Ortskoordinaten auf Grund der Homogenität und der Isotropie des Systems verschwinden. Als Lösungen der Dirac-Gleichung ergeben sich also ebene Wellen, die durch eine Fourierentwicklung im Impulsraum gewonnen werden. Für Einteilchenzustände positiver Energie lautet die Dirac-Gleichung im Medium dann

$$(\not{k}^* - M_b^*)u_b^*(k, s) = 0 \quad (1.60)$$

Die $u_b^*(k, s)$ sind die Einteilchenzustände im Medium mit Spin $s = \pm\frac{1}{2}$. b kennzeichnet die Teilchensorte, also Proton und Neutron sowie später die Hyperonen. Die Massenschalenbedingung

$$k^{*2} - M_b^{*2} = 0 \quad (1.61)$$

mit den modifizierten Massen und Wellenzahlen soll dabei weiterhin gelten. Analog zum wechselwirkungsfreien Fall erhalten wir dann die Lösung

$$u_b^*(k, s) = \sqrt{\frac{E_b^* + M_b^*}{2M_b^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}_b^*}{E_b^* + M_b^*} \end{pmatrix} \chi_s \quad (1.62)$$

mit der modifizierten Einteilchenenergie im Medium $E_b^* = \sqrt{k^{*2} + M_b^{*2}}$. Zur Berechnung der Energien brauchen wir wieder die Erwartungswerte der Mesonenfelder, die sich wegen der Translationsinvarianz aber auch weiter vereinfachen:

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = \Gamma_\sigma(\rho) \rho^s \quad (1.63)$$

$$m_\omega^2 A_0^{(\omega)} = \Gamma_\omega(\rho) \rho \quad (1.64)$$

$$m_\delta^2 \phi_\delta = \Gamma_\delta(\rho) \rho_3^s \quad (1.65)$$

$$m_\rho^2 A_0^{(\rho)} = \Gamma_\rho(\rho) \rho_3 \quad (1.66)$$

ρ und ρ^s sind hierbei wieder die Dichte, bzw. die skalare Dichte der Baryonen. Als Quellen der Mesonenfelder werden wieder nur Protonen und Neutronen berücksichtigt. Beziehen wir die Hyperonen mit ein, so erscheinen auf der rechten Seite zusätzliche Quellterme mit den entsprechend modifizierten Vertizes. Die Dichten werden aus:

$$\begin{aligned}\rho_b &= \langle \bar{\Psi} \gamma_0 \Psi \rangle = \sum_{ss'} \int_{|k| \leq k_F} \frac{d^3 p}{(2\pi)^2} \bar{u}^*(p, s') u^*(p, s) \\ &= \frac{k_F^3}{3\pi^2}\end{aligned}\tag{1.67}$$

und

$$\begin{aligned}\rho_b^s &= \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle = \sum_{ss'} \int_{|k| \leq k_F} \frac{d^3 p}{(2\pi)^2} u^{*\dagger}(p, s') u^*(p, s) \\ &= \frac{m^*}{3\pi^2} \left[k_F E_F - m^{*2} \ln \left(\frac{k_F + E_F}{m^*} \right) \right]\end{aligned}\tag{1.68}$$

gewonnen. Wir erhalten also ein gekoppeltes Gleichungssystem, da die Mesonenfelder von den effektiven Massen und diese wiederum von den skalaren Selbstenergien abhängen. Diese errechnen sich aber gerade aus den skalaren Mesonenfeldern also auch den skalaren Dichten:

$$M^* = M - \Gamma_\sigma(\rho)\phi_\sigma - \tau\Gamma_\delta(\rho)\phi_\delta\tag{1.69}$$

Die Lösung des Problems geschieht letztlich numerisch und wurde durch Frank Hofmann [Hof01] beschrieben. Die Erweiterung auf mehr Teilchen insbesondere auch auf die Hyperonen ist dann grundsätzlich kein Problem mehr.

Als nächstes wird zur Beschreibung von unendlicher Kernmaterie der Energie-Impuls-Tensor benötigt:

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (\partial^\nu \phi_i) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}\tag{1.70}$$

Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - g^{\mu\nu} \bar{\psi} \left[\gamma_\lambda \hat{\Sigma}^{\lambda(r)} - \hat{\Sigma}^{s(r)} \right] \psi \\ &+ \sum_{i=\sigma,\delta} \left(\partial^\mu \Phi_i \partial^\nu \Phi_i - \frac{g^{\mu\nu}}{2} [\partial_\lambda \Phi_i \partial^\lambda \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2] \right) \\ &+ \sum_{\kappa=\omega,\rho} \left(\partial^\nu A_\lambda^\kappa F^{(\kappa)\lambda\mu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} [-F_{\lambda\rho}^\kappa F^{(\kappa)\lambda\rho} + m_\kappa^2 A_\lambda^{(\kappa)} A^{(\kappa)\lambda}] \right).\end{aligned}\tag{1.71}$$

Im Falle von unendlicher Kernmaterie verschwinden die Ableitungen der Mesonenfelder wieder, und wir erhalten unter Berücksichtigung der Rearrangementenergien aus der Dichteabhängigkeit der Kopplungsfunktionale:

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} = & \sum_b \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{|k| \leq k_F} \frac{d^3k}{E^*} [k^{*\mu} k^{*\nu} + k^{*\mu} (\Sigma^{\nu(0)} + \Sigma^{\nu(r)}) - k_\lambda^* \Sigma^{\lambda(r)} g^{\mu\nu}] \\
 & + g^{\mu\nu} \left[\sum_{i=\sigma,\delta} m_i^2 \Phi_i^2 - \sum_{\kappa=\omega,\rho} m_\kappa^2 A_\lambda^{(\kappa)} A^{(\kappa)\lambda} \right].
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Interessant ist jetzt die Grundzustandsenergie, die der nullten Komponente des Erwartungswerts des Energie-Impuls-Tensors entspricht. Unter Ausnutzung der sphärischen Symmetrien, welche die raumartigen Komponenten der Selbstenergien verschwinden lassen, und der Tatsache, dass kanonischer und kinetischer Impuls gleich sind ($\mathbf{k}^* = \mathbf{k}$) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \epsilon = \langle T^{00} \rangle = & 2 \sum_b \left[\int_{|k| \leq k_F} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + M_b^{*2}} + \rho_b \Sigma_b^{0(0)} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left[m_\sigma^2 \Phi_\sigma^2 + m_\delta^2 \Phi_\delta^2 - m_\omega^2 A_0^{(\omega)2} - m_\rho^2 A_0^{(\rho)2} \right] \\
 = & \sum_b \frac{1}{4} [e E_{F_b} \rho_b + M_b^* \rho_b^*] + \sum_b \frac{1}{2} \left[\rho_b \Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s \Sigma_b^{s(0)} \right].
 \end{aligned} \tag{1.73}$$

Die Rearrangementterme fallen dabei weg, was ein Anpassen der dichteabhängigen Vertizes an Dirac-Brückner-Rechnungen erlaubt.

1.2 Dichteabhängige Y-N Feldtheorie

Bisher hat sich die Betrachtung der Feldtheorie im Wesentlichen auf Protonen und Neutronen beschränkt. Im Folgenden soll die Feldtheorie um die anderen Teilchen des Spin- $\frac{1}{2}$ Oktetts erweitert werden. Dabei wird die gleiche Beschreibung verwendet wie bisher. Die Hyperonen (Y) koppeln wie die Nukleonen (N) an die Mesonenfelder. Allerdings unterscheiden sich die Meson-Hyperon-Vertizes in ihrer Stärke von den Meson-Nukleon-Vertizes. Betrachtet man die Substruktur der beteiligten Teilchen, ist das auch einleuchtend, da man davon ausgehen kann, dass das s-Quark der Hyperonen nicht an die u- und d-Quarks der ausgetauschten Mesonen koppeln. Naiv würde man also eine Abnahme auf $\frac{2}{3}$ des Wertes für NN-Wechselwirkungen erwarten. Wie die NN-Wechselwirkungen sollten die genauen dichteabhängigen Vertizes auch für die Hyperonen aus Dirac-Brückner-Rechnungen gewonnen werden. Allerdings gibt es bisher nur wenige experimentelle Daten für YN- und YY-Streuungen, die zum Beispiel in [KHL00, MSK⁺96]

Baryon	Q	S	T ₃	Y	Masse [MeV]
n	0	0	$-\frac{1}{2}$	+1	939,0
p	+1	0	$+\frac{1}{2}$	+1	938,9
Λ	0	-1	0	0	1115,7
Σ ⁻	-1	-1	-1	0	1197,4
Σ ⁰	0	-1	0	0	1192,6
Σ ⁺	+1	-1	+1	0	1189,4
Ξ ⁻	-1	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	1321,3
Ξ ⁰	0	-2	$+\frac{1}{2}$	-1	1314,9

Tabelle 1.2: Eigenschaften der Baryonen des Spin- $\frac{1}{2}$ Oktetts, mit den Quantenzahlen Q(Ladung), S (Strangeness), T₃ (Isospin) und Y=B+S (Hyperladung mit Baryonenzahl B), unterteilt nach den vier SU(3) Multipletts

diskutiert werden. In dieser Arbeit werden darum Vertizes genutzt, die mit einem semiempirischen Verfahren aus DB-Rechnungen und experimentellen Daten für Hyperkerne errechnet wurden [Hof01, Kei04]. Die wichtigsten Eigenschaften der Baryonen des Spin- $\frac{1}{2}$ Oktetts sind in Tabelle 1.2 gelistet.

1.2.1 Die erweiterte Lagrangedichte

Um die bisherige Lagrangedichte der Hadronenfeldtheorie zu erweitern, wird der Nukleonen-Spinor $\Psi_N = (\Psi_n \Psi_p)^T$ um die fehlenden Teilchen des Oktetts erweitert.

$$\Psi_F = (\Psi_N, \Psi_\Lambda, \Psi_\Sigma, \Psi_\Xi)^T \quad (1.74)$$

stellt den SU(3)_f-Flavor-Spinor dar, der sich aus den SU(3)_f-Isospin-Multipletts

$$\Psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \quad \Psi_\Lambda = \psi_\Lambda, \quad \Psi_\Sigma = \begin{pmatrix} \psi_{\Sigma^+} \\ \psi_{\Sigma^0} \\ \psi_{\Sigma^-} \end{pmatrix}, \quad \Psi_\Xi = \begin{pmatrix} \psi_{\Xi^0} \\ \psi_{\Xi^-} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

zusammensetzt. Damit erhalten wir die neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} \quad (1.76)$$

$$\mathcal{L}_B = \bar{\Psi}_F \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \tilde{M}_F \Psi_F \right] \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma,\delta} (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=\omega,\rho} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\mu\nu} - m_\kappa^2 A_\mu^{(\kappa)} A^{(\kappa)\mu} \right) \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\sigma (\Psi_F \Psi_F) \Psi_F \Phi_\sigma - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\omega (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \Psi_F A^{(\omega)\mu} + \\ & \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\delta (\Psi_F \Psi_F) \boldsymbol{\tau} \Psi_F \Phi_\delta - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\rho (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_F A^{(\rho)\mu}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Da nur unendliche Kernmaterie betrachtet werden soll, wird das Photon an dieser Stelle nicht berücksichtigt. \tilde{M} ist eine Diagonal-Matrix, welche die einzelnen Baryonenmassen enthält. Wie oben schon angesprochen, koppeln die einzelnen Baryontypen unterschiedlich stark an die verschiedenen Mesonen. Die Vertizes unterscheiden sich also für jeden Baryontyp. Wenn nur symmetrische Wechselwirkungen im Flavor-Raum zugelassen werden, so lautet der Ansatz für die Vertizes:

$$(\Gamma_i)_{BB'} = \Gamma_{iB} \delta_{BB'}. \quad (1.80)$$

Natürlich sollen auch hier die Vertizes wieder dichteabhängig sein:

$$\Gamma_{iB} = \Gamma_{iB}(\rho) \quad (1.81)$$

Wir erhalten dann analog zu Gleichung (1.39) die Dirac-Gleichung für den Flavor-Spinor:

$$\left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \tilde{\Sigma}^\mu) - (\tilde{M} - \tilde{\Sigma}^s) \right] \Psi_F = 0 \quad (1.82)$$

Wahl der Vertizes für YY-Wechselwirkungen

Für die Abhängigkeit der Vertizes von der Dichte gibt es zwei unterschiedliche Ansätze, die in der Arbeit von Frank Hofmann [Hof01] genauer beschrieben werden. Der erste wählt die Dichteabhängigkeit so, dass immer nur die Dichte der beteiligten Baryonen eingeht. Im zweiten Ansatz wird immer die Gesamtdichte berücksichtigt. Mangels Messwerten kann keiner der beiden Ansätze ausgeschlossen werden, beide haben auch ihre physikalische Berechtigung, was auf eine Kombination beider Ansätze als Ergebnis zukünftiger Forschungsarbeit schließen lässt. Im Folgenden soll der zweite Ansatz beschrieben werden, da dieser für alle Rechnungen dieser Arbeit verwendet wurde. Es gilt dann

$$R_{iY} = \frac{\Gamma_{iY}}{\Gamma_{iN}}, \quad (1.83)$$

	$R_{\sigma\Lambda,\Sigma}$	$R_{\omega\Lambda,\Sigma}$
Bonn A	0,49	0,4935
Groningen	0,49	0,5217
DD phenom.	0,49	0,5100

Tabelle 1.3: Skalierungsfaktoren der Hyperon-Meson-Vertizes aus [Hof01]

so dass die Meson-Hyperon-Vertizes aus den Vertizes für Kernmaterie bestimmt werden können:

$$\hat{\Gamma}_{i\Lambda} = R_{i\Lambda}\hat{\Gamma}_{iN}(\hat{\rho}), \quad \hat{\Gamma}_{i\Sigma} = R_{i\Sigma}\hat{\Gamma}_{iN}(\hat{\rho}), \quad \hat{\Gamma}_{i\Xi} = R_{i\Xi}\hat{\Gamma}_{iN}(\hat{\rho}) \quad (1.84)$$

