Diplomarbeit im Fach Physik

# Neutrinoinduzierte, kohärente Pionenproduktion

vorgelegt von Stefan Winkelmann aus Gießen

20. März 2008

Institut für Theoretische Physik I Fachbereich 07 Justus-Liebig-Universität Gießen

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung				
I	Grundlagen	5		
1	Neutrinophysik1.1Historische Entwicklungen bis zum Standardmodell1.2Massive Neutrinos und Neutrinooszillationen	<b>7</b> 7 8		
2	Elementare Theorien         2.1       Quantenchromodynamik (QCD) und Quarkmodell	<b>13</b> 13 14 17		
3	Effektive Theorie3.1Relevante Freiheitsgrade3.1.1Pionen3.1.2Nukleonen3.1.3Deltaresonanz3.13Deltaresonanz3.2Wechselwirkungen der Teilchen3.2.1Relevante Wechselwirkungen3.2.2 $N\Delta\pi$ -Vertex3.2.3WN $\Delta$ -Vertex3.2.4Hadronischer Strom	<b>19</b> 19 20 20 21 25 25 25 27 30 33		
4	Kernphysik			
11	Neutrinoinduzierte, kohärente Pionenproduktion	45		
5	Experimentelle Ansätze	47		
6	<ul> <li><b>Theoretische Beschreibung</b></li> <li>6.1 Verwendete N\u00e4herungen</li></ul>			

	6.2.2       Dynamik	$55 \\ 59$			
7	Ergebnisse         7.1       Lokale N\u00e4herung         7.2       Volle Rechnung         7.3       Konsistenzpr\u00fcfung anhand gro\u00f3er Deltamassen         7.4       Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen	<b>63</b> 63 68 75 77			
	Zusammenfassung und Ausblick	83			
8	B Zusammenfassung				
9	Ausblick	87			
Aı	nhang	88			
Α	Einheiten und Metrik	91			
В	Kinematik         B.1       Mandelstam Variablen         B.2       Wirkungsquerschnitt	<b>93</b> 93 94			
C	Matrizen         C.1       Paulimatrizen         C.2       γ-Matrizen	<b>95</b> 95 95			
D	Feynmanregeln         D.1       Externe Linien       .       <	<b>99</b> 99 99 100			
Е	Normierung der Einteilchenzustände und Spinoren	101			
F	Numerische UmsetzungF.1Hadronischer StromF.2Numerische Integration	<b>103</b> 103 104			
Lit	Literaturverzeichnis				
Da	Danksagungen				

Es könnt' alles so einfach sein, isses aber nicht. Die Fantastischen Vier

# Einleitung

Sowohl unter theoretischen als auch unter experimentellen Gesichtspunkten bietet die Neutrinophysik ein außerordentlich spannendes Gebiet der physikalischen Grundlagenforschung. Wie vielfältig sich dieses Gebiet darstellt, wird besonders deutlich, wenn man sich die Neutrinoquellen und deren Energiebereiche vor Augen führt ([Fre07]). Von den beim Urknall entstandenen, extrem niederenergetischen Neutrinos (~ 0,0004 eV) über solare (< 20 MeV) und atmosphärische Neutrinos (~ GeV) bis hin zu extrem hochenergetischen kosmischen Neutrinos (>TeV) wird ein über viele Größenordnungen reichendes Spektrum abgedeckt. Hinzu kommen noch Neutrinos aus künstlichen Quellen, also Reaktoren (< 10 MeV) und Beschleunigern (~ GeV), die heute einen weiteren wichtigen Forschungsschwerpunkt bilden. Abbildung 0.1 gibt eine Übersicht über die verschiedenen Neutrinoquellen und -energien.

Zur Rettung des Energiesatzes beim Betazerfall wurde das Neutrino sozusagen aus der Not geboren und seit seiner Postulierung durch Wolfgang Pauli im Jahre 1930 von immer neuen Rätseln und Herausforderungen begleitet. Die Wechselwirkung des Neutrinos mit seiner Umwelt ist so schwach, dass sein experimenteller Nachweis die erste große Herausforderung darstellte. Erst 1956 gelang es Frederick Reines und anderen, den experimentellen Nachweis der Existenz des Neutrinos zu führen. Dafür wurde ihm 1995 der Nobelpreis verliehen.

In Enrico Fermis Theorie des  $\beta$ -Zerfalls aus dem Jahre 1934 und natürlich auch im Modell von Glashow, Weinberg und Salam (GWS-Modell), das in den 1960er Jahren entstand, ist das Neutrino eine feste Größe. Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik sind heute drei Arten von Neutrinos enthalten, die mit  $\nu_e$ ,  $\nu_{\mu}$  und  $\nu_{\tau}$ bezeichnet werden und alle experimentell nachgewiesen wurden. Man spricht auch von drei Neutrinogenerationen oder Flavor. Die Möglichkeit weiterer Neutrinoarten beschränkt sich auf gänzlich andersartige Neutrinos, eventuell sehr schwere oder sogenannte sterile Neutrinos.

Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik wird das Neutrino als masselos angenommen. Mittlerweile ist allerdings durch zahlreiche Experimente erwiesen, dass Neutrinos von einem Flavor in einen anderen oszillieren. Somit können die Flavorund Masseneigenzustände der Neutrinos nicht identisch und daher die Neutrinos nicht masselos sein. Ein großes Ziel der aktuellen Forschung ist es, mit Oszillationsexperimenten die Massenunterschiede der Neutrinos sowie deren Mischungsverhältnisse experimentell zu bestimmen, um dadurch Zugang zur Physik jenseits des Standardmodells zu erlangen. Dies ist allerdings bei Weitem nicht die einzige Herausforderung in Bezug auf Neutrinos. Es gibt weitere wichtige offene Fragen. Während man in Experimenten zur Neutrinooszillation nur Massendifferenzen misst, sind die absoluten Massen der Neutrinos bisher nicht bekannt. Auch die grundsätzliche Natur des Neutrinos ist bislang ungeklärt. Als einziges bekanntes Teilchen besteht für das Neutrino die Möglichkeit, sein eigenes Antiteilchen zu sein. Es ist bislang ebenfalls nicht geklärt, ob das Neutrino ein magnetisches Moment besitzt.

Auch in der Astrophysik spielen Neutrinos eine wichtige Rolle. Es bleibt zu klären, ob Neutrinos wenigstens für einen Teil der angenommenen dunklen Materie aufkommen könnten. Gibt es eventuell eine vierte Neutrinogeneration, welche nicht in gekanntem Maße wechselwirkt, sogenannte sterile Neutrinos? Des Weiteren könnten Neutrinos eine CP-verletzende Phase besitzen. All dies hätte Auswirkungen in der Astrophysik.

Um diese anspruchsvollen Fragen der Neutrinophysik beantworten zu können ist ein genaues Verständnis von Neutrinodetektoren und der zugrundeliegenden physikalischen Prozesse unbedingt notwendig. Es ist von größter Bedeutung, die Reaktion der Neutrinos mit Kernen genau zu verstehen, da moderne Detektoren oftmals mit mittelschweren Kernen wie <sup>12</sup>C oder <sup>16</sup>O als Detektormaterial arbeiten. Das Verständnis der Wechselwirkungen von Neutrinos mit Materie ist somit essentiell für aktuelle und geplante Experimente, z.B. zur Untersuchung der Neutrinooszillationen, sowohl mit atmosphärischen als auch mit Beschleunigerneutrinos (z.B. K2K ([A+06]), MiniBoo-NE [AA+07]).

Die Reaktion von Neutrinos mit Kernen lässt sich in kohärente und inkohärente Anteile aufspalten. Bei letzteren dominiert für niedrige Neutrinoenergien ( $\ll$ 1 GeV) die quasielastische Streuung an einem Nukleon. In der Region um 1 GeV wird die Produktion von Nukleonenresonanzen ebenfalls wichtig. Für höhere Neutrinoenergien ( $\gg$ 1 GeV) dominieren nicht-resonante, tief inelastische Prozesse. Die inkohärenten Prozesse liefern insgesamt den größeren Beitrag zur Reaktion der Neutrinos mit Kernen und können im Rahmen eines Transportmodells (z.B. [GiB]) beschrieben werden. Um jedoch die Wechselwirkungen mit den Kernen mit hoher Präzision beschreiben zu können ist auch die Berücksichtigung kohärenter Anteile notwendig.

Vor diesem Hintergrund ist speziell die neutrinoinduzierte, kohärente Produktion von Pionen ein Prozess, der einen wichtigen Beitrag zur Reaktion von Neutrinos mit Kernen liefern kann. Die Reaktion lässt sich schreiben als

$$\nu_{\ell} + {}^{A}X \rightarrow \ell^{-} + \pi^{+} + {}^{A}X \text{ bzw.}$$
  
$$\nu_{\ell} + {}^{A}X \rightarrow \nu_{\ell} + \pi^{0} + {}^{A}X,$$

wobei der Kern  ${}^{A}X$  sich vor und nach der Reaktion im Grundzustand befindet. Motiviert durch die Untersuchungen von K2K und MiniBooNE betrachten wir in dieser

Arbeit speziell Neutrinos mit 1 GeV Energie, die mit  $^{12}C$ gemäß

$$\nu_{\mu} + {}^{12}C \rightarrow \mu^{-} + \pi^{+} + {}^{12}C \text{ bzw.}$$
  
 $\nu_{\mu} + {}^{12}C \rightarrow \nu_{\mu} + \pi^{0} + {}^{12}C$ 

wechselwirken.

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit besteht darin, einen Beitrag zum theoretischen Verständnis dieser Reaktion zu liefern, indem über die in der Literatur angewandte, sogenannte lokale Näherung hinausgegangen wird. Anstelle der Nukleonendichten fließen explizit die einzelnen Bindungszustände der Nukleonen im Kern in die Rechnungen ein. Der Produktionsprozess und die Eigenschaften des Kerns können nicht mehr separat voneinander behandelt werden.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Der erste Teil ermöglicht eine Einordnung der Thematik und gibt einen Überblick über die benötigten theoretischen Konzepte. Bei der Darstellung der Neutrinophysik wird sowohl auf den historischen Kontext eingegangen, als auch auf aktuelle theoretische Fragestellungen und experimentelle Ansätze. Die Darstellung der theoretischen Werkzeuge zur Behandlung der neutrinoinduzierten, kohärenten Pionenproduktion umfasst verschiedene physikalische Bereiche. So spielt zum einen die Physik des Standardmodells eine Rolle bei der Beschreibung des Neutrinos, zum anderen wird im Bereich der Hadronen (Nukleonen, Resonanzen, Pionen) auf eine effektive Theorie zurückgegriffen. Nicht zuletzt spielt noch die Kernphysik eine entscheidende Rolle, da es sich bei dem betrachteten Prozess nicht um die Reaktion an freien, sondern an im Kern gebundenen Nukleonen handelt.

Der zweite Teil stellt den Hauptteil dieser Arbeit dar. Zunächst wird ein Überblick über die experimentellen Ergebnisse zur neutrinoinduzierten, kohärenten Pionenproduktion gegeben. Danach wird das theoretische Modell zur Behandlung dieses Prozesses im Einzelnen dargelegt und mit den bereits bestehenden theoretischen Ansätzen verglichen. Schließlich werden am Ende die erhaltenen Resultate vorgestellt und diskutiert.

Der letzte Teil enthält eine Zusammenfassung dieser Arbeit und einen Ausblick auf mögliche, zukünftige Ansätze zur Weiterentwicklung des verwendeten Modells.



Abbildung 0.1: Neutrinofluss  $\frac{d\Phi_{\nu}}{d\log E_{\nu}}$  auf der Erdoberfläche als Funktion der Neutrinoenergie  $E_{\nu}$  nach [Lip]. Die Teilkurven a bis g stehen für unterschiedliche Neutrinoquellen:

- a: Neutrinos aus dem Urknall
- b: solare Neutrinos (pp-Kette)
- b': solare Neutrinos (<sup>8</sup>B)
- c: Neutrinos aus Supernovae (Hintergrund)
- c': Neutrinos aus Supernovae (8,5 Kpc)
- d: Neutrinos aus Radioaktivität
- e: Neutrinos aus Reaktoren
- f: atmospärische Neutrinos  $(\mu)$
- f': atmosphärische Neutrinos (e)
- g: kosmische Neutrinos.

# Teil I Grundlagen

# 1 Neutrinophysik

Das folgende Kapitel wird einen kurzen historischen Überblick über die Neutrinophysik bieten sowie die Einordnung der Fragestellung dieser Arbeit in die aktuellen physikalischen Fragestellungen ermöglichen.

## 1.1 Historische Entwicklungen bis zum Standardmodell

Um das kontinuierliche  $\beta$ -Spektrum beim radioaktiven Zerfall unter Beachtung des Energiesatzes erklären zu können, sah sich Pauli 1930 dazu gezwungen, ein hypothetisches Teilchen zu postulieren, das er wegen seiner verschwindenden elektrischen Ladung Neutron nannte. Dieses Teilchen, das nach der Entdeckung des heutigen Neutrons durch Chadwick 1932 in Neutrino umbenannt wurde, änderte jedoch seit seiner Postulierung bis heute keineswegs nur seinen Namen. So ging Pauli ursprünglich davon aus, das Neutrino sei ein im Kern gebundenes Teilchen mit einer Masse in der Größenordnung der Elektronenmasse und mit einer Durchdringungskraft, die etwa zehnmal größer sei als die von Gammastrahlen. Dies änderte sich mit Enrico Fermis Theorie des  $\beta$ -Zerfalls. Er ging davon aus, dass das Neutrino, dessen Name von Fermi gepägt wurde, erst beim Zerfall selbst entsteht. Durch Betrachtung der Spektren gelang er zu der Einsicht, dass es entweder masselos sei oder eine sehr kleine Masse im Vergleich zum Elektron habe. Bald wurde klar, dass es aufgrund der extrem schwachen Wechselwirkung des Neutrinos mit seiner Umwelt sehr schwierig war, das Neutrino experimentell nachzuweisen. Es wurde gar befürchtet, dass dies nie gelingen könnte. Somit war die Frage der Existenz des Neutrinos noch immer eine Glaubensfrage. Nachdem es bereits einige indirekte Hinweise auf die Existenz des Neutrinos gab, änderte sich diese Situation erst 1956 grundlegend. Frederick Reines, Clyde Cowan und anderen gelang schließlich der experimentelle Nachweis anhand des inversen  $\beta$ -Zerfalls von Protonen.

Ein weiterer Meilenstein in der Neutrinophysik ist die Vermutung von Tsung-Dao Lee und Chen-Ning Yang, dass in der schwachen Wechselwirkung die Parität nicht erhalten sei. Durch die Experimente von Wu (1957) und Goldhaber (1958) wurde diese Vermutung experimentell bestätigt. Sie zeigten, dass es sich sogar um eine maximale Paritätsverletzung handelt und ausschließlich linkshändige Neutrinos beobachtet werden. Zahlreiche weitere experimentelle und theoretische Ergebnisse, darunter die Entdeckung der zweiten und schließlich der dritten Neutrinogeneration, sowie der Nachweis der neutralen schwachen Ströme, vermittelt durch das Z-Boson, führten zur Entwicklung und Etablierung des sogenannten Standardmodells der Elementarteilchenphysik. Darin werden die drei Neutrinoflavor  $\nu_e$ ,  $\nu_{\mu}$  und  $\nu_{\tau}$  mit den zugehörigen Leptonen in linkshändige Dubletts eingeteilt. Da die Neutrinos zunächst als masselos gelten und nur linkshändige Neutrinos auftreten, bilden die rechtshändigen Leptonen Singuletts, d.h.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (1.1)$$

Über die Messung der Zerfallsbreite des Z-Bosons lässt sich die Anzahl der aktiven Neutrinogenerationen bestimmen. Die Experimente am LEP erhielten experimentell einen Wert von  $2,994 \pm 0,012$  und lieferten somit eine sehr gute Übereinstimmung mit dem oben eingeführten Standardmodell mit drei Neutrinogenerationen. Sollte es weitere Neutrinogenerationen geben, so müssten diese deutlich andere physikalische Eigenschaften aufweisen.

Insgesamt ist das Standardmodell sehr erfolgreich bei der Erklärung zahlreicher physikalischer Phänomene. Im Bereich der Neutrinophysik fordern die entdeckten Oszillationen allerdings eine Erweiterung, welche im nächsten Abschnitt erläutert werden soll.

## 1.2 Massive Neutrinos und Neutrinooszillationen

Die ersten Hinweise darauf, dass Neutrinos nicht masselos sein könnten, lieferten experimentelle Daten von atmosphärischen und solaren Neutrinos, bei deren Auswertung ein Defizit eines Neutrinoflavors feststellt wurde. Diese Probleme sind durch die Einführung von Neutrinomassen erklärbar geworden. Durch zahlreiche Experimente ist es heute bestätigt, dass Neutrinos eines Flavors in einen anderen oszillieren können. Dies bedeutet z.B., dass ein Neutrino, welches durch einen Prozess der schwachen Wechselwirkung als  $\nu_e$  produziert wurde, nach einer bestimmten Flugzeit als  $\nu_{\mu}$  im Detektor registriert werden kann. Analog zur Quarkmischung stellt ein Neutrino eines Flavors somit eine Überlagerung verschiedener Masseneigenzustände dar. Dies sei im Folgenden an einem einfachen Modell mit zwei Flavor erklärt. Es gelte für das Elektronneutrino

$$|\nu_e\rangle = \cos\theta \,|\nu_1\rangle + \sin\theta \,|\nu_2\rangle \tag{1.2}$$

mit den Masseneigenzuständen  $|\nu_1\rangle$  und  $|\nu_2\rangle$ . Es ergibt sich dann eine Wahrscheinlichkeit, dass es nach einer gewissen Flugstrecke noch immer als Neutrino mit diesem Flavor gemessen wird. Diese ist gegeben durch:

$$P_{ee} = 1 - \sin^{2}(2\theta) \sin^{2}\left(\frac{m_{2} - m_{1}}{2}t\right)$$
  
=  $1 - \sin^{2}(2\theta) \sin^{2}\left(\frac{m_{2}^{2} - m_{1}^{2}}{4}\frac{L}{E}\right)$   
=  $1 - \sin^{2}(2\theta) \sin^{2}\left(\frac{\Delta m_{21}^{2}}{4}\frac{L}{E}\right).$  (1.3)

Man erkennt, dass durch Neutrinooszillationsexperimente immer nur Massendifferenzen und keine absoluten Massen der Neutrinos gemessen werden können.

Da es nicht nur zwei, sondern drei Neutrinoflavor gibt, wird die Situation noch etwas komplexer. Neben den Flavoreigenzuständen  $\nu_e$ ,  $\nu_{\mu}$  und  $\nu_{\tau}$  gibt es also die Masseneigenzustände  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  und  $\nu_3$ . Schreibt man die Flavor- und Massenzustände jeweils in einen Vektor, kann man eine Neutrinomischungsmatrix M konstruieren, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 e^{i\phi_1} \\ \nu_3 e^{i\phi_2} \end{pmatrix}.$$
 (1.4)

Bei den Parametern  $\phi_1$  und  $\phi_2$  handelt es sich um CP-verletzende Phasen, die nur dann eine Rolle spielen, falls das Neutrino zugleich sein eigenes Antiteilchen darstellt. Teilchen mit dieser Eigenschaft werden als Majoranateilchen bezeichnet. In diesem Zusammenhang ist auch der doppelte neutrinolose Betazerfall  $0\nu\beta\beta$  von großem Interesse. Würde dieser Prozess in der Natur stattfinden, wäre dies der Beweis dafür, dass das Neutrino ein Majoranateilchen ist. Diese Frage konnte experimentell noch nicht abschließend geklärt werden. Zwar erfolgt in [KKDHK01] eine Auswertung der Daten des Heidelberg-Moscow-Experiments, in der von den Autoren das Signal des doppelten neutrinolosen Betazerfalls gesehen wird. Dieses Ergebnis ist jedoch in der wissenschaftlichen Gemeinschaft nicht unumstritten und bedarf einer weiteren Überprüfung durch zukünftige Experimente. Für Neutrinooszillationen haben die angesprochenen Phasen keine physikalischen Konsequenzen, so dass wir uns auf die Mischungsmatrix selbst konzentrieren können. Diese wird üblicherweise wie folgt parametrisiert:

$$M = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$
(1.5)

Die Matrix M kann in drei Anteile aufgespalten werden

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & c_{23} & s_{23} \\ & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ & 1 & \\ -s_{13}e^{i\delta} & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} \\ -s_{12} & c_{12} & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$
(1.6)

wobei die Abkürzungen  $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$  und  $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$  verwendet wurden und  $\delta$  eine weitere CP-verletzende Phase darstellt. Analog zum oben vorgestellten Modell mit zwei Neutrinoflavor ergeben sich hier zwei unabhängige Massendifferenzen  $\Delta m_{ij}^2$ . Es stellt eine große experimentelle Herausforderung dar, die Parameter der Neutrinomischungsmatrix genau messen zu können. Im Folgenden werden die unterschiedlichen Anteile und deren experimenteller Zugang vorgestellt.

