Eigenschaften von ρ-Mesonen bei endlicher Temperatur

Diplomarbeit

vorgelegt von
Robert Würfel
aus Braunfels

Institut für Theoretische Physik I
Justus-Liebig-Universität Gießen

Gießen, Februar 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Beschreibung der In-Medium-Modifikation der Masse und Breite des ρ-Mesons. Diese ist von besonderem Interesse, da zahlreiche Experimente Anzeichen für solche Modifikationen gezeigt haben. Solche Experimente sind z.B. Schwerionenkollisionen, bei denen Dilepton-Spektren gemessen werden. Während im Vakuum der Wirkungsquerschnitt der e^+e^--Streuung einen deutlichen Peak bei der Masse des ρ-Mesons zeigt, ist dieser bei Schwerionenkollisionen zu kleineren Energien hin verschoben. Eine mögliche Erklärung für diese Verschiebung ist eine Veränderung der ρ-Masse durch das heiße Hadronengas, welches nach der Kollision entsteht. Nachdem die Baryonen das Kollisionsgebiet verlassen haben, besteht dieses Gas hauptsächlich aus den leichtesten Hadronen, den Pionen, welche bei der Kollision entstanden sind. Wenn das ρ-Meson in Dileptonen zerfällt, können diese nahezu ungestört das Kollisionsgebiet verlassen und dienen daher als gute Probe zur Untersuchung von In-Medium-Eigenschaften [17].

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Abhängigkeit der Masse M_ρ und der Breite Γ_ρ des ρ-Mesons in einem solchen Pionengas. Dabei werden sowohl relativ zum Wärmebad ruhende ρ-Mesonen betrachtet als auch sich bewegende.

Die Wechselwirkung zwischen Pionen wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben, welche die der starken Wechselwirkung zugrunde liegende Eichtheorie ist. Diese Quantenfeldtheorie kann aber nicht exakt gelöst werden. Bei hohen Energien ist es allerdings möglich, störungstheoretisch Näherungslösungen zu erhalten. Dabei entwickelt man die Lösung in der Kopplungskonste g der starken Wechselwirkung, welche bei hohen Energien deutlich kleiner eins ist. Bei niedrigen Energien ist sie aber ungefähr eins, sodass eine Entwicklung in g nicht möglich ist.
Die Masse der Pionen liegt deutlich unterhalb der Schwelle, ab der ein störungstheoretischer Ansatz möglich wäre. Eine Möglichkeit, QCD bei so niedrigen Energien zu behandeln, sind effektive Theorien, welche die chirale Symmetriebrechung

$SU(N_f)_\text{L} \times SU(N_f)_\text{R} \to SU(N_f)_\text{V}$ ausnutzen, wobei N_f die Anzahl der berücksichtigten Quarkflavor ist.
Eine solche effektive Theorie ist die chirale Störungstheorie. Hierbei werden die Goldstone-Bosonen der spontanen chiralen Symmetriebrechung mit den leichteren Mesonen identifiziert. Man unterscheidet hierbei zwischen dem $N_f = 2$ Fall, bei dem nur die Pionen berücksichtigt werden und dem $N_f = 3$ Fall, bei dem zusätzlich noch die Kaonen und das η berücksichtigt werden. Die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie ist die allgemeinste, die man aus den berücksichtigten Mesonen konstruieren kann und die die spontane chirale Symmetriebrechung beinhaltet. Diese Theorie liefert eine Entwicklung in $p/(4\pi F)$, wobei F die Pionzerfallskonstante ist. p steht hier für mesonische Energienskalen: Mesonenmasse, Energie und Temperatur. In jeder Ordnung gibt es Parameter, die durch Experimente bestimmt werden können. Als effektive Theorie lässt sich die chirale Störungstheorie nicht renormieren, sie kann aber Ordnung für Ordnung renormiert werden, wobei die Unendlichkeiten einer Ordnung durch Counterterme der Parameter der nächst höheren Ordnung aufgefangen werden können.

In dieser Arbeit berechnen wir mit Hilfe der chiralen Störungstheorie die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ Streuamplitude bis zur vierten Ordnung in $p/(4\pi F)$, wobei wir zunächst den $N_f = 3$ Fall bei Temperatur $T = 0$ und anschließend der, Einfachheit halber, den $N_f = 2$ Fall bei endlicher Temperatur behandeln. Zur Berechnung der Amplitude bei endlicher Temperatur verwenden wir den Imaginärzeit-Formalismus, welcher für Systeme im Gleichgewicht der wohl am einfachsten anzuwendende ist.
Mit Hilfe der bei endlicher Temperatur berechneten Amplitude können wir dann das ρ-Meson als Resonanz in der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung im Pionengas identifizieren und seine In-Medium- Eigenschaften studieren. Gegenüber anderen Modellen, in denen explizit $\rho\pi\pi$-Vertizes eingeführt werden, hat das in dieser Arbeit verwendete Modell den Vorteil, dass man bei der Konstruktion das ρ-Meson nicht schon mit einbauen muss, sondern dass man es als Resonanz geliefert bekommt.

Im zweiten Kapitel werden wir aus der QCD die chirale Störungstheorie herleiten. Dazu sind die Symmetrien der QCD von entscheidender Bedeutung. Wir werden daher zunächst die QCD motivieren und ausführlich auf ihre Symmetrien eingehen. Anschließend werden wir aus diesen Symmetrien auf die Transformationseigenschaften der Mesonen schließen. Am Ende konstruieren wir die allgemeinste Lagrangedichte vierter Ordnung.

Im dritten Kapitel werden wir, von dieser Lagrangedichte ausgehend, die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ Streuamplitude bis zur vierten Ordnung in $p/(4\pi F)$ bei Temperatur $T = 0$ berechnen. Hierbei werden wir den $N_f = 3$ Fall betrachten und daher in den Loops neben den Pionen auch Kaonen und das η berücksichtigen.

Im vierten Kapitel berechnen wir erneut die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ Streuamplitude bis zur vierten Ordnung, diesmal allerdings bei endlicher Temperatur. Wir werden dabei den einfacheren $N_f = 2$ Fall betrachten, bei dem nur Pionen berücksichtigt werden. Bevor wir mit der Berechnung beginnen, diskutieren wir, was wir unter der Streuamplitude bei endlicher Temperatur verstehen, da dieser Begriff in der Thermischen Feldtheorie nicht eindeutig ist. Des Weiteren beschreiben wir den Imaginärzeit-Formalismus, den wir zur Berechnung der Amplitude verwenden.

Im fünften Kapitel zeigen wir auf, wie man mit Hilfe der im vierten Kapitel berechneten $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ Streuamplitude auf das ρ-Meson schließen kann. Wir werden die Methode der inversen Amplitude vorstellen, mit der man das nur für niedrige Energien gültige Ergebnis der chiralen Störungstheorie auf höhere Energien erweitern kann, sodass wir auch bis zur Masse des ρ vordringen können. Anschließend definieren wir die Kinematiken, bei denen wir das ρ-Meson im Wärmebad betrachten werden.

Im sechsten Kapitel diskutieren wir die Ergebnisse unseres Modells. Dazu betrachten wir die Änderung der Masse und der Breite des ρ-Mesons in Abhängigkeit von der Temperatur und seinem Impuls relativ zum Wärmebad. Diese Ergebnisse vergleichen wir mit anderen Modellen aus der Literatur.

Im Anhang A geben wir wichtige Formeln und Zwischenergebnisse an, welche bei der Berechnung der Vakuumamplitude benötigt werden. Im Anhang B geben wir die entsprechenden Formeln für die temperaturabhängige Amplitude an.

Im Anhang C demonstrieren wir, wie man die Loop-Integrale bei endlicher Temperatur numerisch berechnen kann.

Kapitel 2

QCD und Chirale Störungstheorie

Um den Beitrag der starken Wechselwirkung zur $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude zu berechnen, müssen wir die Quantenchromodynamik (QCD) verwenden, welche die der starken Wechselwirkung zugrunde liegende Eichtheorie ist. Die QCD lässt sich allerdings nicht exakt lösen. Bei hohen Energien ist aber eine störungstheoretische Behandlung möglich, da die Kopplungskonstante g in diesem Bereich klein ist[1]. Bei niedrigen Energien hingegen ist $g \approx 1$ und somit gibt es keinen kleinen Parameter, nach dem die Amplitude entwickelt werden kann. Eine störungstheoretische Behandlung ist somit in diesem Fall nicht möglich. In dieser Arbeit wollen wir Eigenschaften des ρ-Mesons untersuchen. Im Besonderen sind wir an seiner Masse und seiner Breite interessiert. Somit bewegen wir uns bei Energien in der Nähe seiner Masse $M_\rho = 770$ MeV. Dies liegt noch unterhalb des Bereiches, in dem Störungstheorie in der QCD möglich ist. Somit brauchen wir eine alternative Methode, um Vorhersagen der QCD bei solch niedrigen Energien zu erhalten. Für unsere Zwecke reicht es, eine Theorie zu haben, welche nur die Mesonen beschreibt und nicht auch die Quarks selbst, da wir das ρ-Meson als Resonanz der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung sehen wollen.

Eine solche Theorie ist die chirale Störungstheorie, welche als effektive Theorie eine Näherung an die QCD für niedrige Energien ist. Man nutzt dabei aus, dass die drei bzw. vier schweren Quarks deutlich schwerer sind, als die leichten, indem man sie einfach vernachlässigt und die Theorie auf die leichten Quarks beschränkt. Diese werden zunächst als masselos angenommen. Durch spontane Symmetriebrechung erhalten wir die leichten Mesonen als Goldstone-Bosonen. Diese erhalten ihre Masse dadurch, dass man die Quarkmassen als Störung wieder einführt. Die chirale Störungstheorie liefert uns dann eine Entwicklung der Amplitude für Mesonenstreuung in Potenzen des Impulses und der Mesonenmassen.

[1] Kopplungskonstanten in Quantenfeldtheorien sind trotz ihres Namens keine Konstanten, sondern Funktionen der betrachteten Energieskala.

In diesem Kapitel werden wir nun die chirale Störungstheorie aus der QCD herleiten und aufzeigen, wie diese angewendet werden kann. Bei der Herleitung sind sowohl die QCD als auch die spontane Brechung einer ihrer Symmetrien von entscheidender Bedeutung. Wir werden daher zunächst auf diese beiden Themen eingehen, bevor wir die chirale Störungstheorie selbst betrachten.

2.1 QCD

2.1.1 QED

Bevor wir nun die QCD motivieren werden, betrachten wir erst einmal die Quantenelektrodynamik (QED), welche die einfachste Eichtheorie in der Elementarteilchenphysik ist. Sie beschreibt sehr erfolgreich die elektromagnetische Wechselwirkung durch den Austausch von masselosen Bosonen, den Photonen. Eichtheorien haben die Eigenschaft, dass sie renormierbar sind, wenn ihre Eichbosonen Spin-1-Teilchen sind [5]. Man versucht daher Quantenfeldtheorien als Eichtheorien zu formulieren, so auch die QCD.
Was Eichinvarianz genau bedeutet, wollen wir uns zunächst mal an der QED verdeutlichen. Dazu betrachten wir ein freies Elektron. Dies wird in der Feldtheorie durch die Dirac-Lagrangedichte beschrieben [20]:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \quad .$$

Diese ist symmetrisch unter der globalen Transformation

$$\Psi \mapsto e^{-i\theta}\Psi \quad ,$$

wobei θ Werte aus dem Intervall $[0, 2\pi)$ annehmen kann. Somit entspricht $\exp(-i\theta)$ einem Element der $U(1)$-Lie-Gruppe.[2] Global bedeutet hier, dass der Parameter θ eine Konstante ist und nicht von der Raumzeit abhängt. Die Idee der Eichinvarianz besteht nun darin, den konstanten Parameter θ durch eine glatte Funktion der Raumzeit $\theta(x)$ zu ersetzen und dabei zu verlangen, dass die Lagrangedichte weiterhin invariant bleibt. Lässt man nun eine solche Transformation auf $\mathcal{L}_{\text{free}}$ wirken, so gibt es einen zusätzlichen Term $\partial_\mu\theta$. Somit ist $\mathcal{L}_{\text{free}}$ nicht invariant unter einer solchen lokalen Transformation. Um den Ableitungsterm zu eliminieren, muss man ein zusätzliches Viererpotential $\mathcal{A}_\mu$ einführen, das sich unter der Eichtransformation wie folgt transformiert

$$\mathcal{A}_\mu \mapsto \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \tag{2.1}$$

[2]Für Definitionen und Eigenschaften von Lie-Gruppen siehe [19].

und folgendermaßen in die Lagrangedichte eingebaut wird:

$$\mathcal{L}'_{\text{free}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu) - m)\Psi \quad . \tag{2.2}$$

Hierbei ist e die Elementarladung und A_μ das aus der Elektrodynamik bekannte Viererpotential.
Nun soll die QED natürlich auch die Bewegungsgleichung der elektromagnetischen Felder wiedergeben, welche klassisch durch die Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu \tag{2.3}$$

gegeben sind. Dies erreicht man, indem man noch den Term $-\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}$ hinzufügt, wobei

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \tag{2.4}$$

der Feldstärketensor ist. Wir erhalten also als QED Lagrangedichte [20]:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} \quad , \tag{2.5}$$

welche gerade die Maxwell-Gleichung (2.3) liefert, wenn man sie in die Euler-Lagrange-Gleichung [20] für $\mathcal{A}_\mu$ einsetzt und die Stromdichte als $j^\mu = e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ identifiziert. Die kovariante Ableitung D_μ von Ψ

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ie\mathcal{A}_\mu \quad , \tag{2.6}$$

wird so definiert, dass sie sich unter der Eichtransformation genauso transformiert wie Ψ selbst:

$$D_\mu \Psi \mapsto e^{-i\theta} D_\mu \Psi \quad . \tag{2.7}$$

Wir haben nun gesehen, dass sich alleine aus der Forderung nach Eichinvarianz der Lagrangedichte für Elektronen die Existenz der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen Elektronen ergibt. Wir mussten nur den kinetischen Term der Photonen per Hand hinzufügen, welcher sich aber direkt aus dem klassischen Grenzfall ergab.

2.1.2 QCD

In diesem Abschnitt werden wir nun die QCD als Eichtheorie der starken Wechselwirkung formulieren und kurz auf die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zur QED eingehen [18].

Die starke Wechselwirkung wirkt nur zwischen Quarks. Von ihnen gibt es sechs verschiedene Flavor (up, down, strange, charm, button, top). Wir werden daher

die Quarkfelder q mit dem Flavorindex f versehen. Darüber hinaus tragen Quarks auch noch Farbladungen. Im Gegensatz zur QED, in der es nur eine Ladung gibt, gibt es in der QCD drei verschieden Ladungen (rot, grün, blau), für die wir den Farbindex i einführen, den wir von 1 bis 3 laufen lassen. Die Quarks verschiedener Flavor haben verschiedene Masse, wohingegen die Farbladung keinen Einfluss auf die Masse hat.
Mit diesem Wissen können wir nun in Analogie zur QED die Lagrangedichte für freie Quarks hinschreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{f,f'=u,d,s\\ c,b,t}} \bar{q}_{f,i}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_{ff'})q_{f',i} \quad , \tag{2.8}$$

wobei

$$M_{ff'} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t) \tag{2.9}$$

die Massenmatrix ist. Da die Masse der Quarks nicht von der Farbladung abhängt, ist diese Lagrangedichte invariant unter der globalen Transformation

$$q_{f,i} \mapsto U_{ij} q_{f,j} \quad , \tag{2.10}$$

wobei U eine unitäre 3×3-Matrix mit $\det(U) = 1$ ist. Diese Matrizen bilden die $SU(3)$-Gruppe. Fordern wir nun auch hier Eichinvarianz, dann müssen wir die Lagrangedichte analog zur QED ergänzen und erhalten:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{f,f'=u,d,s\\ c,b,t}} \bar{q}_{f,i}(i\gamma^\mu D_\mu - M_{ff'})q_{f',i} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu,a}\mathcal{G}^{\mu\nu,a} \quad . \tag{2.11}$$

Da $SU(3)$ im Gegensatz zu $U(1)$ eine nicht-abelsche Gruppe ist, haben die kovariante Ableitung D_μ und der Feldstärketensor $\mathcal{G}_{\mu\nu,a}$ eine etwas kompliziertere Struktur als in der QED, auf die wir nun eingehen werden. Die Dimension der Lie-Gruppe legt die Anzahl der benötigten Eichfelder fest, da bei einer Eichtransformation jeder Erzeuger einen Ableitungsterm liefert, der von einem Eichfeld kompensiert werden muss. In unserem Fall gibt es also acht Eichfelder $\mathcal{A}_{\mu,a}$ mit denen sich nun eine kovariante Ableitung definieren lässt:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^{8} \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_{\mu,a} \quad . \tag{2.12}$$

Hierbei ist g die Kopplungskonstante der QCD und λ_a sind die Gell-Mann-Matrizen. Diese stehen über

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \tag{2.13}$$

in direktem Zusammenhang mit den Erzeugern T_a der $SU(3)$ Gruppe. D.h. jedes Element $U(\theta)$ aus $SU(3)$ kann geschrieben werden als

$$U(\theta) = e^{-i\theta_a \lambda_a/2} \quad , \tag{2.14}$$

wobei θ_a reelle Zahlen sind. Damit sich, wie bei der QED, $D_\mu q_f$ wie q_f transformiert, müssen sich die Eichfelder folgendermaßen transformieren:

$$\frac{\lambda_a}{2}\mathcal{A}_{\mu,a} \mapsto U(x)\frac{\lambda_a}{2}\mathcal{A}_{\mu,a}U^\dagger(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)U^\dagger(x) \quad . \tag{2.15}$$

Um zu erreichen, dass $\mathcal{G}_{\mu\nu,a}\mathcal{G}^{\mu\nu,a}$ invariant ist unter der Eichgruppe, muss der Feldstärketensor $\mathcal{G}_{\mu\nu,a}$ im Vergleich zur QED noch ergänzt werden, da $SU(3)$ nicht-abelsch ist. Man erhält:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + g f_{abc}\mathcal{A}_{\mu,b}\mathcal{A}_{\mu,b} \quad . \tag{2.16}$$

Hierbei sind f_{abc} die durch

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \tag{2.17}$$

definierten Strukturkonstanten von $SU(3)$. Physikalisch bedeutet der zusätzliche Term, dass es nun auch Wechselwirkung zwischen den Eichbosonen, den Gluonen, gibt. Dies ist ein gravierender Unterschied zur QED, der unter anderem dazu führt, dass die Kopplungskonstante g mit abnehmender Energie wächst und somit Störungstheorie unterhalb einer bestimmten Energie unmöglich macht.

2.1.3 Weitere Symmetrien der QCD

Nachdem wir nun die QCD motiviert haben und ihre fundamentale Eich-Symmetrie kennen gelernt haben, werden wir nun sehen, dass sie unter bestimmten Voraussetzungen noch weitere Symmetrien enthält. Wir werden hierzu aber nur noch die drei leichten Quarkflavor berücksichtigen und die drei schweren vernachlässigen.[3] Wie man in Tabelle 2.1 sieht, lassen sich die sechs Quarkflavor in je drei leichte (u, d, s) und drei schwere Quarks (c, b, t) einteilen, die durch eine große Lücke getrennt sind. Außerdem liegen die Massen der schweren über dem für uns interessanten Energiebereich. Somit ist es eine gute Näherung, wenn wir unsere Theorie auf die drei leichten Quarks beschränken. Da deren Massen aber deutlich unter der aller Hadronen liegen, werden wir sie zunächst Null setzen. Diesen Grenzfall nennt man chiralen Limes. Die Lagrangedichte vereinfacht sich so zu:

$$\mathcal{L}^0_{\text{QCD}} = \sum_{l=u,d,s} \bar{q}_l i\gamma^\mu D_\mu q_l - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu,a}\mathcal{G}^{\mu\nu,a} \quad . \tag{2.18}$$

Flavor	u	d	s
Masse[MeV]	$1.5-4.5$	$5-8.5$	$80-155$
Flavor	c	b	t
Masse [GeV]	$1.9-1.4$	$4.0-4.5$	174.3 ± 5.1

Tabelle 2.1: Massen der sechs verschiedenen Quarkflavor [12].

Diese Lagrangedichte hat nun eine zusätzliche globale Symmetrie, die wir im Folgenden diskutieren werden. Sie ist entscheidend auf dem Weg zur chiralen Störungstheorie, da sie spontan gebrochen wird und uns so Goldstone-Bosonen liefern wird, welche wir später als Mesonen identifizieren werden. Um diese Symmetrie zu erkennen, definieren wir zunächst die Projektoren

$$P_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \quad \text{und} \quad P_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \quad , \tag{2.19}$$

mit $\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$ und $\gamma_5^2 = 1$.[4] Die definierenden Eigenschaften für Projektoren

$$P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}} = 1, \quad P_{\mathrm{R}}^2 = P_{\mathrm{R}}, \quad P_{\mathrm{L}}^2 = P_{\mathrm{L}}, \quad P_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{L}} = P_{\mathrm{L}}P_{\mathrm{R}} = 0 \tag{2.20}$$

lassen sich nun leicht nachprüfen. Mit Hilfe dieser Projektoren definieren wir links- und rechtshändige Quarks:

$$q_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}}q, \qquad q_{\mathrm{L}} = P_{\mathrm{L}}q \quad . \tag{2.21}$$

Die Bezeichnung links- und rechts-händig wird dann klar, wenn man sich die Lösung u der Dirac-Gleichung im masselosen Grenzwert anschaut [20]:

$$u(\mathbf{p}, \pm) = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \chi_\pm \\ \pm\chi_\pm \end{pmatrix} \quad . \tag{2.22}$$

Hierbei ist angenommen, dass der Spin entweder parallel oder antiparallel zum Impuls steht.
Nun lassen wir die in Gl. (2.19) definierten Projektoren auf die Lösungen mit positiver und negativer Helizität (u_+ und u_-) wirken. Dazu verwenden wir die Standard-Darstellung der γ-Matrizen und erhalten für die Projektoren:

$$P_{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad P_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.23}$$

[3] Die hier diskutierte Symmetrie ist unabhängig von dieser Vereinfachung und ist in der vollen QCD-Lagrangedichte ebenfalls enthalten.
[4] Für weitere Eigenschaften und explizite Darstellungen der γ-Matrizen siehe [20].

wobei $\mathbb{1}_2$ die 2×2-Einheitsmatrix ist. Für die Projektionen der Lösungen mit positiver und negativer Helizität ergibt sich:

$$P_{\mathrm{R}} u_+ = \sqrt{E}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = \sqrt{E}\begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = u_+ \tag{2.24}$$

$$P_{\mathrm{L}} u_+ = 0, \quad P_{\mathrm{R}} u_- = 0, \quad P_{\mathrm{L}} u_- = u_- \quad . \tag{2.25}$$

Somit projizieren P_{R} und P_{L} im masselosen Grenzwert auf die Helizitätseigenzustände, also auf links- und rechtshändige Quarks. Nun wollen wir zeigen, dass die QCD-Lagrangedichte chiral symmetrisch ist, d. h., invariant ist unter einer globalen $U(3)_{\mathrm{L}} \times U(3)_{\mathrm{R}}$ Transformation, die die links- und rechtshändigen Quarks unabhängig von einander transformiert. Dazu schreiben wir die Lagrangedichte mit Hilfe der Identität [18]

$$\begin{aligned} \bar{q}\gamma^\mu q &= \bar{q}(P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}})\gamma^\mu (P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}})q \\ &= \bar{q}_{\mathrm{R}}\gamma^\mu q_{\mathrm{R}} + \bar{q}_{\mathrm{L}}\gamma^\mu q_{\mathrm{L}} + \bar{q}(P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}} + P_{\mathrm{L}}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}})q \\ &= \bar{q}_{\mathrm{R}}\gamma^\mu q_{\mathrm{R}} + \bar{q}_{\mathrm{L}}\gamma^\mu q_{\mathrm{L}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

um in

$$\mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}} = \sum_{l=u,d,s} (\bar{q}_{R,l} i\gamma^\mu D_\mu q_{R,l} + \bar{q}_{L,l} i\gamma^\mu D_\mu q_{L,l}) - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu,a}\mathcal{G}^{\mu\nu,a} \quad . \tag{2.27}$$