Von den verschiedenen Ansätzen zur Bestimmung der Skalierungsfaktoren, die in [Hof01] verwendet wurden, sind in Tabelle 1.3 die Ergebnisse wiedergegeben. Die Ergebnisse dieser Arbeit basieren auf den Werten der Groningen-Gruppe. In [Hof01] wurden die Kopplungen für das Λ - und Σ -Teilchen als gleich stark angenommen. Für diese Arbeit wurde entsprechend der Arbeit von V.G.J. Stoks und Th.A. Rijken [SR99] stärkere Kopplungen für das Σ -Teilchen angenommen. Die Faktoren sind:

$$\frac{\Gamma_{\omega\Sigma}}{\Gamma_{\omega\Lambda}} = 1,61 \quad \text{und} \quad \frac{\Gamma_{\sigma\Sigma}}{\Gamma_{\sigma\Lambda}} = 1,18. \quad (1.85)$$

1.2.2 Zustandsgleichung für seltsame Kernmaterie

Die Berechnung der Energiedichte für seltsame Kernmaterie verläuft analog zu den Berechnungen für asymmetrische Kernmaterie. Die Diracgleichung ähnelt Gleichung 1.39. Jedes Baryon geht aber mit seiner eigenen Ruhemasse und seinen eigenen Rearrangementselbstenergien ein.

$$\left[\gamma_\mu \left(k_b - \Sigma_b^{\mu(0)} - \Sigma_b^{\mu(r)} \right) - (M_b - \Sigma_b^s) \right] u_b^*(k, s) = 0 \quad (1.86)$$

Die Energiedichte ist dann:

$$\epsilon = \sum_b \frac{1}{4} [3E_{F_b}\rho_b + m_b^*\rho_b^s] + \sum_b \frac{1}{2} [\rho_b\Sigma_b^{0(0)} + \rho_b^s\Sigma_b^{s(0)}] \quad (1.87)$$

Wobei der Index b über alle Baryonensorten läuft. Für die Berechnung der Selbstenergien werden wieder die einzelnen Mesonenfelder benötigt. Hierbei ist zu beachten, dass die unterschiedlichen Baryonenvertizes die Stärke der Quellen beeinflussen. Wir müssen also auch hier über alle beteiligten Baryonensorten

summieren:

$$m_\sigma^2 \phi_\sigma = \sum_b \Gamma_{\sigma b}(\tilde{\rho}) \rho_b^s, \quad m_\omega^2 A_0^{(\omega)} = \sum_b \Gamma_{\omega b}(\tilde{\rho}) \rho_b \quad (1.88)$$

$$m_\delta^2 \phi_\delta = \sum_b \Gamma_{\delta b}(\tilde{\rho}) \rho_b^s \tau_b, \quad m_\rho^2 A_0^{(\rho)} = \sum_b \Gamma_{\rho b}(\tilde{\rho}) \rho_b \tau_b. \quad (1.89)$$

$\tilde{\rho}$ beschreibt die Baryondichte, die je nach Modell unterschiedlich gewählt wird. Hier ist es immer die Gesamtdichte. τ_b gibt den jeweiligen Isospinoperator für jede Baryonensorte an.

1.3 Lambda-Sigma-Mischung

Bisher wurden nur Zustände betrachtet, in denen vorgegebene Dichteanteile der einbezogenen Baryonensorten erhalten blieben. Damit ist es möglich, erste Voraussagen über das Verhalten von Hyperkernen zu machen, wie das z.B. in [Hof01] geschehen ist. Es können dann auch Vorhersagen getroffen werden, ab welchen Dichten in Kernmaterie, bzw. in kompakten Objekten wie Neutronensternen welche Teilchen auftreten und welchen Anteil an der Gesamtdichte sie haben werden. Neutronensterne sind aber auch Systeme mit einer großen Isospinasymmetrie. Im Folgenden soll ein Effekt vorgestellt werden, der dafür sorgt, dass Σ^0 -Teilchen in Isospin-asy-mmetrischen Systemen schon bei wesentlich geringeren Dichten auftreten, als das aus klassischen Rechnungen erwartet würde.

1.3.1 Mischungsterme

Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist wieder die bisher verwendete Lagrangedichtefunktion. Darin waren Terme für freie Mesonen- und Baryonenfelder sowie die Wechselwirkung von Mesonen und Baryonen enthalten. Zusätzlich sollen jetzt Terme auftreten, die eine Mischung von Λ - und Σ^0 -Zuständen enthalten. Diese koppeln nur an das δ - und das ρ -Mesonenfeld, wir erhalten also einen Effekt, der nur von der Isospinasymmetrie abhängig ist. Damit wird die

Lagrangedichte zu:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{mix} \quad (1.90)$$

$$\mathcal{L}_B = \bar{\Psi}_F \left[i\gamma_\mu \partial^\mu - \tilde{M}_F \right] \Psi_F \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & \frac{1}{2} \sum_{i=\sigma,\delta} (\partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - m_i^2 \Phi_i^2) - \\ & \frac{1}{2} \sum_{\kappa=\omega,\rho} \left(\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^{(\kappa)} F^{(\kappa)\mu\nu} - m_\kappa^2 A_\mu^{(\kappa)} A^{(\kappa)\mu} \right) \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} = & \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\sigma (\Psi_F \Psi_F) \Psi_F \Phi_\sigma - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\omega (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \Psi_F A^{(\omega)\mu} + \\ & \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\delta (\Psi_F \Psi_F) \boldsymbol{\tau} \Psi_F \Phi_\delta - \bar{\Psi}_F \tilde{\Gamma}_\rho (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_F A^{(\rho)\mu} \end{aligned} \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mix} = & - \bar{\Psi}_\Lambda \Gamma_{mix(\delta)} (\Psi_F \Psi_F) \boldsymbol{\tau} \Psi_\Sigma \Phi_\delta - \bar{\Psi}_\Lambda \Gamma_{mix(\rho)} (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_\Sigma A^{(\rho)\mu} \\ & - \bar{\Psi}_\Sigma \Gamma_{mix(\delta)} (\Psi_F \Psi_F) \boldsymbol{\tau} \Psi_\Lambda \Phi_\delta - \bar{\Psi}_\Sigma \Gamma_{mix(\rho)} (\Psi_F \Psi_F) \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \Psi_\Lambda A^{(\rho)\mu} \end{aligned} \quad (1.94)$$

An den Mesonenfeldgleichungen (1.32 - 1.38) ändert sich dadurch nichts. Die Diracgleichung 1.39 erhält für die Λ - und Σ -Teilchen aber jeweils einen zusätzlichen Term:

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma_N^\mu) - (M_N - \Sigma_N^s)] \Psi_N = 0 \quad (1.95)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma_\Lambda^\mu) - (M_\Lambda - \Sigma_\Lambda^s)] \Psi_\Lambda = -\Sigma^M \Psi_\Sigma \quad (1.96)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - \Sigma_\Sigma^\mu) - (M_\Sigma - \Sigma_\Sigma^s)] \Psi_\Sigma = -\Sigma^M \Psi_\Lambda. \quad (1.97)$$

Interessant ist jetzt der Teil auf der rechten Seite bei der Dirac-Gleichung von Λ - und Σ -Teilchen (Gleichung 1.96 und 1.97). Σ^M ist die Mischungsenergie:

$$\Sigma^M = \Gamma_\delta^M(\rho) \Phi_\delta + \Gamma_\rho^M(\rho) A_0^\rho. \quad (1.98)$$

Φ_δ und A_0^ρ sind abhängig von der Dichte der beitragenden Baryonen. Im einfachsten Fall werden die Mesonenfelder von Protonen und Neutronen erzeugt. Die Anzahl an Hyperonen ist so gering, dass sie keinen Einfluss auf die Feldstärken haben. Explizit können wir auch davon ausgehen, dass nur ein Testteilchen in das Feld gesetzt wird. Unter dieser Annahme bleiben bei den Quelltermen nur die Proton- und Neutrondichten übrig und wir erhalten:

$$\Sigma^M = \Sigma^{M^s} + \Sigma^{M^v} \quad (1.99)$$

$$\Sigma^{M^s} = \frac{\Gamma_\delta^M}{\Gamma_\delta} \left(\frac{\Gamma_\delta}{m_\delta} \right)^2 (\rho_p^s - \rho_n^s) \quad (1.100)$$

$$\Sigma^{M^v} = \frac{\Gamma_\rho^M}{\Gamma_\rho} \left(\frac{\Gamma_\rho}{m_\rho} \right)^2 (\rho_n - \rho_p) \quad (1.101)$$

Hier ist zu sehen, dass das δ -Feld mit einem anderen Vorzeichen eingeht als das ρ -Feld. Die Verhältnisse $\frac{\Gamma_\delta^M}{\Gamma_\delta}$ und $\frac{\Gamma_\rho^M}{\Gamma_\rho}$ sind frei wählbar, so lange keine Messdaten vorliegen, welche die Stärke der Kopplung festlegen.

1.3.2 Lösung des Eigenwertproblems

Der nächste Schritt besteht in der Lösung eines Eigenwertproblems. Gleichung 1.96 und 1.97 bilden ein gekoppeltes Gleichungssystem, dessen Eigenwerte gesucht werden. Die Energien beschreiben dann einen neuen Zustand, der sich aus verschiedenen Flavor-Eigenzuständen zusammensetzt. Wir schreiben:

$$\begin{pmatrix} U_\Lambda^- - E & \vec{\sigma}\vec{q} & \Sigma^M & 0 \\ \vec{\sigma}\vec{q} & U_\Lambda^+ - E & 0 & \Sigma^M \\ \Sigma^M & 0 & U_\Sigma^- - E & \vec{\sigma}\vec{q} \\ 0 & \Sigma^M & \vec{\sigma}\vec{q} & U_\Sigma^+ - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\Lambda \\ g_\Lambda \\ f_\Sigma \\ g_\Sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (1.102)$$

$\vec{\sigma}$ sind die 2×2 -Pauli-Spin-Matrizen. Außerdem muss man die Antiteilchenzustände berücksichtigen. Wir erhalten also ein 8×8 -Eigenwertproblem, das gelöst werden muss. In unendlicher Kernmaterie können wir den Impuls in z-Richtung wählen. Liegt kein äußeres Feld an, so vereinfacht sich das Problem zu einem 4×4 -Problem mit vier unabhängigen Eigenwerten. Dieses ist jedoch analytisch nicht mehr lösbar. H. Müller hat daher in [Mü99] $M_\Lambda^* = M_\Sigma^* = M^*$ gesetzt, was das algebraische System stark vereinfacht. Ziel dieser Arbeit ist allerdings die vollständige Lösung des kompletten 8×8 Eigenwertproblems. Mit Hilfe eines numerischen Lösungsverfahrens ist das auch gelungen. Die erreichten Resultate werden im Anschluss an die Ergebnisse für Rechnungen mit seltsamer Kernmaterie vorgestellt.

2 Diskussion der Ergebnisse

2.1 Kern- und Hyperkernmaterie

2.1.1 Berechnung der Kopplungskonstanten

Bevor die Selbstenergien der einzelnen Baryonenfelder bestimmt werden konnten, die dann in alle weiteren Rechnungen eingehen, ist es nötig die Kopplungsstärken für den verwendeten Dichtebereich zu bestimmen. Die Berechnung erfolgt gemäß Gleichung 1.58 und 1.59. Der verwendete Parametersatz befindet sich im Anhang. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.1 illustriert. An der Stelle ist noch zu beachten, dass die Feldstärke der Mesonenfelder ihren Bewegungsgleichungen entsprechend proportional Γ_i/m_i^2 ist. Auch ist die Feldstärke von σ - und ω -Meson proportional ρ^s bzw. ρ , während die Feldstärke bei δ - und ρ -Meson proportional ρ_3^s bzw. ρ_3 ist. Abbildung 2.1 alleine gibt also noch keine Auskunft über die tatsächlichen Feldstärken.

Für die Λ - und Σ -Kopplungen ergibt sich der gleiche dichteabhängige Verlauf der Kopplungsfunktionale, allerdings sind sie entsprechend den Skalierungsfaktoren in Tabelle 1.3 reduziert.

2.1.2 Kernmaterie

Sobald die Kopplungsfunktionale bestimmt sind, können die skalaren und vektoriellen Selbstenergien bestimmt werden. Diese ergeben zusammen mit der kinetischen Energie und der Ruhemasse dann die Energie des Systems am entsprechenden Dichtepunkt. Wird dieser Wert durch die Gesamtdichte geteilt, erhalten wir genau die Energie eines Teilchens. Wird von dieser Energie die Ruhemasse abgezogen, kann eine Aussage darüber gemacht werden, ob das Teilchen gebunden ist. Dies ist der Fall, wenn die Energie negativ ist. Der Betrag entspricht dann gerade der Bindungsenergie pro Teilchen. Die Energie je Teilchen abzüglich der Ruhemasse ist in Abbildung 2.2 für verschiedene Mischungsverhältnisse aus Protonen und Neutronen graphisch dargestellt. Es ist leicht zu erkennen, dass sich der Gleichgewichtspunkt, also das Minimum der jeweiligen Kurve, bei zunehmender Asymmetrie des Systems hin zu kleineren Dichten verschiebt. Gleichzeitig nimmt die Bindungsenergie ab. Für reine Neutronenmaterie kann kein gebundener Zustand mehr gefunden werden. Der Gleichgewichtspunkt ist immer auch der

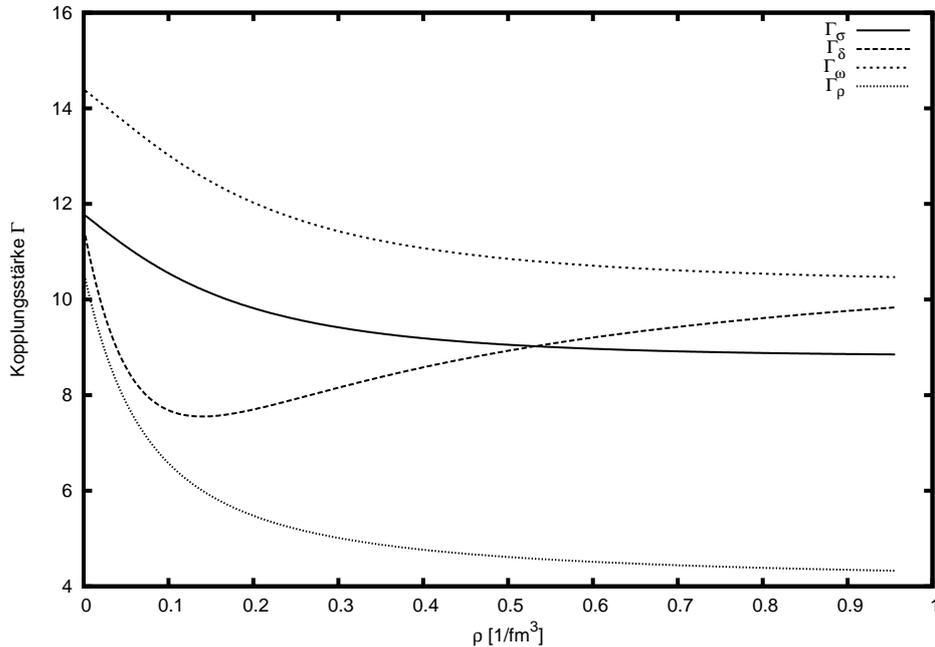


Abbildung 2.1: Berechnung der Kopplungsfunktionale der verschiedenen Mesonen

energetisch günstigste Zustand, den das System einnehmen kann. Für symmetrische Kernmaterie kommt dann also gerade ρ_0 die normale Kerndichte raus. Diese Rechnungen wurden bereits in [SW68] durchgeführt. Damals wurden gerade die Kopplungskonstanten an die Tiefe des Potentials und den Gleichgewichtspunkt, also die normale Kerndichte angepasst.