Der erste Anteil in (1.6) ist primär zugänglich über Experimente mit atmosphärischen Neutrinos, welche in unserer Atmosphäre durch den Zerfall von Myonen, Pionen und weiteren Mesonen gebildet werden. Das Verhältnis von Myon- und Elektronneutrinos, welches mit einer Genauigkeit von etwa 5% berechnet werden kann, stimmte bei mehreren Experimenten nicht mit dem gemessenen Verhältnis überein. Das japanische SuperKamiokande Experiment (SuperK) brachte den experimentellen Durchbruch: Die Abweichung vom erwarteten Verhältnis konnte auf die Umwandlung von Myon- in Tauneutrinos zurückgeführt werden, und zwar mit einem nahezu maximalen Mischungswinkel  $\theta_{23}$ . Neben den Experimenten mit atmosphärischen Neutrinos bietet sich ein komplementärer Zugang zu den Parametern über Experimente mit Neutrinos aus Beschleunigern, wie z.B. das NuMI/Minos oder das K2K Experiment. Der Detektor befindet sich hierbei typischerweise mehrere hundert Kilometer von der Quelle entfernt, weshalb man solche Experimente im Englischen als *long-baseline* Experimente bezeichnet. Die heutigen besten Fits für die Oszillationsparamter sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

Der zweite Anteil in (1.6) ist über sogenannte  $\nu_e$ -disappearance-Experimente mit Neutrinos aus Reaktoren zugänglich, in denen nach einem Defizit an Elektronneutrinos gesucht wird. Die Ergebnisse von großen Experimenten mit Reaktorneutrinos wie CHOOZ und KamLAND ergaben, dass der Mischungswinkel  $\theta_{13}$  sehr klein sein muss und die Massendifferenz  $\Delta m_{31}^2$  in der Größenordnung  $10^{-3}$  eV<sup>2</sup> liegt. Für genauere Angaben siehe Tabelle 1.1. Die derzeitigen Experimente sind nicht sensitiv auf die CP-verletzende Phase  $\delta$ , sodass hier kein Wert angegeben werden kann.

Der letzte Anteil in (1.6) wird mit solaren Neutrinos untersucht. Aus dem solaren Standardmodell werden die zu erwartenden Neutrinoflüsse aus den in der Sonne ablaufenden Prozessen (pp-Kette, CNO-Zyklus) vorhergesagt. Es stellte sich jedoch auch hier heraus, dass auf der Erde weniger als die erwartete Anzahl an Neutrinos gemessen wurde. Dies wurde bekannt als das solare Neutrinoproblem, welches beträchtliche Aufmerksamkeit auch weit über die wissenschaftliche Gemeinschaft hinaus erreichte.

Parameter	Bester Fit	$2\sigma$			
$\Delta m_{21}^2$	$7,6\cdot 10^{-5} \text{ eV}^2$	$7,3-8,1\cdot10^{-5} \text{ eV}^2$			
$\Delta m_{31}^2$	$2,4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$	$2,1-2,7\cdot10^{-5} \text{ eV}^2$			
$\sin^2 \theta_{12}$	0,32	$0,\!28\text{-}0,\!37$			
$\sin^2 \theta_{23}$	0,50	$0,\!38\text{-}0,\!63$			
$\sin^2 \theta_{13}$	0,007	$\leq 0,033$			

Tabelle 1.1: Tabelle mit aktuellen Werten für Neutrinooszillationsparameter aus [Sch07b]. In diese Zahlen gehen Daten aus Experimenten mit solaren und atmosphärischen Neutrinos sowie solchen aus Reaktoren und Beschleunigern ein.

Als Pionier auf dem Gebiet gilt Raymond Davis, der bereits 1968 in seinem radiochemischen Experiment ein Defizit von solaren Neutrinos nachweisen konnte. Es folgten Großexperimente wie SNO und SuperK. Auch Reaktorexperimente wie KamLAND sind inzwischen sensitiv auf den Mischungswinkel  $\theta_{12}$  und die Massendifferenz  $\Delta m_{12}^2$ und bieten wiederum einen komplementären Zugang zu diesen Parametern. Die aktuellen Werte finden sich ebenfalls in Tabelle 1.1.

Da durch Oszillationsexperimente nur Massendifferenzen zugänglich sind, besteht eine weitere große Herausforderung darin, auch die absoluten Neutrinomassen messen zu können. Damit würde sich auch die Frage nach der Massenhierarchie der Neutrinos klären. Die beiden möglichen Szenarien werden als normal bzw. invertiert bezeichnet, je nachdem ob die beiden Neutrinos mit der kleineren Massendifferenz die leichteren oder die schwereren Neutrinos sind.

Bei der Frage nach der Existenz von sterilen Neutrinos liegen nun neue experimentelle Befunde von MiniBooNE ([AA<sup>+</sup>07]) vor. Die Ergebnisse des LSND-Experiments ([A<sup>+</sup>95]), die auf die Existenz eines vierten, sterilen Neutrinos hindeuteten, konnten von der MiniBooNE-Kollaboration nicht bestätigt werden. Da nun die Existenz steriler Neutrinos im Rahmen eines einfachen Oszillationsmodells unwahrscheinlich geworden ist, gibt es weitere aktuelle Untersuchungen mit dem Ziel, die experimentellen Ergebnisse im Rahmen von komplexeren Modellen in Einklang bringen zu können (z.B. [Sch07a], [NW07]).

# 2 Elementare Theorien

Das vorherige Kapitel vermittelte einen Überblick über die aktuellen Fragen der Neutrinophysik und dient als Motivation, uns speziell mit der kohärenten Pionenproduktion durch Neutrinos zu beschäftigen. Die dazu notwendigen theoretischen Konzepte und Werkzeuge wird das vorliegende Kapitel liefern. In den Abschnitten dieses Kapitels folgt ein Überblick über die grundlegenden elementaren Theorien, die für unseren Prozess wichtig sind. Im Einzelnen ist dies die elektroschwache Theorie und die Quantenchromodynamik (QCD).

## 2.1 Quantenchromodynamik (QCD) und Quarkmodell

Das Quarkmodell beinhaltet drei Generationen, die jeweils aus einem *u*-artigen Quark mit elektrischer Ladung  $q = +\frac{2}{3}$  und einem *d*-artigen mit  $q = -\frac{1}{3}$  bestehen:

$$\left(\begin{array}{c}u\\d\end{array}\right)\quad \left(\begin{array}{c}c\\s\end{array}\right)\quad \left(\begin{array}{c}t\\b\end{array}\right). \tag{2.1}$$

Die Bezeichnung u, d, c, s, t und b sind historisch gewachsen und stehen für die englischen Begriffe up, down, charm, strange, top und bottom, wobei manche Autoren für letzteres den eher unüblichen Begriff beauty vorziehen.

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist die  $SU(3)_c$ -Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung der Quarks, vermittelt durch die Gluonen als Eichbosonen. Die Quarks tragen Farbladungen (engl. *color*), mit drei möglichen Werten, z.B. rot, blau, grün, Antiquarks tragen Antifarbe und Gluonen tragen jeweils Farbe und Antifarbe. Wichtig ist, dass in freier Form nur farbneutrale Objekte vorkommen, sogenannte *color singlets*, die aus zwei Quarks aufgebauten Mesonen mit Farbe und Antifarbe oder die aus drei Quarks aufgebauten Baryonen, die ein Quark jeder Farbe enthalten. Ein *color singlet* der Gluonen ist nicht in der Natur realisiert.

Beschränken wir uns auf die leichtesten Quarks u und d mit nahezu identischer Masse, so erhalten wir eine näherungsweise SU(2)-Isospinsymmetrie und ein SU(2)-Dublett

$$\left(\begin{array}{c} u\\ d \end{array}\right). \tag{2.2}$$

Auf baryonischer Ebene führt dies zu einem Dublett aus Proton und Neutron und einem Quartett der Deltaresonanzen  $\Delta^-$ ,  $\Delta^0$ ,  $\Delta^+$  und  $\Delta^{++}$ . Auf mesonischer Ebene erhalten wir als leichtestes Triplett die Pionen  $\pi^-$ ,  $\pi^0$  und  $\pi^+$ . Nimmt man das etwas schwerere *s*-Quark noch hinzu, ergibt sich eine näherungsweise SU(3)-Symmetrie, die weitere Teilchenmultipletts erklären kann.

Betrachtet man die schwache Wechselwirkung der Quarks, so stellt man fest, dass die oben vorgestellten Flavoreigenzustände d und s nicht mit den Eigenzuständen der schwachen Wechselwirkung d' und s' übereinstimmen, sondern über eine unitäre Transformation zusammenhängen

$$\begin{pmatrix} d'\\s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C\\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\\s \end{pmatrix}$$
(2.3)

mit dem Cabibbo-Winkel  $\theta_C$  und  $\cos \theta_C \approx 0,974$ . In dieser Arbeit wird im Folgenden der Cabibbo-unterdrückte Anteil vernachlässigt.

## 2.2 Elektroschwache Theorie

Die elektroschwache Theorie vereinigt den Elektromagnetismus und die schwache Wechselwirkung in einer einheitlichen Theorie. Es handelt sich hierbei um eine SU(2)  $\times$  U(1)-Eichfeldtheorie. Die zunächst masselosen SU(2)-Eichbosonen  $W^1$ ,  $W^2$  und  $W^3$  mischen mit dem U(1)-Eichboson B. Durch spontane Symmetriebrechung entstehen so die physikalischen, massiven W- und Z-Bosonen, und das masselose Photon A. Für eine detaillierte Behandlung sei auf entsprechende Literatur verwiesen (z.B. [PS95], [Per87] und darin enthaltene Referenzen).

Die physikalischen W-Bosonen erhält man durch eine Linearkombination von  $W^1$  und  $W^2$ :

$$W_{\alpha}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{\alpha}^{1} \mp i W_{\alpha}^{2}),$$
 (2.4)

wobei  $\alpha = 0...3$  den Lorentzindex des Feldes bezeichnet. Wie allgemein üblich werden in dieser Arbeit für die Lorentzindizes griechische Buchstaben verwendet. Dies sind in der Regel  $\alpha$ ,  $\beta$  usw., um eine Verwechslung mit den Myonen  $\mu$  und Neutrinos  $\nu$  auszuschließen.

Das Photon und das Z-Boson entstehen durch eine Drehung um den schwachen Mischungswinkel $\theta_w$ aus $W^3$  und B

$$\begin{pmatrix} Z_{\alpha}^{0} \\ A_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{w} & -\sin\theta_{w} \\ \sin\theta_{w} & \cos\theta_{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{\alpha}^{3} \\ B_{\alpha} \end{pmatrix}$$
(2.5)

mit  $\sin^2 \theta_w = 0,23122.$ 

Die Kopplungen der Eichbosonen an die Fermionen werden durch den Lagrangian

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \left( W^+_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha+}_W + W^-_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha-}_W \right) + \frac{g}{2\cos\theta_w} Z^0_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}_Z + eA_{\alpha} \mathcal{J}^{\alpha}_{EM}$$
(2.6)

beschrieben, wobei die Ströme  $\mathcal{J}^{\alpha}$  jeweils aus einem leptonischen  $j^{\alpha}$  und einem hadronischen Anteil  $J^{\alpha}$  bestehen.

#### **Geladener Strom**

Betrachten wir konkret das folgende Diagramm:



Der W-Propagator lautet

$$\widetilde{k} = \frac{-i}{k^2 - M_W^2} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{M_W^2} \right)$$
(2.7)

(für die Feynmanregeln der elektroschwachen Theorie siehe auch Anhang D). Für kleine Impulse relativ zur Masse des W-Bosons kann man diesen Ausdruck vereinfachen und erhält

$$\frac{-i}{k^2 - M_W^2} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{M_W^2} \right) \approx \frac{ig^{\alpha\beta}}{M_W^2},\tag{2.8}$$

wobei  $M_W = 84.4$  GeV die Masse der W-Bosonen bezeichnet. Diese Näherung ist im Energiebereich dieser Arbeit gerechtfertigt, da der Energieübertrag stets so gering ist, dass der Kern als ganzes intakt bleibt.

Für das obige Diagramm benötigen wir noch den leptonischen und hadronischen Strom für den oberen bzw. unteren Vertex:

$$j_{\alpha} = \bar{u}_{\ell} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) u_{\nu}$$
  

$$J_{\beta} = \cos \theta_C \bar{u} \gamma_{\beta} (1 - \gamma_5) d.$$
(2.9)

Mit der Näherung aus Gleichung (2.8) und der Kopplung aus Gleichung (2.6) reduziert man das obige Diagramm auf eine Punktwechselwirkung mit Fermikopplung

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2},$$

$$G_F = 1,16637 \cdot 10^{-5} \text{GeV}^{-2},$$
(2.10)

und erhält die klassische Strom-Kopplung. Das Matrixelement lautet dann

$$\mathcal{M} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{u}_\ell \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) u_\nu J_\alpha \tag{2.11}$$

mit dem leptonischen Strom  $j^{\alpha} = \bar{u}_{\ell} \gamma^{\alpha} (1 - \gamma_5) u_{\nu}$  und dem hadronischen Strom  $J_{\alpha}$ .

#### **Neutraler Strom**

Betrachten wir ein Diagramm mit einem intermediären Z-Boson, z.B.



so benötigen wir den Z-Propagator. Analog zum W-Boson gilt

$$\widetilde{k} = \frac{-i}{k^2 - M_Z^2} \left( g^{\alpha\beta} - \frac{k^\alpha k^\beta}{M_Z^2} \right) \approx \frac{ig^{\alpha\beta}}{M_Z^2}, \qquad (2.12)$$

wobei die Masse des Z-Bosons über den Winkel $\theta_w$ mit der des W-Bosons zusammenhängt

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_w} \approx 91.2 \text{ GeV.}$$
(2.13)

Die entsprechenden leptonischen und hadronischen Ströme lauten

$$j_{\alpha} = \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\ell} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) \nu_{\ell}$$

$$J_{\beta} = \bar{u} \gamma_{\beta} \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_w - \frac{1}{2} \gamma_5 \right) u.$$
(2.14)

Damit erhält man das Matrixelement zum betrachteten Prozess in genau der gleichen Form wie beim intermediären W-Boson

$$\mathcal{M} = i \left(\frac{g}{2\cos\theta_w M_Z}\right)^2 \frac{1}{2} \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \nu_\ell J_\alpha$$
$$= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\ell \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \nu_\ell J_\alpha, \qquad (2.15)$$

mit dem Unterschied, dass der hadronische Strom  $J_{\alpha}$  im Falle des Z-Bosons eine kompliziertere Struktur aufweist.

## 2.3 Hadronischer Strom

In diesem Abschnitt befassen wir uns näher mit den Symmetrien der hadronischen Ströme des letzten Abschnitts. Die schwachen Ströme haben aufgrund der maximalen Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung stets die Form V - A (Vektor-Axialvektor). Für ein Diagramm mit intermediärem W-Boson wie oben erhält man als hadronischen Ström

$$J_{\alpha} = \cos \theta_C \bar{u} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) d$$
  
=  $\cos \theta_C (V_{\alpha} - A_{\alpha})$  (2.16)

mit dem Vektoranteil  $V_{\alpha} = \bar{u}\gamma_{\alpha}d$  und dem axialen Anteil  $A_{\alpha} = \bar{u}\gamma_{\alpha}\gamma_{5}d$ . Beschränken wir uns auf *u*- und *d*-Quarks, so kann man diese immer schreiben als Linearkombination von

$$V_a^{\mu} = \bar{q}\gamma^{\mu}\sigma_a q \tag{2.17}$$

$$A_a^{\mu} = \bar{q}\gamma^{\mu}\gamma_5\sigma_a q \tag{2.18}$$

mit  $q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$  und den Paulimatrizen  $\sigma_a$  (siehe Anhang C.1). Im Falle des oben angegebenen Stroms bedeutet das

$$J_{\alpha} = \cos \theta_{C} \bar{u} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_{5}) d$$
  
$$= \cos \theta_{C} (V_{\alpha} - A_{\alpha})$$
  
$$= \cos \theta_{C} (\bar{q} \gamma_{\alpha} \sigma^{+} q - \bar{q} \gamma_{\alpha} \gamma_{5} \sigma^{+} q)$$
(2.19)

mit  $\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^1 + i\sigma^2).$ 

Der Vektorstrom V ist erhalten. Es gilt auf Quarkebene exakt

$$\partial^{\alpha} V_{\alpha} = 0. \tag{2.20}$$

Die Annahme, dass dies auch auf hadronischer Ebene gilt, ist bekannt als *conserved vector current*-Hypothese (CVC). Davon werden wir in den folgenden Kapiteln ausgehen.

Für den axialen Strom benutzen wir in dieser Arbeit die sogenannte *partially conserved axial current*-Hypothese (PCAC)

$$\partial^{\alpha}A_{\alpha} = \frac{i}{2}(m_u + m_d)\bar{u}\gamma_5 d = m_{\pi}^2 f_{\pi}\pi$$
(2.21)

mit den Quarkmassen  $m_u$ ,  $m_d$ , der Pionzerfallskonstante  $f_{\pi}$  und dem Pionenfeld  $\pi$ . Nur im Falle masseloser Quarks bliebe der axiale Strom exakt erhalten.

## 3 Effektive Theorie

Mit der Quantenchromodynamik (QCD) glauben wir heute eine Theorie zu kennen, die die starke Wechselwirkung adäquat beschreiben kann. Die Freiheitsgrade der QCD sind bekanntermaßen die Quarks und Gluonen. Dennoch werden die Rechnungen in dieser Arbeit nicht auf Quark-, sondern auf hadronischer Ebene durchgeführt. Als Freiheitsgrade treten die Nukleonen im Kern, sowie deren erste Anregung, die Deltaresonanz, und das Pion in den Berechnungen auf. Diese Vorgehensweise wird im Folgenden motiviert und erläutert.

Selbst wenn man eine elementare Theorie besitzt, ist es unter Umständen sinnvoll, statt dieser eine an das Problem angepasste, effektive Theorie zu verwenden. Dies gilt insbesondere dann, wenn die elementare Theorie bei einer konkreten Problemstellung aufgrund ihrer Komplexität praktisch nicht anwendbar ist. Im Falle der QCD kommt hinzu, dass die starke Kopplung  $\alpha_s$  bei niedrigen Energien ansteigt und somit störungstheoretische Ansätze versagen. Bei niedrigen Energien sind die elementaren Freiheitsgrade in hadronischen Zuständen gebunden und kommen nicht frei vor.

Essentiell bei der Formulierung einer effektiven Theorie ist die Identifizierung der für das vorliegende Problem relevanten Freiheitsgrade. Eine solche Theorie sollte auch stets so formuliert werden, dass sie möglichst viele Eigenschaften der tieferliegenden Theorie in sich trägt. Dies gilt insbesondere für ihre Symmetrien. Eine solche effektive Beschreibung besitzt stets nur einen begrenzten Anwendungsbereich und wird darüber hinaus versagen. Des Weiteren treten in der Theorie im Allgemeinen Konstanten auf, die nicht theoretisch bestimmt werden können, sondern experimentell gewonnen werden müssen.

## 3.1 Relevante Freiheitsgrade

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die für unser Modell relevanten Freiheitsgrade und deren physikalische Eigenschaften diskutiert. Die entsprechenden Teilchen treten dabei stets als Multipletts des Isospins T auf. Die einzelnen Ladungszustände werden durch die dritte Komponente t des Isospins charakterisiert, wobei wir die Konvention benutzen, dass der am stärksten positiv geladene Zustand der Isospinstellung t = +T entspricht.