Hierbei wurde benutzt, dass wegen $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$

$$P_{\mathrm{R}}\gamma^\mu P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{R}} P_{\mathrm{L}} \gamma^\mu = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{q} P_{\mathrm{L}} = \bar{q}_{\mathrm{R}} \quad . \tag{2.28}$$

Die Quarks verschiedener Farbe haben wir hier zu einem Vektor $q_{R,l}$ bzw. $q_{L,l}$ zusammengefasst.
Da $\gamma^\mu D_\mu$ nicht auf die Flavorindizes l wirkt, ist $\mathcal{L}^0_{\mathrm{QCD}}$ invariant unter

$$\begin{pmatrix} u_{\mathrm{R}} \\ d_{\mathrm{R}} \\ s_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \mapsto U_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{R}} \\ d_{\mathrm{R}} \\ s_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}} \\ d_{\mathrm{L}} \\ s_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \mapsto U_{\mathrm{L}} \begin{pmatrix} u_{\mathrm{L}} \\ d_{\mathrm{L}} \\ s_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \quad , \tag{2.29}$$

mit $U_{\mathrm{R}}, U_{\mathrm{L}} \in U(3)$. Im chiralen Limes ist die auf drei Quarks reduzierte QCD also symmetrisch unter :

$$U(3)_{\mathrm{R}} \times U(3)_{\mathrm{L}} = SU(3)_{\mathrm{R}} \times SU(3)_{\mathrm{L}} \times U(1)_{\mathrm{R}} \times U(1)_{\mathrm{L}} \quad . \tag{2.30}$$

Nach dem Nöther Theorem [20] gibt es zu jeder Symmetrie einer Theorie eine erhaltene Stromdichte

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Delta\phi \quad \text{mit} \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad , \tag{2.31}$$

wobei $\Delta\phi$ die infinitesimale Änderung von ϕ unter der zugehörigen Transformation ist. Die zugehörige Ladung

$$Q = \int d^3x\, j_0 \tag{2.32}$$

ist daher zeitunabhängig und vertauscht somit mit dem Hamiltonoperator $[Q, H] = 0$. Für die zu $SU(3)_\mathrm{R} \times SU(3)_\mathrm{L}$ gehörigen Stromdichten erhält man so [18]

$$L^{\mu,a} = \bar{q}_\mathrm{L}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_\mathrm{L} \quad \text{und} \quad R^{\mu,a} = \bar{q}_\mathrm{R}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_\mathrm{R} \quad . \tag{2.33}$$

Für unsere weiteren Betrachtungen wird es sich als nützlich erweisen, anstelle von $L^{\mu,a}$ und $R^{\mu,a}$ die Linearkombinationen

$$V^{\mu,a} = R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q, \tag{2.34}$$

$$A^{\mu,a} = R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q \tag{2.35}$$

zu verwenden, welche sich unter Parität wie Vektor bzw. Axialvektor transformieren. Die beiden $U(1)$-Symmetrien entsprechen der Multiplikation der Quarkfelder mit einer Phase. Die zugehörigen Vektor- und Axialvektor-Stromdichten entsprechen nun der Transformation der links- und rechtshändigen Quarkfelder mit gleicher Phase

$$V^\mu = \bar{q}_\mathrm{R}\gamma^\mu q_\mathrm{R} + \bar{q}_\mathrm{L}\gamma^\mu q_\mathrm{L} = \bar{q}\gamma^\mu q \tag{2.36}$$

bzw. mit entgegengesetzter Phase

$$A^\mu = \bar{q}_\mathrm{R}\gamma^\mu q_\mathrm{R} - \bar{q}_\mathrm{L}\gamma^\mu q_\mathrm{L} = \bar{q}\gamma^\mu\gamma_5 q \quad . \tag{2.37}$$

Auf dem klassischen Level sind alle diese Stromdichten, wie vom Nöther-Theorem vorhergesagt, erhalten. Die Quantisierung führt jedoch zu $\partial_\mu A^\mu \neq 0$. Auf diesen, Anomalie genannten, Effekt soll hier aber nicht eingegangen werden.[5] Für uns reicht es zu wissen, dass es keine erhaltene Ladung zu dieser Symmetrie gibt. Die anderen Stromdichten bleiben auch nach der Quantisierung weiterhin erhalten [18]. Es genügt daher im Weiteren nur noch die $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R} \times U(1)_\mathrm{V}$-Symmetrie zu betrachten.

2.2 Chirale Störungstheorie für Mesonen

Die chirale Störungstheorie ist eine effektive Feldtheorie, mit der die Konsequenzen der globalen chiralen Symmetrie der QCD bei niedrigen Energien beschrieben

[5] Für eine kurze Diskussion dieser Anomalie, siehe [18].

werden können. Die effektive Lagrangedichte ist eine Funktion der hadronischen Freiheitsgrade, die bei niedrigen Energie als asymptotische Zustände beobachtet werden können. Dies sind bei sehr niedrigen Energien die pseudoskalaren Mesonen, welche mit den Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung von $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R}$ auf $SU(3)_\mathrm{V}$ identifiziert werden. Die von Null verschiedene Masse dieser Bosonen lässt sich durch die, von den nicht verwindenden Quarkmassen verursachte, explizite Symmetriebrechung erklären.

2.2.1 Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Wir haben bereits gesehen, dass die QCD-Lagrangedichte im chiralen Grenzwert invariant unter einer globalen $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R} \times U(1)_\mathrm{V}$-Symmetrie ist. Von Symmetriebetrachtungen würde man nun naiver weise erwarten, dass sich die Hadronen in entartete Multipletts ordnen lassen, deren Größen den Dimensionen irreduzibler Repräsentationen von $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R} \times U(1)_\mathrm{V}$ entsprechen. In der Natur wird dies aber nicht beobachtet. Den Grund dafür werden wir nun genauer untersuchen. Die $U(1)_\mathrm{V}$-Symmetrie führt zur Baryonenzahlerhaltung und sorgt somit lediglich für eine Unterteilung der Hadronen in Mesonen und Baryonen. Um den Einfluss der $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R}$-Symmetrie auf das Spektrum der Hadronen zu untersuchen, betrachten wir zunächst einen Ein-Teichen-Eigenzustand $|i,+\rangle$ zum Hamiltonoperator H^0_QCD mit Eigenwert E_i [18]

$$H^0_\mathrm{QCD}|i,+\rangle = E_i|i,+\rangle \tag{2.38}$$

mit positiver Parität,

$$P|i,+\rangle = |i,+\rangle \quad . \tag{2.39}$$

Aus der Vertauschbarkeit von H^0_QCD und Q^a_A ergibt sich für den Zustand $|\phi_i\rangle = Q^a_\mathrm{A}|i,+\rangle$:

$$H^0_\mathrm{QCD}|\phi_i\rangle = H^0_\mathrm{QCD}Q^a_\mathrm{A}|i,+\rangle = Q^a_\mathrm{A}H^0_\mathrm{QCD}|i,+\rangle = E_iQ^a_\mathrm{A}|i,+\rangle = E_i|\phi_i\rangle \tag{2.40}$$

und des Weiteren

$$P|\phi_i\rangle = PQ^a_\mathrm{A}P^{-1}P|i,+\rangle = -Q^a_\mathrm{A}|i,+\rangle = -|\phi_i\rangle \quad . \tag{2.41}$$

Somit gibt es zu jedem Eigenzustand von H^0_QCD mit positiver Parität einen weiteren mit gleichem Eigenwert, aber negativer Parität. Man würde nun erwarten, dass sich $|\phi_i\rangle$ in den Ein-Teilchen-Eigenzuständen aus dem Multiplett mit negativer Parität entwickeln lässt.

$$|\phi_i\rangle = -t_{ij}|j,-\rangle \quad . \tag{2.42}$$

Dies ist im Allgemeinen aber nicht der Fall, wie wir nun zeigen werden. Dazu bezeichnen wir mit $a_i^\dagger$ die Erzeugungsoperatoren, die aus dem Grundzustand $|0\rangle$ den Zustand $|i,+\rangle$ generieren und mit $b_j^\dagger$ jene, die den Zustand $|j,-\rangle$ generieren. Aus den Vertauschungsrelationen der Felder und der konjugierten Impulse und aus der Form der Nöther-Stromdichten folgt [18]:

$$[Q_{\mathrm{A}}^a, a_i^\dagger] = -t_{ij}^a b_j^\dagger \quad . \tag{2.43}$$

Somit lässt sich $|\phi_i\rangle$ schreiben als:

$$|\phi_i\rangle = Q_{\mathrm{A}}^a|i,+\rangle = Q_{\mathrm{A}}^a a_i^\dagger|0\rangle = ([Q_{\mathrm{A}}^a, a_i^\dagger] + a_i^\dagger Q_{\mathrm{A}}^a)|0\rangle = (-t_{ij}^a b_j^\dagger + a_i^\dagger Q_{\mathrm{A}}^a)|0\rangle \quad . \tag{2.44}$$

D. h., $|\phi_i\rangle$ lässt sich genau dann als $|\phi_i\rangle = -t_{ij}|j,-\rangle$ schreiben, wenn Q_{A}^a den Grundzustand vernichtet. Im Niedrigenergiespektrum der Baryonen wird aber kein entartetes Oktett mit negativer Parität beobachtet. Somit lässt sich $|\phi_i\rangle$ nicht in Zuständen mit negativer Parität entwickeln und als Konsequenz daraus ergibt sich, dass Q_{A}^a den Grundzustand nicht vernichtet. Q_{A}^a ist aber ein Erzeuger der $SU(3)_{\mathrm{A}}$-Symmetrie von $\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}^0$ und somit ist $SU(3)_{\mathrm{A}}$ in der QCD spontan gebrochen, d.h. die $SU(3)$-Symmetrie der Lagrangedichte ist im Grundzustand nicht mehr vorhanden. Das Goldstone-Theorem[6] besagt nun, dass es acht[7] masselose Goldstone-Bosonen geben muss. Im hadronischen Spektrum gibt es allerdings auch keine masselosen Bosonen, es fällt jedoch auf, dass die Massen der pseudoskalaren Mesonen deutlich unter denen der Vektormesonen liegen. Die pseudoskalaren Mesonen sind also die leichtesten beobachteten Hadronen. Man kann daher die pseudoskalaren Mesonen mit den Goldstone-Bosonen identifizieren und deren Massen mit der explizite Brechung der $SU(3)_{\mathrm{A}}$-Symmetrie durch die von Null verschiedenen Massen der Quarks erklären [18]. Es sei an dieser Stelle nochmal daran erinnert, dass wir hier nur Symmetrien der QCD im chiralen Grenzwert betrachtet haben.

2.2.2 Transformationseigenschaften der Goldstone-Bosonen

Im nächsten Abschnitt wollen wir eine Lagrangedichte konstruieren, die alle Goldstone-Bosonen enthält und invariant ist unter $SU(3)_{\mathrm{L}}\times SU(3)_{\mathrm{R}}\times U(1)_{\mathrm{V}}$. Dazu ist es zunächst einmal notwendig zu wissen, wie sich die Goldstone-Bosonen unter dieser Gruppe transformieren. Da die Symmetriegruppe selbst auf die Quarkfelder wirkt, ist diese Transformation nicht trivial. Wir werden in diesem Abschnitt

[6]Für eine Motivation des Goldstone-Theorems siehe [20] oder [2].

[7]Die Anzahl der Goldstone-Bosonen ergibt sich aus der Dimension der spontan gebrochenen Symmetrie.

sehen, dass hier eine Darstellung der Gruppe nicht ausreicht, sondern eine nicht-lineare Realisierung der Gruppe nötig ist. Daher werden wir zunächst eine allgemeine Betrachtung nicht-linearer Realisierungen machen und anschließend dieses abstrakte Ergebnis auf unseren konkreten Fall anwenden [18].

Dazu betrachten wir ein physikalisches System, mit einem Hamiltonoperator, der invariant ist unter der Gruppe G der Dimension n_G [18]. Der Grundzustand hingegen soll nur unter der Untergruppe H mit Dimension n_H invariant sein. Nach dem Goldstone Theorem existieren dann $n = n_G - n_H$ Goldstone-Bosonen, die durch unabhängige reelle Funktionen ϕ_i vom Minkowskiraum M^4 nach $\mathbb{R}$ beschrieben werden können. Diese Funktionen fassen wir zu einem n-dimensionalen Vektor Φ zusammen und definieren damit den Vektorraum

$$M_1 := \{\Phi : M^4 \to \mathbb{R}^n | \phi_i : M^4 \to \mathbb{R} \text{ stetig}\} \quad . \tag{2.45}$$

Nun suchen wir eine Abbildung φ, die die Transformation einer Feldkonfiguration Φ durch ein Gruppenelement g beschreibt, d.h. jedem Paar $(g, \Phi) \in G \times M_1$ eine neue Feldkonfiguration $\varphi(g, \Phi) \in M_1$ zuordnet und folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\varphi(e, \Phi) = \Phi \text{ für alle } \Phi \in M_1 \text{ und } e \text{ Einheitselement von } G \tag{2.46}$$

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi) \text{ für alle } g_1, g_2 \in G,\ \Phi \in M_1 \quad . \tag{2.47}$$

Im Unterschied zu einer Darstellung fordern wir hier nicht, dass die Abbildung homogen ist, d.h. im Allgemeinen $\varphi(g, \lambda\Phi) \neq \lambda\varphi(g, \Phi)$. Nun bezeichnen wir mit Φ_0 den Grundzustand des Systems. Nach unseren Voraussetzungen soll dieser invariant unter der Untergruppe H sein, also verlangen wir von φ:

$$\varphi(h, \Phi_0) = \Phi_0 \text{ für alle } h \in H \quad . \tag{2.48}$$

Nun werden wir eine Beziehung zwischen der Menge aller Linksnebenklassen $\{gH | g \in G\} =: G/H$ herstellen, die uns dann direkt ermöglichen wird, die Bosonenfelder zu transformieren. Für uns ist es nun wichtig, dass die Nebenklassen die Gruppe G in disjunkte Mengen einteilen. Um dies zu sehen, betrachten wir ein Gruppenelement l, das in den beiden Nebenklassen gH und $g'H$ enthalten ist. Es folgt also

$$l = gh \text{ und } l = g'h' \text{ mit } h, h' \in H \quad . \tag{2.49}$$

Somit ist $g = g'h'h^{-1}$, woraus folgt: $g \in g'H$ und damit $gH = g'H$, woraus sich direkt die Disjunktheit der Nebenklassen ergibt.
In unserem Fall haben die Elemente der Linksnebenklassen noch die Eigenschaft, dass sie alle den Grundzustand Φ_0 auf den gleichen Zustand abbilden:

$$\varphi(gh, \Phi_0) = \varphi(g, \varphi(h, \Phi_0) = \varphi(g, \Phi_0) \quad . \tag{2.50}$$

des Weiteren ist diese Abbildung injektiv im Bezug auf die Nebenklassen, d. h. zwei Elemente aus verschiedenen Nebenklassen bilden Φ_0 auf verschiedene Zustände ab. Um dies zu sehen, betrachten wir $g, g' \in G$ mit $g' \notin gH$ und zeigen, dass $\varphi(g, \Phi_0) \neq \varphi(g', \Phi_0)$. Hierzu nehmen wir an, dass $\varphi(g, \Phi_0) = \varphi(g', \Phi_0)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \varphi(e, \Phi_0) = \varphi(g^{-1}g, \Phi_0) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, \Phi_0)) \\ &= \varphi(g^{-1}, \varphi(g', \Phi_0)) = \varphi(g^{-1}g', \Phi_0) \quad . \end{aligned} \tag{2.51}$$

Daraus und aus der Annahme, dass nur Elemente aus H den Grundzustand auf sich selbst transformieren, folgt $g' \in gH$ im Widerspruch zu unserer Annahme. Somit lässt sich die Abbildung, die jeder Nebenklasse eine Feldkonfiguration zuordnet, auf der Menge $\varphi(G, \Phi_0)$ invertieren. Wir haben also gezeigt, dass es eine eineindeutige Abbildung von G/H auf die Goldstone-Bosonen gibt. Somit kann jeder Feldkonfiguration, die durch eine Transformation aus dem Grundzustand erhalten werden kann, ein Element aus G/H zugeordnet werden. Dies nennen wir eine Parametrisierung von G/H. Eine solche Parametrisierung ist in der Regel nicht eindeutig, wie wir später am Beispiel der chiralen Störungstheorie im $SU(2)$-Fall sehen werden.

Daraus leiten wir nun die Transformation für Bosonenfelder unter beliebigen Gruppenelementen $g \in G$ her. Zu jeder Feldkonfiguration Φ gibt es, wie oben gezeigt, eine eindeutig bestimmte Nebenklasse $\tilde{g}H$, so dass für jeden Repräsentanten $f := \tilde{g}h \in \tilde{g}H$ dieser Nebenklasse gilt:

$$\Phi = \varphi(f, \Phi_0) = \varphi(\tilde{g}h, \Phi_0) \quad . \tag{2.52}$$

Wenden wir hierauf die Transformationsabbildung φ mit dem Gruppenelement g an, erhalten wir:

$$\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, \Phi_0)) = \varphi(g\tilde{g}h, \Phi_0) = \varphi(f', \Phi_0) = \Phi' \quad , \tag{2.53}$$

wobei f' ein Repräsentant der Nebenklasse $g\tilde{g}H$ ist. Wir können die Transformation von Φ unter dem Gruppenelement g also realisieren, indem wir die Φ eindeutig zugeordnete Nebenklasse mit g multiplizieren und dann den dieser Nebenklasse eindeutig zugeordneten Zustand Φ' bestimmen.

Diese doch recht abstrakte Methode zur Transformation der Goldstone-Bosonen werden wir nun auf unseren Fall, d.h. auf die chirale Symmetrie der QCD anwenden. Wir werden hier zunächst eine $SU(N) \times SU(N)$-Symmetrie annehmen und dann die Fälle $N = 2$ und $N = 3$ betrachten, die nur die drei Pionen bzw. alle acht pseudoskalare Mesonen enthalten. Der erste Fall ist für sehr niedrige Energien durchaus ausreichend, da die anderen acht pseudoskalaren Mesonen deutlich schwerer sind, als die Pionen. Wir identifizieren G und H wie folgt:

$$G = SU(N)_{\mathrm{L}} \times SU(N)_{\mathrm{R}} = \{(L, R) | L \in SU(N), R \in SU(N)\} \tag{2.54}$$

$$H = \{(V,V)|V \in SU(N)\} \simeq SU(N) \quad . \tag{2.55}$$

Zunächst zeigen wir, dass sich jede Nebenklasse $\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V)|V \in SU(N)\}$ eindeutig durch die $SU(N)$-Matrix $U = \tilde{R}\tilde{L}$ charakterisieren lässt:

$$\begin{aligned} \tilde{g}H &= (\tilde{L}V, \tilde{R}V)H = (\tilde{L}V, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger\tilde{L}V)H \\ &= (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)(\tilde{L}V, \tilde{L}V)H = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H \quad . \end{aligned} \tag{2.56}$$

Das Transformationsverhalten von U unter $g = (L, R) \in G$ erhalten wir, indem wir die zu U gehörige Linksnebenklasse $\tilde{g}H$ von links mit g multiplizieren:

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)(L, L)H = (1, R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger)H \quad . \tag{2.57}$$

U transformiert sich also wie folgt:

$$U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger \mapsto U' = R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger = RUL^\dagger \quad . \tag{2.58}$$

Nun müssen wir eine Parametrisierung von den Elementen U aus $SU(N)$ finden. Diese ist aus der Gruppentheorie bekannt [19]:

$$U = \exp\left(i\frac{\phi}{F_0}\right) \quad , \tag{2.59}$$

wobei F_0 eine frei wählbare reelle Zahl ist und ϕ für $N = 2$ gegeben ist durch

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \tau_i\phi_i = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.60}$$

Die τ_i sind die üblichen Pauli-Spin-Matrizen. Analog erhalten wir für $N = 3$:

$$\begin{aligned} \phi = \sum_{a=1}^{8} \lambda_a\phi_a &= \begin{pmatrix} \phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_1 - i\phi_2 & \phi_4 - i\phi_5 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_6 - i\phi_7 \\ \phi_4 + i\phi_5 & \phi_6 + i\phi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\phi_8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{2.61}$$

wobei die λ_a die Gell-Mann Matrizen sind. Im jeweils letzten Schritt haben wir die komplexen Bosonenfelder π^+, K^+ und K^0 durch

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2), \quad K^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 - i\phi_5) \quad \text{und} \quad K^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 - i\phi_7) \tag{2.62}$$

definiert und ϕ_0 und ϕ_8 in die reellen Bosonenfelder π^0 und η umbenannt.
Wie bereits oben erwähnt, sind Parametrisierungen in der Regel nicht eindeutig. Für den $SU(2)$-Fall ist eine alternative Parametrisierung gegeben durch:

$$U = \frac{1}{F_0^2}\left(\sigma + i\tau_i\phi_i\right), \qquad \sigma = \sqrt{F_0^2 - \phi_i\phi_i} \quad . \tag{2.63}$$

Nun können wir noch überprüfen, ob der Grundzustand $\Phi_0 = 0$, welcher $U_0 = 1$ entspricht, richtig transformiert wird. Er sollte also invariant sein unter den Vektortransformationen $g = (V, V)$ und nicht invariant unter den axialen Transformationen $g = (A, A^\dagger)$. Dies sieht man wie folgt:

$$U_0 \overset{g=(V,V)}{\longmapsto} VU_0V^\dagger = VV^\dagger = 1 = U_0 \tag{2.64}$$

$$U_0 \overset{g=(A,A^\dagger)}{\longmapsto} A^\dagger U_0 A^\dagger = A^\dagger A^\dagger \neq 1 = U_0 \quad . \tag{2.65}$$

Somit wissen wir nun also, wie sich die pseudoskalaren Mesonen unter $SU(N)_\mathrm{L} \times SU(N)_\mathrm{R}$ transformieren und können mit diesem Wissen die effektive Lagrangedichte konstruieren.

2.2.3 Die effektive Lagrangedichte niedrigster Ordnung

Unser Ziel ist es, die allgemeinste effektive Theorie zu konstruieren, welche die Dynamik der Goldstone-Bosonen beschreibt, die uns die spontane Symmetriebrechung der QCD liefert. Nach Weinberg [21] liefert diese das allgemeinste S-Matrix-Element, welches konsistent ist mit den grundlegenden Prinzipien der Quantenfeldtheorie und den Symmetrien der zugrunde liegenden Theorie [18]. Die Lagrangedichte dieser effektiven Theorie enthält dann unendlich viele Terme und Parameter. Wir werde später in diesem Kapitel sehen, dass es nicht nötig ist alle diese zu bestimmen. Zunächst wollen wir nur die mit maximal zwei Ableitungen bestimmen.
Im chiralen Grenzwert soll die effektive Lagrangedichte, wie auch die QCD selbst, invariant unter $SU(3)_\mathrm{L} \times SU(3)_\mathrm{R} \times U(1)_\mathrm{V}$ sein. Sie soll genau acht pseudoskalare Freiheitsgrade enthalten, welche sich wie ein Oktett unter der Untergruppe $H = SU(3)_\mathrm{V}$ transformieren. Außerdem soll, wegen der spontanen Symmetriebrechung, der Grundzustand nur invariant unter $SU(3)_\mathrm{V} \times U(1)_\mathrm{V}$ sein.
Im letzten Abschnitt haben wir bereits gesehen, dass sich die dynamischen Freiheitsgrade wie folgt in der $SU(3)$-Matrix $U(x)$ schreiben lassen:

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right), \tag{2.66}$$

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^{8} \lambda_a\phi_a(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \quad . \tag{2.67}$$

Aus diesen Bedingungen wollen wir nun die allgemeinste, chiral symmetrische, effektive Lagrangedichte konstruieren, mit kleinst möglicher Anzahl an Ableitungen. Wir werden hierbei sehen, dass es nicht möglich ist, einen physikalisch relevanten Term mit allen geforderten Symmetrieeigenschaften zu finden, der keine oder nur eine Ableitung enthält, sondern dass mindestens zwei Ableitungen nötig sind. Dies wird uns unter anderem den kinetischen Anteil der effektiven Lagrangedichte liefern.