2.1.3 Λ -Materie

Die gleichen Rechnungen sind dann auch für Hyperkernmaterie möglich. Dazu wird ein fester Anteil an Λ - oder Σ -Teilchen vorgegeben und in die Berechnungen der Feldstärke mit einbezogen. Die Rechnungen beziehen sich auf den Fall symmetrischer Kernmaterie mit einer festen Beimischung von bis zu 40% Λ -Materie. Die reduzierte Kopplungsstärke für die Meson-Hyperon-Wechselwirkung sollte dabei die Feldstärken reduzieren. Wie in Abbildung 2.3 gesehen werden kann, verringert sich dadurch auch die Bindungsenergie. Gleichzeitig verschiebt sich der Gleichgewichtspunkt bei steigendem Hyperonanteil zu größeren Dichten.

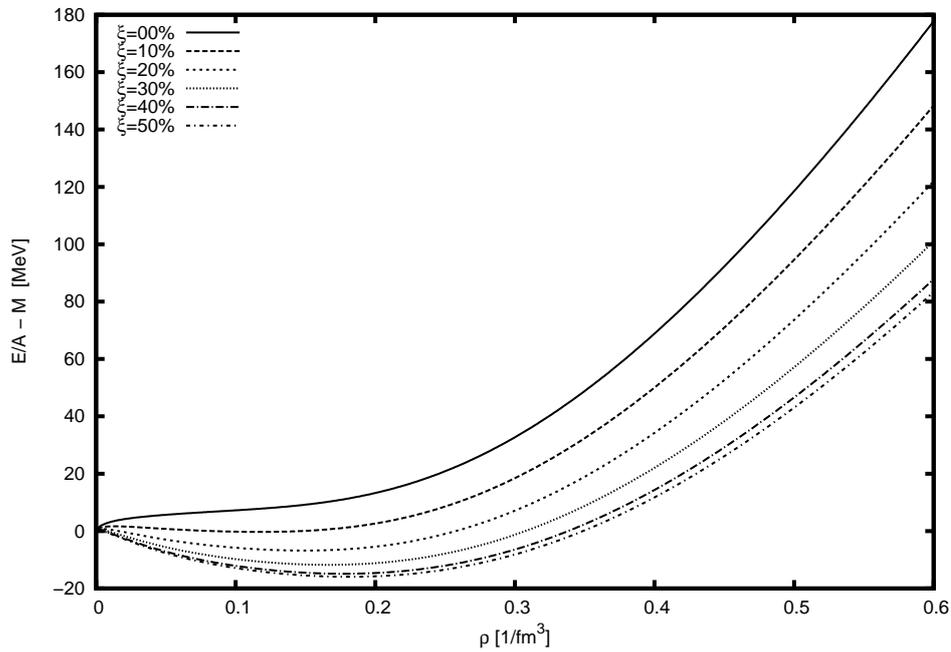


Abbildung 2.2: Zustandsgleichung für verschiedene Asymmetrien

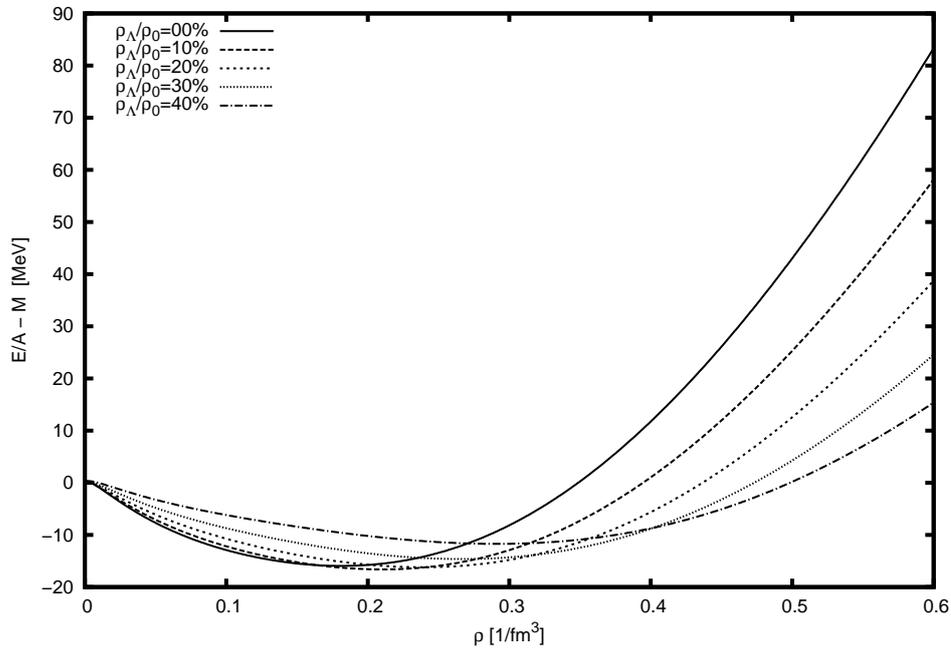


Abbildung 2.3: Zustandsgleichung für verschiedene Λ -Anteile in symmetrischer Kernmaterie

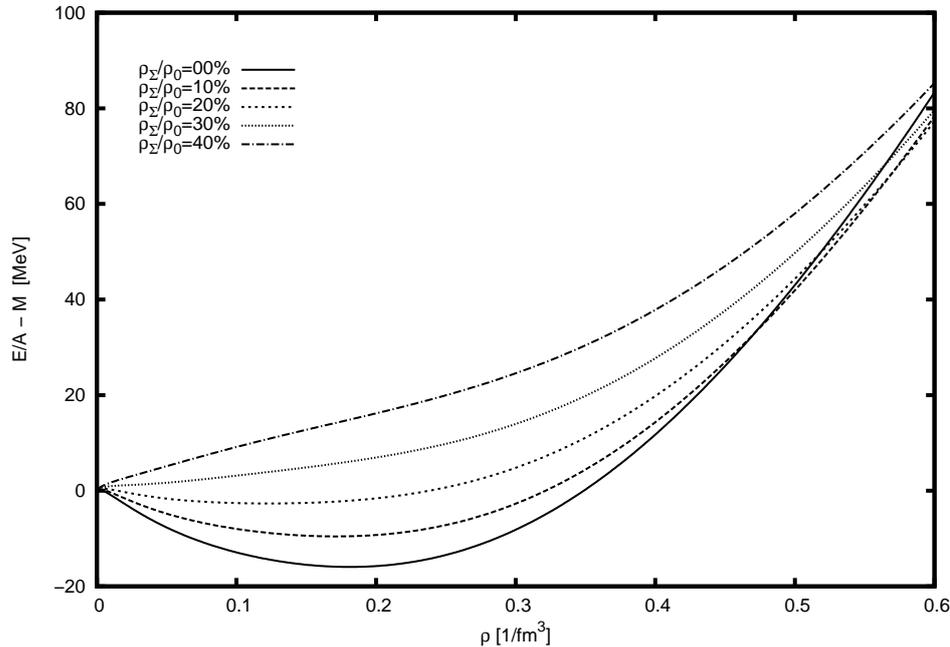


Abbildung 2.4: Zustandsgleichung für verschiedene Σ^0 -Anteile in symmetrischer Kernmaterie

2.1.4 Σ^0 -Materie

Grundsätzlich kann jetzt natürlich auch die Zustandsgleichung für Σ -Materie bzw. für eine Beimischung von Σ -Teilchen in Kernmaterie berechnet werden. Dies ist in Abbildung 2.4 geschehen. Durch die unterschiedlich starken Kopplungen von Λ - und Σ -Teilchen unterscheiden sich die Zustandsgleichungen erheblich, wie in Abbildung 2.5 nochmal deutlich zu sehen ist. Bei ersten Rechnungen wurde der Unterschied bei den Kopplungen noch vernachlässigt, so dass der Unterschied nur aus dem gekoppelten Gleichungssystem zur Berechnung der skalaren Dichte in Gleichung 1.68 und der unterschiedlichen Ruhemasse der beiden Teilchen resultierte. Die Zustandsgleichungen waren sich dann sehr ähnlich, was auch Auswirkungen auf die Stärke des Mischungseffekts hatte, wie später noch zu sehen ist.

2.2 Lambda-Sigma-Mischung

Nachdem wir Kern- und Hyperkernmaterie betrachtet haben, soll jetzt das Λ - Σ -Mischung näher untersucht werden. Dazu soll zunächst das Mischungspotential untersucht werden, dessen Eigenschaften dann Grundlage für Effekte sind, die im Anschluss untersucht werden sollen.

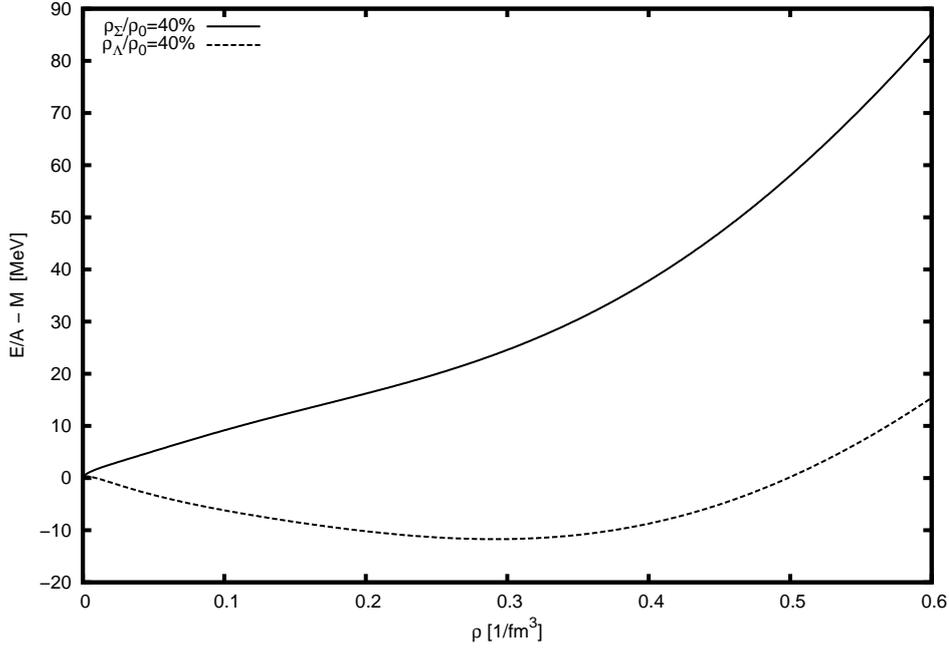


Abbildung 2.5: Vergleich der Zustandsgleichungen für einen Λ - und Σ -Anteil von jeweils 40% in symmetrischer Kernmaterie

2.2.1 Mischungspotential

Das Mischungspotential ist aufgeteilt in einen skalaren Anteil vom δ -Meson und einen vektoriellen Anteil vom ρ -Meson (siehe Gleichung 1.99). Der dichteabhängige Verlauf der beiden Anteile ist in Abbildung 2.6 zu sehen. Bemerkenswert ist dabei, dass der skalare Anteil zunächst einen größeren Betrag als der vektorielle Anteil hat, aber ein negatives Vorzeichen besitzt. Bei kleinen Dichten ist also auch die Summe aus beiden Anteilen zunächst negativ. Erst ab einer Dichte von $0,13/fm^3$ überwiegt der vektorielle Anteil und das Mischungspotential wird insgesamt größer als Null. Für größere Dichten überwiegt der vektorielle Anteil dann deutlich und der skalare Anteil führt nur noch zu einer Reduktion des absoluten Betrags. Die obere Kurve, welche den vektoriellen Beitrag zeigt, entspricht somit Modellen, die das δ -Meson nicht berücksichtigen. Die absoluten Zahlen sind natürlich abhängig von der Asymmetrie des Systems und von der Wahl der relativen Kopplungsstärke $\Gamma^{mix}/\Gamma_{\rho,\delta}$. Für Abbildung 2.6 wurde reine Neutronenmaterie gewählt und die relative Kopplungsstärke gleich 1 gesetzt. Bei normalen Kerndichten erreicht das Mischungspotential dann einen Wert von ca. 1,5 MeV. Ohne Berücksichtigung des δ -Mesons hätte es schon einen Wert von 9 MeV, welcher mit δ -Meson erst beim 1,7fachen der normalen Kerndichte erreicht wird. Wie die genauen Auswirkungen auf Eigenwerte und Wahrscheinlichkeits-

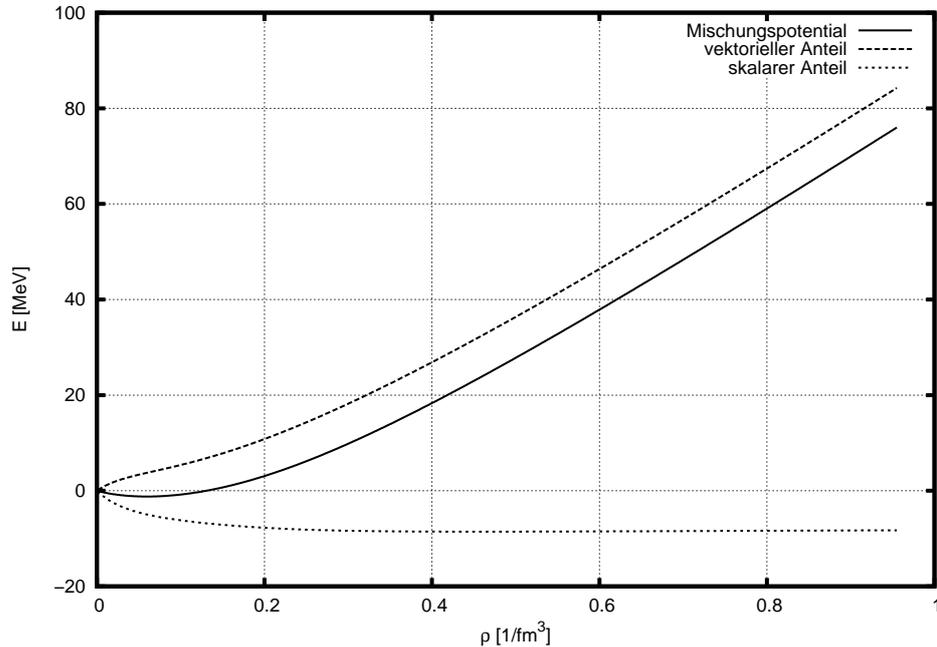


Abbildung 2.6: Zusammensetzung des Mischungspotentials

samplituden aussehen, soll aber gesondert betrachtet werden.