#### 3.1.1 Pionen

Pionen sind mit 139,57 MeV (geladene Pionen) bzw. 134,98 MeV (neutrales Pion) die leichtesten Mesonen im hadronischen Spektrum. Sie sind nur aus den leichten up-(u) und down-Quarks (d) aufgebaut. Formal ist ihr Quarkinhalt  $u\bar{d}$ ,  $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$  und  $d\bar{u}$  für  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  und  $\pi^-$ . Pionen besitzen Spin und Parität  $J^P = 0^-$  und bilden ein Isospin-Triplett (T = 1). Man schreibt kartesisch die Pionen über hermitesche, pseudoskalare Felder als Vektor

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \tag{3.1}$$

bzw. über geladene nicht-hermitesche, pseudoskalare Felder

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2), \quad \pi^0 = \pi_3.$$
 (3.2)

Pionen nehmen in der Kernphysik und Hochenergiephysik eine Sonderstellung ein ([EW88]), da ihre Masse fast eine ganze Größenordnung kleiner ist als typische Hadronenmassen. Pionenaustausch gilt auch als Niederenergieversion der starken Wechselwirkung.

#### 3.1.2 Nukleonen

Aufgrund ihrer nahezu identischen Masse werden Protonen (938,3 MeV) und Neutronen (939,6 MeV) formal zu einem Isospin-Dublett  $(T = \frac{1}{2})$  zusammengefasst

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Man spricht dann allgemein von Nukleonen, den leichtesten Teilchen aus der Klasse der Baryonen. Sie besitzen Spin und Parität  $J^P = \frac{1}{2}^+$  und sind wie die Pionen nur aus den leichten *up*- und *down*-Quarks aufgebaut (*uud* bzw. *udd*). In der vorliegenden Arbeit ist, wenn von der Nukleonenmasse M die Rede ist, immer die gemittelte Masse (938,9 MeV) gemeint.

#### 3.1.3 Deltaresonanz

Bei der Deltaresonanz handelt es sich um die energetisch niedrigste Anregung des Nukleons mit einer Masse von etwa 1230 bis 1234 MeV und einer Polbreite  $\Gamma_0$  von 116 bis 120 MeV. Das Massenmittel, also etwa 1232 MeV, bedingt die Bezeichnung  $\Delta(1232)$ . Das Delta besitzt Spin und Parität  $J^P = \frac{3}{2}^+$  und bildet ein Isospin-Quartett  $(T = \frac{3}{2})$  mit den Ladungszuständen  $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ .

Als Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen wird die Deltaresonanz im Rahmen des Rarita-Schwinger-Formalismus beschrieben. An die Stelle der Diracgleichung für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen tritt die sogenannte Rarita-Schwinger-Gleichung ([RS41])

$$(i\partial - m_{\Delta})\psi^{\alpha} = 0$$
  

$$\gamma_{\alpha}\psi^{\alpha} = 0.$$
(3.4)

Der  $\Delta$ -Propagator ergibt sich im Rarita-Schwinger-Formalismus zu

Die Breite der Deltaresonanz im Vakuum wird nahezu vollständig vom Zerfall in ein Pion und ein Nukleon bestimmt. Ihre Impulsabhängigkeit bestimmt sich aus dem Bahndrehimpuls  $\ell$  der Resonanz in  $\pi N$  Streuung. Beim  $\Delta$  handelt es sich hierbei um eine P-Welle (also  $\ell = 1$ ). Es gilt somit in der Nähe der Zerfallsschwelle  $W_{min}$ [Pos04]

$$\Gamma(W \approx W_{min}) \sim q_{cm}^{2\ell+1} = q_{cm}^3, \tag{3.6}$$

wobe<br/>iWdie invariante Masse und  $q_{cm}$  den Pionen<br/>impuls im Ruhesystem der Resonanz bezeichnet. Es gilt

$$q_{cm}(W) = \frac{\sqrt{(W^2 - m_{\pi}^2 - M^2)^2 - 4m_{\pi}^2 M^2}}{2W}.$$
(3.7)

Weiter von der Schwelle entfernt werden auch Korrekturen mit höheren Potenzen wichtig. In der Literatur sind verschiedene Parametrisierungen zu finden. In dieser Arbeit wird die Parametrisierung aus [Pos04] verwendet

$$\Gamma(W) = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{f^*}{m_{\pi}}\right)^2 \frac{M}{W} q_{cm}(W)^3 F^2(W) \quad \text{mit}$$

$$F(W) = \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4 + (W^2 - M_{\Delta}^2)^2}, \quad \Lambda = 1 \text{ GeV},$$
(3.8)

wobei die Konstante  $f^* = 2,13$  so gewählt wurde, dass die experimentelle Breite von etwa 118 MeV bei  $W = M_{\Delta}$  reproduziert wird. Dabei ist anzumerken, dass für  $m_{\pi}$  hier die neutrale Pionenmasse gewählt wurde. Aufgrund der nur näherungsweise erfüllten Isospinsymmetrie für die Pionen ergibt sich hieraus eine Unsicherheit für die Konstante  $f^*$ . Der Formfaktor F stellt sicher, dass die Breite für große invariante Massen klein wird.

Zum Vergleich stellen wir die sogenannte Blatt-Weißkopf-Parametrisierung aus [Leu01] vor:

$$\Gamma(W) = \Gamma_0 \frac{\beta(W)}{\beta(M_\Delta)} \tag{3.9}$$

mit

$$\beta(W) = \frac{q_{cm}(W)}{W^2} \frac{(q_{cm}(W)R)^2}{1 + (q_{cm}(W)R)^2}, \quad R = 1 \text{ fm.}$$
(3.10)

Die beiden vorgestellten Parametrisierungen sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Die Kurven schneiden sich bei  $W = M_{\Delta}$  und  $\Gamma = \Gamma_0$ . Obwohl die Parametrisierungen, wie in Abbildung 3.2 deutlich wird, abseits der Polmasse der Resonanz deutlich unterschiedlich sind, ergeben sich für die Delta-Spektralfunktion aufgrund der geringen Breite nur relativ geringe Abweichungen.



Abbildung 3.1: Verschiedene Parametrisierungen der Deltabreite  $\Gamma$  für invariante Massen W im Bereich der Deltamasse: Die durchgezogene Linie zeigt die Blatt-Weißkopf-Parametrisierung, die gestrichelte die Parametrisierung aus [Pos04]. Ebenfalls eingezeichnet ist der Punkt mit  $W = M_{\Delta}$  und  $\Gamma = \Gamma_0$ . In diesem Punkt schneiden sich beide Parametrisierungen.



Abbildung 3.2: Verschiedene Parametrisierungen der Deltabreite für einen weiten Bereich um die Deltamasse: Dargestellt sind die gleichen Größen wie in Abbildung 3.1. Man erkennt, dass die verschiedenen Parametrisierungen weit abseits der Deltamasse sehr unterschiedliche Verläufe zeigen. Dies spielt allerdings aufgrund der Deltaspektralfunktion in den Rechnungen nur eine untergeordnete Rolle. Der Formfaktor in der Parametrisierung aus [Pos04] (gestrichelte Linie) sorgt dafür, dass die Breite für große invariante Massen stark abnimmt.

## 3.2 Wechselwirkungen der Teilchen

Nachdem im vorigen Kapitel die für unser Modell relevanten Freiheitsgrade diskutiert wurden, ist es das Ziel der folgenden Abschnitte, die relevanten Wechselwirkungen zu benennen und eine effektive Beschreibung der Reaktion eines Neutrinos mit einem Nukleon zu formulieren. Dies wird uns in den folgenden Kapiteln als Basis zur Berechnung des kohärenten Prozesses dienen.

### 3.2.1 Relevante Wechselwirkungen

#### **Geladener Strom**

Betrachten wir zunächst den Prozess mit einem positiv geladenen Pion im Endzustand

$$\nu_{\ell} + N \to \ell^{-} + \pi^{+} + N,$$
(3.11)

den man wie folgt diagrammatisch darstellen kann:



Dabei ist der Bosonenpropagator, der in späteren Rechnungen aufgrund der Näherung aus Gleichung (2.8) nicht mehr aufgelöst wird, zur Verdeutlichung explizit dargestellt. Ziel ist es nun die einzelnen Kanäle zu beschreiben, die zu diesem Prozess beitragen. Bei den folgenden Diagrammen wird der leptonische Vertex der Einfachheit halber weggelassen.

Im s-Kanal erhält man jeweils ein Diagramm mit einer intermediären Deltaresonanz und eines mit einem Nukleon:



Des Weiteren sind die gekreuzten Prozesse möglich (u-Diagramme)



Die Reaktionen mit Anregung einer Deltaresonanz sind im Einzelnen

$$\nu_{\mu}(k) + n(p) \rightarrow \mu^{-}(k') + \Delta^{+}(p_{\Delta})$$

$$\searrow \pi^{+}(k_{\pi}) + n(p') \qquad (3.13)$$

und

$$\nu_{\mu}(k) + p(p) \to \pi^{+}(k_{\pi}) + \underbrace{\nu_{\mu}(k) + \Delta^{0}(p_{\Delta})}_{\searrow} \qquad \mu^{-} + n(p').$$

$$(3.15)$$

Die Kanäle mit intermediärem Nukleon lauten

$$\nu_{\mu}(k) + n(p) \to \mu^{-}(k') + p(\hat{p}) \searrow \pi^{+}(k_{\pi}) + n(p')$$
(3.16)

und

$$\nu_{\mu}(k) + p(p) \to \pi^{+}(k_{\pi}) + \underbrace{\nu_{\mu}(k) + n(\hat{p})}_{\searrow} \quad \mu^{-}(k') + p(p').$$
(3.17)

Wie in Kapitel 6.1 diskutiert wird, dominieren im Energiebereich dieser Arbeit die Kanäle mit direkter Anregung einer Deltaresonanz. Die Kanäle mit intermediärem Nukleon werden in dieser Arbeit daher nicht berücksichtigt.

#### Neutraler Strom

Betrachten wir nun den Prozess mit einem neutralen Pion im Endzustand

$$\nu_{\ell} + N \to \nu_{\ell} + \pi^0 + N. \tag{3.18}$$

Analog zu den Ausführungen zum geladenen Strom werden in dieser Arbeit die folgenden Prozesse berücksichtigt

$$\nu_{\mu}(k) + p(p) \rightarrow \nu_{\mu}(k') + \Delta^{+}(p_{\Delta})$$

$$\searrow \qquad \pi^{0}(k_{\pi}) + p(p') \qquad (3.19)$$

$$\nu_{\mu}(k) + n(p) \rightarrow \nu_{\mu}(k') + \Delta^{0}(p_{\Delta})$$

#### **3.2.2** N $\Delta \pi$ -Vertex

Die Lagrangedichte zur Beschreibung des N $\Delta \pi$ -Vertex lautet

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = \frac{f^*}{m_{\pi}} \bar{\psi}^{\mu}_{\Delta} \vec{T}^{\dagger} (\partial_{\mu} \vec{\pi}) \psi + h.c., \qquad (3.21)$$

wobe<br/>i $\vec{T^{\dagger}}$ den Isospinübergangsoperator von 1/2 nach 3/2 darstellt. Dieser ist so<br/> definiert, dass gilt ([EW88])

$$\left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} t_{N} \right\rangle = \sum_{\lambda} \left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \middle| 1\lambda \frac{1}{2} t_{N} \right\rangle \vec{e}_{\lambda}^{*}.$$
(3.22)

In dieser Gleichung bedeuten die Ausdrücke in Spitzklammern auf der linken Seite  $(\langle ... | \text{ und } | ... \rangle)$  Zustände mit entsprechenden Quantenzahlen. Der Ausdruck auf der rechten Seite  $(\langle ... | ... \rangle)$  ist ein Clebsch-Gordan Koeffizient. Für die Kopplung zweier Isospinzustände mit  $T_1, t_1$  und  $T_2, t_2$  zu einem Zustand mit S, s verwenden wir für den entsprechenden Clebsch-Gordan Koeffizienten die Notation

$$\langle Ss | T_1 t_1 T_2 t_2 \rangle . \tag{3.23}$$

Die Vektoren  $\vec{e}_{\lambda}$  lauten

$$\vec{e}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\i\\0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_0 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix}.$$
 (3.24)

27

#### **Geladener Strom**

Betrachten wir den Übergang  $\Delta^{++} \to \pi^+ + p$ , so ist  $t_{\Delta} = \frac{3}{2}$  und  $t_N = \frac{1}{2}$ . Damit folgt

$$\left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} t_{N} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \middle| 11 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle}_{=1} \vec{e}_{1}^{*} + \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \middle| 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} \vec{e}_{0}^{*} + \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \middle| 1-1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} \vec{e}_{-1}^{*}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$(3.25)$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit  $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ , so erhält man erwartungsgemäß

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1\\ -i\\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 - i\pi_2) = -\pi^+.$$
(3.26)

Analog liefert der Übergang  $\Delta^+ \to \pi^+ + n$  mit  $t_{\Delta} = \frac{1}{2}$  und  $t_N = -\frac{1}{2}$ 

$$\left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} t_{N} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \middle| 11 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle}_{=1/\sqrt{3}} \vec{e}_{1}^{*} + \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \middle| 10 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} \vec{e}_{0}^{*}$$

$$+ \underbrace{\left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \middle| 1 - 1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle}_{=0} \vec{e}_{-1}^{*}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3.27)$$

und damit einen Isospinfaktor von  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  für die Reaktion mit einem Neutron. Das Matrixelement für den Übergang  $\Delta^+ \to \pi^+ + n$  ist somit um diesen Faktor kleiner als das Matrixelement zu  $\Delta^{++} \to \pi^+ + p$ .

#### Neutraler Strom

Für den Übergang  $\Delta^+ \to \pi^0 + p$  mit  $t_{\Delta} = \frac{1}{2}$  und  $t_N = \frac{1}{2}$  ist

$$\left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \middle| \vec{T}^{\dagger} \middle| \frac{1}{2} t_N \right\rangle \vec{\pi} = \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \middle| 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \vec{e}_0 \vec{\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi_0, \tag{3.28}$$

für  $\Delta^0 \to \pi^0 + n$  gilt mit  $t_\Delta = -\frac{1}{2}$  und  $t_N = -\frac{1}{2}$ 

$$\left\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} \right| \vec{T}^{\dagger} \left| \frac{1}{2} t_{N} \right\rangle \vec{\pi} = \left\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| 10 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \vec{e}_{0} \vec{\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \pi_{0}.$$
(3.29)

Das bedeutet, dass im Gegensatz zu den geladenen Pionen kein unterschiedlicher Isospinfaktor für Protonen und Neutronen auftritt.

#### Formfaktor

Der N $\Delta\pi$ -Vertex wird zusätzlich durch einen Formfaktor modifiziert, der die endlichen Größen der beteiligten Hadronen berücksichtigt. Konsistent mit der Parametrisierung der Deltabreite in Gleichung (3.8) wählen wir in dieser Arbeit den Formfaktor aus [ARGHVV07]:

$$F(p_{\Delta}) = \frac{\Lambda^4}{\Lambda^4 + (p_{\Delta}^2 - M_{\Delta}^2)^2}, \quad \text{mit } \Lambda = 1 \text{ GeV.}$$
(3.30)

Nimmt man für die Pionen ebene Wellen mit Impuls  $k_{\pi}^{\alpha}$  an, so folgen für die N $\Delta \pi$ -Vertizes die folgenden Faktoren

$$\frac{f^*}{m_{\pi}} k^{\alpha}_{\pi} F(p_{\Delta}) \quad \text{für} \quad \Delta^{++} \to \pi^+ + p,$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{f^*}{m_{\pi}} k^{\alpha}_{\pi} F(p_{\Delta}) \quad \text{für} \quad \Delta^+ \to \pi^+ + n,$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{f^*}{m_{\pi}} k^{\alpha}_{\pi} F(p_{\Delta}) \quad \text{für} \quad \Delta^+ \to \pi^0 + p$$

$$\text{und} \quad \Delta^0 \to \pi^0 + n.$$
(3.31)

#### **3.2.3** WN $\Delta$ -Vertex

#### **Geladener Strom**

Der hadronische Strom für den Übergang  $\nu_{\ell} + N \rightarrow \ell + \Delta$  lässt sich schreiben als

$$J_{\alpha} = \langle \Delta | J_{\alpha}(0) | N \rangle$$
  
=  $\frac{\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} | \frac{1}{2} t_{N} 11 \rangle}{\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 11 \rangle} \cos \theta_{C} \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p)$   
=  $\sqrt{3} \langle \frac{3}{2} t_{\Delta} | \frac{1}{2} t_{N} 11 \rangle \cos \theta_{C} \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p)$  (3.32)

mit dem Diracspinor u für das Nukleon, dem Rarita-Schwinger-Spinor  $\psi^{\beta}$  für das Delta und der Größe  $\Gamma_{\beta\alpha}$ , welche die Parametrisierung durch Formfaktoren enthält (vgl. [LS72]):

$$\Gamma_{\beta\alpha} = \left( \frac{C_3^V}{M} \left( g_{\alpha\beta} \not q - q_{\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \frac{C_4^V}{M^2} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p' - q_{\beta} p'_{\alpha} \right) \right. \\ \left. + \frac{C_5^V}{M^2} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p - q_{\beta} p_{\alpha} \right) + C_6^V g_{\alpha\beta} \right) \gamma_5 \\ \left. + \frac{C_3^A}{M} \left( g_{\alpha\beta} \not q - q_{\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \frac{C_4^A}{M^2} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p' - q_{\beta} p'_{\alpha} \right) + C_5^A g_{\alpha\beta} + \frac{C_6^A}{M^2} q_{\beta} q_{\alpha}. \quad (3.33)$$

Aus Gleichung (3.32) folgen die erlaubten Prozesse mit dem jeweiligen Isospinfaktor. Für den Übergang  $W^+ + p \to \Delta^{++}$ ergibt sich

$$J_{\alpha} = \sqrt{3} \left\langle \frac{3}{2} \frac{3}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \right\rangle \cos \theta_C \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p) \right.$$
  
$$= \sqrt{3} \cos \theta_C \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p), \qquad (3.34)$$

für  $W^+ + n \to \Delta^+$ 

$$J_{\alpha} = \sqrt{3} \left\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 11 \right\rangle \cos \theta_C \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p) \right.$$
  
$$= \cos \theta_C \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p). \qquad (3.35)$$

Das Matrix<br/>element für den Übergang eines Protons ist somit um einen Faktor<br/>  $\sqrt{3}$ größer als das eines Neutrons.
Um die Formfaktoren  $C_i^V$  und  $C_i^A$  zu bestimmen, werden in der Literatur verschiedene Ansätze gewählt. Zum einen kann man ein Quarkmodell zugrundelegen und aus diesem heraus Formfaktoren berechnen, zum anderen kann man die Formfaktoren durch Analyse von Daten aus Streuexperimenten gewinnen. In dieser Arbeit benutzen wir letzteres, an Daten angepasste, phänomenologische Formfaktoren.

Benutzt man die oben eingeführte CVC-Hypothese für den Fall der Deltaresonanz, so ergibt sich für den Vektoranteil  $V^{\alpha}$  des hadronischen Stroms

$$q_{\alpha}V^{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_{6}^{V} \equiv 0. \tag{3.36}$$

Aus der Dominanz des magnetischen Formfaktors in Elektroproduktionsexperimenten folgt ([FN79])

$$C_4^V(q^2) = -\frac{M}{M_\Delta} C_3^V(q^2)$$
 und (3.37)

$$C_5^V(q^2) = 0, (3.38)$$

wobei M die Masse des Protons bezeichnet. Die Daten zur Elektroproduktion werden also durch einen unabhängigen Formfaktor beschrieben. Dieser lautet

$$C_3^V(q^2) = \frac{C_3^V(0)}{(1 - q^2/M_V^2)^2}$$
(3.39)

(3.40)

mit  $C_3^V(0) = 2,05$  und  $M_V = 0,73$  GeV ([SVH73]).

Mit der oben eingeführten PCAC-Hypothese erhält man für den axialen Formfaktor $C_6^{\cal A}$ 

$$C_6^A(q^2) = C_5^A(q^2) \frac{M^2}{m_\pi^2 - q^2}$$
(3.41)

mit der Nukleonmasse M und der Pionmasse  $m_{\pi}$ .