Zunächst überlegen wir uns, dass Terme der Form

$$\mathrm{Sp}\,(\tilde{U}\tilde{U}^\dagger) \quad , \tag{2.68}$$

wobei $\tilde{U}$ entweder U selbst oder eine ein- oder mehrfache Ableitung von U ist, invariant sind unter $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$. Nach Gl.(2.58) transformiert sich $\tilde{U}$ unter einem Element $g = (L, R) \in SU(3)_{\mathrm{R}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ wie folgt:

$$\tilde{U} \mapsto R\tilde{U}L^\dagger \quad . \tag{2.69}$$

Für die Ableitungen von U gilt dies, da die Gruppenelemente R und L nicht von x abhängig sind. Für $\tilde{U}^\dagger$ gilt dementsprechend:

$$\tilde{U}^\dagger \mapsto L\tilde{U}^\dagger R^\dagger \quad . \tag{2.70}$$

Die Invarianz von $\mathrm{Sp}\,(\tilde{U}\tilde{U}^\dagger)$ folgt somit direkt unter Ausnutzung der Zyklizität der Spur: $\mathrm{Sp}\,(AB) = \mathrm{Sp}\,(BA)$.

Um die gesuchte Lagrangedichte zu konstruieren, betrachten wir nun Terme der Form $\mathrm{Sp}\,(\tilde{U}\tilde{U}^\dagger)$ mit unterschiedlicher Anzahl an Ableitungen.

Der einzige invariante Term ohne Ableitung ist proportional zu

$$\mathrm{Sp}\,(UU^\dagger) = 1 \tag{2.71}$$

und somit als Konstante physikalisch irrelevant.

Terme mit einer Ableitung müssten enthalten:

$$\mathrm{Sp}\,(U\partial^\mu U^\dagger) \quad \text{oder} \quad \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu U U^\dagger) \quad . \tag{2.72}$$

Diese sind jedoch Null, wegen

$$\mathrm{Sp}\,\left(\partial^\mu U U^\dagger\right) = \mathrm{Sp}\left(\frac{i}{F_0}\partial^\mu \phi U U^\dagger\right) = \mathrm{Sp}\left(\frac{i}{F_0}\partial^\mu \phi\right) = \frac{i}{F_0}\partial^\mu \phi_a \mathrm{Sp}\,\lambda_a = 0 \quad , \tag{2.73}$$

da die Gell-Mann-Matrizen alle Spur Null haben.
Möglich Terme mit zweifacher Ableitung sind von der Form:

$$\mathrm{Sp}\,(\partial^\mu\partial_\mu U U^\dagger), \quad \mathrm{Sp}\,((\partial^\mu\partial_\mu U)U^\dagger), \quad \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu U \partial_\mu U^\dagger) \quad . \tag{2.74}$$

Der erste Term ist eine totale Ableitung und somit physikalisch irrelevant. Der zweite lässt sich umschreiben in

$$\mathrm{Sp}\,((\partial^\mu\partial_\mu U)U^\dagger) = \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu\partial_\mu U U^\dagger) - \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu U\partial_\mu U^\dagger) \tag{2.75}$$

und ist somit eine Kombination des ersten und dritten. Somit verbleibt nur der dritte und die gesuchte Langrangedichte niedrigster Ordnung ergibt sich zu

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = C\ \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu U\partial_\mu U^\dagger) \quad , \tag{2.76}$$

wobei C eine Konstante ist, die noch zu bestimmen ist. Dazu entwickeln wir $U(x)$ bis zur ersten Ordnung in ϕ und erhalten so

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff}} &= C\ \mathrm{Sp}\left[\frac{i\partial_\mu\phi}{F_0}\left(-\frac{i\partial_\mu\phi}{F_0}\right)\right] + \ldots = \frac{C}{F_0^2}\ \mathrm{Sp}\,(\lambda_a\partial_\mu\phi_a\lambda_b\partial^\mu\phi_b) + \ldots \\ &= \frac{C}{F_0^2}\ \partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_b\ \mathrm{Sp}\,(\lambda_a\lambda_b) + \ldots = \frac{2C}{F_0^2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a + \ldots \quad .\end{aligned} \tag{2.77}$$

Hierbei wurde $\mathrm{Sp}\,(\lambda_a\lambda_b) = 2\delta_{ab}$ ausgenutzt, welches eine weitere Eigenschaft der Gell-Mann-Matrizen ist. Da

$$\frac{2C}{F_0^2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a \tag{2.78}$$

der einzige Term zweiter Ordnung in ϕ_a mit zwei Ableitungen in unserer Langrangedichte ist, muss er gleich dem kinetischen Term sein. Nehmen wir diesen nun als wie üblich normiert an, d. h.,

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a \quad , \tag{2.79}$$

so ergibt sich

$$C = \frac{F_0^2}{4} \tag{2.80}$$

und somit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_0^2}{4}\ \mathrm{Sp}\,(\partial^\mu U\partial_\mu U^\dagger) \quad . \tag{2.81}$$

Damit haben wir nun die allgemeinste Lagrangedichte niedrigster Ordnung, die alle geforderten Symmetrieeigenschaften erfüllt. Da sie aber keinen Massenterm enthält, beschreibt sie bis jetzt nur masselose Bosonen und nicht die in der Natur beobachteten massiven. Um diese nun mit einer Masse zu versehen, bedienen wir uns des Konzepts der expliziten Symmetriebrechung, indem wir vom chiralen

Grenzwert zum Fall kleiner Quarkmassen übergehen. Dazu fügen wir zu der QCD-Lagrangedichte noch einen Massenterm

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q}Mq = -\bar{q}_{\mathrm{R}}Mq_{\mathrm{L}} - \bar{q}_{\mathrm{L}}Mq_{\mathrm{R}} \tag{2.82}$$

hinzu, wobei

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \quad . \tag{2.83}$$

Dieser Term bricht ganz offensichtlich die $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$-Symmetrie. Das würde er aber nicht mehr, wenn man verlangt, dass sich M unter $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ wie U transformiert:

$$M \mapsto RML^\dagger \quad . \tag{2.84}$$

Dies scheint zwar auf dem ersten Blick wenig Sinn zu machen, da M eine konstante Matrix ist und sich daher gar nicht transformiert unter $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$. Wir können diesen formalen Trick aber nun nutzen, um die Symmetriebrechung der QCD durch die Quarkmassen in unsere effektive Theorie mit einzubeziehen, indem wir die Lagrangedichte dahingehend erweitern, dass wir die allgemeinste Funktion $\mathcal{L}(U, M)$ suchen, die invariant ist unter Gl.(2.58) und Gl.(2.84). Da die Quarkmassen sehr klein sind und die Symmetrie daher nur geringfügig gebrochen ist, schränken wir unsere Lagrangedichte auf Funktionen linear in M ein. Der allgemeinste Symmetrie brechende Term $\mathcal{L}_{\text{s.b.}}$ ist

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \operatorname{Sp}\left(MU^\dagger + UM^\dagger\right) \quad . \tag{2.85}$$

wobei B_0 über $3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle$ in direkter Beziehung mit dem Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ steht.[8] Ein Term proportional zu

$$\operatorname{Sp}\left(MU^\dagger(\mathbf{x}, t) - U(\mathbf{x}, t)M^\dagger\right) \tag{2.86}$$

ist nicht möglich, da sich dieser unter der Parität falsch transformiert:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}\left(MU^\dagger(\mathbf{x}, t) - U(\mathbf{x}, t)M^\dagger\right) \stackrel{P}{\longmapsto} & \operatorname{Sp}\left(MU(-\mathbf{x}, t) - U^\dagger(-\mathbf{x}, t)M^\dagger\right) \\ = & - \operatorname{Sp}\left(MU^\dagger(-\mathbf{x}, t) - U(-\mathbf{x}, t)M^\dagger\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.87}$$

Hier haben wir die Zyklizität der Spur und $M^\dagger = M$ ausgenutzt.
Da M reell ist, enthält $\mathcal{L}_{\text{s.b.}}$ nur gerade Terme in ϕ. Der erste nicht konstante Beitrag ist somit quadratisch in ϕ:

$$\mathcal{L}_{\text{s.b.}} = -\frac{B_0}{2} \operatorname{Sp}\left(\phi^2 M\right) + \dots \quad . \tag{2.88}$$

[8] Vergleiche hierzu [18].

Setzen wir nun Gl.(2.67) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}\,(\phi^2 M) &= 2(m_u+m_d)\pi^+\pi^- + 2(m_u+m_s)K^+K^- + 2(m_d+m_s)K^0K^0 - \\ &\quad + (m_u+m_d)\pi^0\pi^0 + \frac{2}{\sqrt{3}}(m_u-m_d)\pi^0\eta + \frac{m_u+m_d+4m_s}{3}\eta^2 \quad .\end{aligned} \tag{2.89}$$

Hieran sehen wir, dass es eine Mischung von π^0 und η gibt. Wir können das Problem dieser Mischung umgehen, indem wir als Näherung exakte Isospin-Symmetrie voraussetzen, d.h. $m_u = m_d =: m$. Wie man aus Gl. (2.89) ablesen kann, führt dies dazu, dass jeweils alle Pionen und alle Kaonen die gleiche Masse haben:

$$\begin{aligned}M_\pi^2 &= 2B_0 m \\ M_{\mathrm{K}}^2 &= B_0(m+m_s) \\ M_\eta^2 &= \frac{2}{3}B_0(m+2m_s) \quad .\end{aligned} \tag{2.90}$$

Daraus ergibt sich, dass die Massen der pseudoskalaren Mesonen die Gell-Mann-Okubo-Beziehung erfüllen [18]:

$$4M_{\mathrm{K}}^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2 \quad . \tag{2.91}$$

Setzt man in diese Beziehung hier die in der Natur beobachteten Massen ein, sieht man, dass sie sehr gut erfüllt ist. Dies können wir als Bestätigung dafür sehen, dass wir die Massen auf eine sinnvolle Art und Weise in unsere Theorie eingebaut haben. Abschließend definieren wir noch

$$\mathcal{M}^2 := 2B_0 M = \begin{pmatrix} M_{0\pi}^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_{0\pi}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2M_{0K}^2 - M_{0\pi}^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.92}$$

$\mathcal{M}^2$ transformiert sich unter der $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$-Symmetrie wie M:

$$\mathcal{M}^2 \mapsto R\mathcal{M}^2 L^\dagger \quad . \tag{2.93}$$

Damit können wir die Lagrangedichte niedrigster Ordnung $\mathcal{L}_2$ schreiben als

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4}\mathrm{Sp}\,\left(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + \mathcal{M}^2(U+U^\dagger)\right) \quad . \tag{2.94}$$

Verwenden wir für den $SU(2)$-Fall die Parametrisierung (2.63), so können wir $\mathcal{L}_2$ schreiben als:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{2}\left(\partial_\mu \tilde{U}^T \partial^\mu \tilde{U} + 2\chi^T \tilde{U}\right) \tag{2.95}$$

mit

$$\tilde{U} = \frac{1}{F_0}\left(\sqrt{F_0^2 - \phi_i\phi_i}, \phi_1, \phi_2, \phi_3\right), \qquad \chi = (M_{0\pi}^2, 0, 0, 0) \quad . \tag{2.96}$$

2.2.4 Chirales Powercounting

Im letzten Abschnitt haben wir die Lagrangedichte niedrigster Ordnung sowohl in der Ableitung als auch in der Masse berechnet. Berechnen wir daraus ein Tree-Level-Diagramm, so gibt es aufgrund der Ableitungen quadratische Terme in den externen Impulsen und die restlichen sind wegen $\mathcal{M}^2$ quadratisch in den Mesonenmassen. In der chiralen Störungstheorie bezeichnet man solche Terme als zweiter Ordnung, da man die Amplitude als eine Entwicklung in externen Impulsen und den Mesonenmassen betrachtet. Wir schreiben, der Term habe chirale Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$.
Nun bestimmen wir die chirale Ordnung eines Ein-Loop-Diagrammes, berechnet aus $\mathcal{L}_2$. Wir betrachten hierzu eines mit einem inneren Propagator und einem Vertex. Der Vertex hat Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$, da er aus $\mathcal{L}_2$ stammt. Der Propagator hat Ordnung $\mathcal{O}(p^{-2})$ und die Loop-Integration hat Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$, da es ein Vierfach-Integral ist. Das Ein-Loop-Diagramm hat somit Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$. Auf die gleiche Weise kann man zeigen, dass alle Ein-Loop-Diagramme Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ sind und alle Zwei-Loop-Integrale Ordnung $\mathcal{O}(p^6)$ usw [18].
Die einzige Möglichkeit, einen weiteren Term mit Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ zu erhalten, ist ein Tree-Level-Term aus der Lagrangedichte vierter Ordnung. Führt man dies weiter, erhält man eine Entwicklung der Amplitude in p^2. Eine genauere Analyse zeigt, dass der Entwicklungsparameter $p/(4\pi F)$ ist, wobei $4\pi F \approx 1.2$ GeV [8]. Hier ist F die Pion-Zerfallskonstante. Somit genügt es, für Energien deutlich unter 1.2 GeV, nur die ersten Ordnungen zu betrachten. Wir werden in dieser Arbeit bis $\mathcal{O}(p^4)$ gehen.
Diese Zählweise der Potenzen, bei der die externen Impulse und die Mesonenmassen gleich behandelt werden, nennt man chirales Powercounting.

2.2.5 Die effektive Lagrangedichte vierter Ordnung

Nachdem wir im letzten Abschnitt die effektive Lagrangedichte niedrigster Ordnung konstruiert haben, wollen wir nun eine Ordnung weiter gehen. Da aufgrund der Parität in unsere Theorie Terme mit drei Ableitungen nicht möglich sind, ist die nächst höhere Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$. Hierzu schreiben wir alle Terme auf, die wir aus U und $\mathcal{M}^2$ konstruieren können und die invariant sind unter der $SU(3)_\mathrm{L}\times SU(3)_\mathrm{R}$-Symmetrie und Parität. Des Weiteren müssen sie Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ sein, wobei jede Ableitung als $\mathcal{O}(p^1)$ zählt und $\mathcal{M}^2$ als $\mathcal{O}(p^2)$. Dabei wird jeder unabhängige Term mit einem eigenen chiralen Parameter L_i versehen. Wir erhalten so [8]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 =& L_1 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\rangle^2 + L_2 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\rangle\langle \partial_\nu U^\dagger \partial^\nu U\rangle \\ &+ L_3 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \partial_\nu U^\dagger \partial^\nu U\rangle + L_4 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U\rangle\langle U^\dagger \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^2 U\rangle \\ &+ L_5 \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U (U^\dagger \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^2 U)\rangle + L_6 \langle U^\dagger \mathcal{M}^2 + \mathcal{M}^2 U\rangle^2\end{aligned}$$

$$+ L_7 \langle U^\dagger \mathcal{M}^2 - \mathcal{M}^2 U \rangle^2 + L_8 \langle \mathcal{M}^2 U \mathcal{M}^2 U + U^\dagger \mathcal{M}^2 U^\dagger \mathcal{M}^2 \rangle \quad , \qquad (2.97)$$

wobei wir zur besseren Übersicht die Spur von A mit $\langle A \rangle$ bezeichnen.

Kapitel 3

$\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$-Streuamplitude bei $T = 0$ in vierter Ordnung

Im letzten Kapitel haben wir aus der QCD eine effektive Feldtheorie entwickelt, die es uns ermöglicht, Streuprozesse der pseudoskalaren Mesonen zu beschreiben. In diesem Kapitel werden wir für den Fall der $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$-Streuung mit dieser Theorie die Streuamplitude im $SU(3)$-Fall berechnen. Dazu verwenden wir die in Gl.(2.97) hergeleitete effektive Lagrangedichte der Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$. Unser Ergebnis ist in Übereinstimmung mit [11]. Für die meisten weiterführenden Berechnungen, insbesondere bei endlicher Temperatur, werden wir nur noch chirale Störungstheorie in $SU(2)$ betrachten.
Man kann jede $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$-Streuamplitude durch Crossing- und Isospin-Symmetrie direkt in jede andere umrechnen. Somit genügt es, eine beliebige $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$-Streuamplitude zu berechnen. Die Wahl der $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^0\pi^0$-Streuamplitude ist reine Willkür und dient nur zum besseren Vergleich mit Rechnungen aus der Literatur. Wir werden die Rechnung sehr detailliert durchführen und dabei auf alle technischen Probleme eingehen.

3.1 Konzeptionelle Vorgehensweise

Wir wollen uns zunächst einmal überlegen, wie wir konzeptionell diese Berechnung durchführen werden. Wir beginnen mit der Berechnung des Treelevel-Beitrags, der sich aus $\mathcal{L}_2$ ergibt. Nach Weinbergs Powercounting [18], ist dies die einzige Möglichkeit einen $\mathcal{O}(p^2)$-Beitrag zu erhalten, da weitere Diagramme, die man aus $\mathcal{L}_2$ erhält, mindestens einen Loop enthalten und Beiträge aus $\mathcal{L}_{2n}$ mit $n > 1$ ohnehin schon mindestens Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ haben. Um nun auch den $\mathcal{O}(p^4)$-Beitrag zu berechnen, müssen wir zum einen die Ein-Loop-Diagramme, die sich aus $\mathcal{L}_2$ ergeben, mit hinzunehmen. Weitere Terme ergeben sich aus den Treelevel-Diagrammen von $\mathcal{L}_4$. Dies sind alle Terme die in Frage kommen.

Nun stellt sich noch die Frage nach der Renormierung der Theorie. Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, sind effektive Feldtheorien nicht renormierbar. Es ist aber möglich, diese Theorie Ordnung für Ordnung zu renormieren, d.h. die Unendlichkeiten aus den Loop-Integralen bei einer bestimmten Ordnung werden durch Counterterme der nächst höheren Ordnung aufgefangen. In unserem konkreten Beispiel funktioniert das wie folgt: Die einzige Quelle von Unendlichkeiten sind die Ein-Loop-Diagramme aus $\mathcal{L}_2$. Diese Unendlichkeiten können dann durch Counterterme der L_i aus $\mathcal{L}_4$ aufgefangen werden. Wir werden in dieser Arbeit die Renormierung selbst nicht durchführen, sondern nur das Ergebnis aus [9] in Abschnitt A.2 angeben.

3.2 Treelevel-Beitrag aus $\mathcal{L}_2$

Wir berechnen zunächst den Treelevel-Beitrag aus $\mathcal{L}_2$ zur Amplitude, ohne zu berücksichtigen, dass wir später auch noch Beiträge aus $\mathcal{L}_4$ hinzufügen wollen. Hierzu ist nur der Teil $\mathcal{L}_2^{\phi^4}$ der Lagrangedichte $\mathcal{L}_2$ relevant, der vierter Ordnung in ϕ ist. Diesen bekommen wir, in dem wir die Parametrisierung

$$U = \exp\left(i\frac{\phi}{F_0}\right) \tag{3.1}$$

in ϕ entwickeln, in die Lagrangedichte zweiter Ordnung

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4}\,\mathrm{Sp}\left(\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + \mathcal{M}^2(U + U^\dagger)\right) \tag{3.2}$$

einsetzen und nur die $\mathcal{O}(\phi^4)$-Terme behalten. Wir erhalten so:

$$\mathcal{L}_2^{\phi^4} = \frac{1}{6F_0^2}\mathrm{Sp}\left((\partial_\mu\phi)\phi(\partial^\mu\phi)\phi - (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)\phi^2 + \frac{1}{2}\mathcal{M}^2\phi^4\right) \quad . \tag{3.3}$$

Hier setzen wir nun Gl.(2.67) ein und behalten nur die Terme quadratisch in π^0 und linear in π^+ und π^-, da wir nur an dem Prozess $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$ interessiert sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{\pi^{0\,2}\pi^+\pi^-} = \frac{1}{6F_0^2}\big(&M_{0\pi}^2 \pi^{0\,2}\pi^+\pi^- - 2\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- \\ &+2\pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ - 2\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0\big) \quad .\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aus dieser Lagrangedichte können wir nun nach der aus der Quantenfeldtheorie bekannten Weise die Amplitude berechnen. Verwenden wir die in Abbildung (3.1) dargestellten Definitionen der Impulse, so erhalten wir für T_2^{tree}:

$$T_2^{\text{tree}} = \frac{1}{F_0^2}(M_{0\pi}^2 + 2(k_1k_2 + k_3k_4) + (k_1 + k_2)^2) \quad . \tag{3.5}$$

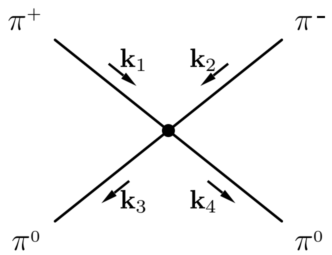


Abbildung 3.1: Feynman-Diagramm des Treelevel-Beitrags.

Setzen wir nun die Pionen auf die Massenschale, d.h., wir betrachten reelle ein- und auslaufende Pionen mit $k_i^2 = M_\pi^2$, und ersetzen die Impulse durch die Mandelstam-Variable

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 \quad , \tag{3.6}$$

woraus folgt

$$2k_1k_2 = 2k_3k_4 = s - 2M_\pi^2 \quad , \tag{3.7}$$

so erhalten wir für die Amplitude:

$$T_2^{\text{tree}} = \frac{3s - 4M_\pi^2 + M_{0\pi}^2}{3F_0^2} \quad . \tag{3.8}$$

Hierbei ist es für spätere Rechnungen wichtig, zunächst einmal zwischen M_π und $M_{0\pi}$ zu unterscheiden. M_π ist die physikalische Masse der Pionen, also die, die man auch wirklich messen kann. $M_{0\pi}$ hingegen ist zunächst einmal nur ein Parameter in unserer Theorie. Solange wir nur den Treelevel-Beitrag in zweiter Ordnung in den Impulsen betrachten ist $M_{0\pi} = M_\pi$ und die Amplitude vereinfacht sich nochmals zu:

$$T_2^{\text{tree}} = \frac{s - M_\pi^2}{F_0^2} \quad . \tag{3.9}$$

Wenn wir später aber noch zusätzlich Treelevelterme in vierter Ordnung betrachten, ist dies nicht mehr der Fall, da dann zur Lagrangedichte noch weitere Terme der Ordnung $\mathcal{O}({\pi^0}^2)$ hinzukommen werden. Durch Neudefinition der Pionenfelder werden wir dann eine Beziehung zwischen M_π und $M_{0\pi}$ finden. Wir werden dadurch Korrekturen in vierter Ordnung zum Treelevel-Term erhalten.

3.3 Ein-Loop-Diagramme

Als nächstes benötigen wir alle Ein-Loop-Diagramme mit je einem einlaufenden π^+ und π^- und zwei auslaufenden π^0, die sich aus der Lagrangedichte zweiter

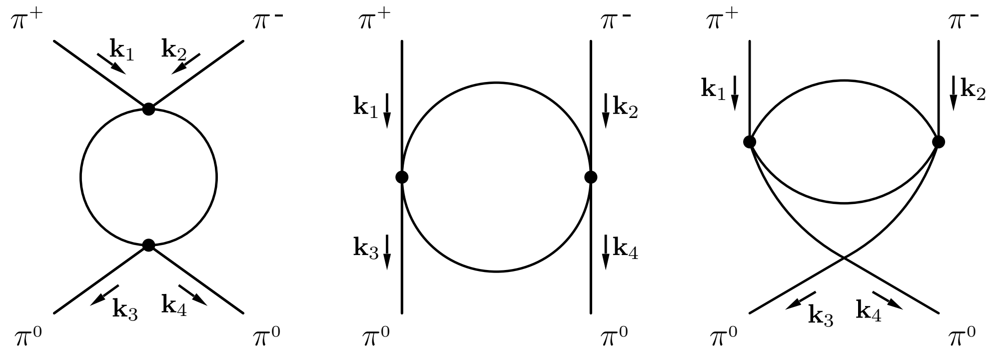


Abbildung 3.2: Ein-Loop-Diagramme mit zwei Vierer-Vertizes und zwei inneren Propagatoren im s, t bzw. u-Kanal.

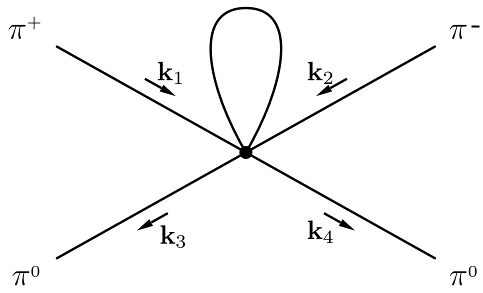


Abbildung 3.3: Ein-Loop-Diagramme mit einem Sechser-Vertex und einem inneren Propagator.