2.2.2 Eigenwerte

Nach der Berechnung des Mischungspotentials kann man das Eigenwertproblem aus Gleichung 1.102 lösen. Dafür wurde zum einen der ungestörte Fall betrachtet, also wenn kein Mischungseffekt auftritt, zum anderen der Fall mit Mischungseffekt. Dazu wurde für Abbildung 2.7 jeweils reine Neutronenmaterie gewählt und die relative Kopplungsstärke zwischen 0 und 1 variiert. Wie aus der Betrachtung des Mischungspotentials heraus zu erwarten war, ist bis zu Dichten $3/\text{fm}^3$ kaum eine Veränderung zu sehen. Erst bei größeren Dichten werden die Eigenwerte für den Λ - bzw. Σ -artigen Zustand deutlich verschoben. In Abbildung 2.8 ist die Stärke der Verschiebung noch einmal verdeutlicht.

2.2.3 Wahrscheinlichkeitsamplituden

Interessanter als die Verschiebung der Energieeigenwerte ist das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsamplitude. Das Betragsquadrat der Wahrscheinlichkeitsamplitude entspricht der Wahrscheinlichkeit, das entsprechende Teilchen zu finden. Im ungestörten Fall besteht der Λ -artige Zustand auch nur aus Λ -Teilchen. Betrachtet man jetzt den gestörten Fall, so findet man im Λ -artigen Massenzustand

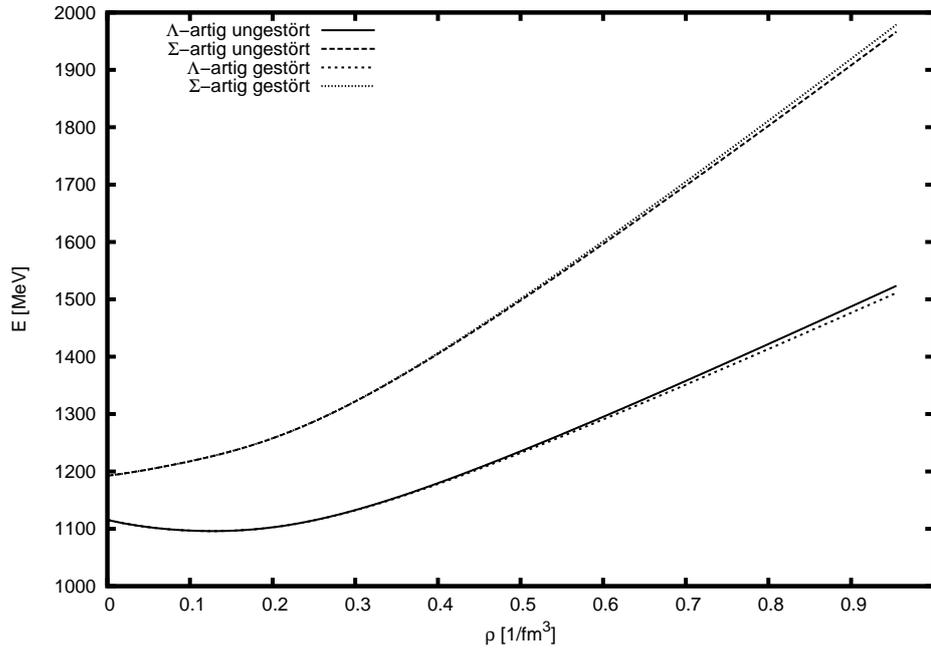


Abbildung 2.7: Entwicklung der Eigenwerte für den gestörten und ungestörten Fall

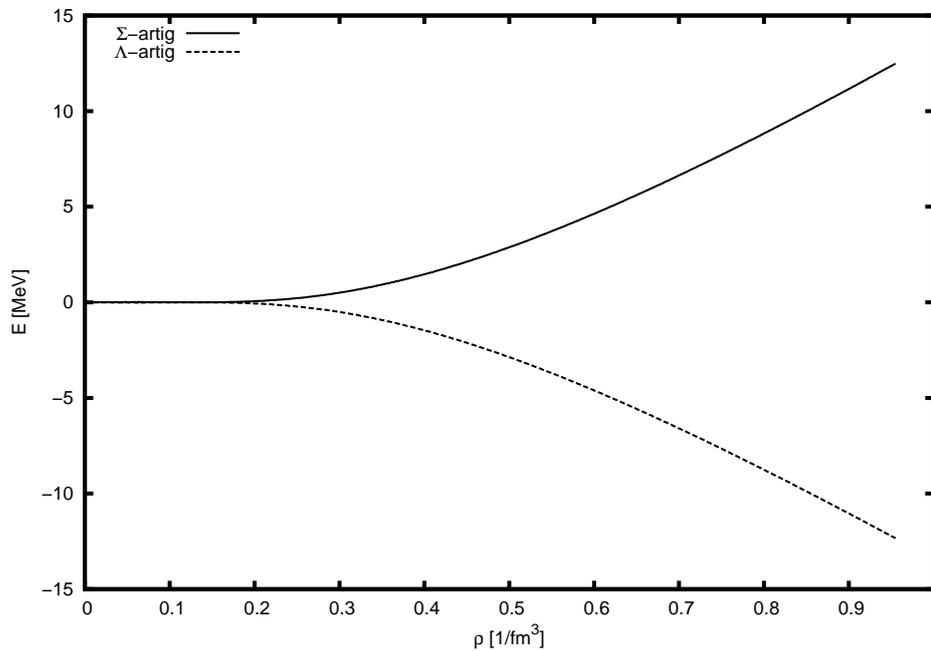


Abbildung 2.8: Differenz der Eigenwerte von ungestörtem und gestörtem Fall für den Λ - und Σ -artigen Zustand.

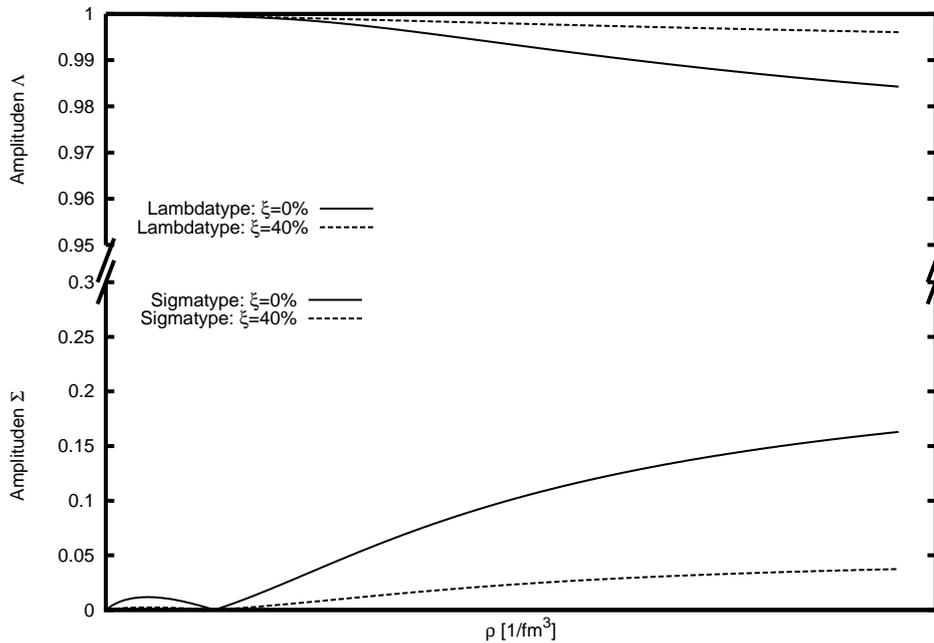


Abbildung 2.9: Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für verschiedene Asymmetrien ξ

auch einen Anteil an Σ -Teilchen. Dargestellt ist dieser Sachverhalt in Abbildung 2.9 und 2.10. Dabei wurde in Abbildung 2.9 die Asymmetrie des Systems verändert. Zuerst wurde reine Neutronenmaterie gewählt und dann ein Protonenanteil von 40%, wie er bei schweren Kernen wie Blei vorkommt. Auch hier ist zu sehen, dass bei kleinen Dichten nur ein kleiner Effekt auftritt. Für die Asymmetrie von 40% verschwindet er fast komplett, was natürlich auch heißt, dass man bei normalen Kerndichten und Asymmetrien kaum einen Mischungseffekt feststellen wird. Bei Systemen mit größerer Asymmetrie und größeren Dichten tritt hingegen ein deutlicher Effekt auf. Neben der Asymmetrie des Systems kann natürlich auch die relative Kopplungsstärke variiert werden, was in Abbildung 2.10 geschehen ist. Dafür wurde hier wieder reine Neutronenmaterie verwendet, da dort der Effekt insgesamt größer ist. Da das Mischungspotential proportional zur Kopplungsstärke ist, ist klar, dass alle Effekte, also sowohl die Verschiebung der Energieeigenwerte, als auch die Menge der Σ -Beimischung mit der relativen Kopplungsstärke steigt. Das Mischungspotential steigt aber auch mit zunehmender Dichte, so dass die relative Kopplungsstärke insbesondere dafür verantwortlich ist, ab welchen Dichten man Mischungseffekte beobachten kann. Da die Steigung der Kurve für den Σ -Anteil bei kleinen Dichten relativ groß ist und für zunehmende Dichten abnimmt, wird der Effekt noch verstärkt.

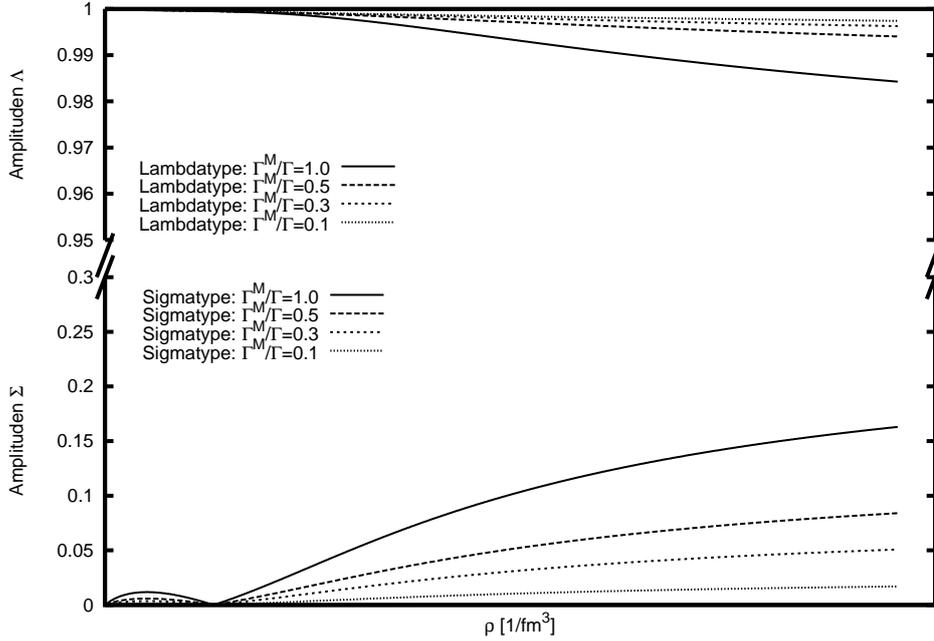


Abbildung 2.10: Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsamplituden für verschiedene Skalierungen der Mischungskopplung (Γ^M)

2.2.4 Mischungswinkel

Aus den Wahrscheinlichkeitsamplituden lässt sich ein Mischungswinkel ϕ ableiten, der wie folgt definiert ist:

$$\tan \phi = \frac{\chi^\Sigma}{\chi^\Lambda}. \quad (2.1)$$

Das Ergebnis ist in Abbildung 2.11 zu sehen. Dafür wurde wieder die Asymmetrie des Systems variiert. Wie aus Abbildung 2.9 ableitbar, bleibt der Σ -Anteil zunächst gering und nimmt erst mit größeren Dichten zu. In Abbildung 2.10 wurde der gleiche Plot noch einmal für verschiedene Kopplungsstärken erstellt und zeigt letztlich das identische Verhalten.