Für die Formfaktoren  $C_3^A$  und  $C_4^A$  erhält man mit dem Adler-Modell ([FN79])

$$C_3^A(q^2) = 0, (3.42)$$

$$C_4^A(q^2) = -\frac{1}{4}C_5^A(q^2). \tag{3.43}$$

Es bleibt somit ein unabhängiger Formfaktor, der wie folgt parametrisiert wird

$$C_5^A(q^2) = 1, 2\left(1 + \frac{1, 21q^2}{2 \text{ GeV}^2 - q^2}\right)\left(1 - \frac{q^2}{M_A^2}\right)$$
(3.44)

mit der axialen Masse  $M_A = 1,28$  GeV ([K<sup>+</sup>90]). Damit sind alle Formfaktoren aus Gleichung (3.33) festgelegt.

#### **Neutraler Strom**

Analog zum Fall geladener Ströme lässt sich der Prozess $\nu_\ell + N \to \nu_\ell + \Delta$ schreiben als

$$J_{\alpha} = \langle \Delta | J_{\alpha}(0) | N \rangle$$
  
=  $\frac{\langle \frac{3}{2} t_{\Delta} | \frac{1}{2} t_N 10 \rangle}{\langle \frac{3}{2} - \frac{1}{2} | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 10 \rangle} \bar{\psi}^{\beta}(p') \Gamma_{\beta \alpha} u(p)$   
=  $\sqrt{\frac{3}{2}} \langle \frac{3}{2} t_{\Delta} | \frac{1}{2} t_N 11 \rangle \bar{\psi}^{\beta}(p') \hat{\Gamma}_{\beta \alpha} u(p),$  (3.45)

wobei die Größe  $\hat{\Gamma}_{\beta\alpha}$  die gleiche Form wie die oben definierte Größe  $\Gamma_{\beta\alpha}$  besitzt

$$\hat{\Gamma}_{\beta\alpha} = \left( \frac{\hat{C}_{3}^{V}}{M} \left( g_{\alpha\beta} \not{q} - q_{\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \frac{\hat{C}_{4}^{V}}{M^{2}} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p' - q_{\beta} p'_{\alpha} \right) \right. \\
\left. + \frac{\hat{C}_{5}^{V}}{M^{2}} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p - q_{\beta} p_{\alpha} \right) + \hat{C}_{6}^{V} g_{\alpha\beta} \right) \gamma_{5} \\
\left. + \frac{\hat{C}_{3}^{A}}{M} \left( g_{\alpha\beta} \not{q} - q_{\beta} \gamma_{\alpha} \right) + \frac{\hat{C}_{4}^{A}}{M^{2}} \left( g_{\alpha\beta} q \cdot p' - q_{\beta} p'_{\alpha} \right) + \hat{C}_{5}^{A} g_{\alpha\beta} + \frac{\hat{C}_{6}^{A}}{M^{2}} q_{\beta} q_{\alpha}. \quad (3.46)$$

Mit dem in Kapitel 2.2 eingeführten schwachen Mischungswinkel $\theta_w$ gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$\hat{C}_{i}^{V} = (1 - 2\sin^{2}\theta_{w})C_{i}^{V} 
\hat{C}_{i}^{A} = C_{i}^{A}.$$
(3.47)

Mit Gleichung (3.45) folgt für  $Z^0 + p \rightarrow \Delta^+$  und  $Z^0 + n \rightarrow \Delta^0$ 

$$J_{\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} 10 \right\rangle \bar{\psi}^{\beta}(p') \hat{\Gamma}_{\beta\alpha} u(p)$$
  
$$= \bar{\psi}^{\beta}(p') \hat{\Gamma}_{\beta\alpha} u(p). \qquad (3.48)$$

Damit ergibt sich auch hier beim neutralen Strom kein unterschiedlicher Isospinfaktor für Protonen und Neutronen.

### 3.2.4 Hadronischer Strom

Mit Hilfe der letzten beiden Abschnitte lassen sich nun die hadronischen Ströme für die oben genannten Prozesse leicht angeben. Die Normierung der Spinoren ist explizit im Anhang E gegeben.

#### **Geladener Strom**

Der geladene Strom lautet:

$$J^{\mu} = iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(p_{\Delta})\bar{u}(\vec{p}') P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)u(\vec{p}).$$

$$(3.49)$$

Dabei ist

$$C^{\Delta} = \begin{cases} 1 & \text{für Protonen} \\ \frac{1}{3} & \text{für Neutronen} \end{cases}$$
(3.50)

das Produkt der Isospinfaktoren der beiden Vertizes. Die Spinoren  $u(\vec{p})$  und  $\bar{u}(\vec{p}')$  beschreiben die ein- bzw. auslaufenden Nukleonen und deren Impulsverteilungen.

#### **Neutraler Strom**

Der neutrale Strom lautet:

$$J^{\mu} = i \frac{f^*}{m_{\pi}} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^2 - M_{\Delta}^2 + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(p_{\Delta})\bar{u}(\vec{p}')P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)u(\vec{p}).$$
(3.51)

## 4 Kernphysik

Um unser Modell für die kohärente Produktion von Pionen an  ${}^{12}C$  zu entwickeln, ist es notwendig, die Zustände, in denen sich die Nukleonen im Kern befinden, möglichst gut beschreiben zu können. Ziel dieses Kapitels ist es daher, die besetzten Zustände im Kern durch die Angabe von Quantenzahlen und Bindungsenergien zu charakterisieren und die Spinoren dieser Zustände zu konstruieren.

Näherungsweise behandeln wir den Kern von <sup>12</sup>C als sphärisch symmetrisch. Für einen solchen Kern lässt sich ein relativistisches, ortsabhängiges und ebenfalls sphärisch symmetrisches Einteilchenpotential angeben. Wir betrachten nun ein relativistisches Kernmodell (s. [SW86]): Die Nukleonen werden durch ein Dublett  $\Psi = (\psi_p, \psi_n)$  dargestellt, die Wechselwirkungen werden durch die folgenden Austauschteilchen vermittelt:

 $\phi$ : neutrales skalares Meson ( $\sigma$ -Meson)  $V_{\mu}$ : neutrales Vektormeson ( $\omega$ -Meson)  $A_{\mu}$ : Photon.

Die vollständige Lagrange-Dichte lautet:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left( \gamma_{\mu} (i\partial^{\mu} - g_{v}V^{\mu}) - (M - g_{s}\phi) \right) \Psi + \frac{1}{2} (\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - m_{s}^{2}\phi^{2}) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{v}^{2}V_{\mu}V^{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{(\gamma)}F^{(\gamma)\mu\nu} - e\bar{\Psi}\hat{Q}\gamma_{\mu}\Psi A^{\mu}$$
(4.1)

mit  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}V_{\nu} - \partial_{\nu}V_{\mu}$ ,  $F_{\mu\nu}^{(\gamma)} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$ , den beiden Kopplungskonstanten  $g_{v}$ und  $g_{s}$  sowie dem elektrischen Ladungsoperator  $\hat{Q}$ .

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \tag{4.2}$$

folgen die Bewegungsgleichungen für die Mesonen-Felder

$$(\partial^2 + m_s^2)\phi = g_s \bar{\Psi}\Psi \tag{4.3}$$

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} + m_v^2 V^{\nu} = g_v \bar{\Psi}\gamma^{\nu}\Psi, \qquad (4.4)$$

für das Photon

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu}_{(\gamma)} = e\bar{\Psi}\hat{Q}\gamma^{\mu}\Psi \tag{4.5}$$

und für die Nukleonen-Felder

$$\left(\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - g_{v}V_{\mu}) - (M - g_{s}\phi)\right)\psi_{n} = 0 \tag{4.6}$$

$$(\gamma^{\mu}(i\partial_{\mu} - g_{v}V_{\mu} - eA_{\mu}) - (M - g_{s}\phi))\psi_{p} = 0.$$
(4.7)

Nun gehen wir über zur Mean-Field-Theory, d.h. wir gehen von den Mesonen-Feldoperatoren über zu den Erwartungswerten. Also

$$g_s \phi \rightarrow V_s$$
 (4.8)

$$g_v V_\mu \to \delta_{\mu 0} V_v^n \tag{4.9}$$

$$g_v V_\mu - eA_\mu \quad \to \quad \delta_{\mu 0} V_v^p = \delta_{\mu 0} (V_v^n + V_C). \tag{4.10}$$

Letzteres gilt, weil der Erwartungswert von  $\vec{V}$  aufgrund der Rotationssymmetrie verschwindet. Im Falle der Protonen muss der Coulombanteil  $V_C$  explizit berücksichtigt werden.

Damit ergibt sich die zu lösende Diracgleichung

$$(i\partial - M + \gamma^0 V_v^{p,n} - V_s) \psi_{p,n} = 0.$$
(4.11)

Diese Gleichung wird mit dem Programm RWAVES ([GVEH+93]) numerisch gelöst mit den Potentialen in Wood-Saxon-Form

$$V_i(r) = V_i^0 \left( 1 + \exp\left(\frac{r - r_i A^{1/3}}{a_i}\right) \right)^{-1}$$
(4.12)

und dem Coulombpotential einer homogen geladenen Kugel mit Z - 1 Protonen

$$V_C(r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 3 - \left(\frac{r}{r_C}\right)^2 \right) (Z - 1) \frac{\alpha}{r_C} & \text{für } r \le r_C \\ (Z - 1) \frac{\alpha}{r} & \text{für } r > r_C, \end{cases}$$
(4.13)

wobei  $\alpha$  die Feinstrukturkonstante und  $r_C = 1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$  den Ladungsradius bezeichnet.

Die Potentialparameter  $V_i^0$ ,  $r_i$  und  $a_i$  müssen für jeden Kern separat bestimmt werden, so dass die experimentell gemessenen Grundzustandseigenschaften möglichst gut reproduziert werden. In [Pet98] werden die folgenden experimentellen Größen verwendet:

- die Separationsenergie des am schwächsten gebundenen Zustands für Protonen und Neutronen,
- die Lage des ersten Minimums im Ladungsformfaktor,
- die Höhe des zweiten Maximums im Ladungsformfaktor,
- der mittlere Ladungsradius.

Für  ${}^{12}C$  erhält [Pet98] die folgenden Werte für die Potentialparameter:

$$V_v = 385,7 \text{ MeV}$$
  
 $r_v = 1,056 \text{ fm}$   
 $a_v = 0,427 \text{ fm}$   
 $V_s = -470,4 \text{ MeV}$   
 $r_s = 1,056 \text{ fm}$   
 $a_s = 0,447 \text{ fm}$ 

Abbildung 4.1 zeigt die resultierenden Potentiale für Protonen und Neutronen. Dargestellt sind jeweils der repulsive vektorielle und der attraktive skalare Anteil des Potentials sowie die Summe der beiden. Die Potentiale sind für Protonen und Neutronen nahezu identisch.

Die Lösung der Gleichung (4.11) lässt sich schreiben als ([SLM06][Pet98])

$$\psi_{n\ell JM}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(r)\mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{r}) \\ -ig_{n\ell'J}(r)\mathcal{Y}_{J\ell'}^{M}(\hat{r}) \end{pmatrix}$$
(4.14)

mit  $\ell' = 2J - \ell$  und

$$\mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{r}) = \begin{pmatrix} \langle J, M | \ell, M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \\ \langle J, M | \ell, M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \end{pmatrix}.$$
(4.15)

Dies bedeutet, dass sich die Wellenfunktion in einen radialen und einen einfachen winkelabhängigen Teil aufspalten lässt. Die Normierung der Wellenfunktion ist gegeben durch

$$1 = \int d^3 r \psi^{\dagger}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = \int r^2 dr \left( f^2(r) + g^2(r) \right).$$
(4.16)



Abbildung 4.1: Die Abbildung zeigt die Potentiale für Protonen (a) und Neutronen (b). Die durchgezogenen Linien zeigen jeweils das gesamte Potential, das sich aus dem repulsiven Vektoranteil und dem attraktiven skalaren Anteil zusammensetzt (gestrichelte Linien). Man erkennt, dass die Potentiale für Protonen und Neutronen nahezu identisch sind.

In  ${}^{12}C$  sind die folgenden Zustände besetzt:

	$\ell$	J	M	$E_b$
Protonen:	0	1/2	-1/2, 1/2	-39.43
	1	3/2	-3/2, -1/2, 1/2, 3/2	-15.69
Neutronen:	0	1/2	-1/2, 1/2	-42.75
	1	3/2	-3/2, -1/2, 1/2, 3/2	-18.60

In Abbildung 4.2 sind die mit RWAVES berechneten radialen Wellenfunktionen f und g der besetzten Zustände im Ortsraum dargestellt. Abbildung 4.3 zeigt diese in einer halblogarithmischen Darstellung.

Für diese Arbeit benötigen wir die Wellenfunktionen im Impulsraum, welche durch die Transformation

$$\psi_{n\ell JM}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \int d^3 r \exp(-i\vec{k}\vec{r}) \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(r)\mathcal{Y}_{J\ell}^M(\hat{r}) \\ -ig_{n\ell'J}(r)\mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\hat{r}) \end{pmatrix}$$
(4.17)

 $\operatorname{mit}$ 

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}^{*}(\hat{k}) Y_{\ell m}(\hat{r})$$
(4.18)

$$e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (-i)^{\ell} j_{\ell}(kr) Y_{\ell m}(\hat{k}) Y_{\ell m}^{*}(\hat{r})$$
(4.19)

und den sphärischen Besselfunktionen  $j_\ell$ aus den Ortsraumwellenfunktionen hervorgehen. Diese lassen sich schreiben als

$$\psi_{n\ell JM}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(k) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\hat{k}) \\ -ig_{n\ell'J}(k) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\hat{k}) \end{pmatrix}$$
(4.20)

mit  $\ell' = 2J - \ell$  und mit

$$f_{n\ell J}(k) = 4\pi (-i)^{\ell} \int r^2 j_{\ell}(kr) f_{n\ell J}(r) dr$$
(4.21)

$$g_{n\ell'J}(k) = 4\pi (-i)^{\ell'} \int r^2 j_{\ell'}(kr) g_{n\ell'J}(r) dr.$$
(4.22)

Die in den Impulsraum transformierten radialen Wellenfunktionen der in <sup>12</sup>C besetzten Zustände sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Aufgrund der auftretenden Vorzeichenwechsel wurde der Absolutbetrag der Wellenfunktionen aufgetragen.



Abbildung 4.2: Die Abbildung zeigt die radialen Wellenfunktionen für Protonen (a) und Neutronen (b) im Ortsraum. Dargestellt sind jeweils die Funktionen f und g der in <sup>12</sup>C besetzten Zustände. Aus Gleichung (4.14) und der Tabelle auf S.39 ergibt sich, dass  $f_{\ell=0}$  und  $g_{\ell'=1}$  dem Spinor  $\psi_{\ell=0}$ , sowie  $f_{\ell=1}$  und  $g_{\ell'=2}$  dem Spinor  $\psi_{\ell=1}$  zugeordnet sind.



Abbildung 4.3: Wie in Abbildung 4.2 sind die radialen Wellenfunktionen für Protonen (a) und Neutronen (b) im Ortsraum für  $\ell = 0$  und  $\ell = 1$  dargestellt. In dieser Abbildung wurde eine halblogarithmische Darstellung gewählt. Der Knick für  $\ell' = 2$  nahe r = 0 ist auf numerische Fehler zurückzuführen.



(b) Neutronen

Abbildung 4.4: Die Abbildung zeigt die Absolutbeträge der Wellenfunktionen im Impulsraum für Protonen (a) und Neutronen (b). Dargestellt sind jeweils |f(p)| für  $\ell = 0$  (durchgezogene Linie) und  $\ell = 1$  (gestrichelte Linie, lange Striche) sowie |g(p)| für  $\ell' = 1$  (gestrichelte Linie, mittlere Länge) und  $\ell' = 2$  (gestrichelte Linie, kurze Striche)

Die Normierung der Wellenfunktionen im Impulsraum ist analog zum Ortsraum:

$$1 = \int d^3k \psi^{\dagger}(\vec{k})\psi(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \left(f^2(k) + g^2(k)\right), \qquad (4.23)$$

wobei die numerische Abweichung von dieser Normierung weniger als 0,01% beträgt.

Mit Gleichung (4.20) haben wir nun einen Ausdruck für die Impulsraumspinoren der im Kern gebundenen Zustände gefunden, die in Kapitel 6.2.2 explizit in die Berechnungen zur kohärenten Produktion von Pionen an <sup>12</sup>C eingehen.

# Teil II

# Neutrinoinduzierte, kohärente Pionenproduktion

# 5 Experimentelle Ansätze

In diesem Abschnitt wird auf die experimentellen Ergebnisse der neutrinoinduzierten, kohärenten Pionenproduktion eingegangen. Viele Messungen liegen allerdings nur für Neutrinoenergien von 7 bis 100 GeV ([V+93], [A+89], [M+86], [G+86], [W+93]) vor und nicht für den in dieser Arbeit betrachteten Energiebereich um 1 GeV. Für diese höheren Energien ergeben sich Übereinstimmungen mit dem Modell von Rein und Sehgal [RS83], dass Anfang der 1980er Jahre entwickelt wurde. Es wird noch immer in vielen Monte-Carlo-Generatoren für Neutrinooszillationsexperimente benutzt, obwohl es inzwischen insbesondere für die hier betrachteten Energien notwendig erscheint modernere Ansätze zu verwenden.

Erste Messungen für niedrigere Neutrinoenergien (um 1 GeV) werden u.a. von der K2K-Kollaboration (KEK to Kamioka,  $[A^+06]$ ) und MiniBooNE ( $[AA^+07]$ ) durchgeführt. Bei beiden handelt es sich um *long-baseline*-Experimente zur Untersuchung von Neutrinooszillationen.

In zwei aktuellen Veröffentlichungen ([H+05] und [San06]) liefert die K2K-Kollaboration ein erstes experimentelles Ergebnis für neutrinoinduzierte, kohärente Pionenproduktion. Die Messung an Kohlenstoff für eine mittlere Neutrinoenergie von 1,3 GeV und geladene Ströme wurde an dem K2K-Nahdetektor SciBar-MRD ([N+04], [I+02]) durchgeführt. Die Ereignisse durch geladene Ströme (CC) werden anhand des Kriteriums ausgewählt, dass mindestens eine Spur aus dem Tracking-Detektor mit dem Myon-Detektor in Verbindung gebracht werden kann. Dies bringt eine Schwelle des Myonimpulses  $p_{\mu}$  von 450 MeV mit sich. Die CC-Ereignisse mit mehr als einer Teilchenspur werden anhand von kinematischen Informationen in quasielastische und nicht-quasielastische Ereignisse getrennt. Zu letzteren zählen auch die Signale für die kohärente Pionenproduktion. Um die Pionen zu identifizieren wird die Information über den Energieverlust (dE/dx-Information) der kürzeren Spur ausgewertet. Der Untergrund wird nun dadurch reduziert, dass man verlangt, dass die kürzere Spur im Wesentlichen in der Richtung des einfallenden Neutrinostrahls liegt und dass das rekonstruierte  $q^2$  weniger als 0,1 GeV<sup>2</sup> beträgt. Diese Bedingungen entsprechen der Erwartung, dass beim kohärenten Prozess nur ein relativ kleiner Impulsübertrag auf den Kern stattfindet, da sich der Kern als ganzes nach der Reaktion in seinem Grundzustand befindet. Nach Abzug des Hintergrunds und Anwendung von Effizienzkorrekturen wird von K2K kein Hinweis auf neutrinoinduzierte kohärente Produktion geladener Pionen gefunden und die Obergrenze mit 0,60% (bei 90% C.L.) des totalen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion mit geladenem Strom angegeben. Diese

Obergrenze ist nicht verträglich mit dem Modell von Rein und Sehgal.

Nach der Veröffentlichung der K2K-Ergebnisse für geladene Pionen folgte eine Analyse der MiniBooNE-Kollaboration ([Lin07]) für neutrale Pionen. Um die Ereignisse mit einem neutralen Pion im Endzustand aus den Daten auszuwählen, werden wie im Falle der K2K-Analyse verschiedene Kriterien (*cuts*) angewandt: Nach dem Ausschluss von Ereignissen durch geladene Ströme oder durch kosmische Strahlung durch die sogenannten *pre-cuts*, erfolgt eine Einteilung in  $\mu$ -artige, *e*-artige und  $\pi^0$ -artige Ereignisse mittels einer *likelihood*-Analyse. In Kombination mit einem cut in der  $\gamma\gamma$ -invarianten Masse erhält man, so die Autoren,  $\pi^0$ -Ereignisse ohne größere Verunreinigungen. Um diese dann den physikalischen Prozessen zuordnen zu können, erfolgen Fits mit jeweils einem Modell für den inkohärenten und kohärenten Prozess. Letzteres ist wieder das oben genannte Modell von Rein und Sehgal. Das Ergebnis dieser Analyse ist ein kohärenter Anteil von (19,5 ± 1,1)% am gesamten Wirkungsquerschnitt für neutrale Ströme. Es ist jedoch wichtig anzumerken, dass es sich hierbei um eine modellabhängige Analyse handelt und damit die Güte des Ergebnisses auch von der Anwendbarkeit des Modells abhängt.