Ordnung $\mathcal{L}_2$ ergeben. Hiervon gibt es zwei Typen von Diagrammen. Zum einen welche mit zwei Vierer-Vertizes und zwei inneren Propagatoren (siehe Abbildung 3.2) und zum anderen Diagramme mit nur einem Sechser-Vertex und nur einem inneren Propagator (siehe Abbildung 3.3). In den Loops können alle hier betrachteten Mesonen laufen, so lange alle Quantenzahlen[1] erhalten bleiben. Dies ergibt sich aber automatisch aus den Vertizes, die von $\mathcal{L}_2$ erzeugt werden. D.h., wir berechnen alle Diagramme, die wir aus den Vertizes aus $\mathcal{L}_2$ konstruieren können und brauchen nicht auf Quantenzahlerhaltung zu achten.
Wir werden hier am Beispiel des t-Kanal-Diagramms mit einem π^- und einem π^0 im Loop demonstrieren, wie solche Loop-Diagramme berechnet werden können und welche Techniken dafür benötigt werden. Wir haben gerade dieses Diagramm gewählt, da es am aufwändigsten zu berechnen ist. Die Beiträge aller Loop-Diagramme sind in Anhang A.4 angegeben. Die zu ihrer Berechnung benötigten Vertizes aus $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ stehen in Anhang A.3. Diese Loop-Diagramme sind alle vierter Ordnung im chiralen Powercounting. Somit sind auch die Singularitäten, die die Loop-Integrale liefern, vierter Ordnung und können von den Countertermen zu

[1]Die hier relevanten Quantenzahlen sind Isospin und Ladung.

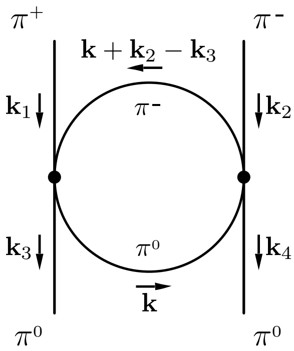


Abbildung 3.4: Definition der Impulse für das u-Kanal-Diagramm mit einem π^- und einem π^0 im Loop.

den Parametern L_i aus $\mathcal{L}_4$ aufgefangen werden.

Bei der Berechnung verwenden wir die in Abbildung 3.4 definierten Impulse. Das Diagramm enthält zwei $\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}$-Vertizes. Der Wert dieses Vertex ist in Gl. (A.27) angegeben. Der Propagator für skalare Felder mit Masse M ist:

$$\frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{3.10}$$

Wenden wir nun die Feynman-Regeln für dieses Diagramm an, so erhalten wir für die Amplitude $i\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \frac{1}{9F^4}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{M_\pi^2 - 2kk_3 + (k_3-k)^2 - 2k_2(k+k_1-k_3)}{(k-(k_3-k_2))^2 - M_\pi^2} \\ &\qquad\times\frac{M_\pi^2 + 2k_4k + (k_4+k)^2 + 2k_1(k+k_2-k_3)}{k^2-M_\pi^2} \\ &= \frac{1}{9F^4}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left(1 - 2\frac{(k_3+2k_2)k}{(k-(k_3-k_2))^2-M_\pi^2} + \frac{3M_\pi^2-2u}{(k-(k_3-k_2))^2-M_\pi^2}\right) \\ &\qquad\times\left(1 + (4k_4+2k_1)\frac{k}{k^2-M_\pi^2} + \frac{3M_\pi^2-u}{k^2-M_\pi^2}\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Im letzten Schritt haben wir die externen Pionen auf die Massenschale gesetzt und die Mandelstam Variable $u = (k_1 - k_4)^2$ eingeführt. Nun können wir die beiden Klammern aus multiplizieren. Jeder so erhaltene Terme ist proportional zu einem der im Anhang A.1 angegebenen Loop-Integrale. Ersetzen wir alle diese Integrale, so erhalten wir für die Amplitude:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{9F^4}\Big(- 2(k_3+2k_2)(k_3-k_2)F_{M_\pi} + \big(3M_\pi^2 - 2u\big)F_{M_\pi}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{2}{3}(4k_4 + 2k_1)(k_3 + 2k_2)\left[\frac{1}{2}\left(F_{M_\pi} + \frac{M_\pi^2}{24\pi^2}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \left(M_\pi^2 - \frac{u}{4}\right)\left(J_\pi(u) + \frac{M_\pi^2}{24\pi^2}\right)\right] \\
&+ \frac{2}{3}(k_3 + 2k_2)(k_3 - k_2)\left(F_{M_\pi} - \frac{M_\pi^2}{16\pi^2} + \big(u - M_\pi^2\big)J_\pi(u) + \frac{u}{96\pi^2}\right) \\
&- \tfrac{1}{2}u\big(3M_\pi^2 - 2u\big)J_\pi(u) + \big(3M_\pi^2 - u\big)F_{M_\pi} \\
&- (k_3 + 2k_2)(k_3 - k_2)\big(3M_\pi^2 - u\big)J_\pi(u) \\
&+ \big(3M_\pi^2 - u\big)\big(3M_\pi^2 - 2u\big)J_\pi(u)\Bigg) \\
= \frac{1}{9F^4}\Bigg(&- \frac{3M_\pi^4}{4\pi^2} + \frac{3M_\pi^2 t}{8\pi^2} + \frac{5M_\pi^2 u}{16\pi^2} - \frac{tu}{16\pi^2} - \frac{u^2}{32\pi^2} + (3t - u)F_{M_\pi} \\
&+ \big(- 3M_\pi^4 - 3uM_\pi^2 + 6tM_\pi^2 - \tfrac{3}{2}tu + \tfrac{3}{2}u^2\big)J_\pi(u)\Bigg) \quad . \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Wie vorhergesagt, sind alle Terme der Amplitude $\mathcal{O}(p^4)$.
Wir haben hier die Parameter $M_{0\pi}$ und F_0 durch die physikalische Pionenmasse M_π bzw. die Pionenzerfallskonstante F ersetzt. Dies ist möglich, da die Korrekturen zu diesen Größen Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ sind, wie in Abschnitt A.2 beschrieben. Da der hier betrachtete Teil der Amplitude aber Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ ist, sind die durch die Korrektur verursachten Änderungen bereits Ordnung $\mathcal{O}(p^6)$ und somit bei unserer $\mathcal{O}(p^4)$ Rechnung zu vernachlässigen.

Auf diese Weise können alle benötigten Loop-Diagramme berechnet werden.

3.4 Beiträge aus $\mathcal{L}_4$

Wir werden nun die Lagrangedichte $\mathcal{L}_4$ in vierter Ordnung im chiralen Powercounting mit in unsere Berechnung einbeziehen. Diese geht an zwei Stellen in unsere Berechnung ein. Zum einen erfordert sie eine Neudefinition der Pionenfelder und liefern eine Korrektur der Massen und zum anderen liefert sie einen Tree-Level-Beitrag in Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$. Wir benötigen dafür den Anteil von $\mathcal{L}_4$, der zweiter und vierter Ordnung in den Mesonenfeldern ist. Diesen als Funktion von ϕ bekommen wir, indem wir die Parametrisierung aus Gl. (2.59) in die allgemeinste Lagrangedichte vierter Ordnung Gl. (2.94) einsetzen und nur die Terme bis Ordnung ϕ^4 betrachten. Der so erhaltene Term ist die Summe von $\mathcal{L}_4^{\phi^2}$ und $\mathcal{L}_4^{\phi^4}$ aus Gl. (A.63) und Gl. (A.65). Setzen wir nun ϕ aus Gl. (2.67) ein, so erhalten wir $\mathcal{L}_4$ als Funktion der Mesonenfelder bis zur gewünschten Ordnung. Wir benötigen davon nur den Teil quadratisch in den Pionenfeldern $\mathcal{L}_4^{\pi^2}$ aus Gl. (A.64) und den $\pi^{0\,2}\pi^+\pi^-$-Term $\mathcal{L}_4^{\pi^{0\,2}\pi^+\pi^-}$ aus Gl. (A.66).

3.4.1 Massenkorrektur und Feldstärkennormierung

$\mathcal{L}_4^{\pi^2}$ enthält $\mathcal{O}(\pi^2)$-Terme mit zweifacher Ableitung und welche ohne Ableitung. Die Terme mit Ableitungen liefern Korrekturen in $\mathcal{O}(p^2)$ zum kinetischen Term unserer Theorie, sodass wir folgenden kinetischen Term erhalten:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{F_0^2}\left(16L_4M_{0K}^2 + 8L_4M_{0\pi}^2 + 8L_5M_{0\pi}^2\right)\right) \times(\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^-) \quad . \tag{3.13}$$

Um nun wieder einen richtig normierten kinetischen Term

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^-) \quad . \tag{3.14}$$

zu erhalten, definieren wir die Pionenfelder neu:

$$\pi_{\text{alt}} = \sqrt{\tilde{Z}_\pi}\pi_{\text{neu}} \quad , \tag{3.15}$$

mit

$$\tilde{Z} = 1 - \frac{1}{F_0^2}\left(16L_4M_{0K}^2 + 8L_4M_{0\pi}^2 + 8L_5M_{0\pi}^2\right) \quad . \tag{3.16}$$

Schreiben wir die Lagrangedichte nun in den neuen Pionenfeldern, so ist der kinetische Term bis auf Ordnung $\mathcal{O}(p^6)$ richtig normiert. Da wir unsere Berechnung nur bis Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ machen, ist dies ausreichend.

Die Terme ohne Ableitung aus $\mathcal{L}_4^{\pi^2}$ sind Korrekturen zum Massen-Term:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{F_0^2}\left(32L_6M_{0K}^2 + 16L_6M_{0\pi}^2 + 16L_8M_{0\pi}^2\right)\right)M_{0\pi}^2 \\ &\quad \times(\pi^{0\,2} + 2\pi^+\pi^-) \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{F_0^2}\left(32L_6M_{0K}^2 + 16L_6M_{0\pi}^2 + 16L_8M_{0\pi}^2\right)\right)M_{0\pi}^2 \\ &\quad \times \tilde{Z}_\pi(\pi_{\text{neu}}^{0\,2} + 2\pi_{\text{neu}}^+\pi_{\text{neu}}^-) \quad .\end{aligned} \tag{3.17}$$

Um nun wieder einen richtig normierten Massen-Term

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2}M_\pi^2(\pi^{0\,2} + 2\pi^+\pi^-) \tag{3.18}$$

zu erhalten, definieren wir

$$M_\pi^2 = M_{0\pi}^2 \left(1 + \frac{16 M_{0K}^2}{F_0^2}(2L_6 - L_4) + \frac{8M_{0\pi}^2}{F_0^2}(2L_6 + 2L_8 - L_4 - L_5)\right) \quad . \tag{3.19}$$

Somit haben wir eine Beziehung zwischen der physikalischen Pionen-Masse M_π und den Parametern in unserer Theorie gefunden.

In Gl. (3.16) und Gl. (3.19) wurden noch nicht die Unendlichkeiten aus den Ein-Loop-Diagrammen aus dem letzten Abschnitt berücksichtigt. Um diese zu berücksichtigen, müssen wir unsere Theorie renormieren. Dies werden wir in dieser Arbeit aber nicht explizit vorführen, sondern lediglich im Anhang A.2 das Ergebnis darstellen.

3.4.2 Tree-Level-Beitrag aus $\mathcal{L}_4$

Aus $\mathcal{L}_4^{\pi^4}$ ergibt sich der Tree-Level-Beitrag zur $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuung in Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = \frac{1}{F^2}\big(&4(2L_1^{\mathrm{r}} + L_3^{\mathrm{r}})(s - 2M_\pi^2)^2 + L_2^{\mathrm{r}}[(t - 2M_\pi^2)^2 + (u - 2M_\pi^2)^2] \\ &+ 8M_\pi^2[(2L_4^{\mathrm{r}} + L_5^{\mathrm{r}})s + 2(2L_6^{\mathrm{r}} + L_8^{\mathrm{r}} - 2L_4^{\mathrm{r}} - L_5^{\mathrm{r}})M_\pi^2]\big) \quad . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Da wir die Amplitude mit Pionen auf der Massenschale berechnen wollen, können wir die Impulse durch die Mandelstam-Variablen ausdrücken.
Wie bei der Berechnung der Ein-Loop-Diagramme in Abschnitt 3.3, können wir auch hier wieder ohne Weiteres $M_{0\pi}$ und F_0 durch M_π bzw. F ersetzen.

3.5 Amplitude in vierter Ordnung in $SU(3)$

Die gesamte $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude bei $T = 0$ in vierter Ordnung erhalten wir nun, indem wir die Tree-Level-Beiträge von $\mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_4$ aus Gl. (3.8) bzw. Gl. (3.8) und alle Beiträge aus den Ein-Loop-Diagrammen aus Abschnitt A.4 addieren. Hierbei ist aber zu beachten, dass der Tree-Level-Beitrag von $\mathcal{L}_2$ noch die Parameter $M_{0\pi}$ und F_0 enthält. Diese können wir aber mit Hilfe von Gl. (A.18) und Gl. (A.20) durch die physikalischen Größen M_π und F ausdrücken.
des Weiteren ist zu beachten, dass wir nach der LSZ-Reduktions-Formel [20] die aus den Feynman-Regeln erhaltene Amplitude mit Z_π^2 aus Gl. (A.19) multiplizieren müssen, um das S-Matrixelement zu erhalten. Die so erhaltene Amplitude ist in Gl. (A.68) gegeben.

3.6 Amplitude in vierter Ordnung in $SU(2)$

Im nächsten Kapitel werden wir die Temperaturkorrekturen berechnen, die durch Streuung im Pionengas hervorgerufen werden. Diese Berechnung werden wir aber nur für den $SU(2)$-Fall durchführen. Wir benötigen daher die soeben berechnete Amplitude auch für den $SU(2)$-Fall. Diese kann man auf zwei Arten erhalten.
Zum einen kann man die Berechnung, die wir hier durchgeführt haben, in $SU(2)$ wiederholen, d.h. man berücksichtigt nur die Pionen. Man erhält so die in Gl. (A.69) angegebene Amplitude [8]. Diese enthält anstatt der chiralen Parameter L_i^{r} einen anderen Satz Parameter $\bar{l}_i$, welche zunächst in keiner Verbindung miteinander stehen.
Alternativ kann die Amplitude für $SU(2)$ aus der für $SU(3)$ erhalten werden. Hierzu bestimmt man eine Niedrig-Energienäherung von (A.68), d.h. $p^2 \ll M_{\mathrm{K}}^2$ und nimmt die Masse des Strange-Quarks als sehr groß an, verglichen mit der der beiden leichtesten Quarks. Es zeigt sich, dass diese Amplitude die gleiche Struktur wie die aus Gl. (A.69) hat [9]. Durch Vergleich der beiden Amplituden erhält man die in Gl (A.72) gegebene Beziehung zwischen den chiralen Parametern L_i^{r} aus $SU(3)$ und den chiralen Parametern $\bar{l}_i$ aus $SU(2)$ [9].

Kapitel 4

$\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude bei endlicher Temperatur

Nachdem wir im letzten Kapitel die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude bei Temperatur Null berechnet haben, wollen wir nun die Amplitude für den Fall berechnen, dass die beiden Pionen in einem Pionenbad, welches sich im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, streuen. Dies entspricht einem Streuprozess bei endlicher Temperatur. Für einen solchen Prozess lässt sich die Streuamplitude mit Hilfe des Imaginärzeit-Formalismus berechnen. Dieser liefert im Gegensatz zur Quantenfeldtheorie bei $T = 0$ lediglich einen Erwartungswert für die Greensfunktion, welcher nur für diskrete imaginäre Energien definiert ist. Durch eine analytische Fortsetzung ist es aber möglich, das Ergebnis auch auf kontinuierliche reelle Energien zu erweitern. Wir werden bei den Berechnungen bei endlicher Temperatur im Gegensatz zum Fall $T = 0$ lediglich den $SU(2)$-Fall betrachten, d.h. nur Pionen in den Loops berücksichtigen. Diese Vereinfachung können wir durchaus machen, da die betrachteten Temperaturen deutlich unterhalb der Kaonen- und der η-Masse liegen. Somit besteht das Wärmebad nahezu nur aus Pionen, d.h., dass in den Loops nur die Pionen sensitiv auf das Wärmebad sind und die thermischen Effekte hervorrufen.
Zunächst werden wir aber diskutieren, wie die Streuamplitude in unserem Fall zu definieren ist, da dies bei Streuprozessen bei endlicher Temperatur etwas heikel ist.

4.1 Definition der thermischen Streuamplitude

In der Quantenfeldtheorie bei $T = 0$ ist die Streuamplitude, bis auf einen Normierungsfaktor, gegeben durch [20]

$$A \sim {}_f\langle \pi_3\pi_4|U(\infty, -\infty)|\pi_1\pi_2\rangle_i \quad , \tag{4.1}$$

wobei $|\pi_1\pi_2\rangle_i$ der Anfangszustand ist, bei dem sich die beiden einlaufenden Pionen π_1 und π_2 zur Zeit $t = -\infty$ frei bewegen und $\langle\pi_3\pi_4|$ der Endszustand, bei dem sich die beiden auslaufenden Pionen π_3 und π_4 zur Zeit $t = \infty$ frei bewegen. $U(\infty, -\infty)$ ist der durch

$$U(\infty, -\infty) = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_{\mathrm{I}}(t)\right) \tag{4.2}$$

gegebene Zeitentwicklungsoperator. Hier ist T der Zeitordnungsoperator.

Bei endlicher Temperatur betrachten wir nun den Fall, dass die einlaufenden Pionen π_1 und π_2 zur Zeit $t = -\infty$ frei Teilchen im Vakuum sind und bis zum Eintritt in das Wärmebad, welches nur aus Pionen besteht, nicht wechselwirken. Nachdem sie im Wärmebad gestreut haben, treten die auslaufenden Teilchen π_3 und π_4 aus dem Wärmebad aus und bewegen sich wieder als freie Teilchen im Vakuum weiter. Das Wärmebad ist nach diesem Vorgang in dem selben Zustand $|\Phi\rangle$ wie vorher.
Da man sich in der Thermodynamik nur für Mittelwerte interessiert, bezeichen wir nun mit der Streuamplitude A bei endlicher Temperatur die thermisch gemittelte Amplitude des gerade beschriebenen Prozesses:

$$A \sim \sum_{\Phi} e^{-\beta E(\Phi)} {}_f\langle\pi_3\pi_4\Phi|U(\infty, -\infty)|\pi_1\pi_2\Phi\rangle_i \quad , \tag{4.3}$$

wobei β die inverse Temperatur ist.[1] Hierbei wird über alle möglichen Zustände Φ summiert. Diesen Ausdruck werden wir nun ein bisschen umformen. Zunächst ersetzen wir die Pionen im Anfangs- und Endzustand durch ihre Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ bzw. a:

$$\begin{aligned} A \sim & \sum_{\Phi} e^{-\beta E(\Phi)} {}_f\langle\Phi|a_3 a_4 U(\infty, -\infty) a_1^\dagger a_2^\dagger|\Phi\rangle_i \\ = & \sum_{\Phi} {}_f\langle\Phi|e^{-\beta H} a_3 a_4 U(\infty, -\infty) a_1^\dagger a_2^\dagger|\Phi\rangle_i \quad , \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei H der Hamiltonoperator ist, der das gesamte System beschreibt. Insbesondere enthält er auch die Information, dass das Wärmebad nur aus Pionen besteht. Da wir vorraussetzen, dass der Zustand des Wärmebads vor und nach der Streuung gleich ist, können wir die Summation als Spur schreiben:

$$A \sim \mathrm{Sp}\left(e^{-\beta H} a_3 a_4 U(\infty, -\infty) a_1^\dagger a_2^\dagger\right) \quad . \tag{4.5}$$

[1]Wir verwenden Einheiten, in denen die Boltzmann-Konstante $k_{\mathrm{B}} = 1$ ist.

4.2 Imaginärzeit-Formalismus

4.2.1 Einführung

Der Imaginärzeit-Formalismus ist ein Formalismus, der es ermöglicht, störungstheoretisch Erwartungswerte von Operatoren von Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht auszurechnen. Wir werden sehen, dass die einzelnen Terme der Entwicklung durch die aus der Quantenfeldtheorie bekannten Feynman-Diagramme dargestellt werden können. Für einen gegebenen Operator entsprechen die Diagramme genau denen der Quantenfeldtheorie, lediglich ihre Berechnung unterscheidet sich.
Beginnen wir zunächst mit der Einführung der wichtigsten Größen der Thermodynamik [3]. Wir definieren die Dichtematrix ρ durch

$$\rho(\beta) = e^{-\beta\mathcal{H}} \quad . \tag{4.6}$$

Hierbei ist $\mathcal{H}$ der Hamilton-Operator, der das thermodynamische System vollständig beschreibt. Die genaue Form von $\mathcal{H}$ hängt von dem für die Beschreibung des Systems gewählten Ensemble ab. Wir betrachten hier aber nur ein kanonisches Ensemble in dem $\mathcal{H} = H$, wobei H der Hamiltonoperator ist, der die Dynamik des Systems beschreibt. Mit Hilfe der Dichtematrix können wir nun die Zustandssumme.

$$Z(\beta) := \mathrm{Sp}\,\rho(\beta) = \mathrm{Sp}\,e^{-\beta\mathcal{H}} \quad . \tag{4.7}$$

definieren, die es uns erlaubt, den Erwartungswert einer Observablen A zu definieren durch:

$$\langle A\rangle_\beta := Z^{-1}(\beta)\,\mathrm{Sp}\,\left(\rho(\beta)A\right) = \frac{\mathrm{Sp}\,\left(e^{-\beta\mathcal{H}}A\right)}{\mathrm{Sp}\,e^{-\beta\mathcal{H}}} \quad . \tag{4.8}$$

Als nächstes definieren wir, wie in der Quantenfeldtheorie, zu jedem Schrödinger-Operator A einen entsprechenden Heisenberg-Operator $A_{\mathrm{H}}(t)$:

$$A_{\mathrm{H}}(t) = e^{i\mathcal{H}t}Ae^{-i\mathcal{H}t} \quad . \tag{4.9}$$

4.2.2 Matsubara-Formalismus

Um Erwartungswerte in der Thermodynamik ausrechnen zu können, ist es nötig, die Zustandssumme zu kennen [3]. Diese lässt sich aber im allgemeinen nicht exakt berechnen. Da sie die Summe der Erwartungswerte in allen möglichen Zuständen des Hilbert-Raums ist und dieser in jeder Quantenfeldtheorie unendlich viele Elemente enthält, scheint es auf den ersten Blick nicht möglich zu sein, die Zustandsumme in einer kleinen Kopplungskonstanten zu entwickeln. Wir werden aber

sehen, dass die Dichtmatrix die Form eines Zeitentwicklungsoperators für negative imaginäre Zeiten hat, was es uns ermöglicht, die aus der Quantenfeldtheorie bekannten Techniken zur Berechnung von Erwartungswerten anzuwenden.
Dazu spalten wir den Hamiltonoperator in einen freien- und einen Wechselwirkungsteil auf

$$H = H_0 + H' \tag{4.10}$$

und definieren

$$\rho_0(\beta) := e^{-\beta H_0} \quad . \tag{4.11}$$

Somit lässt sich die Zustandssumme schreiben als

$$\rho(\beta) = \rho_0(\beta) S(\beta) \quad , \tag{4.12}$$

wobei

$$S(\beta) = e^{\beta H_0} e^{-\beta H} = \rho_0^{-1}(\beta)\rho(\beta) \quad . \tag{4.13}$$

Leiten wir $S(\tau)$ nach τ ab, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S(\tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial \rho_0^{-1}(\tau)}{\partial \tau}\rho(\tau) + \rho_0^{-1}(\tau)\frac{\partial \rho(\tau)}{\partial \tau} \\
&= \rho_0^{-1}(\tau) H_0 \rho(\tau) - \rho_0^{-1}(\tau) H \rho(\tau) \\
&= \rho_0^{-1}(\tau)(H_0 - H)\rho_0(\tau)\rho_0^{-1}\rho(\tau) \\
&= -H'_{\mathrm{I}}(\tau) S(\tau) \quad .
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Hier haben wir $H'_{\mathrm{I}}(\tau)$ definiert durch:

$$H'_{\mathrm{I}}(\tau) = \rho_0^{-1}(\tau) H' \rho_0(\tau) = e^{\tau H_0} H' e^{-\tau H_0} \quad . \tag{4.15}$$

Diese Definition entspricht gerade der Definition für Operatoren im Wechselwirkungsbild in der Quantenfeldtheorie, allerdings für imaginäre Zeiten $t = -i\tau$. Desweiterm erkennen wir, dass $S(\tau)$ die selbe Entwicklungsgleichung erfüllt, wie der Zeitentwicklungsoperator im Wechselwirkungsbild in der Quantenfeldtheorie bei $T = 0$ mit $t = -i\tau$. Integrieren wir Gl. (4.14) formal, so erhalten wir:

$$S(\tau) = T\left(e^{-\int_0^\beta d\tau H'_{\mathrm{I}}(\tau)}\right) \quad . \tag{4.16}$$

Hier ist T der Ordnungsoperator in τ analog zum Zeitordnungsoperator bei $T = 0$. Wir können also wie gewohnt den Exponenten entwickeln und jedem Term ein Feynman-Diagramm zuordnen. Bei gegebener Wechselwirkung entsprechen die Diagramme somit genau denen für $T = 0$. Es stellt sich nun nur noch die Frage, wie die Diagramme auszuwerten sind. Die Werte der Vertizes werden nur durch die Entwicklung der Wechselwirkung gegeben und sind somit indentisch mit denen bei $T = 0$. Bleibt nur noch die Frage nach dem Propagator

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\beta(\tau, \tau') &= \langle T(\phi_{\mathrm{H}}(\tau)\phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau'))\rangle_\beta \\ &= Z^{-1}(\beta)\mathrm{Sp}\, e^{-\beta H} T(\phi_{\mathrm{H}}(\tau)\phi^\dagger_{\mathrm{H}}) \quad , \end{aligned} \tag{4.17}$$

der die Lösung der Bewegungsgleichung für den wechselwirkunsfreien Fall ist. Wir nehmen hier an, dass H nur das bosonische Feld ϕ_{H} enthält. Der Index H gibt wieder an, dass es sich um einen Operator im Heisenbergbild handelt. Für zwei Operatoren ist T definiert durch:[2]

$$T(\phi_{\mathrm{H}}(\tau)\phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau')) = \theta(\tau - \tau')\phi_{\mathrm{H}}(\tau)\phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau') + \theta(\tau' - \tau')\phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau')\phi_{\mathrm{H}}(\tau) \quad . \tag{4.18}$$

Während der Propagator bei $T = 0$ von $-\infty$ bis $+\infty$ definiert ist, ist er bei endlicher Temperatur für τ und τ' nur von 0 bis β definiert. Wie bei $T = 0$ stellt sich heraus, dass der Propagator nur eine Funktion der Differenzen seiner beiden Argumente ist. Als solche ist er somit von $-\beta$ bis $+\beta$ definiert. Wenn wir nun in den Impulsraum wechseln, bedeutet dies, dass wir $\mathcal{G}$ in einer diskreten Fourier-Reihe entwickeln müssen anstatt eine kontinuierliche Fourier-Transformation anzuwenden.