2.2.5 Einfluss des δ -Mesons

In diesem Abschnitt soll der Einfluss des δ -Mesons genauer untersucht werden. Dieses ist verantwortlich für den skalaren Anteil des Isektorfeldes. In älteren Arbeiten wurde dieser Anteil nicht untersucht und stellt damit eine wesentliche Neuerung dar. In Abbildung 2.13 wurde nochmal der Energieeigenwert für den Λ -artigen Zustand geplottet. Neben dem ungestörten Fall wurde wieder der gestörte

2 Diskussion der Ergebnisse

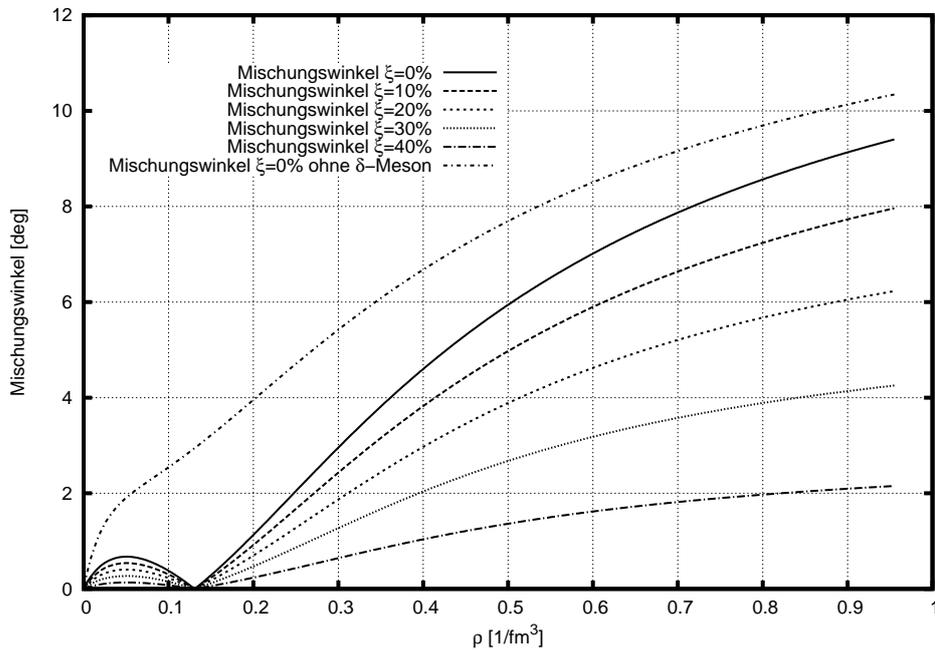


Abbildung 2.11: Mischungswinkel für verschiedene Asymmetrien

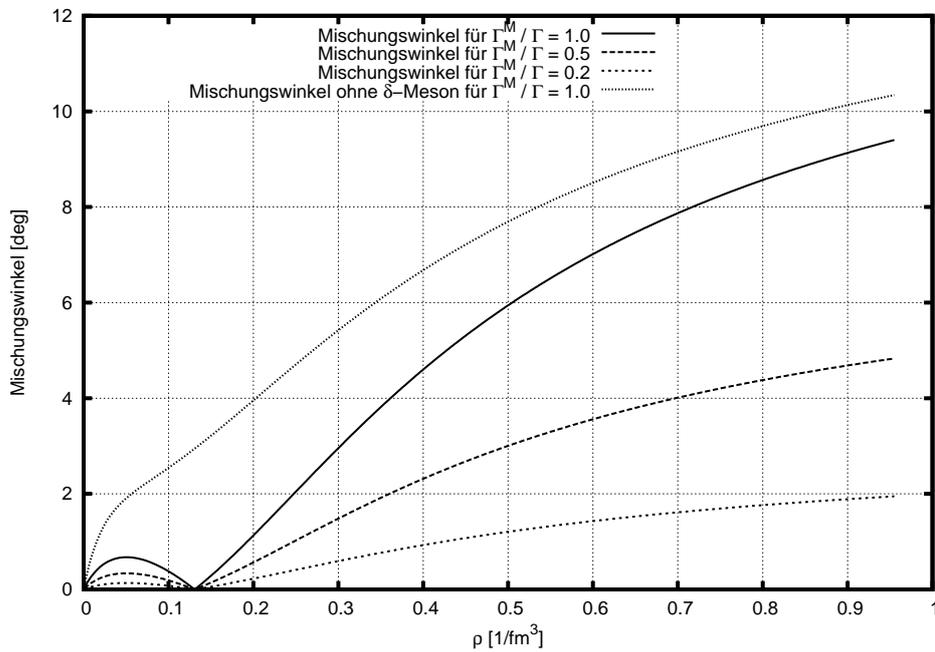
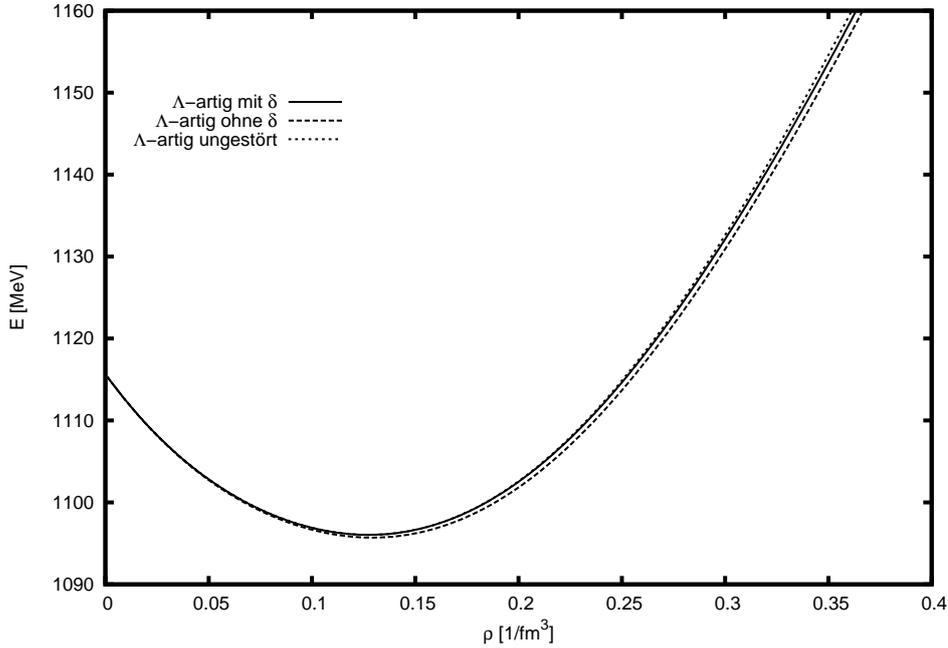


Abbildung 2.12: Mischungswinkel für verschiedene Skalierungsfaktoren der Kopplung

Abbildung 2.13: Vergleich der Eigenwerte mit und ohne δ -Meson

Fall abgebildet, wobei erneut reine Neutronenmaterie gewählt und die relative Kopplungsstärke auf 1 gesetzt wurde. Zusätzlich wurde diesmal aber auch der Fall ohne δ -Meson abgebildet. Bei genauer Betrachtung erkennt man, dass der Eigenwert bei Vernachlässigung des δ -Mesons schon bei sehr geringen Kerndichten verschoben wird. Um dies zu verdeutlichen ist in Abbildung 2.14 die Stärke der Verschiebung als Differenz von gestörtem und ungestörtem Fall zu sehen. Ohne δ -Meson findet schon bei kleinen Dichten eine Verschiebung statt. Bei großen Dichten bleibt zwar die Reduktion des Mischungseffekts durch das δ -Meson erhalten, allerdings verliert sie in Relation zur Gesamtverschiebung an Bedeutung. Die Auswirkungen der stärkeren Verschiebung schon bei kleinen Dichten sind bei der Betrachtung der Wahrscheinlichkeitsamplituden zu sehen. Wie in Abbildung 2.15 zu sehen ist, steigt die Wahrscheinlichkeitsamplitude für das Σ -Teilchen bei Vernachlässigung des δ -Mesons gleich an, während sie mit δ -Meson erst schwächer ansteigt, dann für den Nullpunkt der Mischungsenergie wieder auf Null absinkt. Danach steigt sie wieder an und nähert sich bei großen Dichten schließlich der Kurve ohne δ -Meson an. Das Resultat ist in den Abbildungen 2.11 und 2.12 zu sehen. Dort wurde der Mischungswinkel auch einmal ohne das δ -Meson geplottet. Bereits bei normalen Kerndichten lässt sich dann eine Beimischung von Σ -Teilchen im Λ -Zustand beobachten. Die Wahl der theoretischen Beschreibung hat also ganz erheblichen Einfluss darauf, ob man die Mischung von Λ - und Σ^0 -Teilchen bei Experimenten voraussagen kann. Wie die bisherigen Rechnungen

2 Diskussion der Ergebnisse

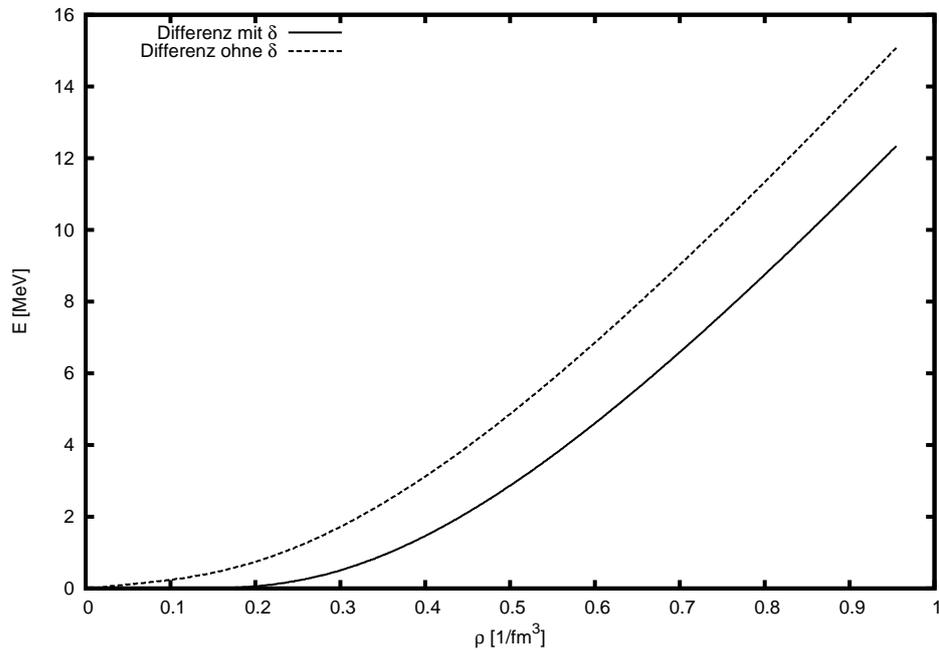


Abbildung 2.14: Differenz zwischen gestörtem und ungestörtem Zustand mit und ohne δ -Meson

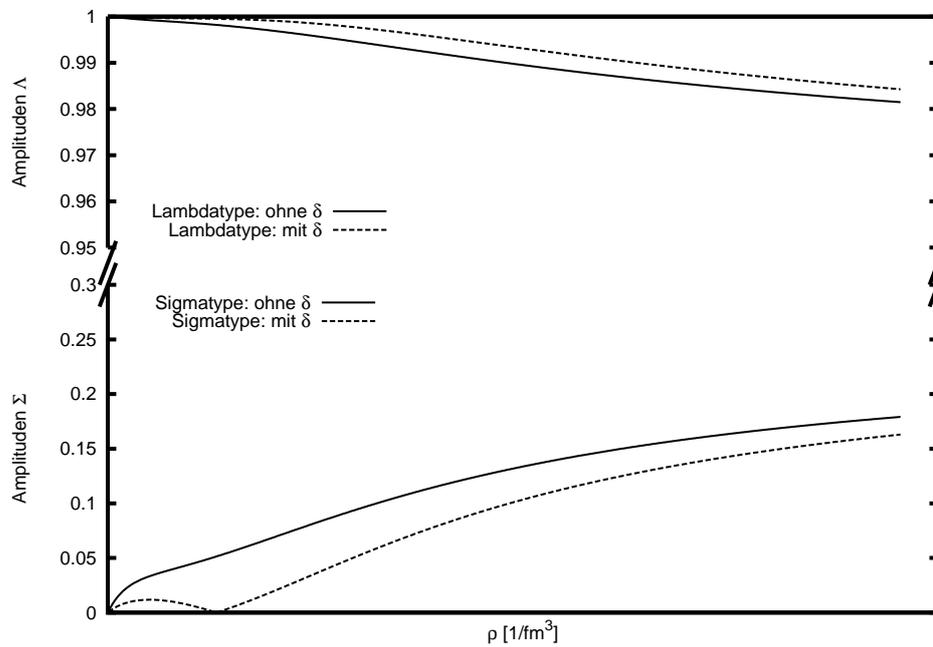


Abbildung 2.15: Vergleich der Amplituden mit und ohne δ -Meson

gezeigt haben, reduziert die Berücksichtigung des δ -Mesons die Wahrscheinlichkeit dafür bei normalen Kerndichten. Allerdings wurde in den Rechnungen auch immer davon ausgegangen, dass der Skalierungsfaktor für die Kopplungsstärke für beide Anteile der Mischungsenergie gleich ist:

$$\frac{\Gamma_{\delta}^{mix}}{\Gamma_{\delta}} = \frac{\Gamma_{\rho}^{mix}}{\Gamma_{\rho}}. \quad (2.2)$$

Um eine bessere Vorhersage darüber machen zu können, bei welchen Dichten mit welchen Mischungen zu rechnen ist, werden mehr experimentelle Daten benötigt, mit denen die einzelnen Kopplungsstärken bestimmt werden können.