Vor diesem Hintergrund ist es notwendig, die bestehenden theoretischen Modelle weiter zu verbessern, wozu in dieser Arbeit beigetragen werden soll. Des Weiteren ist es unerlässlich, dass diese über das Modell von Rein und Sehgal hinausgehenden theoretischen Entwicklungen in Zukunft auch in die Simulationen der Experimente einfließen.

## 6 Theoretische Beschreibung

In diesem Kapitel wird das in dieser Arbeit verwendete theoretische Modell zur Beschreibung der neutrinoinduzierten, kohärenten Pionenproduktion vorgestellt. Zunächst werden die verwendeten Näherungen eingeführt und erläutert. Im weiteren Verlauf werden die konkreten Rechnungen erläutert. Zum Vergleich mit den bestehenden Ansätzen wird schließlich die lokale Näherung diskutiert. Die Ergebnisse der vollen Rechnungen, sowie der Vergleich dieser mit den Ergebnissen der lokalen Näherung folgen im nächsten Kapitel.

## 6.1 Verwendete Näherungen

Bei der kohärenten Reaktion eines Neutrinos mit einem Kern wie  ${}^{12}C$  handelt es sich prinzipiell um eine Reaktion, die am gesamten Kern stattfindet, an der also alle zwölf Nukleonen des Kerns beteiligt sind. Die Nukleonen können sich prinzipiell untereinander beeinflussen und sind nicht unabhängig voneinander. Auch das auslaufende Pion kann mit dem ganzen Kern Endzustandswechselwirkungen (engl. *final state interactions (FSI)*) unterworfen sein. Der vollständige Prozess ist in Abbildung 6.1 veranschaulicht, lässt sich allerdings aufgrund seiner Komplexität in dieser Weise in der Praxis nicht behandeln.



Abbildung 6.1: Vollständiger Graph für Neutrino-Kern-Streuung

Ein erster Schritt zur Vereinfachung der Situation besteht darin, dass die FSI des Pions vom restlichen Prozess abgetrennt werden. Dabei wird zugelassen, dass das Pion mit dem gesamten Kern wechselwirken kann. Die Reaktion des einlaufenden Teilchens soll jedoch im Wesentlichen an einem Nukleon stattfinden. Anschließend wird über alle im Kern enthaltenen Nukleonen kohärent summiert. Dieses Vorgehen wird als Stoßnäherung bezeichnet (engl. *impulse approximation*). Abbildung 6.2 zeigt die beschriebene Näherung.



Abbildung 6.2: Stoßnäherung (mit FSI)

In dieser Arbeit wird allerdings eine noch weitergehende Näherung angewandt, in der die FSI zunächst nicht betrachtet werden. Dies entspricht einer ersten Näherung und könnte in einer weiterführenden Behandlung dieses Modells verbessert werden. Die Situation, wie sie in dieser Arbeit behandelt wird, ist in Abbildung 6.3 dargestellt. Die ein- und auslaufenden Teilchen werden dabei durch ebene Wellen beschrieben.



Abbildung 6.3: Stoßnäherung (ohne FSI)

Der Produktionsprozess in Abbildung 6.3 kann prinzipiell verschiedene Reaktionen einschließen. Das getroffene Nukleon kann entweder als intermediäres Nukleon an der Reaktion teilnehmen oder zu einer Resonanz angeregt werden. Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, dass der Produktionsprozess in Abbildung 6.3 durch die Anregung der Deltaresonanz dominiert wird. Dies ist in Abbildung 6.4 dargestellt.



Abbildung 6.4: Stoßnäherung (ohne FSI), mit Anregung der Deltaresonanz

Will man höhere Resonanzen als Korrekturen mit berücksichtigen, so ist dies für das vorliegende Modell ohne größere Schwierigkeiten möglich. Berechnungen an ungebundenen Protonen und Neutronen zeigen allerdings, dass höhere Resonanzen für den Energiebereich dieser Arbeit weitgehend vernachlässigbar sind. Abbildung 6.5 zeigt eine Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts  $\sigma$  in Abhängigkeit von der Neutrinoenergie  $E_{\nu}$  für den Prozess  $\nu_{\mu} + N \rightarrow \mu^{-} + R$ . Dargestellt sind jeweils für die Reaktion an Protonen und Neutronen die Beiträge der verschiedenen Resonanzen R, wobei Nukleonen-  $(I = \frac{1}{2})$  und Deltaresonanzen  $(I = \frac{3}{2})$  bis zum  $\Delta(1950)$ berücksichtigt wurden. Die Notation  $L_{2I,2J}$  in der Abbildung richtet sich nach dem Drehimpuls L der Resonanz, sowie deren Spin J und Isospin I und ist neben den Schreibweise mit N bzw.  $\Delta$  die übliche Notation bei Resonanzen. Wie man deutlich in der Abbildung erkennt, dominiert der Beitrag der Deltaresonanz (durchgezogene Linie) bei 1 GeV alle anderen Beiträge sehr deutlich. Beide Berechnungen wurden im Rahmen des Modells von Rein und Sehgal durchgeführt und stammen aus [Lei].

Bei der Beschreibung der Deltaresonanz werden Mediummodifikationen der Deltamasse und -breite im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Auch diese Näherung kann in einer weiterführenden Behandlung des Problems zurückgenommen werden.



Abbildung 6.5: Die Abbildung zeigt eine Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die Reaktion eines Neutrinos an einem freien Proton (a) und Neutron (b). Die durchgezogenen Linien zeigen jeweils den Beitrag der Deltaresonanz. Man erkennt, dass bei 1 GeV Neutrinoenergie praktisch nur die Anregung der Deltaresonanz relevant ist. Beide Berechnungen stammen aus [Lei].

## 6.2 Rechnungen

Wie bereits oben erläutert, wird in dieser Arbeit in der sogenannten Stoßnäherung gearbeitet, das bedeutet, dass stets nur ein Nukleon an dem Reaktionsprozess beteiligt ist. Zwischen zwei Einteilchen-Nukleonenzuständen kann das Übergangsmatrixelement  $\langle f | T | i \rangle$  berechnet werden. Der Übergangsoperator ist

$$\hat{t} = \sum_{i,f} \langle f | T | i \rangle a_f^{\dagger} a_i \tag{6.1}$$

und damit das Matrixelement für den kohärenten Prozess (in Stoßnäherung)

$$\langle \Psi_A | \hat{t} | \Psi_A \rangle = \sum_{i,f} \langle \Psi_A | a_f^{\dagger} a_i | \Psi_A \rangle \langle f | T | i \rangle$$

$$= \sum_{\alpha} \langle \Psi_A | a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha} | \Psi_A \rangle \langle \alpha | T | \alpha \rangle$$

$$= \sum_{\alpha \text{bes.}} \langle \alpha | T | \alpha \rangle .$$

$$(6.2)$$

Dies bedeutet, dass bei der Berechnung des gesamten Matrixelements die Matrixelemente der einzelnen Reaktionen über alle im Kern besetzten Nukleonenzustände zu summieren sind.

## 6.2.1 Kinematik

Im Folgenden wollen wir die Kinematik des Problems besprechen und den differentiellen Wirkungsquerschnitt angeben. Wir betrachten zunächst den Fall des geladenen Stroms. Die Gesamtreaktion stellt sich wie folgt dar

$$\nu_{\ell}(k) + A(p_A) \rightarrow \ell(k') + A(p'_A) + \pi(k_{\pi}),$$

bzw. als Diagramm



Das Koordinatensystem soll im Folgenden das Kernruhesystem sein mit der z-Achse in Neutrino-Einfallsrichtung. Dies bedeutet für den Impuls des Neutrinos bzw. des Kerns

$$k = (E_{\nu}, 0, 0, E_{\nu})$$
$$p_A = (M_A, 0, 0, 0).$$

Damit folgt der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$d\sigma = \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E_\ell} \frac{d^3k_\pi}{(2\pi)^3 2E_\pi} \frac{d^3p'_A}{(2\pi)^3} \frac{(2\pi)^4 \delta \left(k + p_A - \left(k' + k_\pi + p'_A\right)\right)}{2\sqrt{(k \cdot p_A)^2 - m_\nu^2 M_A^2} / M_A} |\mathcal{M}|^2, \tag{6.3}$$

wobei für die Wellenfunktionen des auslaufenden Leptons und des Pions die Normierung auf  $2m_{\ell}$  bzw.  $2m_{\pi}$  gewählt wurde (siehe auch Anhang E). Die Wellenfunktionen der Kerne werden nicht auf 2M, sondern auf eins normiert (s. auch [Pet98]). Der Wurzelausdruck im Nenner vereinfacht sich aufgrund des gewählten Koordinatensystems und der vernachlässigbaren Neutrinomasse wie folgt:

$$\sqrt{(k \cdot p_A)^2 - m_\nu^2 M_A^2} = E_\nu M_A.$$
(6.4)

Mit  $dk' = \frac{E_\ell}{|\vec{k'}|} dE_\ell$ folgt dann

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\ell}dE_{\ell}d\Omega_{\pi}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'||\vec{k}_{\pi}|}{8E_{\nu}} + 4\text{-Impulserhaltung.}$$
(6.5)

bzw.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\ell}d|\vec{k'}|d\Omega_{\pi}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k'}|^2|\vec{k}_{\pi}|}{8E_{\nu}E_{\ell}} + 4\text{-Impulserhaltung}$$
(6.6)

mit  $E_{\ell} = \sqrt{\vec{k}'^2 + m_{\ell}^2}.$ 

Vernachlässigt man den Kernimpuls, so kann man den Betrag des Pionenimpulses durch den Impulsbetrag des auslaufenden Leptons ausdrücken. Mit Impulserhaltung

$$E_{\pi} = E_{\nu} + M_A - E_{\ell} - E'_A \approx E_{\nu} - E_{\ell}$$
(6.7)

gilt

$$|\vec{k}_{\pi}| = \sqrt{E_{\pi}^2 - m_{\pi}^2} \approx \sqrt{(E_{\nu} - E_{\ell})^2 - m_{\pi}^2}.$$
(6.8)

Damit ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\ell}d|\vec{k}'|d\Omega_{\pi}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'|^2 \sqrt{(E_{\nu} - E_{\ell})^2 - m_{\pi}^2}}{8E_{\nu}E_{\ell}}$$
$$= \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'|^2 \sqrt{\left(E_{\nu} - \sqrt{\vec{k}'^2 + m_{\ell}^2}\right)^2 - m_{\pi}^2}}{8E_{\nu}\sqrt{\vec{k}'^2 + m_{\ell}^2}}$$
(6.9)

und die Kinematik ist vollständig festgelegt.

Der neutrale Strom lässt sich mit dem Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\nu}dE_{\nu}d\Omega_{\pi}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'||\vec{k}_{\pi}|}{8E_{\nu}} + 4\text{-Impulserhaltung}$$
(6.10)

völlig analog behandeln.

## 6.2.2 Dynamik

Die Dynamik des betrachteten Prozesses wird bestimmt durch das invariante Matrixelement  $\mathcal{M}$ . Wir schreiben dieses nun wie in Kapitel 2.2 erläutert über die Ströme

$$\mathcal{M} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\alpha J^\alpha \tag{6.11}$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{G_F^2}{2} L \cdot H \tag{6.12}$$

mit leptonischem Strom j, hadronischem Strom J, Leptontensor L und Hadrontensor H.

Der leptonische Anteil ist gegeben durch:

\_

$$L_{\alpha\beta} = \sum_{\text{spins}} j_{\alpha}^{\dagger} j_{\beta} \text{ mit}$$
  

$$j_{\alpha}^{CC} = \bar{u}_{\ell} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) u_{\nu} \text{ bzw.}$$
  

$$j_{\alpha}^{NC} = \bar{u}_{\nu} \gamma_{\alpha} (1 - \gamma_5) u_{\nu}.$$
(6.13)

Der hadronische Anteil

$$H_{\alpha\beta} = J_{\alpha}^{\dagger} J_{\beta} \tag{6.14}$$

ist naturgemäß komplizierter. Wie oben erläutert, berücksichtigen wir im Folgenden aufgrund ihrer Dominanz nur solche Prozesse, bei denen das getroffene Nukleon zu einer Deltaresonanz angeregt wird.

#### Geladener Strom

Der hadronische Strom für die Reaktion an einem freien Nukleon mit Impuls  $\vec{p}$  (s. [HNV07]) lautet in diesem Fall

$$J^{\mu} = iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(p_{\Delta})\bar{u}(\vec{p}') P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)u(\vec{p}) + \text{u-Term}$$

$$(6.15)$$

wobei für  $u(\vec{p})$  hier der freie Nukleonenspinor einzusetzten ist.  $\Gamma^{\beta\mu}$  enthält die in Kapitel 3.2.3 eingeführten Formfaktoren,  $P_{\alpha\beta}$  bezeichnet den Spin- $\frac{3}{2}$ -Projektor aus Gleichung (3.5),  $C^{\Delta}$  ist der Isospinfaktor. Es gilt

$$C^{\Delta} = \begin{cases} 1 & \text{für Protonen} \\ \frac{1}{3} & \text{für Neutronen} \end{cases}$$

$$p_{\Delta} = p + q = p + k - k' \text{ und}$$

$$q = k - k'. \tag{6.16}$$

Im Falle der kohärenten Pionenproduktion am Kern müssen in Gleichung (6.15) statt der freien Nukleonenspinoren u die Spinoren der gebundenen Zustände  $\psi$ , wie sie in Kapitel 4 eingeführt wurden, eingesetzt werden. Des Weiteren sind die Impulse der einlaufenden Nukleonen nicht fest, sondern gehorchen einer bestimmten Impulsverteilung. Daher muss über alle Nukleonenimpulse im Kern integriert werden. Aus Gleichung (6.15) ergibt sich somit für den gesamten Kern

$$J^{\mu} = \int d^{3}p d^{3}p' \delta(\vec{p}' - \vec{k} - \vec{p} + \vec{k}' + \vec{k}_{\pi})$$

$$\sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}}$$

$$F(p_{\Delta})\bar{\psi}(\vec{p}')P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p})$$
+u-Terme
$$= \int d^{3}p \sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}}$$

$$F(p_{\Delta})\bar{\psi}(\vec{p}_{\Delta} - \vec{k}_{\pi})P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p})$$
+u-Terme
$$(6.17)$$

mit den gebundenen Nukleonenspinoren

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(p) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\hat{p}) \\ -ig_{n\ell'J}(p) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\hat{p}) \end{pmatrix}.$$
(6.18)

Für die u-Terme ([HNV07]) erhält man analoge Ausdrücke mit

$$\sum_{\text{Nukleonen}} i \frac{C^{C\Delta}}{\sqrt{3}} \frac{f^*}{m_{\pi}} \cos \theta_C \frac{k_{\pi}^{\beta}}{p_{\Delta}^2 - M_{\Delta}^2 + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(p_{\Delta}) \bar{\psi}(\vec{p}\,') \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha}(p,q) P_{\alpha\beta}(p_{\Delta}) \psi(\vec{p}\,)$$
(6.19)

 $\operatorname{mit}$ 

$$C^{C\Delta} = \begin{cases} 1 & \text{für Protonen} \\ 3 & \text{für Neutronen} \end{cases}$$
(6.20)

$$\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha}(p,q) = \gamma^0 \left(\Gamma^{\alpha\mu}(p,-q)\right)^{\dagger} \gamma^0$$
(6.21)

$$p_{\Delta} = p' - q. \tag{6.22}$$

Wir gehen in dieser Arbeit davon aus, dass die direkten Terme dominieren und vernachlässigen den Anteil der u-Terme in unseren Rechnungen.

Im folgenden Kapitel werden unsere Ergebnisse für die differentiellen Wirkungsquerschnitte  $\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{\ell}}$  und  $\frac{d\sigma}{dk_{\pi}}$  präsentiert. Die entsprechenden Ausdrücke werden hier nun explizit angegeben, wobei stets der Kernimpuls vernachlässigt wird. Aus Gleichung (6.9) folgt mit  $d\Omega_{\ell} = d\cos\theta_{\ell} d\phi_{\ell}$ :

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_{\ell}} = \int d\phi_{\ell} d|\vec{k}'| d\Omega_{\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'|^2 \sqrt{(E_{\nu} - E_{\ell})^2 - m_{\pi}^2}}{8E_{\nu}E_{\ell}} \\
= 2\pi \int d|\vec{k}'| d\Omega_{\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(2\pi)^5} \frac{|\vec{k}'|^2 \sqrt{(E_{\nu} - E_{\ell})^2 - m_{\pi}^2}}{8E_{\nu}E_{\ell}}$$
(6.23)

mit  $E_\ell = \sqrt{\vec{k}'^2 + m_\ell^2}.$ 

Schreibt man in Gleichung (6.9) die Energieerhaltung explizit in Form einer Deltafunktion so folgt mit  $dE_{\pi} = \frac{|\vec{k}_{\pi}|}{E_{\pi}} d|\vec{k}_{\pi}|$  und  $dE_{\ell} = \frac{|\vec{k}'|}{E_{\ell}} d|\vec{k}'|$ 

$$\frac{d\sigma}{dk_{\pi}} = \int d\Omega_{\ell} dE_{\ell} d\Omega_{\pi} \frac{|\mathcal{M}|^{2}}{(2\pi)^{5}} \frac{|\vec{k}_{\pi}|^{2} |\vec{k}'|}{8E_{\pi}E_{\nu}} \delta\left(E_{\nu} - E_{\ell} - E_{\pi}\right) 
= \int d\Omega_{\ell} dE_{\ell} d\Omega_{\pi} \frac{|\mathcal{M}|^{2}}{(2\pi)^{5}} \frac{|\vec{k}_{\pi}|^{2} \sqrt{E_{\ell}^{2} - m_{\ell}^{2}}}{8E_{\pi}E_{\nu}} \delta\left(E_{\nu} - E_{\ell} - E_{\pi}\right) 
= \frac{1}{(2\pi)^{5}} \frac{|\vec{k}_{\pi}|^{2} \sqrt{(E_{\nu} - E_{\pi})^{2} - m_{\ell}^{2}}}{8E_{\pi}E_{\nu}} \int d\Omega_{\ell} d\Omega_{\pi} |\mathcal{M}|^{2}.$$
(6.24)

mit  $E_{\pi} = \sqrt{\vec{k}_{\pi}^2 + m_{\pi}^2}.$ 

### **Neutraler Strom**

Für den neutralen Strom gelten die obigen Formeln unter Berücksichtigung der Überlegungen in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 entsprechend. Um den Strom für die direkte Anregung der Deltaresonanz zu erhalten führt man in Gleichung (6.15) die folgende Ersetzung durch

$$C_{\Delta}\sqrt{3} \to \sqrt{\frac{2}{3}}.$$
 (6.25)

## 6.3 Lokale Näherung

Bevor wir im nächsten Kapitel unsere Ergebnisse präsentieren, wird in diesem Abschnitt die in der Literatur häufig gebrauchte lokale Näherung diskutiert. Als Ausgangspunkt für die lokale Näherung betrachten wir den exakten Ausdruck für den geladenen Strom aus Gleichung (6.17) und vernachlässigen die u-Terme

$$J^{\mu} = \int d^{3}p \sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}}$$
$$F(p_{\Delta})\bar{\psi}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi})P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p}), \qquad (6.26)$$

wobei die Größen  $P_{\alpha\beta}$  und  $\Gamma^{\beta\mu}$  in den Gleichungen (3.5) und (3.33) definiert wurden. Um die einzelnen Abhängigkeiten genau auflösen zu können, müssen wir unsere Notation bezüglich der Nukleonenzustände präzisieren. Alle Größen, die vom Bindungszustand *i* des Nukleons abhängen, werden explizit mit einem einen Index *i* versehen. Den Strom kann man somit schreiben als

$$J^{\mu} = i \sum_{i} \int d^{3}p \bar{\psi}_{i}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi}) \hat{O}_{i}^{\mu}(k_{\pi}, p_{i}, q) \psi_{i}(\vec{p}).$$
(6.27)