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n e^{-i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\omega_n) \tag{4.19}$$

$$\mathcal{G}(\omega_n) = \frac{1}{2}\int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\tau) \quad , \tag{4.20}$$

mit $\omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
Als nächstes nutzten wir noch eine Symmetrieeigenschaft des Propagators aus, die uns erlaubt die Anzahl der Moden auf die Hälfte zu reduzieren. Dazu betrachten wir zunächst allgemein die Korrelationsfunktion zweier Operatoren $A_{\mathrm{H}}(t)$ und $B_{\mathrm{H}}(t')$ im Heisenbergbild:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathrm{H}}(t)B_{\mathrm{H}}(t')\rangle_\beta &= Z^{-1}(\beta)\mathrm{Sp}\,\rho(\beta)A_{\mathrm{H}}(t)B_{\mathrm{H}}(t') \\ &= Z^{-1}(\beta)\mathrm{Sp}\, e^{-\beta H}A_{\mathrm{H}}(t)e^{\beta H}e^{-\beta H}B_{\mathrm{H}}(t') \\ &\overset{(4.9)}{=} Z^{-1}(\beta)\mathrm{Sp}\, A_{\mathrm{H}}(t + i\beta)e^{-\beta H}B_{\mathrm{H}}(t') \\ &= \langle B_{\mathrm{H}}(t')A_{\mathrm{H}}(t + i\beta)\rangle_\beta \quad . \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nun setzen wir Gl. (4.18) in Gl. (4.17) ein für den Fall $\tau - \tau' < 0$:

$$\mathcal{G}(\tau - \tau') = \langle \phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau')\phi_{\mathrm{H}}(\tau)\rangle_\beta \overset{(4.21)}{=} \langle \phi_{\mathrm{H}}(\tau)\phi^\dagger_{\mathrm{H}}(\tau' - \beta)\rangle_\beta$$

[2] Wir betrachten hier nur bosonische Felder, da in der chiralen Störungstheorie nur solche enthalten sind. Daher ist T hier mit einem „+“ definiert.

$$= \mathcal{G}(\tau - \tau' + \beta) \quad . \tag{4.22}$$

Somit genügt es, den Propagator auf dem Interval $[0, \beta]$ zu kennen. Diese Eigenschaft setzen wir in Gl. (4.20) ein, und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2}\int_{-\beta}^{0} d\tau e^{i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\tau) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\tau) \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n(\tau-\beta)}\mathcal{G}_\beta(\tau) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\tau) \\
&= \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)\int_{0}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n\tau}\mathcal{G}_\beta(\tau) \quad .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Somit sehen wir, dass nur gerade Frequenzen möglich sind, also $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ und $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Da die Unterschiede zwischen der Quantenfeldtheorie bei $T = 0$ und bei endlicher Temperatur nur in der Zeitkomponente liegen, haben wir bisher auch nur diese betrachtet. Die Raumkoordinaten sind weiterhin kontinuierlich und wir können die Fouriertransformierte des Propagator schreiben als:

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\beta}\sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n\tau - \mathbf{kx})}\mathcal{G}_\beta(\mathbf{k}, \omega_n) \tag{4.24}$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x e^{i(\omega_n\tau - \mathbf{kx})}\mathcal{G}_\beta(\mathbf{x}, \tau) \quad . \tag{4.25}$$

Wir können also nun für Bosonen, die in der freien Theorie die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, den Propagator bestimmen. Im Minkowskiraum erfüllt er folgende Gleichung:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)G(x) = -\delta^4(x) \quad . \tag{4.26}$$

Gehen wir nun über in den Euklidischen Raum, indem wir $t \to -i\tau$ ersetzen, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \nabla^2 - m^2\right)\mathcal{G}_\beta(\mathbf{x}, \tau) = -\delta^3(\mathbf{x})\delta(\tau) \quad , \tag{4.27}$$

mit $G \to -\mathcal{G}$. Benutzen wir nun Gl. (4.25), so erhalten wir für den Propagator im Impulsraum:

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2} \quad . \tag{4.28}$$

Somit wissen wir also, wie wir die Feynman-Diagramme auswerten müssen. Wir müssen im Vergleich zum Fall $T = 0$ nur den Propagator durch den aus Gl. (4.28)

ersetzen und in allen Loops die Integration über p_0 durch eine Summation über die diskreten ω_n ersetzen. Dies ist die einzige Stelle, an der die Temperatur in die Entwicklung mit eingeht.
Die Vertizes bleiben unverändert, da sie einzig und allein von der Entwicklung des Wechselwirkunganteil herrühren, die aber von der endlichen Temperatur völlig unbeeinflusst bleibt.

4.3 Berechnung der Amplitude

Nachdem wir uns überlegt haben, wie wir die Amplitude definieren und ausrechnen können, wollen wir jetzt die Temperaturkorrektur zur $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude berechnen.
Konzeptionell werden wir wieder genau so vorgehen, wie im Kapitel 3. Wir müssen wieder den Treelevel-Beitrag aus zweiter und vierter Ordnung berechnen. Dieser bleibt aber unverändert, da die Vertizes bei endlicher Temperatur identisch sind mit denen bei $T = 0$. Da wir aber nur den $SU(2)$-Fall betrachten, vereinfacht sich der Beitrag des Diagramms in vierter Ordnung.
Die Ein-Loop-Diagramme sind wieder die gleichen wie in Abbildung 3.2 und 3.3, mit dem Unterschied, dass wir nur Pionen in den Loops zulassen. Im Gegensatz zum $T = 0$-Fall benutzen wir diesmal die Langrangedichte aus Gl. (2.95) mit der Parametrisierung aus Gl. (2.63) um die Loopintegrale zu berechnen. Wir erhalten damit die in B.1.3 angegebenen Vertizes. Die Berechnung dieser Loop-Diagramme unterscheidet sich vom Fall $T = 0$ im Wesentlichen nur darin, dass die Loop-Integrale durch die temperaturabhängigen Funktionen F_β und J_i aus B.1 ausgedrückt werden und nicht mehr durch F und J aus A.1. Die Ergebnisse für die Ein-Loop-Diagramme sind in Anhang B.2 angegeben. Ersetzen wir nun in den Ein-Loop-Beiträgen die J_i und F_β durch die rein temperaturabhängigen Anteile ΔJ_i und ΔF_β aus Gl. (B.6) und addieren die einzelnen Beiträge, so erhalten wir die in Gl. (B.37) angegebene Temperaturkorrektur zur Amplitude. Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem in [10] angegebenen. Der Fehler liegt auf Seiten von [10], wie von den Autoren eingeräumt wurde [6]. Da die in Gl (B.5) definierten Temperaturkorrekturen alle endlich sind und somit alle Unendlichkeiten in dem temperaturunabhängigen Anteil enthalten sind, bleibt die Renormierung vom $T = 0$-Fall unverändert.
Die so erhaltene Amplitude ist nun nicht mehr Lorentz-invariant und lässt sich auch nicht mehr nur durch die Mandestam-Variablen s, t und u ausdrücken, da durch das Wärmebad ein ausgezeichnetes System definiert ist. Wir definieren daher wie in [10]

$$S = k_1 + k_2, \qquad T = k_1 - k_3, \qquad U = k_1 - k_4 \quad . \tag{4.29}$$

Nun lässt sich die gesamte Impulsabhängigkeit der Amplitude durch S, T und U ausdrücken, da sich alle k_i durch sie ausdrücken lassen. Dies haben wir in

Gl. (B.37) ausgenutzt, wobei wir nicht alle k_i ersetzt haben. Ein weiterer Unterschied zum $T = 0$-Fall ist, dass Crossing-Symmetrie, welche sich im Vakuum durch Vertauschen der Mandestam-Variablen realisieren lässt, jetzt nur noch durch Vertauschen der Vierervektoren S, T und U realisierbar ist.

Hier soll nochmal darauf hingewiesen werden, dass alle Impulse in Gl. (B.37) relativ zum Wärmebad zu verstehen sind. Die so erhaltene Amplitude ist die der allgemeinsten Kinematik mit fünf Freiheitsgraden. Diese ergeben sich wie folgt: Die Amplitude hängt von den vier mal drei Komponenten der Impulse $\mathbf{k}_i$ ab. Da das Wärmebad und somit unser ganzes System rotationssymmetrisch ist, reduziert sich die Zahl der Freiheitsgrade um drei, was gerade die Anzahl der Euler-Winkel ist, welche eine Rotation im Raum eindeutig beschreiben. Weitere vier Freiheitsgrade gehen durch die Viererimpulserhaltung verloren.
Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir aber nur zwei spezielle Kinematiken betrachten, mit zwei bzw. drei Freiheitsgraden.

Kapitel 5

Das ρ-Meson

Bisher haben wir uns in dieser Arbeit nur mit der $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuung befasst. In diesem Kapitel werden wir nun sehen, wie wir einen Zusammenhang zwischen der dafür berechneten Amplitude und dem ρ-Meson, an dem wir eigentlich interessiert sind, herstellen können. Des Weiteren werden wir sehen, wie man mit Hilfe der Methode der inversen Amplitude, die Gültigkeit der Amplitude auf höhere Energien erweitern kann. Am Ende definieren und beschreiben wir die beiden Kinematiken, bei denen wir das ρ-Meson untersuchen wollen.

5.1 Zusammenhang zwischen der $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude und dem ρ-Meson

5.1.1 Isospinprojektion

Beim ρ-Meson handelt es sich um eine Resonanz der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung, d.h. wenn zwei Pionen mit entsprechenden Quantenzahlen streuen, kann dies durch die Bildung eines ρ-Mesons geschehen. Dieses entsteht kurzzeitig aus den beiden einlaufenden Pionen und zerfällt dann in die beiden auslaufenden Pionen. Um das ρ-Meson wirklich als Resonanz zu sehen, muss es sich bei diesem Prozess im s-Kanal befinden. Des Weiteren müssen die Quantenzahlen der einlaufenden und somit auch der auslaufenden Pionen mit denen des ρ-Mesons übereinstimmen, d.h. sie müssen zu Isospin $I = 1$ und Spin $J = 1$ koppeln. Wir betrachten nun den speziellen Fall des ρ^+, welches Isospin z-Komponente $I_z = 1$ hat. Dieses kann nur entstehen, wenn ein π^+ mit einem π^0 streut, da sonst I_z nicht erhalten wäre. Im Ausgangskanal sind somit die folgenden beiden Zustände möglich:

$$|1,1\rangle \otimes |1,0\rangle \quad \text{und} \quad |1,0\rangle \otimes |1,1\rangle \quad . \tag{5.1}$$

Dabei bezeichnet jeweils die erste Komponente den Isospin und die zweite seine z-Komponente. $|1,1\rangle$ repräsentiert somit das π^+ und $|1,0\rangle$ das π^0.
Diese beiden Zustände müssen nun zu $|1,1\rangle$ koppeln. Schaut man in eine Clebsch-Gordan-Tabelle [12], dann findet man:

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle \otimes |1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \otimes |1,1\rangle \quad . \tag{5.2}$$

Für unsere Amplitude bedeutet dies [11]:

$$T_{I=1} = A(T,S,U) - A(U,T,S) \quad , \tag{5.3}$$

wobei $T_{I=1}$ die auf Isospin $I = 1$ projizierte Amplitude ist und $A(S,T,U)$ die im letzten Kapitel berechnete $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude. Diese Betrachtung dient nur zur Bestimmung des relativen Vorzeichens in Gl. (5.3).

5.1.2 Spinprojektion

Im letzten Abschnitt haben wir die Amplitude auf den richtigen Isospin projiziert. Nun müssen wir die Amplitude $T_{I=1}$ noch auf den richtigen Spin $J = 1$ des ρ-Mesons projizieren.
Die Amplitude lässt sich in Spineigenfunktionen, den Legendre-Polynomen, entwickeln. Will man nun auf einen bestimmten Spin projizieren, so multipliziert man die Amplitude mit der entsprechenden Spineigenfunktion und integriert anschließend [11]:

$$T_{\substack{J=1\\I=1}} = \frac{1}{32\pi}\int_{-1}^{1} dx P_J(x) T_{I=1}(s,t(s,x),u(s,x)) \quad , \tag{5.4}$$

wobei $P_J(x)$ die Legendre-Polynome sind. Der Vorfaktor dient nur zur richtigen Normierung. Aufgrund der Orthogonalität der Spineigenfunktionen, erhält man dadurch nur den Anteil des gewünschten Spins. Wir brauchen hier:

$$P_1(x) = x \quad . \tag{5.5}$$

Zum Schluss führen wir noch folgende Abkürzung ein:

$$T_{11} = T_{\substack{J=1\\I=1}} \quad . \tag{5.6}$$

5.2 Methode der inversen Amplitude

Bei den soeben bestimmten, auf den richtigen Spin und Isospin projizierten Amplituden stellt sich nun das Problem, dass die chirale Störungstheorie nur bei

niedrigen Energien angewendet werden kann. Um aber das ρ-Meson untersuchen zu können, müssen wir die Phasenverschiebung und somit auch die Amplitude bis zu Energien von ca. 1 GeV kennen, also oberhalb des Gültigkeitsbereiches der chiralen Störungstheorie. Da die chirale Störungstheorie eine Entwicklung in $p/4\pi F$ ist und $4\pi F \approx 1.2$ GeV kommen wir hier in einen Bereich in dem man höhere Ordnungen nicht mehr so ohne weiteres vernachlässigen kann.
Eine weitere Schwachstelle der bisher betrachteten Amplitude ist, dass sie keine Pole produzieren kann, da sie bis auf die endlichen Anteile der Loop-Integrale ein Polynom in den Mandelstam-Variablen ist. Resonanzen, wie das ρ-Meson, entstehen aber immer genau dann, wenn die Streuamplitude einen Pol hat.
Diese Probleme lassen sich aber mit Hilfe der Methode der inversen Amplitude beheben. Sie ermöglicht es uns, das Ergebnis der chiralen Störungstheorie auf höhere Energien zu erweitern und ermöglicht die Existenz von Polen in der Amplitude.

Bei der Methode der inversen Amplitude nutzt man aus, dass die Streumatrix S unitär ist, d.h. $SS^\dagger = 1$. Nun nutzen wir aus, dass die S-Matrix über [11]

$$S = 1 + 2i\sigma T \tag{5.7}$$

in Verbindung steht, mit der von uns im letzten Kapitel berechneten T-Matrix. Hier ist

$$\sigma = \frac{2q}{\sqrt{s}} \tag{5.8}$$

der Phasenraum und q der Impuls der auslaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem der Reaktion. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} 1 &= (1 + 2i\sigma T)(1 - 2i\sigma T^*) \\ &= 1 + 2i\sigma(T - T^*) + 4\sigma^2|T|^2 \quad . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Somit ist

$$\operatorname{Im} T = \sigma|T|^2 \quad . \tag{5.10}$$

Teilen wir nun durch $|T|^2$, ergibt sich:

$$\operatorname{Im} T^{-1} = -\sigma \quad . \tag{5.11}$$

Wir wollen hier eine Methode zur Berechnung von T finden, die wir auf die mit der chiralen Störungstheorie berechneten Amplitude T_{CS} anwenden können. Diese lässt sich schreiben als

$$T_{\text{CS}} = T_2 + T_4 + \dots \quad , \tag{5.12}$$

wobei der Index die Ordnung im chiralen Powercounting angibt. Setzen wir dies in Gl. (5.10) ein und vergleichen Terme gleicher Ordnung, so erhalten wir für die von uns betrachteten Ordnungen:

$$\operatorname{Im} T_2 = 0 \tag{5.13}$$

$$\operatorname{Im} T_4 = \sigma T_2^2 \quad . \tag{5.14}$$

Wir sehen nun, dass in der chiralen Störungstheorie Unitarität nur störungstheoretisch erfüllt sein kann. Ausgehend von der störungstheoretischen Unitarität werden wir eine Ausdruck für die T-Matrix finden, der von seiner Struktur her Pole haben kann. Dazu bemerken wir zunächst, dass sich T unter Ausnutzung von Gl. (5.11) schreiben lässt als:

$$\begin{aligned} T &= \left(T^{-1}\right)^{-1} = \left(\operatorname{Re} T^{-1} + \operatorname{Im} T^{-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\operatorname{Re} T^{-1} - i\sigma\right)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Wir sehen also, dass es wegen der Unitarität ausreicht, den Realteil der inversen Amplitude zu kennen. Diesen können wir für die chirale Störungstheorie wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T^{-1} &= \operatorname{Re} \frac{1}{T_2 + T_4} + \ldots = \operatorname{Re} \left[T_2^{-1} \frac{1}{1 + T_4 T_2^{-1}}\right] + \ldots \\ &= \operatorname{Re} \left[T_2^{-1} \left(1 - T_4 T_2^{-1}\right)\right] + \ldots \\ &\approx T_2^{-1} \left(1 - \operatorname{Re}\,(T_4) T_2^{-1}\right) \quad . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass nach Gl. (5.13) T_2 reell ist. Hiermit ersetzen wir nun $\operatorname{Re} T^{-1}$ in Gl. (5.15) und multiplizieren von links mit $T_2 T_2^{-1}$ und von rechts mit $T_2^{-1} T_2$:

$$T \approx T_2 (T_2 - \operatorname{Re} T_4 - i\sigma T_2^2)^{-1} T_2 \quad . \tag{5.17}$$

Setzen wir nun störungstheoretische Unitarität voraus, dann können wir Gl. (5.14) benutzen und erhalten für die Amplitude:

$$T \approx T_2 (T_2 - T_4)^{-1} T_2 \quad . \tag{5.18}$$

Die Grundidee ist also, dass man die chirale Störungstheorie für die Berechnung der inversen Amplitude benutzt, anstatt für die Amplitude selbst.

Nachdem wir die Methode der inversen Amplitude vorgestellt haben, wollen wir noch diskutieren, worin ihr Vorteil gegenüber der Amplitude, die man aus der chiralen Störungstheorie bekommt, liegt [16]. Gl. (5.12) ist eine Entwicklung in Impulsen und hat somit einen Konvergenzradius der gleich dem Abstand zum nächsten Pol ist. Ein solcher Pol liegt immer in der unmittelbaren Nähe einer Resonanz. D.h., Gl. (5.12) ist höchstens bis zur Resonanz gültig, aber nicht darüber

hinaus. Die Annahme, die man bei der Methode der inversen Amplitude macht, ist, dass der Konvergenzradius der inversen Amplitude größer ist, da diese keinen Pol in der Nähe der Resonanz hat.
Die Ergebnisse in [11] zeigen, dass die Methode der inversen Amplitude im Vakuum sehr gut funktioniert. Hierzu wurden die L_i an experimentelle Daten für die Phasenverschiebung des ρ-Mesons angepasst. Die mit diesen L_i gemachten Vorhersagen für andere Kanäle stimmen sehr gut mit experimentellen Daten überein.

Diese Methode lässt sich auch auf den Fall endlicher Temperatur erweitern [10]. Man erhält unter anderem, dass man in Gl. (5.11) $\sigma(s)$, durch den thermischen Phasenraum

$$\sigma_{\mathrm{T}}(E) = \sigma(E^2)\left(1 + \frac{2}{\exp(\beta|E|/2) - 1}\right) \tag{5.19}$$

ersetzen muss.

Gl. (5.18) werden wir nun immer benutzen, wenn wir Amplituden oder Funktionen von Amplituden, wie zum Beispiel Phasenverschiebungen, berechnen. Sie ermöglicht es uns, das Ergebnis der chiralen Störungstheorie auch bei höheren Energien zu verwenden.

5.3 Das ruhende ρ-Meson

Wir betrachten zunächst den Fall des relativ zum Wärmebad ruhenden ρ, d.h. das Schwerpunktsystem der Pionen ist identisch mit dem System des Wärmebads. Somit können wir direkt die k_i aus Gl. (B.37) mit den Impulsen der ein- bzw. auslaufenden Pionen identifizieren. Für sie gilt also

$$\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k_3} + \mathbf{k_4} = 0 \quad . \tag{5.20}$$

Es lassen sich nun alle in Gl. (B.37) vorkommenden impulsabhängigen Größen durch die drei Mandelstam-Variablen und die Pionenmasse ausdrücken.