2.2.6 Einfluss des Massenunterschieds

Als Grenzfall der SU(3) Flavorsymmetrie werden die Massenunterschiede zwischen den Teilchen des Baryonenoktetts vernachlässigt. Lässt man den Massenunterschied von ca 70MeV zwischen Λ - und Σ^0 -Teilchen außer Acht vereinfacht sich auch die Lösung des Eigenwertproblems. Diesen Ansatz hat H. Müller in [Mü99] verfolgt. Er hat dazu eine ähnliche Lagrangedichtefunktion benutzt, mit $V_m = g_{\Lambda\Sigma}^{\rho} \rho^0$ und daraus für die gekoppelten Dirac-Gleichungen folgendes Ergebnis erhalten:

$$(i\cancel{\partial} - \gamma^0 V_{\Lambda}^0 - M_{\Lambda}^*) \Psi_{\Lambda} = \gamma^0 V_m^0 \Psi_{\Sigma^0} \quad (2.3)$$

$$(i\cancel{\partial} - \gamma^0 V_{\Sigma^0}^0 - M_{\Sigma}^*) \Psi_{\Sigma^0} = \gamma^0 V_m^0 \Psi_{\Lambda} \quad (2.4)$$

Wird jetzt $M_{\Lambda}^* = M_{\Sigma}^* = M^*$ gesetzt, kann die Lagrangefunktion durch folgende Substitution diagonalisiert werden:

$$\Psi_{\Lambda} = \cos(\alpha) \Psi_1 + \sin(\alpha) \Psi_2 \quad \text{und} \quad (2.5)$$

$$\Psi_{\Sigma} = -\sin(\alpha) \Psi_1 + \cos(\alpha) \Psi_2. \quad (2.6)$$

Für den Mischungswinkel erhält man dann

$$\tan^2(\alpha) - \left(\frac{V_{\Lambda}^0 - V_{\Sigma^0}^0}{V_m^0} \right) \tan(\alpha) - 1 = 0 \quad (2.7)$$

und für die substituierten Potentiale

$$V_1^0 = \cos^2(\alpha) V_{\Lambda}^0 + \sin^2(\alpha) V_{\Sigma^0}^0 - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) V_m^0 \quad (2.8)$$

$$V_2^0 = \sin^2(\alpha) V_{\Lambda}^0 + \cos^2(\alpha) V_{\Sigma^0}^0 + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) V_m^0. \quad (2.9)$$

Damit können nun die Energieeigenwerte errechnet werden:

$$E_1^{\pm} = V_1^0 \pm \sqrt{\underline{p}^2 + M^{*2}} \quad E_2^{\pm} = V_2^0 \pm \sqrt{\underline{p}^2 + M^{*2}}. \quad (2.10)$$

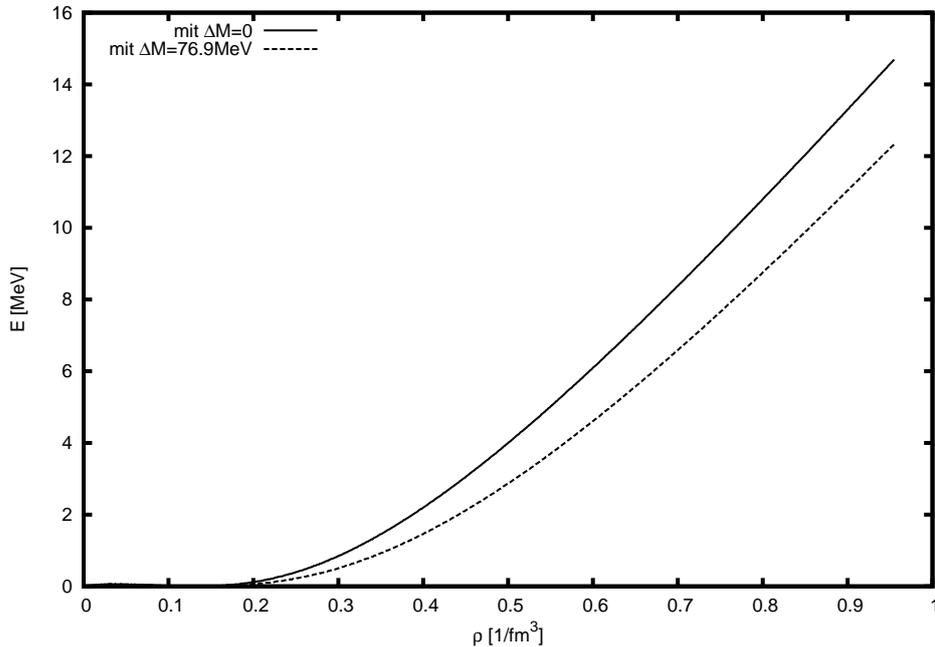


Abbildung 2.16: Der Einfluss des Massenunterschieds auf die Verschiebung der Eigenwerte

Dieser Ansatz ist natürlich sehr elegant, da man die Eigenwerte analytisch berechnen und in der Lösung auch den Einfluss jeder einzelnen Größe erkennen kann. Allerdings stellt sich die Frage, welchen Einfluss die Wahl gleicher Massen hat. Dazu wurden in dem für diese Arbeit verwendeten Programm die Massen entsprechend verändert und neue Lösungen des Eigenwertproblems berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.16 zu sehen. Hierzu wurden wieder die Differenzen aus dem ungestörten und dem jeweiligen gestörten Eigenwert geplottet. Der Unterschied zu unserem Ansatz mit unterschiedlichen Massen ist doch sehr deutlich. Bei kleinen Dichten ist in diesem Fall schon eine leichte Verschiebung der Eigenwerte sichtbar. Dabei ist zu beachten, dass für die Untersuchung des Einflusses des Massenunterschieds das δ -Meson in den Rechnungen enthalten ist. Wenn nur der vektorielle Anteil der Mischungsenergie verwendet wird, so wie in [Mü99], ist mit einem noch größeren Unterschied zu rechnen. Auch die hier nicht abgebildeten Wahrscheinlichkeitsamplituden werden dann schon bei kleinen Dichten einen größeren Σ^0 -Anteil ergeben.

2.2.7 Einfluss der Kopplungsstärken

Wie oben diskutiert, wurde zu Beginn der Rechnungen der Unterschied in der Stärke der Kopplungen von Λ - und Σ -Teilchen vernachlässigt. Folglich unterschiede-

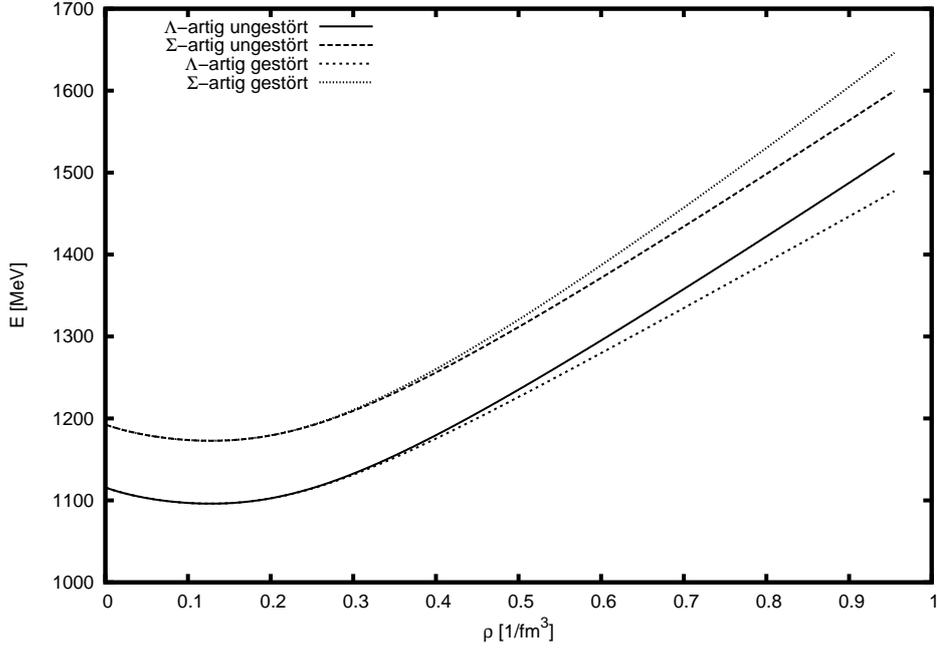


Abbildung 2.17: Verhalten der Eigenwerte bei gleichen Kopplungsstärken

den sich die Zustandsgleichungen und auch die Potentiale in der Mischungsmatrix nur wenig. Dies hatte auch Auswirkungen auf die Stärke des Mischungseffekts. So ist der Mischungswinkel durch

$$\tan 2\varphi = \frac{2V_m}{\Delta V + \Delta M} \quad (2.11)$$

beschrieben. Durch die unterschiedlich starken Kopplungen ist bei steigender Dichte auch der Potentialunterschied gestiegen, wodurch der Mischungswinkel weniger stark gewachsen ist als in dem einfacheren Fall, wo der Potentialunterschied immer Null war. Dies ist auch in den Abbildungen 2.17 und 2.18 zu sehen. Das bedeutet natürlich, dass neue Erkenntnisse über die Unterschiede der Kopplungsfunktionale direkten Einfluss auf die hier diskutierten Mischungseffekte hätten.

2.2.8 Vergleich mit dem nichtrelativistischen Ansatz

Zuletzt soll noch ein nichtrelativistischer Ansatz, der im Anhang beschrieben ist, betrachtet werden. Dieser stammt aus [Len08] und wurde für diese Arbeit zur Verfügung gestellt. Zunächst werden auch hier die ungestörten Eigenwerte berechnet. Dazu wurden Potentiale genutzt, die sich aus realistischen Wechselwirkungen ergeben. Dann wurden die verschobenen Eigenwerte für verschiedene

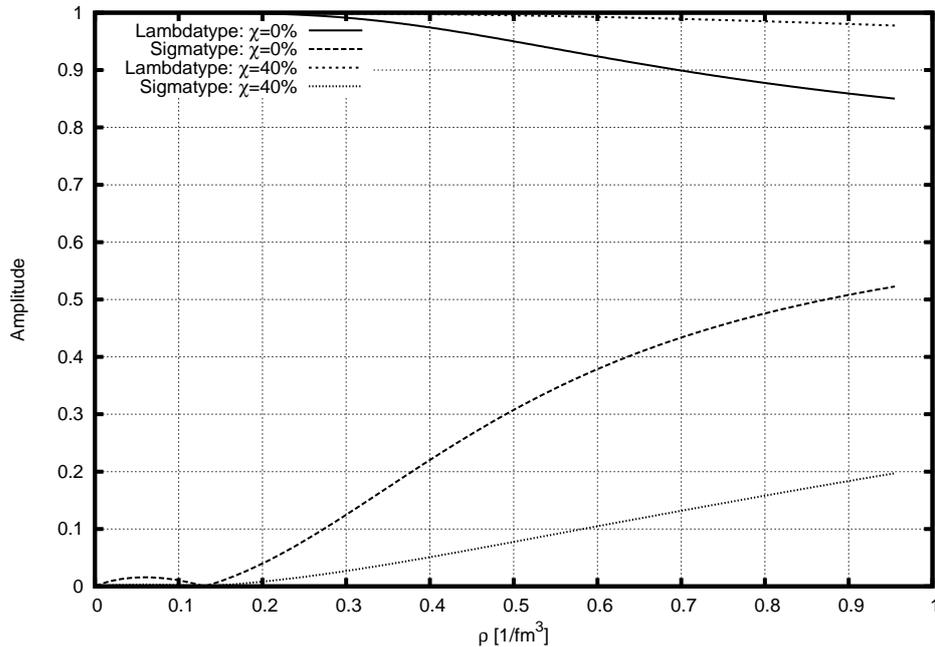


Abbildung 2.18: Verhalten der Wahrscheinlichkeitsamplituden bei gleichen Kopplungsstärken

Asymmetrien berechnet und in Abbildung 2.19 geplottet. Dabei wurden die Ruhmassen vom zugehörigen Massenzustand abgezogen. Bereits hier ist zu sehen, dass ein wesentlich stärkerer Mischungseffekt vorliegt als in den relativistischen Berechnungen. Vor allem bei kleinen Dichten ist der Unterschied groß. In Abbildung 2.20 sind die errechneten Wahrscheinlichkeitsamplituden zu sehen. Wie zu erwarten war, sind die Wahrscheinlichkeitsamplituden schon bei kleinen Dichten recht groß, was sich im direkten Vergleich in Abbildung 2.21 bestätigt. Hier wurden für den relativistischen Ansatz die Werte für gleiche Kopplungskonstanten gewählt, da auch das Potential im nichtrelativistischen Ansatz nahezu gleich ist. Auch das δ -Meson wurde nicht berücksichtigt. Trotzdem zeigt sich gerade bei kleinen Dichten ein großer Unterschied bezüglich der Wahrscheinlichkeitsamplituden, der sich erst bei sehr großen Dichten verringert.