Nun wenden wir wie in [ARGHVV07] die lokale Näherung an. Dies bedeutet, dass in  $\hat{O}_i^{\mu}(k_{\pi}, p_i, q)$  der Impuls des einlaufenden Nukleons als fest angenommen wird. Speziell wird der Impuls so gewählt, dass sich der Impulsübertrag auf den Kern  $\vec{q} - \vec{k}_{\pi}$  gleichmäßig auf das einlaufende und das auslaufende Nukleon verteilt. Also

$$\vec{p} \rightarrow \tilde{\vec{p}} = -(\vec{q} - \vec{k}_{\pi})/2 \quad \text{und} 
\vec{p}' \rightarrow \tilde{\vec{p}}' = (\vec{q} - \vec{k}_{\pi})/2.$$
(6.28)

Für den Viererimpuls des Nukleons i und der Deltaresonanz folgt daraus, dass diese nicht mehr von  $\vec{p}$  abhängen:

$$p_{i} \rightarrow \tilde{p}_{i} = (\tilde{E}_{i}, -(\vec{q} - \vec{k}_{\pi})/2)$$

$$p_{\Delta}^{(i)} \rightarrow \tilde{p}_{\Delta}^{(i)} = (\tilde{E}_{i} + q_{0}, (\vec{q} + \vec{k}_{\pi})/2).$$
(6.29)

Dies bedeutet, dass der Operator  $\hat{O}$  nun nicht mehr von  $\vec{p}$  abhängt:

$$\hat{O}_{i}^{\mu}(k_{\pi}, p_{i}, q) \to \hat{O}_{i}^{\mu}(k_{\pi}, \tilde{p}_{i}, q).$$
 (6.30)

Daraus folgt für den Strom

$$J^{\mu} = i \sum_{i} \int d^{3}p \bar{\psi}_{i} \left(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi}\right) \hat{O}_{i}^{\mu} \left(k_{\pi}, \tilde{p}_{i}, q\right) \psi_{i} \left(\vec{p}\right)$$
  
$$= i \sum_{i} C_{i}^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{(\tilde{p}_{\Delta}^{(i)})^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(\tilde{p}_{\Delta}^{(i)})$$
  
$$\int d^{3}p \bar{\psi}_{i} \left(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi}\right) P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta}^{(i)}) \Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}_{i}, q) \psi_{i} \left(\vec{p}\right).$$
(6.31)

Vernachlässigt man die Tatsache, dass die Energie des Nukleons vom Besetzungszustand abhängt, z.B. indem man eine mittlere Bindungsenergie annimmt, so können die vom Nukleonenimpuls abhängenden Größen aus der Summe gezogen werden. Der Stromanteil der Protonen lässt sich somit schreiben als

$$J_{p}^{\mu} = i \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(\tilde{p}_{\Delta})$$

$$\int d^{3}p \sum_{\text{Protonen } i} \bar{\psi}_{i}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi}) P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta}) \Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q) \psi_{i}(\vec{p})$$

$$= i \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} F(\tilde{p}_{\Delta})$$

$$\left(\int d^{3}p \sum_{\text{Protonen } i} \left[\psi_{i}(\vec{p})\bar{\psi}_{i}(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_{\pi})\right]_{KJ}\right) \left[P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q)\right]_{JK},$$
(6.32)

wobei die großen lateinischen Indizes die  $4 \times 4$ -Struktur der Objekte auflösen. Über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren.

Mit der Dichtematrix

$$\begin{aligned} [\hat{\rho}(\vec{p})]_{KJ} &= \int d^{3}p' \sum_{i} \left[ \psi_{i}(\vec{p}') \bar{\psi}_{i}(\vec{p}' + \vec{p}) \right]_{KJ} \\ &= \int d^{3}r e^{i\vec{p}\vec{r}} \sum_{i} \left[ \psi_{i}(\vec{r}) \bar{\psi}_{i}(\vec{r}) \right]_{KJ} \\ &= \int d^{3}r e^{i\vec{p}\vec{r}} \left[ \hat{\rho}(\vec{r},\vec{r}) \right]_{KJ} \end{aligned}$$
(6.33)

gilt

$$\int d^3p \sum_{\text{Protonen } i} \left[ \psi_i(\vec{p}) \bar{\psi}_i(\vec{p} + \vec{q} - \vec{k}_\pi) \right]_{KJ} = \left[ \hat{\rho}_p(\vec{q} - \vec{k}_\pi) \right]_{KJ}.$$
(6.34)

60

Setzt man dies in den Strom für Protonen ein, so erhält man

$$J_{p}^{\mu} \propto \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \left[ \hat{\rho}(\vec{q} - \vec{k}_{\pi}) \right]_{KJ} \left[ P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q) \right]_{JK}$$

$$= \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \operatorname{sp} \left( \hat{\rho}(\vec{q} - \vec{k}_{\pi}) \left( P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q) \right) \right)$$

$$= \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \operatorname{sp} \left( \int d^{3}r e^{i(\vec{q} - \vec{k}_{\pi})\vec{r}} \hat{\rho}_{A}(\vec{r}, \vec{r}) \left( P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q) \right) \right)$$

$$= \int d^{3}r e^{i(\vec{q} - \vec{k}_{\pi})\vec{r}} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \operatorname{sp} \left( \hat{\rho}_{A}(\vec{r}, \vec{r}) \left( P_{\alpha\beta}(\tilde{p}_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(\tilde{p}, q) \right) \right),$$

$$(6.35)$$

wobei die Konstanten und der Formfaktor der Übersichtlichkeit halber hier weggelassen wurden.

Man kann nun  $\hat{\rho}$  näherungsweise aufspalten

$$\hat{\rho}_{A}(\vec{r},\vec{r}) \approx \rho(r) \frac{1}{2} \sum_{s} u_{s}(0) \bar{u}_{s}(0) = \rho(r) \frac{1}{2} \left( u_{+}(0) \bar{u}_{+}(0) + u_{-}(0) \bar{u}_{-}(0) \right)$$
(6.36)

wobei die Spinoren u(0) und  $\bar{u}(0)$  freie Spinoren für ruhende Nukleonen bedeuten

$$u_{+}(0) = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \quad u_{-}(0) = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$
 (6.37)

Um diese Näherung zu verstehen, betrachten wir zunächst den exakten Ausdruck

$$\hat{\rho}_{A}(\vec{r},\vec{r}) = \sum_{n\ell JM} \psi_{n\ell JM}(\vec{r}) \bar{\psi}_{n\ell JM}(\vec{r}) 
= \sum_{n\ell JM} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(r) \mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{r}) \\ -ig_{n\ell'J}(r) \mathcal{Y}_{J\ell'}^{M}(\hat{r}) \end{pmatrix} \left( f_{n\ell J}(r) \mathcal{Y}_{J\ell}^{\dagger M}(\hat{r}), -ig_{n\ell'J}(r) \mathcal{Y}_{J\ell'}^{\dagger M}(\hat{r}) \right)$$
(6.38)

und vernachlässigen anschließend Terme proportional zu gund  $g^2.$  Dies entspricht einer nicht-relativistischen Näherung und liefert

$$\hat{\rho}_A(\vec{r},\vec{r}) \approx \sum_{n\ell JM} f_{n\ell J}^2(r) \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\hat{r}) \mathcal{Y}_{J\ell}^{\dagger M}(\hat{r}) & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(6.39)

Mitteln wir über die Winkel, so ergibt sich

$$\mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{r})\mathcal{Y}_{J\ell}^{\dagger M}(\hat{r}) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \left( \begin{array}{cc} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2} & 0\\ 0 & \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2} \end{array} \right).$$
(6.40)

Daraus folgt für die Dichtematrix

$$\hat{\rho}_{A}(\vec{r},\vec{r}) \approx \sum_{n\ell JM} \frac{1}{4\pi} f_{n\ell J}^{2}(r) \left( u_{+}(0)\bar{u}_{+}(0) \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2} + u_{-}(0)\bar{u}_{-}(0) \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2} \right) \\ \approx \rho(r) \frac{1}{2} \left( u_{+}(0)\bar{u}_{+}(0) + u_{-}(0)\bar{u}_{-}(0) \right).$$
(6.41)

Mit dieser Näherung folgt unter Berücksichtigung von Protonen und Neutronen

$$J^{\mu} = \frac{i}{2} \int d^{3}r e^{i(\vec{q}-\vec{k}_{\pi})\vec{r}} \left(\rho_{p}(r) + \frac{\rho_{n}(r)}{3}\right)$$
$$-\frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3}\cos\theta_{C}F(\tilde{p}_{\Delta}) \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \operatorname{sp}\left(\bar{u}(0)P_{\alpha\beta}\Gamma^{\beta\mu}u(0)\right)$$
(6.42)

wobei die Spur die Summation über die Nukleonenspins bedeutet.

Ganz analog ergibt sich für den neutralen Strom

$$J^{\mu} = \frac{i}{\sqrt{6}} \int d^{3}r e^{i(\vec{q}-\vec{k}_{\pi})\vec{r}} \left(\rho_{p}(r) + \rho_{n}(r)\right)$$
  
$$-\frac{f^{*}}{m_{\pi}} F(\tilde{p}_{\Delta}) \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{\tilde{p}_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \operatorname{sp}\left(\bar{u}(0)P_{\alpha\beta}\hat{\Gamma}^{\beta\mu}u(0)\right).$$
(6.43)

Mit der lokalen Näherung hat man erreicht, dass nun die Kerneigenschaften, welche durch die Dichten  $\rho_p(r)$  und  $\rho_n(r)$  beschrieben werden, von der eigentlichen Produktion am Nukleon getrennt wurden. Letzteres wird durch den Spurterm beschrieben. Dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke in hohem Maße, s. z.B. [ARGHVV07].

Das Ortsintegral lässt sich einfach ausrechnen:

$$\int d^3 r e^{i(\vec{q}-\vec{k}_{\pi})\vec{r}}\rho(r) = \frac{4\pi}{|\vec{q}-\vec{k}_{\pi}|} \int r\sin(|\vec{q}-\vec{k}_{\pi}|r)\rho(r)dr,$$

wobei für  $\rho$  die Protonen- bzw. Neutronendichte einzusetzen ist.

# 7 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit präsentiert und mit den vorhandenen theoretischen und experimentellen Ergebnissen verglichen.

## 7.1 Lokale Näherung

Als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen dient die lokale Näherung. Wählen wir die gleiche Herangehensweise wie in [ARGHVV07], so werden die dort angegebenen Ergebnisse reproduziert. Abbildung 7.1 zeigt den Vergleich unserer Rechnung mit der aus [ARGHVV07] für die differentiellen Wirkungsquerschnitte  $d\sigma/dk_{\pi}$  und  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ für den CC-Prozess bei 1 GeV Neutrinoenergie. Man erkennt den ausgeprägten Peak in  $d\sigma/dk_{\pi}$  bei etwa 300 MeV und die stark in Vorwärtsrichtung konzentrierte Form von  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ . Letzteres ist typisch für den kohärenten Prozess, indem der Kern nicht nur als ganzes erhalten bleibt, sondern sich nach der Reaktion wieder in seinem Grundzustand befindet. Dies hat zur Folge, dass nur kleine Impulsüberträge ( $q^2$ klein) und dementsprechend nur kleine Winkel zum Querschnitt beitragen. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung zwischen unserer Rechnung und der von [ARGHVV07] zu erkennen bis auf minimale Abweichungen, die auf numerische Unterschiede zurückzuführen sind.

Im nächsten Schritt berechnen wir die Querschnitte in der lokalen Näherung mit den gleichen Methoden wie oben, jedoch mit den Dichten, die das Programm RWAVES liefert. Diese sind in Abbildung 7.2 zusammen mit den in [ARGHVV07] verwendeten, an experimentelle Daten angepassten Dichten dargestellt. Statt der eigentlichen Materiedichten  $\rho_{p,n}$ , die wir der Einfachheit halber benutzen, werden dort die Dichten der Zentren  $\rho'_{p,n}$  verwendet, wodurch die endliche Ausdehnung der Nukleonen berücksichtigt wird. Die experimentellen Daten sowie die Methode zur Berechnung der Dichte der Zentren finden sich in [NOGR93]. Der Vergleich des berechneten Wirkungsquerschnitts unter Verwendung der RWAVES-Dichten mit der lokalen Näherung aus [ARGHVV07] ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung der Kurven.

Die numerische Überprüfung der Normierung der verwendeten Dichten ergibt mit

$$N = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr \tag{7.1}$$

die folgenden Abweichungen:

	Ν	rel. Fehler in %
$\rho_p \text{ (RWAVES)}$	$6,\!00$	< 0,1
$\rho_n$ (RWAVES)	$6,\!00$	< 0,1
$\rho_{p,n}$ ([ARGHVV07])	$5,\!96$	0,7
$\rho'_{p,n}$ ([ARGHVV07])	$6,\!00$	< 0,1

Insgesamt ist festzustellen, dass das obige Kernmodell in der benutzten Implementierung RWAVES realistische Dichten liefert.



Abbildung 7.1: Die Abbildung zeigt für den Prozess mit einem positiv geladenen Pion im Endzustand in Teil (a) den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$ , in Teil (b)  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ . Die durchgezogene Linie entspricht jeweils der lokalen Rechnung unter gleichen Annahmen wie in [ARGHVV07]. Bis auf minimale Abweichungen, die auf numerische Unterschiede zurückzuführen sind, erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung mit den Berechnungen aus [ARGHVV07], die als gestrichelte Linien dargestellt sind.



Abbildung 7.2: Proton- und Neutrondichten  $\rho_p$  und  $\rho_n$  (durchgezogene bzw. lang gestrichelte Kurven) aus RWAVES zusammen mit den Dichten, die in [ARGHVV07] verwendet werden: die Materiedichte  $\rho_{p,n}$  und die Dichte der Zentren der Teilchen  $\rho'_{p,n}$  (mittlere bzw. kurze Striche). Für Protonen und Neutronen werden dort jeweils identische Dichten verwendet.


Abbildung 7.3: Die Abbildung zeigt für den Prozess mit einem positiv geladenen Pion im Endzustand in Teil (a) den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$ , in Teil (b)  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ . Die durchgezogene Linie entspricht jeweils der lokalen Rechnung unter gleichen Annahmen wie in [ARGHVV07], jedoch unter Verwendung der Dichten aus RWA-VES. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den Berechnungen aus [ARGHVV07] festzustellen, die als gestrichelte Linien dargestellt sind.

## 7.2 Volle Rechnung

In diesem Abschnitt betrachten wir die volle Rechnung, in der die lokale Näherung nicht mehr benutzt wird. Wie oben beschrieben wird nun explizit über die im Kern besetzten Zustände kohärent summiert.

#### **Geladener Strom**

Wir beginnen mit den geladenen Pionen im Endzustand und einer Neutrinoenergie von 1 GeV. Abbildung 7.4 zeigt als Ergebnis dieser Berechnung wiederum die beiden Wirkungsquerschnitte  $d\sigma/dk_{\pi}$  und  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ . Man erkennt, dass die Kurven in der vollen Rechnung nun deutlich tiefer liegen als in der lokalen Näherung, die zum Vergleich ebenfalls in der Abbildung dargestellt ist. Die generellen Eigenschaften bleiben aber weitgehend erhalten. Die Verteilung  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$  ist, wie zu erwarten war, nach wie vor stark in Vorwärtsrichtung gepeakt. Der Peak in  $d\sigma/dk_{\pi}$  ist nur leicht zu höheren Impulsen verschoben. Dies ist verständlich, da in der vollen Rechnung anders als bei Anwendung der lokalen Näherung die Bindungsenergie des getroffenen Nukleons berücksichtigt wird. Mit einer konstanten Verkleinerung der Deltamasse kann dieser Effekt näherungsweise ausgeglichen werden. Abbildung 7.5 zeigt neben der vollen Rechnung mit physikalischer Deltamasse und der lokalen Näherung eine Rechnung mit einer um 32 MeV verkleinerten Deltamasse. Man erkennt deutlich, dass sich die Peakposition nun der der lokalen Näherung angenähert hat.

Als nächstes betrachten wir, wie sich der differentielle Wirkungsquerschnitt mit der Neutrinoenergie ändert. Dazu ist  $d\sigma/dk_{\pi}$  in den Abbildungen 7.6 und 7.7 für vier Neutrinoenergien zwischen 0,5 und 2,0 GeV dargestellt. Um die Güte der lokalen Näherung zu beurteilen ist diese jeweils mit eingezeichnet. Es ergibt sich für die betrachteten Neutrinoenergien jeweils ein ähnliches Bild und damit eine vergleichbare Güte der lokalen Näherung.

#### **Neutraler Strom**

Für den geladenen Strom ist es nicht sinnvoll den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\cos\theta_{\nu}$  zu berechnen, weil das auslaufende Neutrino in einem Detektor nicht gemessen werden kann. Daher betrachten wir nur den Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$ . Abbildung 7.8 zeigt den Vergleich zwischen unserer lokalen (gestrichelt) und unserer vollen Rechnung (durchgezogen) für diesen Prozess. Es bietet sich eine ganz ähnliche Situation wie im Fall des geladenen Stroms, wobei man für den gesamten Wirkungsquerschnitt nur etwa 70% des dort erhaltenen Werts erhält. Dies ist verständlich, da

wie in Kapitel 6.2.2 beschrieben andere Isospinfaktoren auftreten:

$$\frac{\text{Isospinfaktoren (neutraler Strom)}}{\text{Isospinfaktoren (geladener Strom)}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3}\right)} \approx 71\%.$$
(7.2)

Die Modifikation der Vektorformfaktoren für den neutralen Strom aus Gleichung (3.47) spielt hierbei eine vernachlässigbare Rolle, da für den kohärenten Prozess ( $q^2$  klein) der axiale Formfaktor  $C_5^A$  dominiert. Dieser ist identisch für den geladenen und den neutralen Strom.

Insgesamt zeigen die erhaltenen Ergebnisse deutlich, dass die Berücksichtigung der Nichtlokalität bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte der neutrinoinduzierten kohärenten Pionenproduktion am Kern einen deutlichen Einfluss hat und nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden sollte.



Abbildung 7.4: Die Abbildung zeigt in Teil (a) den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$ , in Teil (b)  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$ . Die durchgezogene Linie entspricht jeweils der vollen nichtlokalen Rechnung. Die Kurven liegen deutlich tiefer als die in [ARGHVV07] mit der lokalen Näherung berechneten, die als gestrichelte Linien dargestellt sind.



Abbildung 7.5: Die Abbildung zeigt den Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für den Prozess mit einem geladenen Pion im Endzustand. Die verschiedenen Kurven zeigen die lokale Rechnung (gestrichelt, kurze Striche), unsere volle Rechnung (durchgezogen) und unsere volle Rechnung mit einer um 32 MeV verkleinerten Deltamasse (gestrichelt, lange Striche). Man erkennt deutlich, dass die Reduzierung der Deltamasse eine Verschiebung des Peaks hin zur lokalen Näherung bewirkt.



Abbildung 7.6: Die Abbildung zeigt den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für Neutrinoenergien von 0,5 und 1,0 GeV. Die durchgezogene Linie entspricht jeweils der vollen nichtlokalen Rechnung, die gestrichelte der lokalen Näherung.



Abbildung 7.7: Die Abbildung zeigt den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für Neutrinoenergien von 1,5 und 2,0 GeV. Die durchgezogene Linie entspricht jeweils der vollen nichtlokalen Rechnung, die gestrichelte der lokalen Näherung.



Abbildung 7.8: Die Abbildung zeigt für den Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für den Prozess mit einem neutralen Pion im Endzustand. Die verschiedenen Kurven zeigen die lokale Rechnung (gestrichelt) und unsere volle Rechnung (durchgezogen). Es ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei den Berechnungen mit geladenem Strom.

#### 7.3 Konsistenzprüfung anhand großer Deltamassen

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall unphysikalisch großer Deltamassen  $M_{\Delta}$ , um zu überprüfen, ob unsere volle Rechnung sich mit zunehmender Deltamasse an die lokale Näherung annähert. Dies ist, wie im Folgenden erläutert wird, aufgrund der Art der Näherung zu erwarten. Unsere numerische Implementierung der lokalen Näherung konnte die Ergebnisse aus [ARGHVV07] genau reproduzieren. Somit dient uns dieser Vergleich als Konsistenzprüfung des verwendeten numerischen Apparats. Im Folgenden greifen wir zu diesem Zwecke beispielhaft den Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für den CC-Prozess heraus.