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} = 0, \qquad S_0 = \sqrt{s}, \qquad |\mathbf{T}|^2 = -t, \qquad T_0 = U_0 = 0 \\
|\mathbf{k_i}|^2 = \frac{s}{4} - M_\pi^2, \qquad k_i^0 = \frac{\sqrt{s}}{2} \\
\mathbf{k_1 T} = \mathbf{k_4 T} = -\mathbf{k_2 T} = -\mathbf{k_3 T} = \frac{1}{2}t \\
\mathbf{k_1 U} = \mathbf{k_3 U} = -\mathbf{k_2 U} = -\mathbf{k_4 U} = \frac{1}{2}u \\
t = \frac{1}{2}(4M_\pi^2 - s)(1-x), \qquad u = \frac{1}{2}(4M_\pi^2 - s)(1+x) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

mit $x = \cos\theta$ wobei θ der durch $\cos\theta = \frac{\mathbf{k_1 k_3}}{|\mathbf{k_1}||\mathbf{k_3}|}$ gegebene Streuwinkel ist. Die dadurch vereinfachte $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude geben wir hier aber nicht mehr an, da wir nur die auf Isospin $I = 1$ projizierte Amplitude brauchen. Um diese zu bekommen, müssen wir die Temperaturkorrektur aus Gl. (B.37) zur Amplitude für $T = 0$ addieren. Um auf Isospin $I = 1$ zu projizieren, müssen wir die so erhaltene Amplitude in Gl. (5.3) einsetzen. Da $|\mathbf{S}| = 0$ für den hier betrachteten speziellen Fall des ruhenden ρ ist, lassen sich die kinematischen Größen t und u nicht ohne weiteres durch s und x mit Hilfe von Gl. (5.21) ersetzen. Die Terme in der Temperaturkorrektur proportional zu $1/|\mathbf{T}|$ und $1/|\mathbf{U}|$ werden gemäß Gl. (5.3) teilweise zu Termen $1/|\mathbf{S}|$. Das würde aber wegen $|\mathbf{S}| = 0$ so zu einer Division durch 0 führen.
Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen ist, bei der Berechnung der Korrektur die Beiträge, die dieses Problem verursachen, nicht mit den Loop-Integralen aus B.1.1 zu vereinfachen, sondern mit denen, für den Fall $|\mathbf{Q}| = 0$ berechneten, aus B.1.2.
Eine weitere Möglichkeit ist, das Integral $J_2(Q_0, |\mathbf{Q}|; T)$ bis zur zweiten Ordnung in $|\mathbf{Q}|$ zu entwickeln. Man erhält dafür:

$$J_2 = \frac{1}{2}F_\beta - \frac{1}{4}Q_0^2 J_0 + \frac{|\mathbf{Q}|^2}{Q_0^2}\left(\frac{1}{3}F_\beta + \frac{1}{12}Q_0^2 J_0 - \frac{M_\pi^2}{3}J_0\right) + \mathcal{O}(|\mathbf{Q}|^4) \quad . \qquad (5.22)$$

Nachdem man dies in Gl. (B.37) eingesetzt hat, kann man problemlos den Limes $|\mathbf{S}| \to 0$ nehmen.
Auf beide Weisen erhält man die in Gl. (B.38) angegeben Korrektur zur Amplitude mit $I = 1$.

5.4 Das sich bewegende ρ-Meson

Nachdem wir nun die wohl einfachste Kinematik betrachtet haben, wollen wir jetzt eine etwas allgemeinere betrachten, bei der sich das ρ relativ zum Wärmebad bewegt.
Wir können hier aber nicht einfach eine beliebige wählen, da der Drehimpuls im Allgemeinen bei einem solchen Prozess nicht erhalten ist. Da wir aber auf einen festen Drehimpuls projizieren, muss dieser erhalten sein. Im Falle des ruhenden ρ-Mesons stellte dies kein Problem dar, weil in diesem Fall Rotationssymmetrie in alle Richtungen gegeben ist und somit der Drehimpuls auf jeden Fall erhalten ist.
Wir betrachten nun den speziellen Fall, in dem die Streuebene der Pionen in ihrem Schwerpunktsystem senkrecht zur Bewegungsrichtung ihres Schwerpunktsystems relativ zum Wärmebad steht. In diesem Fall ist Rotationssymmetrie um die Achse parallel zur Bewegungsrichtung des Schwerpunktsystems gegeben. Somit ist der Drehimpuls in dieser Richtung erhalten. Wir können also in dieser Kinematik ρ-Mesonen mit Spin parallel zu ihrer Bewegungsrichtung untersuchen.

Wir werden uns also auf den speziellen Fall beschränken, dass die Streuebene der Pionen in deren Schwerpunktsystem senkrecht zur Bewegungsrichtung des ρ steht. Dadurch bekommen wir einen zusätzlichen Freiheitsgrad in der Kinematik. Wir wählen dafür die Summe der Impulse der einlaufenden Pionen als zusätzlichen Parameter, da dies dem Impuls $\mathbf{K}_\rho$ des ρ-Mesons entspricht und somit eine anschauliche Bedeutung hat.

$$\mathbf{K}_\rho = \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k_3} + \mathbf{k_4} = \mathbf{S} \quad . \tag{5.23}$$

Die von uns gewählte Kinematik bedeutet dann,

$$\mathbf{K}_\rho \mathbf{k}_i^c = 0 \quad , \tag{5.24}$$

wobei $\mathbf{k}_i^c$ die Impulse der Pionen im Schwerpunktsystem der Reaktion sind. Unter einem Lorentz-Boost [19], vom Wärmebadsystem ins Schwerpunktsystem transformieren sich die Vierer-Impuls wie folgt:

$$k_i^c = \begin{pmatrix} k_i^0 \left(1 - \frac{K_\gamma^2}{E_\gamma^2}\right)^{-1/2} \\ 0 \\ k_i^y \\ k_i^z \end{pmatrix} \quad , \tag{5.25}$$

wobei E_γ die Energie des ρ-Mesons ist. Damit lassen sich dann alle weiteren benötigten Größen bestimmen:

$$|\mathbf{S}| = K_\rho, \qquad S_0 = \sqrt{s + K_\rho^2}, \qquad \mathbf{k_i S} = \frac{1}{2} K_\rho^2$$

$$T_0 = U_0 = 0, \qquad |\mathbf{T}|^2 = -t, \qquad |\mathbf{U}|^2 = -u$$

$$k_i^0 = \frac{1}{2}\sqrt{s + K_\rho^2} \tag{5.26}$$

$$t = \frac{1}{2}(4M_\pi^2 - s)(1 - x) \qquad u = \frac{1}{2}(4M_\pi^2 - s)(1 + x) \quad , \tag{5.27}$$

mit $x = \cos\theta$ wobei wieder θ der durch $\cos\theta = \frac{\mathbf{k_1 k_3}}{|\mathbf{k_1}||\mathbf{k_3}|}$ gegebene Streuwinkel ist. Nun können wir die Temperaturkorrektur aus Gl. (B.37) zur Amplitude für $T = 0$ addieren und dies in Gl. (5.3) einsetzen, um die auf Isospin $I = 1$ projizierte Amplitude zu bekommen. Im Gegensatz zum ruhenden ρ ist dies bei dieser Kinematik problemlos möglich. Die auf diese Weise erhaltene Korrektur zur Amplitude ist in Gl.(B.39) gegeben.

Kapitel 6

Ergebnisse

Nachdem wir die Streuamplitude der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung mit Isospin $I = 1$ berechnet haben, welche das ρ-Meson als Resonanz enthält, können wir diese nun nutzen, um daraus Informationen über die Masse und die Breite des ρ-Mesons zu bekommen. Wir sind dabei in erster Linie daran interessiert, wie sich diese beiden Größen mit steigender Temperatur im Wärmebad verändern und wie sich der Impuls des ρ-Mesons relativ zum Wärmebad darauf auswirkt.
Die Masse und die Breite lassen sich am einfachsten mit Hilfe der Phasenverschiebung δ bestimmen. Diese steht über

$$e^{2i\delta} = 1 + 2i\sigma_{\mathrm{T}} T \tag{6.1}$$

in direktem Zusammenhang mit der im letzten Kapitel berechneten Amplitude, wobei σ_{T} der in Gl. (5.19) gegebene thermische Phasenraum ist.
Die einzige Schwierigkeit, die es nun noch bei der numerischen Auswertung der Phasenverschiebung gibt, ist die numerische Berechnung der Loop-Integrale aus Anhang B.1. Auf dieses Problem gehen wir in Anhang C genauer ein.
Um die Masse und die Breite des ρ-Mesons aus der Phasenverschiebung zu bestimmen, nehmen wir zunächst erst einmal an, dass die Resonanz in der Nähe der Masse des ρ-Mesons durch eine Breit-Wigner-Resonanz beschrieben werden kann. In diesem Fall sind die Masse M_ρ und die Breite Γ_ρ gegeben durch [11]:

$$\delta_{11}(M_\rho) = \frac{\pi}{2}, \qquad \Gamma_\rho = \frac{1}{M_\rho}\left(\frac{d\delta_{11}}{ds}\right)^{-1}_{s=M_\rho^2} \quad . \tag{6.2}$$

Aufgrund seiner großen Breite kann das ρ-Meson allerdings nicht sehr gut durch eine Breit-Wigner-Resonanz beschrieben werden, welche nur für kleine Breiten einen gute Näherung darstellt. Wir können aber Gl. (6.2) als Definition der Breite nehmen. Dies ist durchaus legitim, da die Definition der Breite bei Resonanzen auf verschiedene Arten möglich ist, welche dann auch zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Da wir hier aber in erster Linie am Vergleich zwischen dem

Vakuum und dem Medium interessiert sind, ist der Wert der Breite selbst nicht so wichtig, sondern nur seine Abhängigkeit von der Temperatur und dem Impuls des ρ-Mesons.

Um aber nun die Phasenverschiebung numerisch zu bestimmen, benötigen wir noch Werte für die chiralen Parameter. Wir verwenden die in [4] angegebenen, welche für $T = 0$ bestimmt wurden:

$$\bar{l}_1 = -0.3, \qquad \bar{l}_2 = 5.6, \qquad \bar{l}_3 = 3.4, \qquad \bar{l}_4 = 4.3 \quad . \tag{6.3}$$

Auch wenn in [4] keine Fehler angegeben sind, ist es bekannt, dass sich diese Parametern nur mit sehr großen Fehlern bestimmen lassen. Diese können im Bereich um 50% und höher liegen. Die Wahl der Parameter kann somit großen Einfluss auf die bestimmten Breiten und Massen haben, aber nicht auf die Temperaturabhängigkeit dieser Größen, da wir die Parameter als temperaturunabhängig annehmen. Somit sind alle, bei endlicher Temperatur berechneten Größen, Vorhersagen unseres Modells. Diese Annahme ist nur eine Näherung, die wir hier machen müssen, da wir die Temperaturabhängigkeit nicht kennen. Die gesamte Temperaturabhängigkeit steckt somit in den Loop-Integralen.

6.1 Die Phasenverschiebung δ_{11}

Als erstes wollen wir uns die Phasenverschiebung bei verschiedenen Temperaturen und Impulsen des ρ-Mesons anschauen. Dieser ist für das ruhende ρ-Meson für verschiedene Temperaturen in Abbildung 6.1 geplottet (vgl. auch [4]).
Wie erwartet sehen wir bei $T = 0$ eine deutlich ausgeprägte Resonanz in der Nähe der ρ-Masse. Mit zunehmender Temperatur beobachten wir eine Linksverschiebung, also eine Abnahme der Masse. Des Weiteren ist die Resonanz nicht mehr so deutlich ausgeprägt wie bei $T = 0$ und wir erkennen eine Zunahme der Breite. Insbesondere bei $T = 250$ MeV ist kaum noch die typische Form einer Resonanz zu erkennen.
Bei so hohen Temperaturen ist unser Modell aber höchstwahrscheinlich nicht mehr gültig. Der Grund dafür liegt in erster Linie nicht daran, dass wegen der hohen Temperatur unsere Niedrig-Energienäherung nicht mehr gültig ist. Er liegt vielmehr darin, dass bei so hohen Temperaturen bereits das Quark-Gluon-Plasma erreicht ist. D.h., die Mesonen haben sich bereits in einzelne Quarks aufgelöst. Somit ist einen Beschreibung nur mit Mesonen, wie in unserem Modell, nicht mehr möglich. Gitter-QCD-Rechnungen von [15] sehen die Schwelle zum Quark-Gluon-Plasma bei $T = 170$ MeV. Diese Plots und auch alle anderen in diesem Kapitel wurden nur bis zu so hohen Temperaturen gemacht, um die Effekte besser zu illustrieren.
Zusätzlich zur Phasenverschiebung wollen wir hier auch noch den Imaginärteil

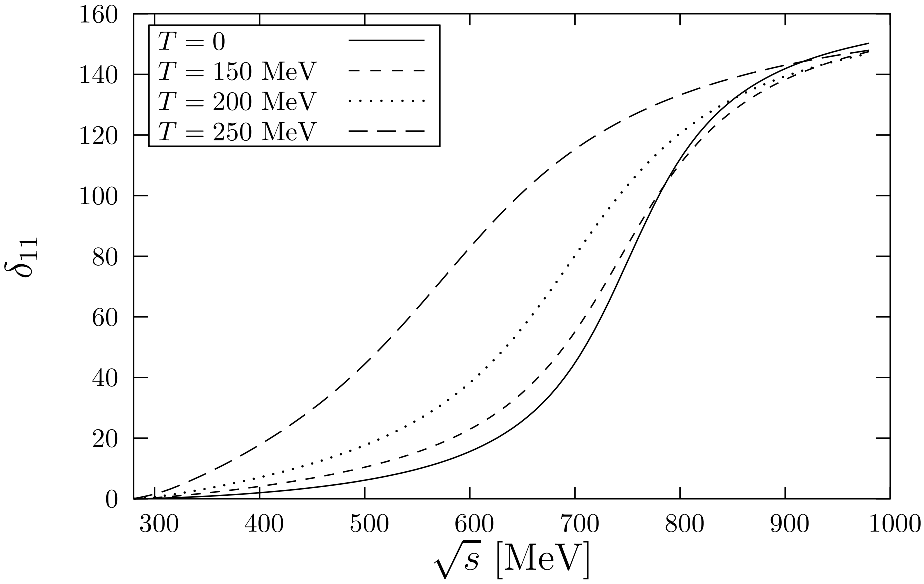


Abbildung 6.1: Die Phasenverschiebung δ_{11} in Abhängigkeit der invarianten Masse $\sqrt{s}$ für verschiedene Temperaturen und relativ zum Wärmebad ruhendem ρ-Meson.

der Amplitude $\mathrm{Im}\, T_{11}$ betrachten. Er ist für die gleichen Temperaturen und ruhendem ρ in Abbildung 6.2 geplottet. Auch hier ist bei $T = 0$ die Resonanz anhand des Peaks deutlich zu erkennen, mit der zu erwartenden großen Breite. Man sieht ebenfalls die deutliche Zunahme der Breite mit T, insbesondere bei hohen Temperaturen, und die deutliche Abnahme der Masse. Anhand der Asymmetrie der Peaks von T_{11} sieht man auch, dass sich diese Resonanz, wie oben bereits erwähnt, nicht besonders gut durch eine Breit-Wigner-Resonanz beschreiben lässt. Dies war aber aufgrund der großen Breite zu erwarten. Man sieht auch, dass die Asymmetrie mit zunehmender Temperatur und somit zunehmender Breite deutlich zunimmt.

Nachdem wir nun das ruhende ρ-Meson betrachtet haben, wollen wir jetzt untersuchen wie, die Phasenverschiebung eines sich im Wärmebad bewegenden ρ-Mesons aussieht. Wir beschränken uns hierbei auf die in Abschnitt 5.4 beschriebene Kinematik, bei der sich das ρ-Meson senkrecht zur Streuebene der Pionen in deren Schwerpunktsystem bewegt. Während ruhende ρ-Mesonen bereits in [4] diskutiert wurden, geschieht ein Studium der Impulsabhängigkeit hier zum ersten Mal.
Abbildung 6.3 zeigt die Phasenverschiebung bei einem Impuls des ρ-Mesons von $K_\rho = 500$ MeV. Es fällt auf, dass die durch steigende Temperatur hervorgerufene Veränderung der Phasenverschiebung bei sich bewegenden ρ-Mesonen deutlich geringer ausfällt. D. h., die Masse nimmt nicht so stark ab wie beim ruhenden

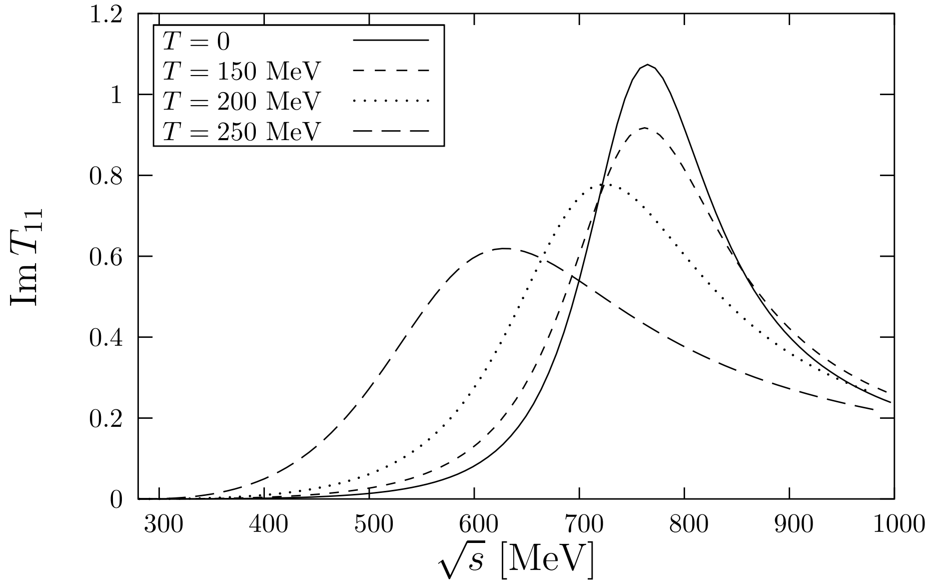


Abbildung 6.2: Der Imaginärteil der Amplitude T_{11} in Abhängigkeit der invarianten Masse $\sqrt{s}$ für verschiedene Temperaturen und relativ zum Wärmebad ruhendem ρ-Meson.

ρ und die Resonanz ist wieder deutlicher als solche zu erkennen. Bei $K_\rho = 1000$ MeV ist, wie man in Abbildung 6.4 sieht, der der Temperatur entgegenwirkende Effekt sogar so stark, dass es eine Zunahme der Masse M_ρ gibt. Die Abhängigkeit der Masse M_ρ von der Temperatur und dem Impuls werden wir im nächsten Abschnitt noch ausführlicher diskutieren. Abbildung 6.5, in der der Imaginärteil der Amplitude $\mathrm{Im}\, T_{11}$ für verschiedene Temperaturen und $K_\rho = 500$ MeV geplottet ist, bestätigt diese Beobachtung nochmal.

6.2 Masse des ρ-Mesons

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Phasenverschiebung allgemein betrachtet haben, wollen wir nun die Masse des ρ-Mesons, die man aus der Phasenverschiebung bestimmen kann, genauer untersuchen. In allen Plots in diesem Abschnitt wurde die Masse M_ρ unter Verwendung von Gl. (6.2) berechnet. Für $T = 0$ erhalten wir $M_\rho = 766$ MeV. Dieser Wert stimmt nicht ganz mit dem Wert von $M_\rho = 770$ MeV aus [12] überein. Dies ist sicherlich auf die Ungenauigkeit in den $\bar{l}_i$ aus Gl. (6.3) zurückzuführen. Für uns ist aber in erster Linie die Veränderung im Medium von Interesse, welche nur geringfügig von den $\bar{l}_i$ abhängt.
Wir werden zunächst die Masse als Funktion der Temperatur untersuchen und anschließend als Funktion des Impulses des ρ-Mesons.

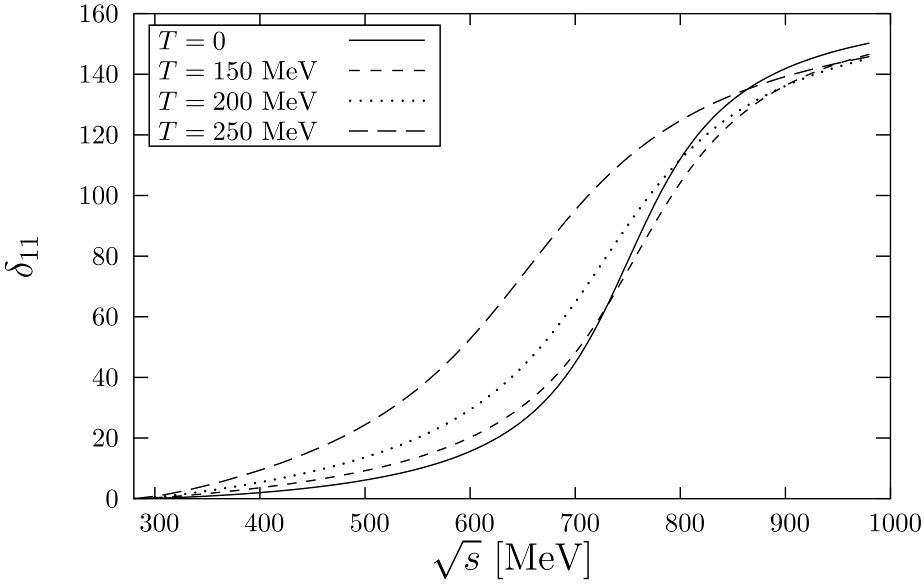


Abbildung 6.3: Die Phasenverschiebung δ_{11} in Abhängigkeit der invarianten Masse $\sqrt{s}$ für verschiedene Temperaturen und Impuls $K_\rho = 500$ MeV relativ zum Wärmebad.

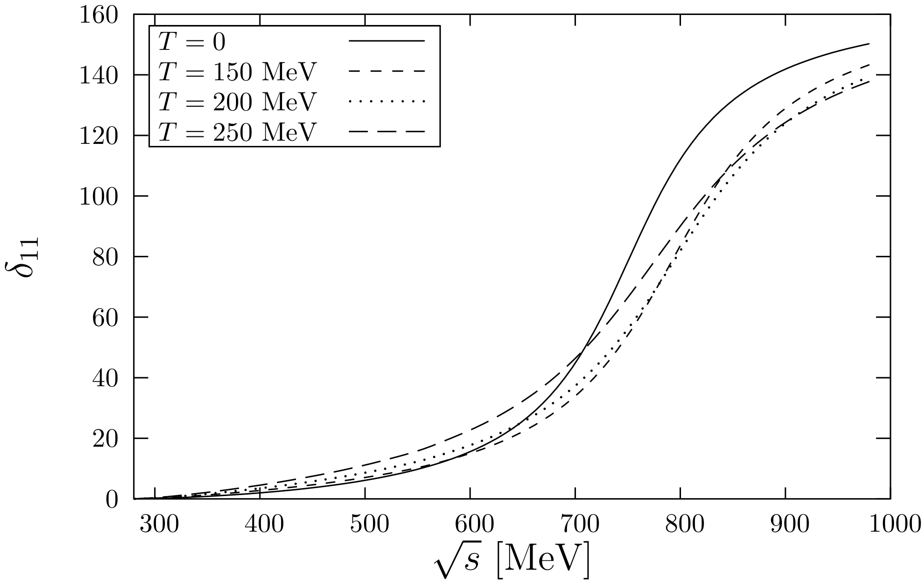


Abbildung 6.4: Die Phasenverschiebung δ_{11} in Abhängigkeit der invarianten Masse $\sqrt{s}$ für verschiedene Temperaturen und Impuls $K_\rho = 1000$ MeV relativ zum Wärmebad.

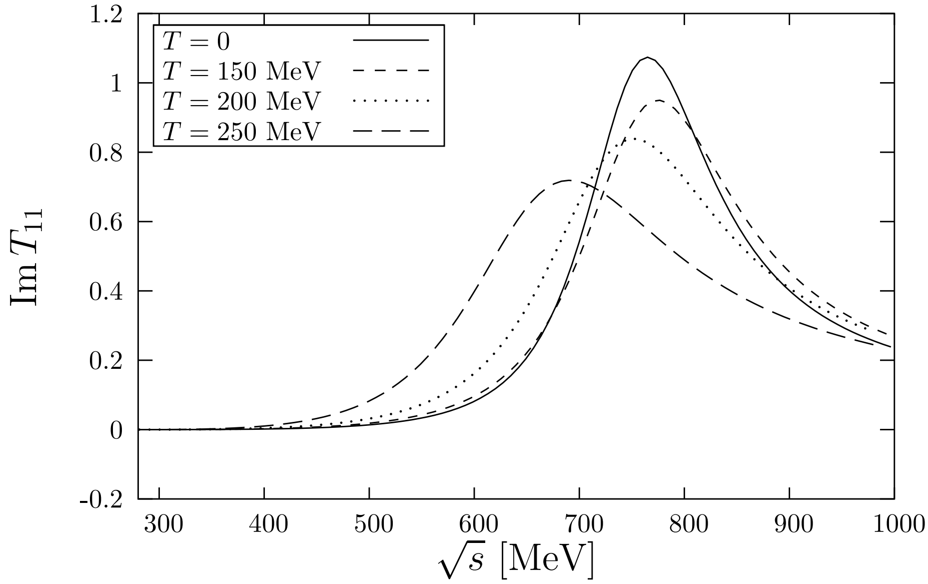


Abbildung 6.5: Der Imaginärteil der Amplitude T_{11} in Abhängigkeit der invarianten Masse $\sqrt{s}$ für verschiedene Temperaturen und Impuls $K_\rho = 500$ MeV relativ zum Wärmebad.