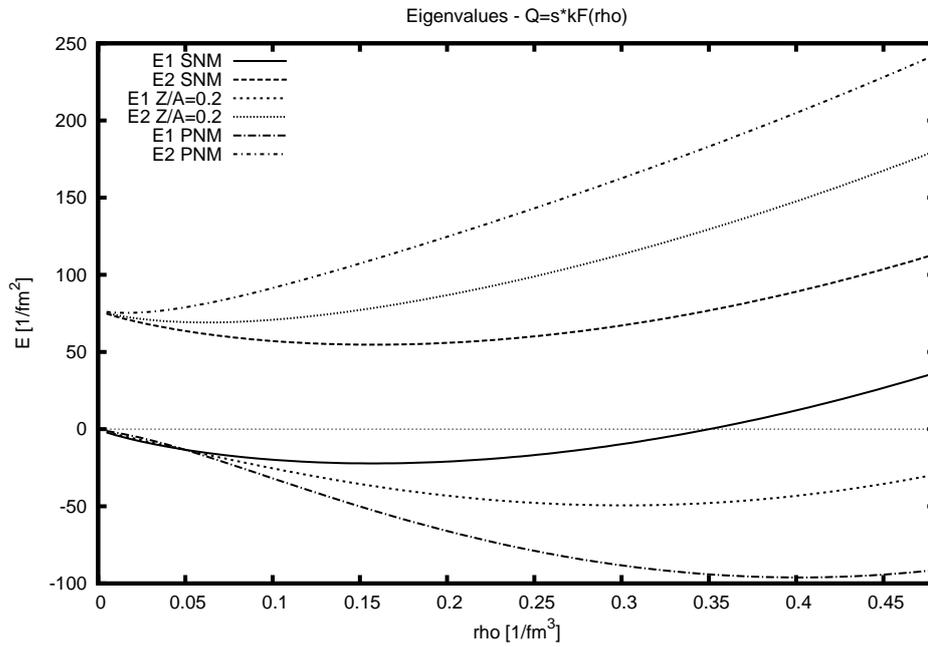


Abbildung 2.19: Eigenwerte im nichtrelativistischen Ansatz

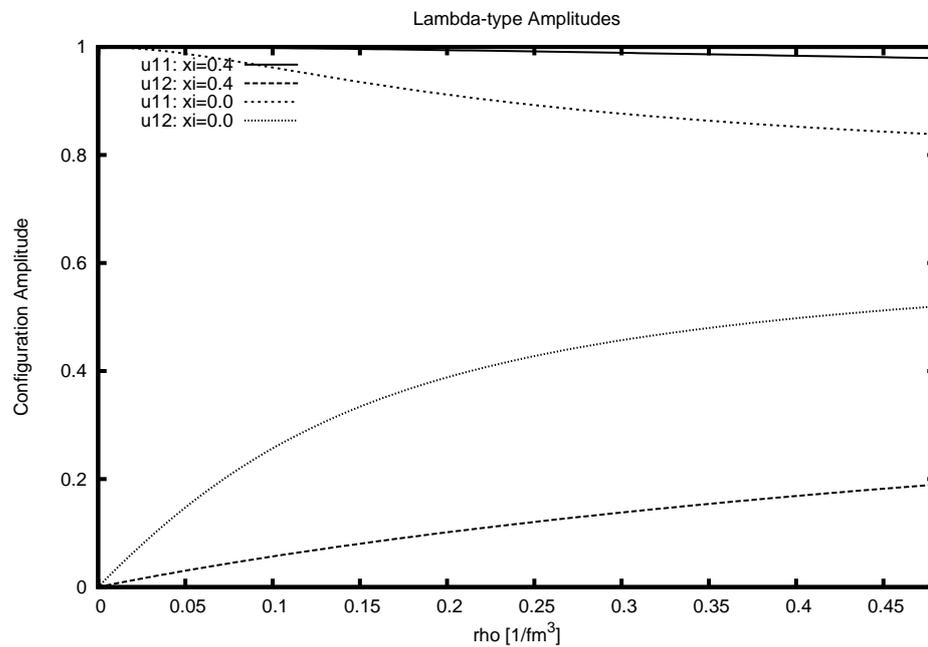


Abbildung 2.20: Amplituden des Λ -artigen Zustands im nichtrelativistischen Ansatz

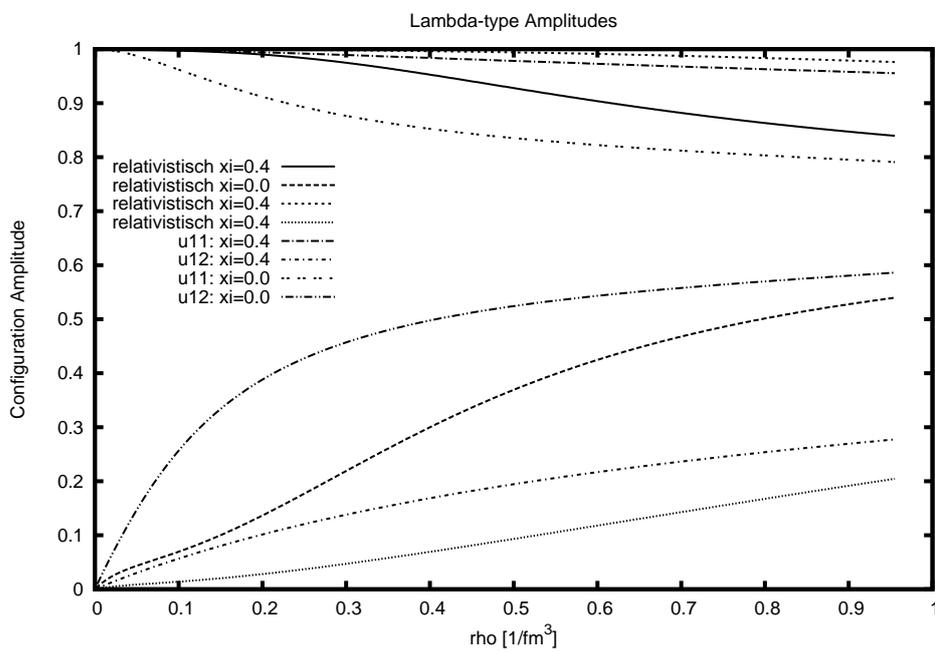


Abbildung 2.21: Amplituden des Λ -artigen Zustands im nichtrelativistischen Ansatz und im relativistischen Ansatz

Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat gezeigt, dass in asymmetrischen Vielteilchensystemen eine Mischung der Farbeigenzustände von Λ - und Σ -Teilchen auftritt. Dabei entstehen neue gemischte Masseneigenzustände. Ausgegangen wurde bei den Berechnungen von einer dichteabhängigen Feldtheorie (DDRH) mit dichteabhängigen Kopplungskonstanten, die aus NN-Wechselwirkungen gewonnen wurden. Für die Hyperonen wurden diese Vertizes durch Skalierungsfaktoren modifiziert. Die Mischungsenergie trat dann als nicht diagonale Selbstenergie auf, die sich aus einem skalaren und einem vektoriellen Anteil zusammensetzt. Der skalare Anteil ist dabei eine wesentliche Neuerung in dieser Arbeit, da er in älteren Ansätzen nicht berücksichtigt wurde. In der Folge wurde untersucht, welchen Einfluss die Stärke der Mischungsenergie, die direkt abhängig von der Isospinasymmetrie des Systems und der Stärke der Mischungskopplung ist, hat. Neben den verschobenen Eigenwerten wurden auch die Wahrscheinlichkeitsamplituden für den gemischten Zustand berechnet. Hier hat sich gezeigt, dass gerade bei hohen Dichten und stark asymmetrischen Systemen mit der Mischung von Λ - und Σ -Zuständen zu rechnen ist. Neben den eigenen Rechnungen wurden auch Vergleiche mit anderen Ansätzen gezogen. Besonders große Unterschiede wurden dabei im Vergleich zu Ansätzen ohne skalare Mischungsenergien sichtbar. Da die skalare Mischungsenergie ein anderes Vorzeichen hat als die vektorielle und bei kleinen Dichten größer ist, hat sie bei Dichten, die etwas kleiner sind als die normale Kerndichte eine Nullstelle. Das führt dazu, dass im Ansatz dieser Arbeit bei Dichten um die normale Kerndichte kaum Mischungseffekte auftreten, während Ansätze ohne skalare Mischungsenergie bereits bei kleinen Dichten Mischungseffekte voraussagen. Der nächste Vergleich betraf die Berücksichtigung des Massenunterschieds von Λ - und Σ -Teilchen. Wird dieser vernachlässigt, erhält man ein Gleichungssystem, das sich leicht diagonalisieren lässt. Dies hat den Vorteil, dass der Einfluss der verschiedenen Energien im System analytisch nachvollzogen werden kann, was bei der numerischen Lösung, die im hier gezeigten Ansatz nötig ist, nicht möglich ist. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass der Ansatz ohne Massendifferenz tendenziell einen stärkeren Mischungseffekt erzeugt, als mit Massendifferenz. Dies macht sich insbesondere bei kleinen Dichten bemerkbar. Zu Beginn der Untersuchung der Mischungseffekte wurden für die Kopplungsfunktionale von Λ - und Σ -Teilchen noch die gleichen Werte angesetzt, bevor für die endgültigen Rechnungen noch ein zusätzlicher Skalierungsfaktor eingefügt wurde, der die stärkere Kopplung für die Σ -Teilchen berücksichtigt. Auch dies hat den

Mischungseffekt verringert. Zuletzt wurde auch ein nichtrelativistischer Ansatz betrachtet, der gerade bei kleinen Dichten einen wesentlich stärkeren Mischungsvorgang voraussagt, während er sich bei sehr großen Dichten den relativistischen Voraussagen annähert. Das Fazit dieser Arbeit ist also, das gerade bei starken Asymmetrien und hohen Dichten eine Mischung von Λ - und Σ -Zuständen auftritt, dass sie aber wesentlich geringer ist, als das durch ältere Rechnungen vorhergesagt wird. Die zukünftige Arbeit an diesem Thema wird also insbesondere darauf eingehen müssen, wie die verschiedenen Skalierungsfaktoren bei den Potentialen aber auch bei den Mischungsenergien aussehen. Insbesondere wenn der Skalierungsfaktor für die Mischungskopplungen für den skalaren und den vektoriellen Beitrag unterschiedlich sein sollte, hätte dies deutliche Auswirkungen auf den Mischungsvorgang bei kleinen Dichten. Sollte der Unterschied zwischen den Potentialen von Λ - und Σ -Teilchen geringer sein, als für diese Arbeit angenommen, würde das den Mischungseffekt verstärken.

Neben diesen Verbesserungen, die von neuen experimentellen Ergebnissen abhängig sind, sollten sich zukünftige Berechnungen auf endliche Kerne beziehen, während bisher nur unendliche Kernmaterie betrachtet wurde. Ein weiterer interessanter Schritt ist die Untersuchung von Neutronensternen, für die man eine Verbesserung der Beschreibung erreichen könnte. Eine andere Möglichkeit wäre die Ausweitung der Rechnungen auf das komplette Baryonen-Oktett, also auch die Kaskadenteilchen und Mischungsvorgänge, die dann alle $S = -2$ Kanäle, also Mischungen mit $\Lambda\Lambda$ - $\Lambda\Sigma^0$ - $\Sigma^0\Sigma^0$ - $\Sigma\Sigma$ -Konfigurationen umfasst.

Anhang

.1 Relativistische Notation

In dieser Arbeit wird das natürliche Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$ verwendet. Die Metrik entspricht der von Bjorken und Drell [BD90, BD93]:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (.12)$$

Vierervektoren werden im Allgemeinen als x dargestellt. Die Dreiervektoren \mathbf{x} sind durch Fettdruck und der Betrag durch x gekennzeichnet. Die ko- und kontravarianten Vektoren und die partiellen Ableitungen sind durch

$$x^\mu = (t, \mathbf{x}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{x}) \quad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu \quad (.13)$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\nabla), \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \nabla) \quad (.14)$$

gegeben. Entsprechend der Einstein'schen Summenkonvention ist über doppelt vorkommende Indizes zu summieren. Das Viererskalarprodukt ergibt sich daher zu:

$$x^\mu y_\mu = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \quad (.15)$$

Die in der Dirac-Gleichung und in der Lagrangedichte verwendeten γ -Matrizen erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (.16)$$

und hängen mit den α - und β -Matrizen durch $\gamma = \beta\alpha$ und $\gamma_0 = \beta$ zusammen. Dabei ist γ_0 hermitesch und die γ_i ($i = 1, 2, 3$) sind antihermitesch. Dadurch ergeben sich weitere Kombinationen:

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \quad (.17)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \quad (.18)$$

Die explizite Darstellung der γ -Matrizen sieht daher wie folgt aus:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (.19)$$

Die oben verwendeten $\mathbb{1}$ sind 2x2 Einheitsmatrizen und $\boldsymbol{\sigma}$ die Pauli-Spinmatrizen, die wie folgt definiert sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (.20)$$

Die wichtigsten Eigenschaften dieser Matrizen sind:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (.21)$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (.22)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 0 \quad (.23)$$

$$(.24)$$

Für die γ -Matrizen sollen abschließend noch einige nützliche Relationen bei hermitescher Konjugation bzw. Kontraktion angegeben werden:

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \quad (.25)$$

$$\gamma_5^\dagger = -\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = \gamma_5 \quad (.26)$$

$$(\sigma_{\mu\nu})^\dagger = \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} \gamma_0 \quad (.27)$$

$$a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu = a_\mu b^\mu - i \sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \quad (.28)$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\lambda = 4 \quad (.29)$$

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\lambda = -2\gamma_\mu \quad (.30)$$

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda = 4g_{\mu\nu} \quad (.31)$$

Bei der Spurbildung von γ -Matrizen sind folgende Beziehungen nützlich:

$$Tr [\mathbb{1}] = 4 \quad (.32)$$

$$Tr [\text{ungerade Anzahl von } \gamma\text{-Matrizen}] = 0 \quad (.33)$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (.34)$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma] = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (.35)$$

$$Tr [\gamma_\mu a^\mu \gamma_\nu b^\nu] = Tr [\gamma_\mu b^\mu \gamma_\nu a^\nu] = 4a_\mu b^\mu \quad (.36)$$

$$Tr [\gamma_5] = 0 \quad (.37)$$

$$Tr [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] = 0 \quad (.38)$$

.2 Dirac-Spinoren

Für die freie Dirac-Gleichung

$$[\gamma_\mu k^\mu - m] \Psi(x) = 0 \quad (.39)$$

kann die allgemeine Lösung als Entwicklung nach ebenen Wellen dargestellt werden [BD90, BD93]

$$\Psi(x) = \sum_{\pm s} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m}{E_k}} [b(k, s)u(k, s)e^{-ikx} + d^\dagger(k, s)v(k, s)e^{ikx}] \quad (.40)$$

Dabei beschreiben die Spinoren $u(k, s)$ und $v(k, s)$ Eigenzustände mit positiver bzw. negativer Energie und erfüllen folgende Gleichung:

$$[\gamma_\mu k^\mu - m] u(k, s) = 0 \quad (.41)$$

$$[\gamma_\mu k^\mu + m] v(k, s) = 0 \quad (.42)$$

Die konjugierten Spinoren sind

$$\bar{u} = u^\dagger \gamma_0 \quad (.43)$$

$$\bar{v} = v^\dagger \gamma_0. \quad (.44)$$

Sie erfüllen die Normierungsbedingungen

$$\bar{u}(k, s')u(k, s) = \delta_{ss'} = -\bar{v}(k, s')v(k, s) \quad (.45)$$

$$u^\dagger(k, s')u(k, s) = \frac{E_k}{m} = v^\dagger(k, s')v(k, s). \quad (.46)$$