Wir betrachten dazu erneut den vollen Strom

$$J^{\mu} = \int d^{3}p \sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \sqrt{3} \cos \theta_{C} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}}$$
$$F(p_{\Delta})\bar{\psi}(\vec{p}_{\Delta} - \vec{k}_{\pi})P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p}).$$
(7.3)

Mit zunehmendem  $M_{\Delta} > M_{\Delta}^{\text{phys}}$  kann man die Abhängigkeit des Propagators von  $p_{\Delta}$  vernachlässigen und erhält im Grenzfall großer Deltamassen die selben Ergebnisse wie bei der lokalen Näherung. In Abbildung 7.9 sind die Ergebnisse der lokalen und der vollen Rechnung jeweils für die physikalische Deltamasse sowie  $M_{\Delta}=1,5$  und 5,0 GeV dargestellt. Man erkennt für eine Deltamasse von 1,5 GeV noch deutlich die Struktur der Resonanz. Bei 5,0 GeV erkennt man lediglich den Anstieg der Resonanz und den starken Abfall bei einer Pionenenergie von etwa 0,9 GeV aufgrund des Phasenraums. Da die Wirkungsquerschnitte für zunehmende Deltamassen stark abnehmen, wurden die Kurven zu einer festen Deltamasse mit einem gemeinsamen Faktor skaliert, sodass die Peaks der lokalen Näherungen für alle Massen die gleiche Höhe aufweisen. Es wird deutlich, dass sich die Kurven für steigende Deltamassen einander annähern.

Da in den obigen Berechnungen die Deltamassen nicht nur im Propagator, sondern global für die gesamte Rechnung modifiziert wurden, ergeben sich die Skalierungsfaktoren nicht aus der einfachen Massenabhängigkeit des Propagators. Vielmehr müssen weitere massenabhängige Größen berücksichtigt werden, so z.B. der Formfaktor Fund der Spinprojektor  $P^{\alpha\beta}$ .

Beispielhaft wollen wir nun den Skalierungsfaktor für die lokale Näherung und eine Deltamasse von 5 GeV abschätzen. Wir beschränken uns dabei auf die Vorwärtsrichtung, in der sich die kohärente Reaktion hauptsächlich konzentriert. Betrachten wir den Pionenimpuls  $|\vec{k}_{\pi}| \approx 0,750$  GeV, bei dem der Wirkungsquerschnitt peakt, so können wir den Impuls des auslaufenden Leptons  $|\vec{k}'| = 0,213$  GeV und seine Energie  $E_{\ell} = 0,237$  GeV berechnen. Der Impuls der Deltaresonanz  $p_{\Delta}$  ergibt sich in der



Abbildung 7.9: Die Abbildung zeigt das Ergebnis der vollen (durchgezogen) und der lokalen Rechnung (gestrichelt) für den CC-Prozess für 1 GeV Neutrinoenergie und unterschiedliche Deltamassen. Da der Wirkungsquerschnitt für höhere Deltamassen abnimmt, wurden die Kurven mit den im Bild angegebenen Faktoren skaliert. Man erkennt deutlich, dass sich die Kurven der Näherung und der vollen Rechnung mit steigender Deltamasse annähern.

lokalen Näherung wie folgt

$$p_{\Delta 0} = E_N + E_{\nu} - E_{\ell} = 1,702 \text{ GeV}$$
  
$$\vec{p}_{\Delta} = \vec{p} + \vec{q} = -\frac{\left(\vec{q} - \vec{k}_{\pi}\right)}{2} + \vec{q} = \frac{1}{2}(\vec{q} + \vec{k}_{\pi}) = 0,769 \text{ GeV } \vec{e}_z.$$
(7.4)

Damit erhält man  $p_{\Delta}^2=2,305~{\rm GeV^2}$  und eine starke Unterdrückung der Reaktion durch den Formfaktor:

$$F(p_{\Delta}) = \frac{1}{1 + (2,305 - 25)^2} \approx \frac{1}{500}.$$
(7.5)

Durch den Propagator und den Spinprojektor ergibt sich näherungsweise eine weitere Unterdrückung

$$-\frac{\not p_{\Delta} + M_{\Delta}}{p_{\Delta}^2 - M_{\Delta}^2 + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \approx \frac{1}{3,5}.$$
(7.6)

Damit erreicht man insgesamt einen Skalierungsfaktor in der Größenordnung von 1000.

Durch die Annäherungen der Kurven in Abbildung 7.9 ist gezeigt, dass die Ergebnisse unserer numerischen Implementierung für große Deltamassen konsistent mit den theoretischen Erwartung sind.

## 7.4 Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen

Wie in Kapitel 5 beschrieben gibt es aktuell zwei Experimente, für die Ergebnisse zur neutrinoinduzierten, kohärenten Produktion von Pionen vorliegen: K2K für geladene und MiniBooNE für neutrale Pionen. Beide Experimente arbeiten mit einem Neutrinostrahl mit einer mittleren Energie in der Größenordnung von 1 GeV, besitzen aber eine relativ breite Energieverteilung. Als Beispiel ist in Abbildung 7.10 die Energieverteilung des MiniBooNE-Experiments nach [Mon05] dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfachheit halber stets mit einer festen Neutrinoenergie gearbeitet. Aus diesem Grund sind die Zahlenwerte zwar nicht direkt mit den experimentellen Ergebnissen vergleichbar. Dennoch bietet der Vergleich einen ersten Eindruck wie sich die theoretischen Beschreibung zu den experimentellen Ergebnissen verhalten.



Abbildung 7.10: Darstellung der Energieverteilung der Neutrinos beim MiniBooNE-Experiments nach [Mon05].

Beide Experimente geben als Ergebnis jeweils den Anteil der kohärent produzierten Pionen am gesamten Wirkungsquerschnitt an. Um einen Vergleich mit den Ergebnissen dieser Arbeit anstellen zu können, benötigen wir also auch die inkohärenten Anteile des Wirkungsquerschnitts.

#### **Geladener Strom**

Wir betrachten zunächst geladene Pionen im Endzustand. In Abbildung 7.11 sind die Ergebnisse unserer kohärenten Berechnungen für den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$  zusammen mit Berechnungen aus [Lei] für den inkohärenten Prozess  $\nu_{\mu} + {}^{12}C \rightarrow \mu^{+} + X$  bei einer Neutrinoenergie von 1 GeV dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt die Summe der inkohärenten Anteile dar, welche ebenfalls einzeln gestrichelt eingezeichnet sind (obere Kurve: quasielastisch, untere Kurve: Delta inkohärent). Die Kurve der kohärenten Rechnung dieser Arbeit ist deutlich tiefer und nur in Vorwärtsrichtung von Null verschieden. Integriert man die Wirkungsquerschnitte über den Winkel, so lässt sich der kohärente Anteil berechnen. Es ergibt sich somit das folgende Bild:

$$\frac{\sigma_{\text{kohärent}}}{\sigma_{\text{total}}} = 2,0\% \quad \text{unsere Rechnung für } E_{\nu} = 1 \text{ GeV}$$

$$\frac{\sigma_{\text{kohärent}}}{\sigma_{\text{total}}} \leq 0,6\% \quad \text{K2K, bei 90\% C.L.}$$
(7.7)

Für einen besseren Vergleich mit dem Experiment ist es zukünftig wichtig, die Energieverteilung der Neutrinos von experimenteller Seite, sowie weitere Verfeinerungen des Modells von theoretischer Seite zu berücksichtigen. Im Einzelnen sind hier Endzustandswechselwirkungen und Mediummodifikationen zu nennen.

#### **Neutraler Strom**

Für neutrale Pionen im Endzustand bestrachten wir den Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  als Observable. Dieser ist jeweils für die inkohärenten Prozesse aus [Lei] (gestrichelte Kurve) und unseren kohärenten Prozess (durchgezogene Kurve) in Abbildung 7.12 dargestellt. Beide Berechnungen wurden bei einer Neutrinoenergie von 1 GeV durchgeführt. Daraus ergeben sich für den kohärenten Anteil für neutrale Pionen:

$$\frac{\sigma_{\text{kohärent}}}{\sigma_{\text{total}}} = 17,4\% \quad \text{unsere Rechnung für } E_{\nu} = 1 \text{ GeV}$$

$$\frac{\sigma_{\text{kohärent}}}{\sigma_{\text{total}}} = 19,5 \pm 1,1\% \quad \text{MiniBooNE.}$$
(7.8)

Auch hier gelten die selben Einschränkungen in Bezug auf die Vergleichbarkeit der Zahlenwerte wie oben.

#### Diskussion der Ergebnisse

Vergleicht man die errechneten Anteile der kohärent produzierten Pionen für neutrale und geladene Ströme, so fällt der deutliche Größenunterschied ins Auge. Qualitativ ist dies wie folgt zu verstehen: Beim inkohärenten NC-Prozess führen sowohl die geänderten Isospinfaktoren als auch die gemäß Gleichung (3.47) geänderten Formfaktoren zu einer Reduzierung des Wirkungsquerschnitts gegenüber dem inkohärenten CC-Prozess. Im Falle der kohärenten Prozesse ist diese Reduzierung weniger stark ausgeprägt. Die Bedingung  $q^2 \approx 0$  sorgt nämlich dafür, dass der axiale Formfaktor  $C_5^A$  dominiert, welcher für NC- und CC-Prozess identisch ist. Dies bedeutet, dass lediglich die geänderten Isospinfaktoren zur Reduzierung des Querschnitts beitragen. Damit steigt der Anteil der kohärent produzierten, neutralen Pionen im Vergleich zu den geladenen Pionen.



(b) Gesamter Winkelbereich

Abbildung 7.11: Vergleich des kohärenten und des inkohärenten Anteils am Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\cos\theta_{\mu}$  für geladene Pionen. Die durchgezogene Kurve entspricht unserer Rechnung für den kohärenten Prozess. Die oberste gestrichelte Kurve entspricht der Summe der inkohärenten Anteile aus [Lei], welche in den beiden darunterliegenden Kurven separat eingezeichnet sind. Die obere von beiden entspricht den quasielastischen Prozessen, die untere dem inkohärenten Prozess mit Anregung einer Deltaresonanz.



Abbildung 7.12: Vergleich des kohärenten und des inkohärenten Anteils am Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dk_{\pi}$  für neutrale Pionen. Die durchgezogene Kurve entspricht unserer Rechnung für den kohärenten Prozess. Die gestrichelte Kurve entspricht den inkohärenten Anteilen aus [Lei].

# Teil III

# **Zusammenfassung und Ausblick**

# 8 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit zur neutrinoinduzierten, kohärenten Pionenproduktion wurde untersucht, wie über die bestehenden theoretischen Ansätze und Näherungen hinausgegangen werden kann, um das Verständnis dieser Reaktion entscheidend zu verbessern. Speziell wurde untersucht, wie sich die explizite Berücksichtigung der im Kern gebundenen Nukleonen im Rahmen eines einfachen Kernmodells auf die differentiellen Wirkungsquerschnitte auswirkt. Dies erscheint vor dem Hintergrund aktueller und geplanter Experimente zur Neutrinophysik dringend notwendig, da z.B. bei Oszillationsexperimenten eine möglichst genaue Kenntnis aller Neutrinoreaktionen mit dem Detektormaterial unabdingbar ist.

Der erste Teil dieser Arbeit bot einen Überblick über den Hintergrund der betrachteten Reaktion und ermöglichte die Einordnung der Thematik sowohl in den historischen als auch in den aktuellen Kontext physikalischer Grundlagenforschung. Des Weiteren beschäftigte sich der erste Teil mit den theoretischen Konzepten und Werkzeugen, die zur Behandlung der neutrinoinduzierten, kohärenten Produktion von Pionen an einem symmetrischen Kern notwendig sind. Insbesondere wurden die Eigenschaften der Leptonen im Rahmen der elektroschwachen Theorie und der Hadronen (Nukleonen, Pionen und Deltaresonanzen) im Rahmen einer effektiven Theorie behandelt. Die Diskussion der Deltaresonanz nahm hierbei großen Raum ein. Diese wurde wie in der Literatur üblich im Rahmen des Rarita-Schwinger-Formalismus behandelt. Nicht zuletzt spielt die physikalische Beschreibung der Kerns bei der betrachteten Reaktion eine große Rolle. Da es das Ziel dieser Arbeit war, über die in der Literatur gebräuchliche lokale Näherung hinauszugehen, wurden die Kernwellenfunktionen, die im Rahmen eines Mean-Field-Ansatzes numerisch berechnet wurden, explizit im Impulsraum angegeben.

Im zweiten Teil, der den Hauptteil der vorliegenden Arbeit darstellt, wurde nach einem Überblick über die aktuellen experimentellen Ergebnisse unser Modell zur neutrinoinduzierten Produktion von Pionen an Kohlenstoff vorgestellt. Um den physikalischen und numerischen Apparat zu entwickeln, wurden in dieser Arbeit die einund auslaufenden Teilchen als ebene Wellen beschrieben, die Nukleonenzustände jedoch über die Wellenfunktionen der Mean-Field-Berechnung. Des Weiteren wurde von der sogenannten Stoßnäherung ausgegangen. Dies bedeutet, dass die Reaktion stets nur an einem Nukleon stattfindet und im Anschluss über alle Nukleonenzustände im Kern kohärent summiert wird. An die Vorstellung unseres Modells schließt sich eine Diskussion der lokalen Näherung an, um unsere Ergebnisse vor dem Hintergrund bestehender Ansätze einordnen zu können. Lässt man die in der Literatur gebräuchliche lokale Näherung fallen, so ist eine Trennung von eigentlicher Produktion und Kerneigenschaften nicht mehr möglich. Dies zeigt deutliche Auswirkungen auf die berechneten Wirkungsquerschnitte. Im Falle der Pionenimpulsverteilung ist im Vergleich zu den Ergebnissen, die unter Anwendung der lokalen Näherung erzielt wurden, eine deutliche Reduktion und leichte Verschiebung des Peaks hin zu höheren Pionenimpulsen festzustellen. Auch im winkeldifferentiellen Wirkungsquerschnitt ist eine deutliche Reduktion zu erkennen. Insgesamt ist festzustellen, dass die Berücksichtigung der Nichtlokalität einen deutlichen Einfluss auf die Observablen der kohärenten Pionenproduktion besitzt und daher nicht ohne Weiteres vernachlässigt werden kann.

Der direkte Vergleich der in dieser Arbeit berechneten Wirkungsquerschnitte mit den experimentellen Ergebnissen von MiniBooNE und K2K ist dann möglich, wenn die Energieverteilung der Neutrinos des entsprechenden Experiments berücksichtigt wird. Wir sind in dieser Arbeit der Einfachheit halber stets von einer festen Neutrinoenergie von 1 GeV ausgegangen.

# 9 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit kamen einige Näherungen und Vereinfachungen zum Tragen, die in einer weiterführenden Behandlung des Problems schrittweise zurückgenommen werden könnten. Diese Annahmen waren im Kontext dieser Arbeit notwendig geworden, um die Güte der lokalen Näherung anhand einer relativ einfach gehaltenen Rechnung überprüfen zu können. Es ist im Rahmen des vorgestellten Modells leicht möglich, in Zukunft auch höhere Nukleonenresonanzen zu berücksichtigen und somit das Modell weiter zu verbessern. Des Weiteren könnten die Endzustandswechselwirkungen des Pions (z.B. im Rahmen einer eikonalen Näherung) berücksichtigt werden, sowie Modifikationen der Deltabreite und -masse im Medium. Die vorliegende Arbeit liefert einen wichtigen ersten Schritt weg von der lokalen Näherung und kann als Grundlage für eine weiterführende Behandlung dienen.

# Anhang

# A Einheiten und Metrik

Wir verwenden natürliche Einheiten, d.h.

$$\hbar = c = 1. \tag{A.1}$$

Dies impliziert für die Einheiten der Größen Energie (E), Masse (M), Länge (L) und Impuls (P) die folgenden Zusammenhänge

$$[E] = [M] = [P] = [L]^{-1}.$$
(A.2)

Energien, Impulse und Massen werden üblicherweise in Zehnerpotenzen von Elektronenvolt (eV) angegeben, insbesondere MeV und GeV. Wo es natürlich erscheint, wird auch die Einheit Fermie (fm, 1 fm= $10^{-15}$  m) verwendet. Über die Beziehung

$$\hbar c = 197,327 \text{ MeV fm}$$
 (A.3)

kann man die verschiedenen Einheiten bequem ineinander umrechnen. Für Wirkungsquerschnitte werden traditionell auch die Einheiten Quadratzentimeter (cm<sup>2</sup>) und Barn (b, 1 b= $10^{-28}$  m<sup>2</sup>) benutzt. Wir schließen uns in dieser Arbeit der ersten Konvention an und verwenden cm<sup>2</sup>. Die Umrechnung in Einheiten der Energie erfolgt über

$$1 \text{ MeV}^{-2} = (197, 327)^2 \text{fm}^2$$
  
= (197, 327)^2 10<sup>-26</sup> cm<sup>2</sup>. (A.4)

Der verwendete metrische Tensor lautet

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 (A.5)

# **B** Kinematik

In diesem Kapitel werden einige wichtige kinematische Zusammenhänge dargestellt.

#### **B.1 Mandelstam Variablen**

Für einen 2  $\rightarrow$  2-Prozess der Form



definiert man die sogenannten Mandelstam Variablen wie folgt:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2.$$
 (B.1)

Bei einer Wechselwirkung über ein beliebiges intermediäres Teilchen werden die drei möglichen Diagramme



als s-, t- bzw. u-Diagramm bezeichnet. In allen Feynman-Diagrammen in dieser Arbeit läuft die Zeit per Konvention stets von links nach rechts.

### **B.2 Wirkungsquerschnitt**

Wir betrachten nun einen allgemeinen  $2 \rightarrow 3$ -Prozess der Form

$$A(p_1) + B(p_2) \to C(p_3) + D(p_4) + E(p_5).$$
 (B.2)

Dafür ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt zu (vgl.  $[Y^+06]$ ):

$$d\sigma = \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \frac{d^3 p_5}{(2\pi)^3 2E_5} \frac{(2\pi)^4 \delta \left(\sum_f p_f - \sum_i p_i\right)}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2$$
(B.3)

Diese Formel gilt für den Fall, dass alle beteiligten Teilchen wie folgt normiert sind

$$\langle \vec{p}' \,|\, \vec{p} \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}).$$
 (B.4)

Betrachten wir den speziellen Fall mit gebundenen Nukleonen als ein- und auslaufende Teilchen, so werden diese anders normiert und der obige Wirkungsquerschnitt ist entsprechend zu modifizieren (siehe dazu Anhang E und Abschnitt 6.2.1).

# **C** Matrizen

In diesem Kapitel werden die verwendeten Konventionen für spezielle Matrizen zusammengestellt.

### C.1 Paulimatrizen

Die Paulimatrizen in der üblichen Konvention lauten:

$$\sigma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(C.1)

Die folgenden Kombinationen von Paulimatrizen werden häufig gebraucht und erhalten daher eine eigenständige Bezeichnung:

$$\sigma^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2), \quad \text{explizit:} \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{C.2}$$

### C.2 $\gamma$ -Matrizen

Für die  $\gamma$ -Matrizen schließen wir uns der folgenden Konvention an:

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i} \\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{5} = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (C.3)$$

Die konjugierten Spinoren definieren wir über:

$$\bar{\psi} := \psi^{\dagger} \gamma_0 = \psi^{\dagger} \gamma^0. \tag{C.4}$$

Für die Spuren mit  $\gamma$ -Matrizen gelten die folgenden Relationen (vgl. [PS95])

$$sp(1) = 4$$

$$sp(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) = 4g^{\mu\nu}$$

$$sp(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \qquad (C.5)$$

Spuren mit einer ungeraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen verschwinden.