6.2.1 M_ρ als Funktion der Temperatur

Abbildung 6.6 zeigt die Masse des ρ-Mesons als Funktion der Temperatur für verschiedene Impulse K_ρ. Im Falle des ruhenden ρ nimmt die Masse bis $T = 50$ MeV um ca. 1MeV zu und dann bis $T = 100$ MeV um weitere 4MeV. Dort erreicht sie ihren maximalen Wert von 771 MeV. Für höhere Temperaturen fällt sie dann zunächst langsam und dann immer schneller ab. Bei einer Temperatur von $T = 150$ MeV, bis zu der wir unsere Amplitude sicherlich noch glauben können, ist sie wieder auf 761 MeV abgefallen und somit geringfügig unterhalb der Vakuummasse von 766 MeV. Bei einer Temperatur von $T = 250$ MeV fällt die Masse noch weiter bis auf 619 MeV. Wie bereits in Anschnitt 6.1 erwähnt, ist unsere Theorie hier wohl längst nicht mehr anwendbar.
Betrachten wir nun ein bewegtes ρ mit $K_\rho = 400$ MeV, so sehen wir, dass der Anstieg der Masse etwas schneller geht. So ist sie bei $T = 50$ MeV bereits um 2 MeV gestiegen und erreicht bei $T = 115$MeV ein Maximum von 774 MeV. Der anschließende Abfall geht etwas langsamer wie beim ruhenden ρ, was zu einer Masse von 770 MeV bei $T = 150$ MeV führt.
Bei einem noch höheren Impuls von $K_\rho = 700$ MeV verschiebt sich das Maximum noch weiter zu höheren Temperaturen und hat einen Wert von $M_\rho = 787$ MeV bei $T = 145$ MeV. Mit einer Masse von 773 MeV bei $T = 200$ MeV ist bei so hohem Impuls die Vakuummasse noch nicht wieder unterschritten.
In der für $K_\rho = 1000$ MeV geplotteten Kurve setzt sich diese Entwicklung noch

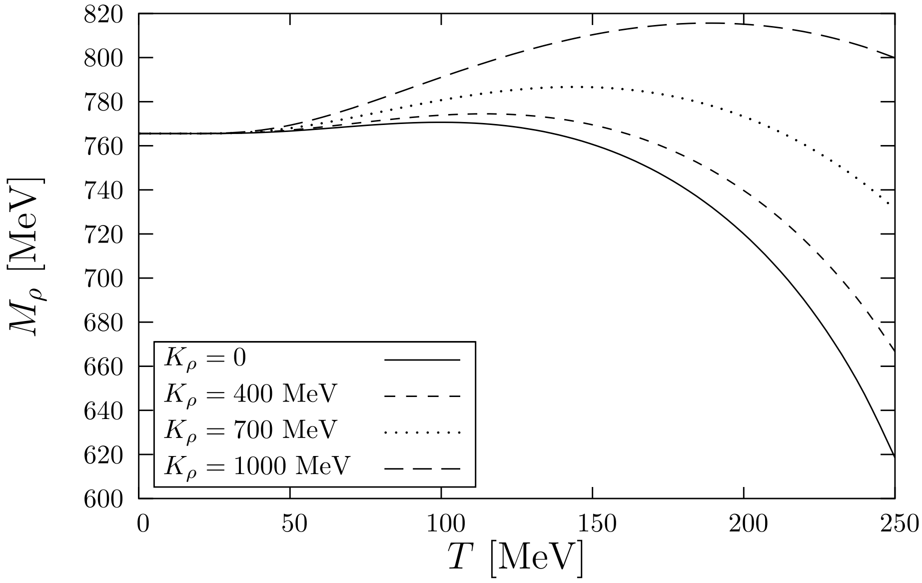


Abbildung 6.6: Die Masse M_ρ des ρ-Mesons in Abhängigkeit der Temperatur T für verschiedene Impulse K_ρ des ρ-Mesons relativ zum Wärmebad.

weiter fort, wobei wir hier wieder anmerken müssen, dass bei solch hohem Impuls der Gültigkeitsbereich unsere Theorie möglicherweise bereits verlassen wurde. Nun wollen wir unsere Ergebnisse mit zwei weiteren Modellen vergleichen. Zum einen mit dem erweiterten Nambu-Jona-Lasino-Modell aus [13], in dem zu den Pionen noch zusätzlich Quarks enthalten sind. Dieses Modell liefert für das ruhende ρ-Meson einen leichten Abfall der Masse mit der Temperatur, allerdings ohne vorherigen Anstieg.
Zum anderen wollen wir mit [7] vergleichen. Hier wurde das Vektor-Dominanz-Modell verwendet, um die Masse bei endlicher Temperatur, auch für sich bewegende ρ-Mesonen zu berechnen. Hier wird ein Anstieg mit der Temperatur gefunden, der bei schnelleren ρ-Mesonen schwächer ausfällt.
Teilaspekte der anderen Modelle finden sich also qualitativ auch im hier vorgestellten Modell. Gleichzeitig vermeidet unser Modell Schwächen der anderen Zugänge. Die Verwendung von Modellen mit expliziten Quarks [13] ist bei niedrigen Temperaturen äußerst fragwürdig, weil hier die Quarks eigentlich confined sind. In unserem Modell werden dagegen nur physikalisch existente asymptotische Zustände - die Pionen - verwendet.
Im Vektor-Dominanz-Modell muss das ρ-Meson „per Hand“ als zusätzliches Feld neben den Pionen eingeführt werden, während es hier dynamisch aus der Pion-Streuamplitude entsteht.

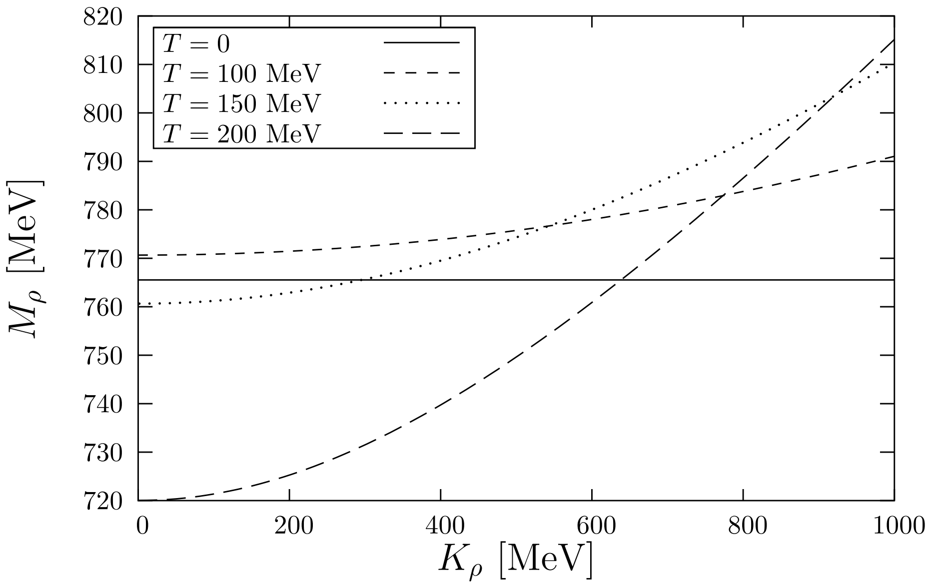


Abbildung 6.7: Die Masse M_ρ des ρ-Mesons in Abhängigkeit von K_ρ für verschiedene Temperaturen.

6.2.2 M_ρ als Funktion von K_ρ

Nachdem wir im letzten Abschnitt die Abhängigkeit von M_ρ von der Temperatur bei verschiedenem K_ρ diskutiert haben, wollen nun die Temperatur festhalten und die K_ρ-Abhängigkeit diskutieren.
Abbildung 6.7 zeigt die Masse des ρ-Mesons als Funktion von K_ρ für verschiedene Temperaturen. Wie aufgrund der Lorentz-Invarianz der Amplitude bei $T = 0$ zu erwarten war, sehen wir, dass es für $T = 0$ keine Abhängigkeit von K_ρ gibt und die Masse konstant gleich der Vakuummasse ist.
Bei $T = 100$ MeV sehen wir, wie schon im letzten Abschnitt diskutiert, eine leicht erhöhte Masse von $M_\rho = 771$ MeV beim ruhenden ρ. Mit steigendem K_ρ steigt die Masse dann monoton an, wobei die Steigung immer mehr zunimmt. Sie erreicht bei $K_\rho = 1000$ MeV einen Wert von $M_\rho = 791$ MeV.
Bei $T = 150$ MeV sehen wir einen ähnlichen Verlauf, wobei diesmal die Masse des ruhenden ρ bereits unterhalb der Vakuummasse bei $M_\rho = 761$ MeV liegt, sie dann aber deutlich schneller mit K_ρ ansteigt und schließlich einen Wert von $M_\rho = 810$ MeV bei $K_\rho = 1000$ MeV erreicht.
Bei der letzten geplotteten Temperatur $T = 200$ MeV ist die Masse des ruhenden ρ mit $M_\rho = 720$ MeV deutlich niedriger als bei $T = 0$, steigt dann aber sehr stark an auf $M_\rho = 815$ MeV bei $K_\rho = 1000$ MeV.

An diesem Plot sehen wir, dass die Abhängigkeit der ρ-Masse von K_ρ mit steigender Temperatur deutlich zunimmt. Das lässt sich dadurch erklären, dass durch

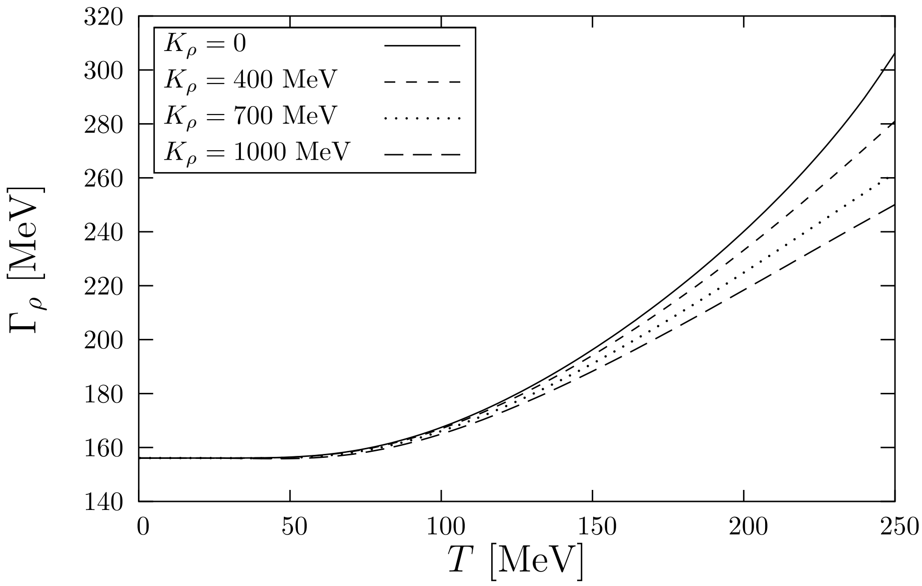


Abbildung 6.8: Die Breite Γ_ρ des ρ-Mesons in Abhängigkeit der Temperatur T für verschiedene Impulse K_ρ des ρ-Mesons relativ zum Wärmebad.

das Wärmebad die Lorentz-Invarianz gebrochen wird. Je höher nun die Temperatur ist, desto stärker wird die Lorentz-Invarianz gebrochen. Bei exakter Lorentz-Invarianz wären alle Größen und somit auch die Masse unabhängig von der Geschwindigkeit und damit auch vom Impuls des ρ-Mesons. Erst die Brechung der Lorentz-Invarianz erlaubt überhaupt eine Abhängigkeit von K_ρ.

6.3 Breite des ρ-Mesons

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Abhängigkeit der Breite des ρ-Mesons von der Temperatur und dem Impuls K_ρ genauer diskutieren. Wie im letzten Abschnitt werden wir diese beiden Abhängigkeiten getrennt untersuchen.

6.3.1 Γ_ρ als Funktion der Temperatur

Abbildung 6.8 zeigt die Breite des ρ-Mesons als Funktion der Temperatur für verschiedene Impulse K_ρ. Für das ruhende ρ-Meson sehen wir einen starken Anstieg der Breite von $\Gamma_\rho = 156$ MeV bei $T = 0$ auf $\Gamma_\rho = 196$ MeV bei $T = 150$ MeV. Wie auch bei der Masse ist die Veränderung der Breite unterhalb von $T = 50$ MeV kleiner 1%. Oberhalb von $T = 50$ MeV nimmt die Änderung dann aber schnell zu.
Beim bewegten ρ-Meson verläuft die Breite etwas flacher, d.h. die Verbreiterung

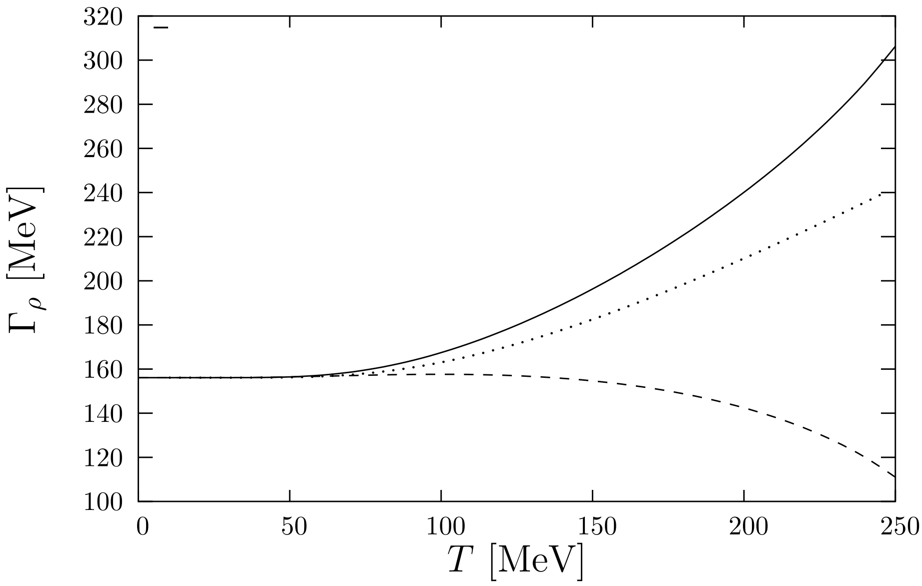


Abbildung 6.9: Vorhersage der Abhängigkeit der Breite von der Temperatur bei ruhendem ρ durch verschiedene Modelle: Die durchgezogene Linie zeigt die Breite nach unserem Modell, bei der gepunkteten wird nur der thermische Phasenraum berücksichtigt und die gestrichelte Linie zeigt die Veränderung der Breite hervorgerufen durch die Abnahme der ρ-Masse.

ist geringer. So wächst die Breite bei $K_\rho = 700$ MeV nur noch auf $\Gamma_\rho = 191$ MeV bei $T = 150$ MeV an. Bis $T = 250$ MeV steigt die Breite in allen Fällen nochmal deutlich an, wobei wir uns hier wohl schon längst im Bereich des Quark-Gluonen-Plasmas bewegen, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben.

Der Rückgang der thermischen Effekte bei schnellen ρ-Mesonen lässt sich sehr gut verstehen. Die Temperatur hat insofern Einfluss auf die Amplitude, dass durch sie der Propagator in den Loops einen zusätzliche Bosefaktor

$$n(E) = 1 + \frac{2}{\exp(\beta E/2) - 1} \tag{6.4}$$

bekommt. Hat aber nun das ρ-Meson einen hohen Impuls, so haben auch die Pionen in den Loops einen erhöhten Impuls und somit eine höhere Energie. Die Temperatureffekte gehen also zurück.

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich die Masse des ρ-Mesons ebenfalls mit der Temperatur ändert. Eine solche Massenänderung alleine würde aber auch schon eine Änderung der Breite bewirken. Konstruiert man eine Theorie, in der man das ρ als Teilchen mit einbezieht und es dann durch minimale Substitution an das Pion koppelt, so erhält man folgende Beziehung zwischen den Massen des ρ und des Pions und der Breite des ρ, welche den veränderten Phasenraum berücksichtigt [14]:

$$\Gamma_\rho = \frac{g^2}{48\pi} M_\rho \left(1 - \frac{4M_\pi^2}{M_\rho^2}\right)^{3/2} , \tag{6.5}$$

wobei g die Kopplungskonstante des $\rho\pi\pi$-Vertex ist, welche wir hier als temperaturunabhängig annehmen. Die Kopplungskonstante g können wir aus der Masse und Breite bei $T = 0$ bestimmen und erhalten $g = 6.17$. Nun können wir also mit diesem Modell überprüfen, welchen Einfluss alleine die Massenabnahme auf die Breite hat ohne weitere thermische Effekte mit einzubeziehen.
Die gestrichelte Linie in Abbildung 6.9 zeigt die mit diesem Modell berechnete Breite. Es zeigt sich, dass die Abnahme der Masse nach diesem Modell auch zu einer Abnahme der Breite führen würde, entgegen unserem Modell, bei dem die Breite ansteigt. Die Zunahme der Breite nach unserem Modell ist bei $T = 150$ MeV ungefähr zwölf mal so hoch wie die Abnahme, die aus der veränderten Masse berechnet wurde.
Wir sehen also, dass die Abnahme der Masse alleine nur einen relativ geringen Einfluss auf die Breite hat und diese hauptsächlich durch andere thermische Effekte bei steigender Temperatur ansteigt.

Als nächstes wollen wir das Ergebnis unseres Modells mit einem Modell vergleichen, welches nur den thermischen Phasenraum berücksichtigt [4]. Dieses liefert für die Breite:

$$\Gamma_\rho = \Gamma_\rho^0 \left(1 + \frac{2}{\exp(M_\rho^0\beta/2) - 1}\right) , \tag{6.6}$$

wobei Γ_ρ^0 und M_ρ^0 die Breite bzw. die Masse bei $T = 0$ sind. Die so erhaltene Breite ist durch die gepunktete Linie in Abbildung 6.9 dargestellt.
Dieses Modell liefert eine thermische Breite, die im Verlauf unserer Breite recht ähnlich sieht. Allerdings ist die Zunahme nur etwa zwei Drittel im Vergleich zu der mit unserem Modell berechneten.

Es gibt also thermische Effekte, die über die reinen Phasenraum-Effekte hinausgehen und zu einem stärkeren Ansteigen führen.

6.3.2 Γ_ρ als Funktion von K_ρ

Nun wollen wir auch noch die Abhängigkeit der Breite vom Impuls diskutieren. Abbildung 6.10 zeigt die Breite für $T = 100$ MeV, $T = 150$ MeV und $T = 200$ MeV. Der Beginn der Kurven bei $K_\rho = 0$ erklärt sich aus Abbildung 6.8 und der anschließenden Diskussion. Für alle Temperaturen fällt die Kurve mit steigendem K_ρ ab und nähert sich somit wieder der Vakuumbreite an. Diese Annäherung an

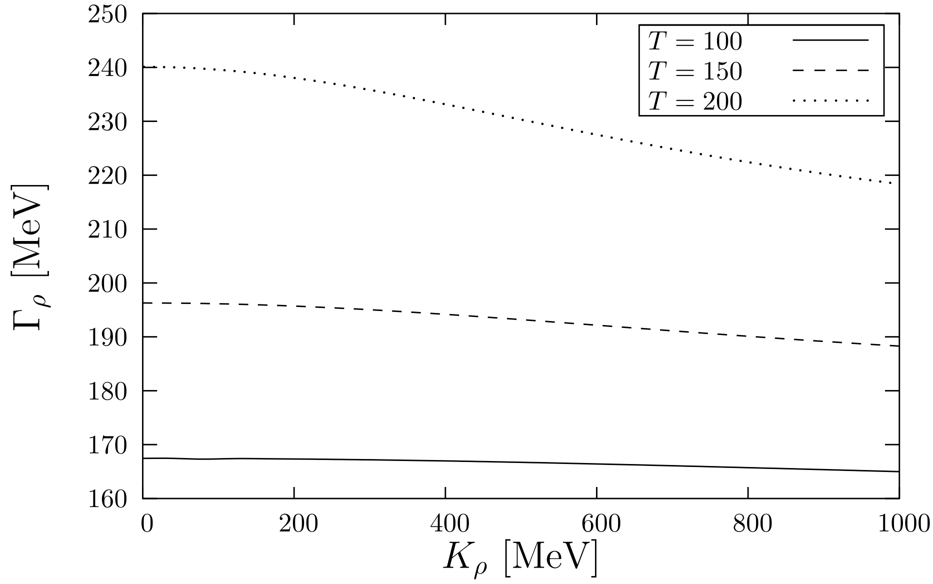


Abbildung 6.10: Die Masse M_ρ des ρ-Mesons in Abhängigkeit von K_ρ für verschiedene Temperaturen.

die Vakuumwerte bei steigendem Impuls wurde bereits oben durch den Rückgang des Bose-Enhancements erklärt.
Es fällt auch auf, dass die Abnahme bei höheren Temperaturen deutlich größer ist. So fällt die Breite bei $T = 150$ MeV um 8 MeV ab, während sie bei $T = 100$ MeV nur um 2.5 MeV abfällt, jeweils von $K_\rho = 0$ bis $K_\rho = 1000$ MeV gemessen. Dies lässt sich wie bei der Masse durch die Brechung der Lorentz-Invarianz durch das Wärmebad erklären.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Eigenschaften, d.h. Masse und Breite, von ρ-Mesonen in einem Pionengas bei endlicher Temperatur diskutiert. Dazu wurde das ρ-Meson als Resonanz in der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung beschrieben. Um die Masse und die Breite einer Resonanz zu bestimmen, reicht es aus, die Phasenverschiebung zu kennen, welcher in direktem Zusammenhang zur Streuamplitude steht. Die $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuamplitude wurde hier unter Verwendung der Chiralen Störungstheorie bis zur vierten Ordnung berechnet.
Im zweiten Kapitel wurde daher zunächst einmal die Chirale Störungstheorie, als effektive Theorie, aus der QCD entwickelt. Dabei wurde insbesondere auf die chirale Symmetrie der QCD eingegangen und wie diese spontan gebrochen wird. Daraufhin wurde gezeigt, wie die mit dieser spontanen Symmetriebrechung verbundenen Goldstone-Bosonen mit den Mesonen identifiziert werden können. Anschließend wurde die allgemeinste Lagrangedichte, die alle Symmetrien der QCD respektiert, aus den Mesonen bis Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ konstruiert.

Unter Verwendung dieser Lagrangedichte wurde im dritten Kapitel die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude für $SU(3)$ bis zur vierten Ordnung im Vakuum berechnet. Dabei wurden zwar nicht alle Schritte einzeln ausgeführt, aber die Vorgehensweise ausführlich beschrieben und anhand von Beispielen die Techniken erläutert. Im Anhang A sind alle zur Berechnung nötigen Vertizes und alle zu berechnenden Loop-Integrale angegeben worden.

Um später das ρ-Meson bei endlicher Temperatur zu diskutieren, wurde anschließend die Streuamplitude auch bei endlicher Temperatur bis zur vierten Ordnung berechnet. Hierbei wurde aber der Einfachheit halber nur der $SU(2)$-Fall betrachtet. Da bei endlicher Temperatur die Streuamplitude nicht eindeutig definiert ist, wurde vor der Berechnung erläutert, was wir in dieser Arbeit unter der Streuamplitude verstehen. Die Berechnung wurde mit Hilfe des Imaginärzeit-Formalismus in ähnlicher Ausführlichkeit wie im Vakuum durchgeführt.