Damit ergibt sich ihre explizite Form zu

$$u(k, s) = \sqrt{\frac{E_k + m}{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}}{E_k + m} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (.47)$$

mit $E_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ und den Paulispinoren

$$\chi_{s=1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{s=-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (.48)$$

Auch für unendliche Kernmaterie lassen sich die stationären Lösungen

$$u^*(k, s) = \begin{pmatrix} u_n^*(k, s) \\ u_p^*(k, s) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v^*(k, s) = \begin{pmatrix} v_n^*(k, s) \\ v_p^*(k, s) \end{pmatrix} \quad (.49)$$

der durch das Medium modifizierten und nach Isospin separierten Dirac-Gleichung

$$[\gamma_\mu k_b^{*\mu} - m_b^*] u_b^*(k, s) = 0, \quad b = p, n \quad (.50)$$

explizit angeben. Die Modifikation drückt sich in den durch das Medium veränderten Größen E , m und k aus. Sie werden zu E^* , m^* und k^* . Man erhält dann [Hof01]:

$$u_b^*(k, s) = \sqrt{\frac{E_b^* + m_b^*}{2m_b^*}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma \mathbf{k}_b^*}{E_b^* + m_b^*} \end{pmatrix} \chi_s. \quad (.51)$$

.3 Nichtrelativistische Beschreibung

In der nichtrelativistischen Beschreibung ist das Gleichungssystem ein gekoppeltes 2×2 -System

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}^2 + k_\Lambda^2 & \kappa^2 \frac{M_\Lambda}{\bar{M}} \\ \kappa^2 \frac{M_\Sigma}{\bar{M}} & \vec{\nabla}^2 + k_\Sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_\Lambda \\ \Phi_\Sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (.52)$$

mit den lokalen Wellenzahlen

$$k_\Lambda^2 = \frac{2M_\Lambda}{\hbar^2} (E - U_\Lambda) \quad (.53)$$

$$k_\Sigma^2 = \frac{2M_\Sigma}{\hbar^2} (E - U_\Sigma + \Delta M) \quad (.54)$$

$$\kappa^2 = \frac{2\bar{M}}{\hbar^2} U_1 \sim \frac{\rho_n - \rho_p}{\rho} V_1 \sim \frac{2\bar{M}}{\hbar^2} \frac{N - Z}{A} V_1 \quad (.55)$$

$$\bar{M} = \sqrt{M_\Lambda M_\Sigma}. \quad (.56)$$

Bei konstanten Potentialen führt dies auf die Eigenzustände

$$\chi = \begin{pmatrix} w_\Lambda \\ w_\Sigma \end{pmatrix} e^{i\vec{Q}\vec{r}}, \quad (.57)$$

woraus für das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} k_\Lambda^2 - Q^2 & \frac{M_\Lambda}{\bar{M}} \kappa^2 \\ \frac{M_\Sigma}{\bar{M}} \kappa^2 & k_\Sigma^2 - Q^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\Lambda \\ w_\Sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (.58)$$

folgt. Daraus lassen sich die Lösungen für Q bestimmen:

$$Q_\pm^2 = \frac{1}{2}(k_\Lambda^2 + k_\Sigma^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(k_\Sigma^2 - k_\Lambda^2)^2 + \kappa^4} \quad (.59)$$

$$\implies Q_1 = Q_-^2 = \frac{1}{Q_+^2} (4k_\Lambda k_\Sigma - \kappa^4) \quad (.60)$$

$$Q_2 = Q_+^2 = \frac{1}{2}(k_\Lambda^2 + k_\Sigma^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(k_\Sigma^2 - k_\Lambda^2)^2 + \kappa^4}. \quad (.61)$$

Für $\kappa \rightarrow 0$ erhalten wir

$$Q_1^2 \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} k_\Lambda^2 \quad ; \quad Q_2^2 \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} k_\Sigma^2. \quad (.62)$$

Daraus folgen die beiden Lösungen:

1. Λ -artiger Fall:

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{pmatrix} e^{i\vec{Q}_1 \vec{r}} \quad (.63)$$

mit den Amplituden:

$$w_{21} = -\frac{\kappa^2 \frac{M_\Sigma}{M}}{k_\Sigma^2 - Q_1^2} w_{11} \quad (.64)$$

$$|w_{11}|^2 + |w_{21}|^2 = 1 \quad (.65)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |w_{11}|^2 &= 1 - \frac{\kappa^4}{(k_\Sigma^2 - Q_1^2)^2} \left(\frac{M_\Sigma}{M} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{4\kappa^4 \left(\frac{M_\Sigma}{M} \right)^2}{\left((k_\Sigma^2 - k_\Lambda^2) + \sqrt{(k_\Sigma^2 - k_\Lambda^2)^2 + 4\kappa^4} \right)^2} \end{aligned} \quad (.66)$$

Für den Mischungswinkel gilt dann:

$$\tan \varphi_1 = -\frac{M_\Sigma}{M} \frac{\kappa^2}{k_\Sigma^2 - Q_1^2}. \quad (.67)$$

2. Σ -artiger Fall:

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{pmatrix} e^{i\vec{Q}_2 \vec{r}} \quad (.68)$$

mit den Amplituden:

$$w_{12} = -\frac{\kappa^2 \frac{M_\Lambda}{M}}{k_\Lambda^2 - Q_2^2} w_{22} \quad (.69)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |w_{22}|^2 &= 1 - w_{12}^2 \\ &= 1 - \left(\frac{M_\Lambda}{M} \right)^2 \frac{\kappa^4}{(k_\Lambda^2 - Q_2^2)^2} \end{aligned} \quad (.70)$$

Für den Mischungswinkel gilt dann:

$$\tan \varphi_2 = -\frac{M_\Lambda}{M} \frac{\kappa^2}{k_\Lambda^2 - Q_2^2}. \quad (.71)$$

Für ein gegebenes Q bzw. Q^2 können dann die Energieeigenwerte bestimmt werden. Dafür ist das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 Q^2}{2M_\Lambda} + U_\Lambda - E & U_m \\ U_m & \frac{\hbar^2 Q^2}{2M_\Sigma} + U_\Sigma + \Delta M - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_\Lambda \\ w_\Sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (.72)$$

zu lösen. Durch

$$h_\Lambda = \frac{\hbar^2 Q^2}{2M_\Lambda} + U_\Lambda \quad (.73)$$

$$h_\Sigma = \frac{\hbar^2 Q^2}{2M_\Sigma} + U_\Sigma + \Delta M \quad (.74)$$

kann das Problem zu

$$(h_\Lambda - E)(h_\Sigma - E) - U_m^2 = 0 \quad (.75)$$

vereinfacht werden. Das kann dann einfach gelöst werden

$$E = \frac{1}{2}(h_\Lambda + h_\Sigma) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(h_\Sigma - h_\Lambda)^2 + U_m^2}. \quad (.76)$$

Wir erhalten also zwei Lösungen, die für $U_m \rightarrow 0$ wieder die ungestörten Eigenwerte von Λ - und Σ -Teilchen ergeben.

$$E_+ = E_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} Q^2 + U_\Lambda + U_\Sigma + \Delta M \right) + \sqrt{\frac{1}{4}(h_\Sigma - h_\Lambda)^2 + U_m^2} \quad (.77)$$

$$E_- = E_1 = \frac{h_\Lambda h_\Sigma - U_m^2}{E_2} \quad (.78)$$

mit $\frac{1}{\tilde{m}} = \frac{1}{M_\Lambda} + \frac{1}{M_\Sigma}$. Nach der Bestimmung der Eigenwerte können auch die Eigenvektoren berechnet werden. Die Wellenfunktion ist

$$\chi_i = \begin{pmatrix} \chi_{1i} \\ \chi_{2i} \end{pmatrix} \Big|_{E=E_i} e^{i\vec{Q}\vec{r} - iE_i(Q)t}. \quad (.79)$$

Mit dem Mischungswinkel

$$\tan \Phi_1 = -\frac{U_m}{h_\Sigma - E_1} = \frac{\chi_{21}}{\chi_{11}} \quad (.80)$$

erhalten wir

$$\chi_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \Phi_1}} \quad (.81)$$

$$\chi_{21} = \tan \Phi_1 \chi_{11} \quad (.82)$$

und mit

$$\tan \Phi_2 = -\frac{U_m}{h_\Lambda - E_2} = \frac{\chi_{12}}{\chi_{22}} \quad (.83)$$

$$\chi_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan \Phi_2}} \quad (.84)$$

$$\chi_{12} = \tan \chi_{22} \quad (.85)$$

.4 Parametersatz

Für die Rechnungen wurden dichteabhängige Kopplungsfunktionale verwendet. Dabei wurde folgende Parametrisierung für die *impulskorrigierten* Vertizes

$$\Gamma_i(\rho) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + e_i)^2} \sqrt{1 + G_i k_F} \quad \text{für } i = \sigma, \omega \quad (.86)$$

$$\Gamma_i(\rho) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + e_i)^2} \quad \text{für } i = \delta, \rho \quad (.87)$$

verwendet:

	a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
σ	13,1334	0,4258	0,6578	0,7914	0,7914
δ	19,1023	1,3653	2,3054	0,0693	0,5388
ω	15,1640	0,3474	0,5152	0,5989	0,5989
ρ	12,8373	2,4822	5,6881	0,3671	0,3598

Literaturverzeichnis

- [BD90] BJORKEN, J.D. und S.D. DRELL: *Relativistische Quantenmechanik*. BI-Wiss.-Verl.,Mannheim, 1990.
- [BD93] BJORKEN, J.D. und S.D. DRELL: *Relativistische Quantenfeldtheorie*. BI-Wiss.-Verl.,Mannheim, 1993.
- [Bro01] BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A.; MUSIOL G.; MÜHLIG H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [Fed06] FEDOSEEW, ANDREAS: *Diplomarbeit*. Justus Liebig Universität Giessen, 2006.
- [FW71] FETTER, A.L. und J.D. WALECKA: *Quantum Theory of Many-particle systems*. Mc-Graw-Hill Publishing Company, 1971.
- [HKL01] HOFMANN, F., C.M. KEIL und H. LENSKE: *Density dependent hadron field theory for asymmetric nuclear matter and exotic nuclei*. Nucler Physics C64,034314, 2001.
- [Hof96] HOFMANN, FRANK: *Diplomarbeit*. Justus Liebig Universität Giessen, 1996.
- [Hof01] HOFMANN, FRANK: *Doktorarbeit*. Justus Liebig Universität Giessen, 2001.
- [Hot01] HOTCHI, H.: *Spectroscopy of medium-heavy Λ hypernuclei via the (π^+, K^+) reaction*. Physical Review C Volume 64, 044302, 2001.
- [KDH94] KIM, H.-C., J.W. DURSO und K. HOLINDE: *Dynamical model for correlated two-pion exchange in the NN interaction*. Physical Review C Volume 49, Number 5, 1994.
- [Kei99] KEIL, CHRISTOPH: *Diplomarbeit*. Justus Liebig Universität Giessen, 1999.
- [Kei04] KEIL, CHRISTOPH: *Dissertation*. Justus Liebig Universität Giessen, 2004.

- [KHL00] KEIL, C. M., F. HOFMANN und H. LENSKE: *Density dependent hadron field theory for hypernuclei*. Phys. Rev., C61:064309, 2000.
- [Len04] LENSKE, H.: *Lecture Notes in Physics 641*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [Len08] LENSKE, H.: *unpubliziert*. 2008.
- [MSK⁺96] MA, ZHONG-YU, J. SPETH, S. KREWALD, BAO-QIU CHEN und A. REUBERA: *Hypernuclei with meson-exchange hyperon-nucleon interactions*. Nuclear Physics A, 608:305315, 1996.
- [Mü99] MÜLLER, H.: *Effective Field theory for Λ - Σ^0 mixing in nuclear matter*. Physical Review C Volume 59, Number 3, 1999.
- [SL99] STOKS, V. G. J. und T.-S. H. LEE: *Strange hadron matter and $SU(3)$ symmetry*. Phys. Rev. C, 60(2):024006, Jul 1999.
- [SR99] STOKS, V.G.J. und TH. A. RIJKEN: *Soft-core baryon-baryon potentials for the complete baryon octet*. Physical Review C Volume 59, Number 6, 1999.
- [SW68] SEROT, BRIAN D. und JOHN DIRK WALECKA: *The Relativistic Nuclear Many-Body Problem*. Plenum Press, New York, 1968.
- [TW99] TYPEL, S. und H.H. WOLTER: *Relativistic mean field calculations with density dependent meson-nucleon coupling*. Nuclear Physics A656,331, 1999.

Danksagung

Allen voran möchte ich Herrn Prof. Dr. Horst Lenske für die engagierte Betreuung meiner Diplomarbeit und die angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Die Hilfestellung bei der Lösung der auftauchenden Probleme, sowie die interessanten und aufschlussreichen Diskussionen haben diese Arbeit vorangebracht aber auch interessant gemacht.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik und die guten Arbeitsbedingungen.

Andreas Fedoseew gilt mein Dank für die Einarbeitung in den genutzten Code sowie die nützlichen Tips für die Erstellung dieser Arbeit. Patrick Konrad und Stefan Bender danke ich für die Beantwortung aller offenen Fragen zu den theoretischen Grundlagen und die Unterstützung bei mathematischen Problemen.

Bei Oliver Buß und Fabian Eichstädt möchte ich mich für die gute Computeradministration und schnelle Beseitigung aller PC-Probleme bedanken. Ilka Sproates und Elke Jung sei für die administrative Unterstützung gedankt.

Ich danke allen Mitgliedern des Instituts für die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre. Die gute Stimmung sowie die interessanten Diskussionen über Physik aber auch abseits der Physik haben mich auch neben der Diplomarbeit ein interessantes Jahr erleben lassen.

Abschließend gilt mein ganz besonderer Dank meinen Eltern. Ohne ihre Unterstützung wäre das Studium so nicht möglich gewesen. Meiner Schwester möchte ich für die Überprüfung der orthographischen Richtigkeit dieser Arbeit danken.

Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Gießen, den 5. Mai 2009 _____