Für Spuren mit einer  $\gamma^5$ -Matrix gilt:

$$\begin{aligned} & \operatorname{sp}\left(\gamma^{5}\right) &= 0 \\ & \operatorname{sp}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\right) &= 0 \\ & \operatorname{sp}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{5}\right) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \end{aligned}$$
(C.6)

mit dem vollständig antisymmetrischen Tensor

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{für } (\mu,\nu,\rho,\sigma) = (1,2,3,4) \text{ oder gerade Permutation davon} \\ -1 & \text{für } (\mu,\nu,\rho,\sigma) = (4,3,2,1) \text{ oder gerade Permutation davon} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
(C.7)

Weitere wichtige Eigentschaften der  $\gamma$ -Matrizen sind die folgenden Relationen der Antikommutatoren (vgl. [IZ80]):

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \{\gamma^{5}, \gamma^{\mu}\} = 0.$$
 (C.8)

Für den Kommutator definiert man üblicherweise die Größe (vgl. [BD64]):

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]. \tag{C.9}$$

Für Kontraktionen der  $\gamma$ -Matrizen gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu}\gamma^{\mu} &= 4 \\ \gamma_{\mu}\phi\gamma^{\mu} &= -2\phi \\ \gamma_{\mu}\phib\gamma^{\mu} &= 4a \cdot b \\ \gamma_{\mu}\phib\phi\gamma^{\mu} &= -2\phib\phi \\ \gamma_{\mu}\phib\phid\gamma^{\mu} &= -2\phib\phi \end{aligned}$$
(C.10)

 $\operatorname{mit}$ 

$$\phi := a_{\mu} \gamma^{\mu}. \tag{C.11}$$

Für die hermitesch konjugierten  $\gamma\textsc{-Matrizen gilt:}$ 

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0$$
  
$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5.$$
(C.12)

# D Feynmanregeln

In diesem Kapitel wird eine Übersicht über die benötigten Feynmanregeln gegeben (vgl. [PS95],[Gri87]).

## **D.1 Externe Linien**

Externe Linien, d.h. solche, denen ein- oder auslaufende Teilchen entsprechen, stehen für die folgenden Faktoren:

## **D.2** Propagatoren

Die Propagatoren, also interne Linien, stehen die für die Folgenden Ausdrücke:

$$Spin - \frac{1}{2}: \qquad - \frac{1}{q} = \frac{i(\not q + m)}{q^2 - m^2 + i\epsilon}$$

$$Spin - 1: \qquad - \frac{1}{q} = \frac{-i\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{m^2}\right)}{q^2 - m^2}$$

$$Spin - \frac{3}{2}: \qquad - \frac{1}{q} = \frac{i\left(\not q + m\right)}{s - m^2 + i\sqrt{s}\Gamma(s)}\Lambda^{\mu\nu} \quad \text{mit}$$

$$\Lambda^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{2}{3m^2}p^{\mu}p^{\nu} - \frac{1}{3m}(\gamma^{\mu}p^{\nu} - p^{\mu}\gamma^{\nu})\right)$$

$$(D.2)$$

(vgl. [Pet98], [HNV07]).

## **D.3 Vertizes**

Für die Vertizes, also Punkte, an denen mehrere Linien zusammentreffen, ergeben sich die Folgenden Faktoren:

Vertizes mit einem W-Boson:



Vertizes mit einem Z-Boson:

$$Z^{0} = \frac{-ie}{\sin\theta_{w}\cos\theta_{w}}\gamma^{\mu} \left(c_{L}\frac{1-\gamma_{5}}{2} + c_{R}\frac{1+\gamma^{5}}{2}\right)$$

 $\operatorname{mit}$ 

	$c_L$	$c_R$
(masselose) Neutrinos	$\frac{1}{2}$	0
u-Quarks	$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sin^2\theta_w$	$-\frac{2}{3}\sin^2\theta_w$
d-Quarks	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta_w$	$\frac{1}{3}\sin^2\theta_w$

Die Vertizes der effektiven Theorie werden ausführlich im Kapitel 3.2 beschrieben.

# E Normierung der Einteilchenzustände und Spinoren

Freie Einteilchenzustände werden wie folgt normiert

$$\langle \vec{p}' \,|\, \vec{p} \rangle = 2E(2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}).$$
 (E.1)

Für die freien Spinoren  $u_s(\vec{p})$  (Nukleonen, Leptonen) benutzen wir (siehe z.B. Gleichung (3.49)) die Normierung ([HNV07]):

$$\bar{u}_s(p)u_t(p) = 2m\delta_{st}.\tag{E.2}$$

Mit dieser Normierung gilt

$$\sum_{s} u_s(p)\bar{u}_s(p) = \not p + m.$$
(E.3)

Für die gebundenen Nukleonenspinoren  $\psi_i$  gilt die folgende Normierung

$$\int d^3 r \rho_i(\vec{r}) = \int d^3 r \bar{\psi}_i(\vec{r}) \gamma_0 \psi_i(\vec{r}) = \int r^2 dr \left( f_i^2(r) + g_i^2(r) \right) = 1.$$
(E.4)

Die Kerndichte von <sup>12</sup>C ist somit auf die Zahl der Nukleonen normiert.
### F Numerische Umsetzung

Die numerische Umsetzung der physikalischen Problemstellung erfolgte mit einem selbsterstellten Fortran90-Programmcode. In diesem Kapitel wird näher auf die technischen Details dieser Umsetzung eingegangen.

### F.1 Hadronischer Strom

Betrachten wir den geladenen hadronischen Strom (s-Term) im Detail, so erhalten wir

$$J^{\mu} = \int d^{3}p d^{3}p' \delta(\vec{p}' - \vec{k} - \vec{p} + \vec{k}' + \vec{k}_{\pi})$$

$$\sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \bar{\psi}(\vec{p}') P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p})$$

$$= \int d^{3}p \sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \frac{k_{\pi}^{\alpha}}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}}$$

$$\bar{\psi}(\vec{p}_{\Delta} - \vec{k}_{\pi})P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)\psi(\vec{p}). \qquad (F.1)$$

Die gebundenen Nukleonenspinoren lauten

$$\psi(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(p) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\hat{p}) \\ -ig_{n\ell'J}(p) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\hat{p}) \end{pmatrix}$$
  
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(p) \langle J, M | \ell, M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M - \frac{1}{2}}(\Omega_p) \\ f_{n\ell J}(p) \langle J, M | \ell, M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M + \frac{1}{2}}(\Omega_p) \\ -ig_{n\ell'J}(p) \langle J, M | \ell', M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell', M - \frac{1}{2}}(\Omega_p) \\ -ig_{n\ell'J}(p) \langle J, M | \ell', M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell', M + \frac{1}{2}}(\Omega_p) \end{pmatrix}$$
(F.2)

 $\operatorname{mit}$ 

$$f_{n\ell J}(k) = 4\pi (-i)^{\ell} \int r^2 j_{\ell}(kr) f_{n\ell J}(r) dr$$
 (F.3)

$$g_{n\ell'J}(k) = 4\pi (-i)^{\ell'} \int r^2 j_{\ell'}(kr) g_{n\ell'J}(r) dr$$
(F.4)

103

und  $\ell' = 2j - \ell$ . Die Größen  $f_{n\ell J}(r)$  und  $g_{n\ell' J}(r)$  werden numerisch von dem Programm RWAVES geliefert.

Der Strom lässt sich schreiben als:

$$J^{\mu} = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int d^{3}p \sum_{\text{Nukleonen}} iC^{\Delta} \frac{f^{*}}{m_{\pi}} \frac{1}{p_{\Delta}^{2} - M_{\Delta}^{2} + iM_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \\ \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(p')\mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{p}') \\ -ig_{n\ell'J}(p')\mathcal{Y}_{J\ell'}^{M}(\hat{p}') \end{pmatrix}^{\dagger} \gamma_{0} \underbrace{k_{\pi}^{\alpha}P_{\alpha\beta}(p_{\Delta})\Gamma^{\beta\mu}(p,q)}_{\equiv I^{\mu}(p,q)} \begin{pmatrix} f_{n\ell J}(p)\mathcal{Y}_{J\ell}^{M}(\hat{p}) \\ -ig_{n\ell'J}(p)\mathcal{Y}_{J\ell'}^{M}(\hat{p}) \end{pmatrix},$$
(F.5)

wobei  $\vec{p'} = \vec{p}_{\Delta} - \vec{k}_{\pi}$  und  $\vec{p}_{\Delta} = \vec{p} + \vec{q}$  gilt.

Betrachten wir nun die Größe

$$\begin{split} I^{\mu}(p,q) &= k_{\pi}^{\alpha} P_{\alpha\beta}(p_{\Delta}) \Gamma^{\beta\mu}(p,q) \\ &= k_{\pi}^{\alpha} \left( g_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} - \frac{2}{3} \frac{p_{\Delta\alpha} p_{\Delta\beta}}{M_{\Delta}^{2}} + \frac{1}{3} \frac{p_{\Delta\alpha} \gamma_{\beta} - p_{\Delta\beta} \gamma_{\alpha}}{M_{\Delta}} \right) \\ &\quad \left( \frac{C_{3}^{V}}{M} \left( g^{\beta\mu} \not{q} - q^{\mu} \gamma^{\beta} \right) + \frac{C_{4}^{V}}{M^{2}} \left( g^{\beta\mu} q \cdot p' - q^{\mu} p'^{\beta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_{5}^{V}}{M^{2}} \left( g^{\beta\mu} q \cdot p - q^{\mu} p^{\beta} \right) + C_{6}^{V} g^{\beta\mu} \right) \gamma_{5} \\ &\quad \left. + \frac{C_{3}^{A}}{M} \left( g^{\beta\mu} \not{q} - q^{\mu} \gamma^{\beta} \right) + \frac{C_{4}^{A}}{M^{2}} \left( g^{\beta\mu} q \cdot p' - q^{\mu} p'^{\beta} \right) + C_{5}^{A} g^{\beta\mu} + \frac{C_{6}^{A}}{M^{2}} q^{\mu} q^{\beta}. \end{split}$$

$$(F.6)$$

Hierbei werden sämtliche Matrixmultiplikationen explizit ausgeführt, wobei einige Kombinationen von  $\gamma$ -Matrizen vorher tabelliert werden und daher nicht wiederholt ausgerechnet werden müssen.

### **F.2** Numerische Integration

Die notwendigen numerischen Integrationen werden mit Hilfe der Routine vegas durchgeführt, welche Teil der Numerical Recipes Software ist (www.nr.com). Als Parameter wurde für die lokalen Rechnungen ncall=100000 und itmx=5 benutzt, für die vollen Rechnungen ncall=100000 und itmx=5.

# Literaturverzeichnis

$[A^+89]$	P. P. Allport et al. Coherent Production of $\pi^+$ Mesons in Neutrino - Neon Interactions. Z. Phys., C43:523–526, 1989.
[A+95]	C. Athanassopoulos et al. Candidate Events in a Search for $\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_{e}$ Oscillations. <i>Phys. Rev. Lett.</i> , 75:2650–2653, 1995.
$[A^+06]$	M. H. Ahn et al. Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment. <i>Phys. Rev. D</i> , 74:072003, 2006.
[AA <sup>+</sup> 07]	A. A. Aguilar-Arevalo et al. A Search for Electron Neutrino Appearance at the Delta $m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ Scale. <i>Phys. Rev. Lett.</i> , 98:231801, 2007.
[ARGHVV07]	L. Alvarez-Ruso, L. S. Geng, S. Hirenzaki, and M. J. Vicente Vacas. Charged Current Neutrino Induced Coherent Pion Production. <i>Phys.</i> <i>Rev.</i> , C75:055501, 2007.
[BD64]	J. D. Bjorken and S. D. Drell. <i>Relativistic Quantum Mechanics</i> . Mc-Graw Hill, New York, 1964.
[EW88]	T. Ericson and W. Weise. <i>Pions and Nuclei</i> . The International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, Oxford, 1988.
[FN79]	G. L. Fogli and G. Nardulli. A New Aproach to the Charged Current Induced Weak One Pion Production. <i>Nucl. Phys.</i> , B160:116, 1979.
[Fre07]	S. Freedman. Neutrino physics. Talk at the Lecture Week of the European Graduate School Complex Systems of Hadrons and Nuclei, Februar 2007.
$[G^+86]$	H. J. Grabosch et al. Coherent Pion Production in Neutrino and Anti-Neitrino Interactions on Nuclei of Heavy Freon Molecules. Z. Phys., C31:203, 1986.
[GiB]	The Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck Project. http://gibuu.physik.unigiessen.de/GiBUU.
[Gri87]	D. Griffiths. Introduction to Elementary Particles. Harper & Row, New York, 1987.
[GVEH+93]	N. K. Glendenning, D. Von-Eiff, M. Haft, H. Lenske, and M. K. Weigel. Relativistic Mean Field Calculations of Lambda and Sigma Hypernuclei. <i>Phys. Rev.</i> , C48:889–895, 1993.

$[H^+05]$	M. Hasegawa et al. Search for Coherent Charged Pion Production in Neutrino Carbon Interactions. <i>Phys. Rev. Lett.</i> , 95:252301, 2005.
[HNV07]	E. Hernández, J. Nieves, and M. Valverde. Weak Pion Production off the Nucleon. <i>Phys. Rev.</i> , D76:033005, 2007.
[I <sup>+</sup> 02]	T. Ishii et al. Near Muon Range Detector for the K2K Experiment: Construction and Performance. <i>Nucl. Instrum. Meth.</i> , A482:244–253, 2002.
[IZ80]	C. Itzykson and JB. Zuber. <i>Quantum Field Theory</i> . McGraw-Hill Book Company, New York, 1980.
$[K^+90]$	T. Kitagaki et al. Study of $\nu d \rightarrow \mu^- pp_s$ and $\nu d \rightarrow \mu^- \Delta^{++}(1232)n_s$ Using the BNL 7-Foot Deuterium-Filled Bubble Chamber. <i>Phys. Rev.</i> , D42:1331–1338, 1990.
[KKDHK01]	H. V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, H. L. Harney, and I. V. Krivosheina. Evidence for Neutrinoless Double Beta Decay. <i>Mod. Phys. Lett.</i> , A16:2409–2420, 2001.
[Lei]	T. Leitner. Private Mitteilung.
[Leu01]	S. Leupold. Life Time of Resonances in Transport Simulations. <i>Nucl. Phys.</i> , A695:377–394, 2001.
[Lin07]	Link, J. M. Neutral Current $\pi^0$ Production in MiniBooNE. AIP Conf. Proc., 967:151–157, 2007.
[Lip]	P. Lipari. Introduction to Neutrino Physics. Prepared for CERN-CLAF School of Physics, Itacuruca, Brazil, 6-19 May 2001.
[LS72]	C. H. Llewellyn Smith. Neutrino Reactions at Accelerator Energies. <i>Phys. Rept.</i> , 3:261, 1972.
$[M^+86]$	P. Marage et al. Coherent Single Pion Production by Anti-Neitrino Charged Current Interactions and Test of PCAC. Z. Phys., C31:191–197, 1986.
[Mon05]	J. Monroe. Charged Current Quasi-Elastic Interactions at MiniBoo- NE Confront Cross Section Monte Carlos. <i>Nucl. Phys. Proc. Suppl.</i> , 139:59–65, 2005.
$[N^+04]$	K. Nitta et al. The K2K SciBar Detector. Nucl. Instrum. Meth., A535:147–151, 2004.
[NOGR93]	J. Nieves, E. Oset, and C. Garcia-Recio. A Theoretical Approach to Pionic Atoms and the Problem of Anomalies. <i>Nucl. Phys.</i> , A554:509– 553, 1993.
[NW07]	A. E. Nelson and J. Walsh. Short Baseline Neutrino Oscillations and a New Light Gauge Boson. 2007. arXiv:0711.1363 [hep-ph].

[Per87]	D. H. Perkins. Introduction to High Energy Physics. Addison-Wesley, Menlo Park, CA, 1987.
[Pet98]	W. Peters. Die kohärente Photoproduktion von Pionen und Eta- Mesonen an sphärischen Kernen in einem relativistischen, nicht- lokalen Modell. 1998. Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen.
[Pos04]	M. Post. <i>Hadronic Spectral Functions in Nuclear Matter.</i> 2004. Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen.
[PS95]	M. E. Peskin and D. V. Schroeder. An Introduction to Quantum Field Theory. Westview Press, Boulder, Colorado, 1995.
[RS41]	W. Rarita and J. Schwinger. On a Theory of Particles with Half-Integral Spin. <i>Phys. Rev.</i> , $60(1)$ :61, 1941.
[RS83]	D. Rein and L. M. Sehgal. Coherent $\pi^0$ Production in Neutrino Reactions. <i>Nucl. Phys.</i> , B223:29–44, 1983.
[San06]	F. Sanchez. Search for Neutrino-Induced Charged Current Coherent Pion Production with Carbon in a 1.3-GeV Wide Band Muon Neutrino Beam. <i>Nucl. Phys. Proc. Suppl.</i> , 155:239–241, 2006.
[Sch07a]	T. Schwetz. LSND Versus MiniBooNE: Sterile Neutrinos with Energy Dependent Masses and Mixing? 2007. arXiv:0710.2985 [hep-ph].
[Sch07b]	T. Schwetz. Neutrino Oscillations: Present Status and Outlook. 2007. arXiv:0710.5027 [hep-ph].
[SLM06]	R. Shyam, H. Lenske, and U. Mosel. A Relativistic Two-Nucleon Model for $A(p, K^+)_{\Lambda} B$ Reaction. Nucl. Phys., A764:313–337, 2006.
[SVH73]	P. A. Schreiner and F. Von Hippel. Neutrino Production of the Delta (1236). <i>Nucl. Phys.</i> , B58:333–362, 1973.
[SW86]	B. D. Serot and J. D. Walecka. The Relativistic Nuclear Many-Body Problem. <i>Adv. Nucl. Phys.</i> , 16, 1986.
$[V^+93]$	P. Vilain et al. Coherent Single Charged Pion Production by Neutrinos. <i>Phys. Lett.</i> , B313:267–275, 1993.
[W <sup>+</sup> 93]	S. Willocq et al. Coherent Production of Single Pions and Rho Mesons in Charged Current Interactions of Neutrinos and Anti- Neutrinos on Neon Nuclei at the Fermilab Tevatron. <i>Phys. Rev.</i> , D47:2661–2674, 1993.
$[Y^+06]$	WM. Yao et al. Review of Particle Physics. J. Phys. G, 33, 2006.

## Danksagungen

Ich danke Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in das Institut und für die Möglichkeit, in diesem äußerst interessanten und aktuellen Gebiet der Forschung meine Diplomarbeit schreiben zu können. Seine Anregungen und Hinweise haben sehr zum Fortgang dieser Arbeit beigetragen. Weiterhin danke ich Prof. Dr. Horst Lenske, Prof. Radhey Shyam und Dr. Stefan Leupold dafür, dass sie für meine Fragen immer ein offenes Ohr hatten.

Ich möchte weiterhin ganz besonders Tina Leitner und Stefan Bender danken, die viel ihrer knappen Zeit dafür geopfert haben, mit mir über die Physik meiner Arbeit zu diskutieren und die fertige Arbeit durchzusehen. Nicht selten haben mir ihre Vorschläge und Erfahrungen entscheidend weitergeholfen.

Obwohl ich nicht Teil der GiBUU-Gruppe bin, wurde mir dennoch Einblick in den Code ermöglicht, wodurch ich sehr viel technische Aspekte lernen konnte. Der Dank dafür und für die zugehörigen Erklärungen zum Code gilt Oliver Buß und Tina Leitner.

Ich danke Luis Alvarez-Ruso für Beantwortung von Fragen zu seiner Arbeit.

Bei allen Problemen rund um den Computer, sei es ein defekter Lüfter oder ein Problem mit dem Cluster, waren stets unsere Admins zu Stelle. Dafür möchte ich Frank Frömel, Oliver Buß und Fabian Eichstädt danken.

Nicht zuletzt möchte ich Elke Jung danken für die zuverlässige Erledingung aller Formalitäten und die Gute Stimmung, die sie um sich herum verbreitet.

Ein Dank geht auch an meine Zimmergenossen David Kalok, Birger Steinmüller und Fabian Eichstädt, die immer für eine angenehme Stimmung im Partyzimmer gesorgt haben. Ebenso ein Dank an alle Mitglieder des Instituts für das angenehme Miteinander.

Ich möchte meiner Familie danken für die (nicht nur finanzielle) Unterstützung, ohne die mein Studium so nicht möglich gewesen wäre.

Dem liebsten Menschen in meinem Leben, meiner Freundin Anke, möchte ich dafür danken, dass sie auch in stressigen Zeiten immer für mich da ist, mich aufheitert und aufbaut.

# Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Gießen, den