Nachdem die Amplitude bekannt war, wurde demonstriert, wie man von ihr durch

Projektion auf Isospin $I = 1$ und Spin $J = 1$ auf das ρ-Meson als Resonanz der $\pi\pi \to \pi\pi$-Streuung schließen kann. Da die mit der chiralen Störungstheorie berechnete Amplitude nur für kleine Energien gültig ist und aufgrund ihrer Struktur keine, für eine Resonanz nötige, Pole produzieren kann, wurde anschließend gezeigt, wie man mit Hilfe der Methode der inversen Amplitude diese beiden Defizite beseitigen kann.
Ein wichtiger Aspekt dieser Arbeit ist die Abhängigkeit der thermischen Masse und Breite vom Impuls des ρ-Mesons relativ zum Wärmebad. Da durch das thermische Pionengas im Allgemeinen die Dreh-Invarianz gebrochen wird und somit der Drehimpuls nicht mehr erhalten ist, wurde nicht der allgemeinste Fall diskutiert, sondern nur zwei spezielle Kinematiken, bei denen der Drehimpuls wieder erhalten bleibt. Zum einen wurde ein relativ zum Pionengas ruhendes ρ-Meson betrachtet und zum anderen ein sich relativ zum Pionengas bewegendes. Hierbei wurde die Kinematik auf den Fall eingeschränkt, dass der Impuls des ρ-Mesons relativ zum Pionengas orthogonal zur Streuebene der Pionen in deren Schwerpunktsystem ist.

Mit der auf diese Weise bestimmten Amplitude war es nun möglich, die Eigenschaften des ρ-Mesons anhand der Phasenverschiebung zu bestimmen. Es wurden insbesondere die Abhängigkeiten der Masse und der Breite sowohl von der Temperatur des Pionengases als auch vom Impuls des ρ-Mesons in der oben beschriebenen Kinematik diskutiert.
Für das ruhende ρ zeigt sich, nach minimalem Anstieg bis etwa 50 MeV, eine deutliche Abnahme der Masse mit steigender Temperatur. Bei dem sich bewegenden ρ ist der Anstieg wesentlich deutlicher und endet erst bei höheren Temperaturen, bis die Masse ebenfalls abfällt. Bei fester Temperatur steigt die Masse mit wachsendem Impuls des ρ-Mesons, wobei der Anstieg bei hohen Temperaturen viel schneller geht.
Die Breite steigt mit der Temperatur sehr deutlich an, wobei der Anstieg bei höheren Impulsen des ρ-Mesons schwächer ausfällt. Es wurde anhand von einfachen Modellen gezeigt, dass dieser Anstieg weder durch die Abnahme der Masse bei steigender Temperatur noch durch den thermischen Phasenraum alleine erklärt werden kann. Wir erhalten also nicht-triviale Resultate dadurch, dass das ρ-Meson nicht von „außen“ als explizites Feld in den Formalismus eingeführt wird, sondern aus der Nieder-Energie-Streuamplitude der Pionen bestimmt wird. Das hebt den vorgestellten Formalismus deutlich von anderen Zugängen ab [7, 13].

Anhang A

Wichtige Formeln bei $T = 0$

A.1 Loop-Integrale bei $T = 0$

Wir definieren zunächst:

$$F_M := -i \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - M^2} \tag{A.1}$$

und

$$J_{\mathrm{M}}(q^2) := -i \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - M^2)((k-p)^2 - M^2)} \quad , \tag{A.2}$$

wobei $P = \pi, K, \eta$. Mit der Definition von $J_{\mathrm{P}}(p^2)$ folgen wir der Notation von [11]. Wir renormieren, indem wir Gebrauch von der dimensionalen Renormierung machen. Dazu berechnen wir die Loop-Integrale in $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen. Diese Integrale sind endlich, solange d nicht ganzzahlig ist. Bei dieser Methode ist der divergierende Teil der hier vorkommenden Loop-Integrale im Grenzfall $d \to 4$ proportional zu $1/\varepsilon$ und lässt sich somit leicht separieren [20]. Für die Integrale erhalten wir in dimensionaler Renormierung [11]:

$$F_M = \frac{M^2}{16\pi^2} \left(-\rho + \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) \tag{A.3}$$

$$J_{\mathrm{M}}(s) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\rho - 1 + \log \frac{M^2}{\mu^2} \right) + \bar{J}_{\mathrm{M}}(s) \quad , \tag{A.4}$$

mit

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} + \log 4\pi + 1 - \gamma \tag{A.5}$$

$$\bar{J}_{\mathrm{M}}(q^2) = \frac{1}{16\pi^2}\left(2 + \sigma_{\mathrm{M}}(s)\log\frac{\sigma_{\mathrm{M}}(s)-1}{\sigma_{\mathrm{M}}(s)+1}\right) \tag{A.6}$$

$$\sigma_{\mathrm{M}}(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4\frac{M^2}{s}}} \quad . \tag{A.7}$$

Alle in der Berechnung der Ein-Loop-Diagramme vorkommenden Loop-Integrale lassen sich nun durch F_{M} und $J_{\mathrm{M}}(q^2)$ wie folgt ausdrücken [11]:

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu}{(p-k)^2-M^2} = iF_{\mathrm{M}}p_\mu \tag{A.8}$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu}{\big((p-k)^2-M^2\big)\big(k^2-M^2\big)} = \frac{i}{2}J_{\mathrm{M}}(p^2)p_\mu \tag{A.9}$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2}{\big((p-k)^2-M^2\big)\big(k^2-M^2\big)} = i\big(F_{\mathrm{M}} + M^2J_{\mathrm{M}}(p^2)\big) \tag{A.10}$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^4}{\big((p-k)^2-M^2\big)\big(k^2-M^2\big)} = i\big(\big(2M^2+p^2\big)F_{\mathrm{M}} + M^4J_{\mathrm{M}}(p^2)\big) \tag{A.11}$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^2k_\mu}{\big((p-k)^2-M^2\big)\big(k^2-M^2\big)} = i\big(F_{\mathrm{M}} + \tfrac{1}{2}M^2J_{\mathrm{M}}(p^2)\big)p_\mu \tag{A.12}$$

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k_\mu k_\nu}{\big((p-k)^2-M^2\big)\big(k^2-M^2\big)} = A_{\mathrm{M}}(p^2)g_{\mu\nu} + B_{\mathrm{M}}(p^2)p_\mu p_\nu \tag{A.13}$$

mit

$$A_{\mathrm{M}}(p^2) = \frac{i}{3}\left[\frac{1}{2}\left(F_{\mathrm{M}} + \frac{2}{3}\frac{M^2}{16\pi^2}\right) + \left(M^2 - \frac{p^2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\frac{1}{16\pi^2} + J_{\mathrm{M}}(p^2)\right)\right] \tag{A.14}$$

$$B_{\mathrm{M}}(p^2) = \frac{i}{3p^2}\left[\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{p^2}{6} - M^2\right) + F_{\mathrm{M}} + \left(p^2 - M^2\right)J_{\mathrm{M}}(p^2)\right] \quad . \tag{A.15}$$

A.2 Renormierung

Wir werden in dieser Arbeit die Renormierung der chiralen Störungstheorie nicht durchführen, sondern nur die Ergebnisse aus [11] angeben.
Für die L_i ergibt sich:

$$L_i = L_i^{\mathrm{r}} + \Gamma_i\lambda \quad , \tag{A.16}$$

mit denn in [9] angegebenen Γ_i

$$\Gamma_1 = \frac{3}{32}, \quad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{8}$$

$$\Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144}, \quad \Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48} \tag{A.17}$$

und λ aus Gl. (A.22).

Durch die Renormierung erhalten wir noch zusätzliche Terme in Gl. (3.16) und Gl. (3.19), sodass sich für die Masse M_π und die Feldstärkenrenormierung Z ergibt:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 = M_{0\pi}^2 \Bigg(1 + \mu_\pi - \frac{\mu_\eta}{3} + \frac{16 M_{0K}^2}{F_0^2}(2L_6 - L_4) \\ + \frac{8M_{0\pi}^2}{F_0^2}(2L_6^{\mathrm{r}} + 2L_8^{\mathrm{r}} - L_4^{\mathrm{r}} - L_5^{\mathrm{r}}) \Bigg) \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} Z =& 1 + \frac{4}{3}\mu_\pi + \frac{2}{3}\mu_{\mathrm{K}} - \frac{4\lambda}{3F_0^2}(2M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2) \\ & - \frac{1}{F_0^2}\left(16 L_4^{\mathrm{r}} M_{0K}^2 + 8 L_4^{\mathrm{r}} M_{0\pi}^2 + 8 L_5^{\mathrm{r}} M_{0\pi}^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{A.19}$$

Für die Pionenzerfallskonstante F ergibt sich:

$$F = F_0 \left(1 - 2\mu_\pi - \mu_{\mathrm{K}} + \frac{4M_{0\pi}^2}{F_0^2}(L_4^{\mathrm{r}} + L_5^{\mathrm{r}}) + \frac{8M_{0K}^2}{F_0^2} L_4^{\mathrm{r}} \right) \quad , \tag{A.20}$$

mit

$$\mu_i = \frac{M_i^2}{32\pi^2 F_0^2} \log \frac{M_i^2}{\mu^2} \quad . \tag{A.21}$$

Zur Renormierung benötigen wir noch:

$$\lambda = \frac{\mu^{d-4}}{16\pi^2}\left[\frac{1}{d-4} - \frac{1}{2}(\ln 4\pi - \gamma + 1) \right] \quad , \tag{A.22}$$

wobei γ die Euler-Konstante ist.

A.3 Benötigte Vertizes aus $\mathcal{L}_2$

Wir listen hier alle Vertizes auf, die für die Berechnung der Ein-Loop-Diagramme in Abschnitt 3.3 nötig sind. Die Wechselwirkungslagrangedichte $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ für diese Vertizes ergibt sich durch einsetzten von ϕ aus Gl.(2.67) in Gl.(3.3). Wir werden die komplette Lagrangedichte hier nicht aufschreiben, da sie sehr viele Terme enthält und nur ein kleiner Teil davon für uns relevant ist. Daher ist hier nur der für jeden einzelnen Vertex relevante Teil aus $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ angegeben.

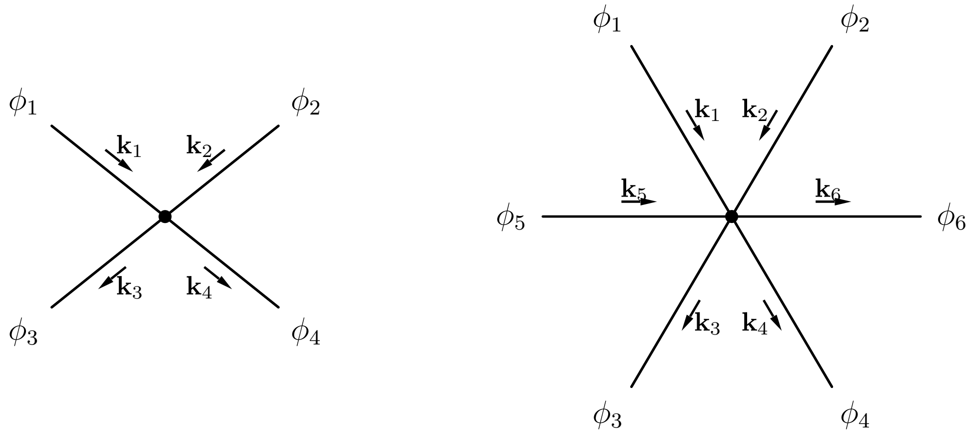


Abbildung A.1: Definition der Impulse für den $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4$-Vertex und den $\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\phi_5\phi_6$-Vertex

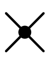
Da die Diagramme in denen diese Vertizes verwendet werden, alle Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ sind, ist es hier nicht nötig, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, zwischen $M_{0\pi}$ und M_π zu unterscheiden. Der Grund dafür liegt darin, dass die Korrekturen von $M_{0\pi}^2$ mindestens quadratisch in den Mesonenmassen sind. Damit wären die Korrekturen in dem damit berechneten Ein-Loop-Diagramm mindestens sechster Ordnung in den Impulsen und somit bei unserer Rechnung zu vernachlässigen. Gleiches gilt für F_0 und F.

A.3.1 Vierer Vertizes aus $\mathcal{L}_2$

Wir verwenden die in Abbildung A.1 dargestellte Definition für die Impulse. $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ gibt jeweils den Term der Lagrangedichte an, der den Vertex liefert.

$\pi^{0\,4}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{24F_0^2} M_{0\pi}^2 \pi^{0\,4}, \tag{A.23}$$



$$= i\frac{M_\pi^2}{F^2}$$

$\pi^{+2}\pi^{-2}$ - Vertex:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{6F_0^2}\big(&M_{0\pi}^2\pi^{+2}\pi^{-2} + \pi^{+2}\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ - 2\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ \\ &+ \pi^{-2}\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^+\big)\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$= \frac{i}{3F^2}\big(2M_\pi^2 + 2k_2k_3 + 2k_1k_4 + (k_2 - k_3)(k_1 - k_4)\big) \tag{A.25}$$

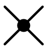
$\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{6F_0^2}\big(M_{0\pi}^2 \pi^{0\,2}\pi^+\pi^- - 2\pi^+\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- + 2\pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ - 2\pi^{0\,2}\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\big) \tag{A.26}$$

$$= \frac{i}{3F^2}\big(M_\pi^2 + 2k_3k_4 + 2k_1k_2 + (k_1+k_2)^2\big) \tag{A.27}$$

$\pi^+\pi^-K^+K^-$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{6F_0^2}\big((M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2)K^+K^-\pi^+\pi^- - \pi^+\pi^-\partial_\mu K^-\partial^\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^- - K^+\pi^-\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^+ + 2K^-\pi^-\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^+ - 2K^-K^+\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\big) \tag{A.28}$$



$$= \frac{i}{6F^2}\big((M_\pi^2 + M_K^2) + 2k_2k_4 + 2k_1k_3 + (k_1-k_3)^2\big) \tag{A.29}$$

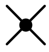
$\pi^+\pi^-K_0\bar{K}_0$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{6F_0^2}\big((M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2)K_0\bar{K}_0\pi^+\pi^- - \pi^+\pi^-\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu K_0 + 2K_0\pi^+\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu\pi^- - \bar{K}_0\pi^+\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^- - K_0\pi^-\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu\pi^+ + 2\bar{K}_0\pi^-\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^+ - 2\bar{K}_0K_0\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\big) \tag{A.30}$$

$$= \frac{i}{6F^2}\big((M_\pi^2 + M_K^2) + 2k_2k_4 + 2k_1k_3 + (k_1-k_3)^2\big) \tag{A.31}$$

$\pi^+\pi^-\eta^2$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{6F_0^2}M_{0\pi}^2\pi^+\pi^-\eta^2,$$



$$= i\frac{M_\pi^2}{3F^2} \tag{A.32}$$

$K^+K^-\pi^{0\,2}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{12F_0^2}\big((M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2)K^+K^-\pi^{0\,2} - \pi^{0\,2}\partial_\mu K^-\partial^\mu K^+ + K^-\pi^0\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^0$$
$$+ K^+\pi^0\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^0 - K^+K^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0\big) \tag{A.33}$$

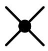

$$= \frac{i}{12F^2}\big(2(M_\pi^2 + M_K^2) + 2k_1k_2 + 2k_3k_4 + (k_1+k_2)^2\big) \tag{A.34}$$

$K_0\bar{K}_0\pi^{0\,2}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{12F_0^2}\big((M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2)K_0\bar{K}_0\pi^{0\,2} - \pi^{0\,2}\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu K_0 + \bar{K}_0\pi^0\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^0$$
$$+ K_0\pi^0\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu\pi^0 - K_0\bar{K}_0\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0\big) \tag{A.35}$$


$$= \frac{i}{12F^2}\big(2(M_\pi^2 + M_K^2) + 2k_1k_2 + 2k_3k_4 + (k_1+k_2)^2\big) \tag{A.36}$$

$\eta^2\pi^{0\,2}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{12F_0^2}M_{0\pi}^2\pi^{0\,2}\eta^2,$$

$$= i\frac{M_\pi^2}{3F^2} \tag{A.37}$$

$\pi^+K_0\pi^0K^+$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\sqrt{2}F_0^2}\big(K^-\pi^+\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^0 - K_0\pi^+\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^0 - K^-\pi^0\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^+$$
$$+ K_0\pi^0\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^+\big) \tag{A.38}$$


$$= \frac{i}{2\sqrt{2}F^2}(k_1+k_3)(k_2+k_4) \tag{A.39}$$

$K^+\pi^-K_0\pi^0$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2\sqrt{2}F_0^2}\big(K^+\pi^-\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu\pi^0 - \bar{K}_0\pi^-\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^0 - K^+\pi^0\partial_\mu\bar{K}_0\partial^\mu\pi^-$$
$$+ \bar{K}_0\pi^0\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^-\big) \tag{A.40}$$

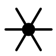

$$= -\frac{i}{2\sqrt{2}F^2}(k_1+k_3)(k_2+k_4) \tag{A.41}$$

A.3.2 Sechser Vertizes aus $\mathcal{L}_2$

Wir verwenden die in Abbildung A.1 dargestellte Definition für die Impulse. $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ gibt jeweils den Term der Lagrangedichte an, der den Vertex liefert.

$\pi^+\pi^-{\pi^0}^4$ - Vertex:

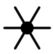
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^4}\bigg(&\frac{M_{0\pi}^2}{120}{\pi^0}^4\pi^+\pi^- - \frac{2}{45}{\pi^0}^2\pi^+\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{2}{45}{\pi^0}^3\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- \\ &- \frac{2}{45}{\pi^0}^3\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ + \frac{2}{45}{\pi^0}^4\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\bigg)\end{aligned} \tag{A.42}$$



$$\begin{aligned}= -\frac{i}{F^4}\bigg(&-\frac{M_\pi^2}{5} + \frac{8}{45}\Big(-k_3k_4 + k_5k_6 + (k_3+k_4)(k_5-k_6)\Big) \\ &- \frac{4}{15}(k_1+k_2)^2 - \frac{48}{45}k_1k_2\bigg)\end{aligned} \tag{A.43}$$

$\pi^+\pi^-{\pi^0}^2{\pi^-}^2$ - Vertex:

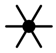
$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^4}\bigg(&\frac{M_{0\pi}^2}{60}{\pi^0}^2{\pi^+}^2{\pi^-}^2 + \frac{4}{45}{\pi^-}^2{\pi^+}^2\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{4}{45}\pi^0\pi^-{\pi^+}^2\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- \\ &- \frac{1}{45}{\pi^0}^2{\pi^+}^2\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^- - \frac{4}{45}\pi^0{\pi^-}^2\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ \\ &+ \frac{2}{15}{\pi^0}^2\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \frac{1}{45}{\pi^0}^2{\pi^-}^2\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^+\bigg)\end{aligned} \tag{A.44}$$



$$\begin{aligned}= -\frac{i}{F^4}\bigg(&-\frac{2}{15}M_\pi^2 - \frac{8}{45}(k_1k_6 - k_2k_5) - \frac{32}{45}k_3k_4 \\ &- \frac{8}{45}(k_3+k_4)^2 - \frac{4}{15}(k_2+k_5)(k_1-k_6)\bigg)\end{aligned} \tag{A.45}$$

$\pi^+\pi^-{\pi^0}^2\eta^2$ - Vertex:

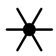
$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{36F_0^4}M_{0\pi}^2\pi^0\pi^+\pi^-\eta^2,$$



$$= -i\frac{M_\pi^2}{18F^4} \tag{A.46}$$

$\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}K^{+2}$ - Vertex:

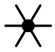
$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^4}\bigg(&- \frac{2M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2}{90} K^- K^+ \pi^{0\,2}\pi^+\pi^- + \frac{1}{90}\pi^{0\,2}\pi^-\pi^+\partial_\mu K^-\partial^\mu K^+ \\
&- \frac{1}{180}K^+\pi^0\pi^-\pi^+\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^0 - \frac{1}{180}K^-\pi^0\pi^+\pi^-\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^0 \\
&+ \frac{17}{180}K^-K^+\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{2}{45}K^+\pi^{0\,2}\pi^+\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^- \\
&+ \frac{7}{180}K^-\pi^{0\,2}\pi^+\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^- - \frac{4}{45}K^-K^+\pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- \\
&+ \frac{7}{180}K^+\pi^{0\,2}\pi^-\partial_\mu K^-\partial^\mu\pi^- - \frac{2}{45}K^-\pi^{0\,2}\pi^-\partial_\mu K^+\partial^\mu\pi^+ \\
&- \frac{4}{45}K^-K^+\pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ + \frac{17}{180}K^-K^+\pi^{0\,2}\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\bigg)
\end{aligned}
\tag{A.47}
$$



$$
\begin{aligned}
= -\frac{i}{90F^4}\bigg(&- 2\big(2M_\pi^2 + M_K^2\big) + 2k_5k_6 + \frac{1}{2}(k_6 - k_5)(k_3 + k_4) \\
&- 17(k_1k_2 + k_3k_4) - 8k_2k_6 - 7k_5k_2 - 8(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) \\
&+ 7k_1k_6 + 8k_1k_5\bigg)
\end{aligned}
\tag{A.48}
$$

$\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}\bar{K}_0^2$ - Vertex:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^4}\bigg(&- \frac{2M_{0\pi}^2 + M_{0K}^2}{90} \bar{K}_0 K_0 \pi^{0\,2}\pi^+\pi^- + \frac{1}{90}\pi^{0\,2}\pi^-\pi^+\partial_\mu \bar{K}_0\partial^\mu K_0 \\
&- \frac{1}{180}K_0\pi^0\pi^-\pi^+\partial_\mu \bar{K}_0\partial^\mu\pi^0 - \frac{1}{180}\bar{K}_0\pi^0\pi^+\pi^-\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^0 \\
&+ \frac{17}{180}\bar{K}_0K_0\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 - \frac{2}{45}K_0\pi^{0\,2}\pi^+\partial_\mu \bar{K}_0\partial^\mu\pi^- \\
&+ \frac{7}{180}\bar{K}_0\pi^{0\,2}\pi^+\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^- - \frac{4}{45}\bar{K}_0K_0\pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- \\
&+ \frac{7}{180}K_0\pi^{0\,2}\pi^-\partial_\mu \bar{K}_0\partial^\mu\pi^- - \frac{2}{45}\bar{K}_0\pi^{0\,2}\pi^-\partial_\mu K_0\partial^\mu\pi^+ \\
&- \frac{4}{45}\bar{K}_0K_0\pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ + \frac{17}{180}\bar{K}_0K_0\pi^{0\,2}\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\bigg)
\end{aligned}
\tag{A.49}
$$



$$= -\frac{i}{90F^4}\Big(-2\big(2M_\pi^2 + M_K^2\big) + 2k_5k_6 + \frac{1}{2}(k_6 - k_5)(k_3 + k_4) - 17(k_1k_2 + k_3k_4) - 8k_2k_6 - 7k_5k_2 - 8(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) + 7k_1k_6 + 8k_1k_5\Big) \tag{A.50}$$

A.4 Ein-Loop-Diagramme aus $\mathcal{L}_2$

Wir listen hier die Beiträge aller Ein-Loop-Diagramme auf, die in die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude eingehen. Wir unterteilen sie in zwei Typen: zum einen die, die zwei Vierer-Vertizes enthalten wie die Diagramme in Abbildung (3.2) und zum anderen die, die einen Sechser-Vertizes wie in Abbildung (3.3) dargestellt enthalten. In den Loops werden alle Mesonen betrachtet, die nach Quantenzahlerhaltung möglich sind. Da alle diese Beiträge vierter Ordnung sind, können wir sie durch die physikalischen Massen ausdrücken, indem wir die in $\mathcal{L}_2$ auftretenden Massenparameter durch die physikalischen Massen ersetzen.

A.4.1 Ein-Loop-Diagramme mit zwei Vierer-Vertizes

s-Kanal π^0 - Loop:

$$i\mathcal{M} = -\frac{1}{6F^4}\Big(M_\pi F_{M_\pi} + 3M_\pi(M_\pi - s)J_\pi(s)\Big) \tag{A.51}$$

s-Kanal π^+ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{18F^4}\Big(2(3M_\pi - 5s)F_{M_\pi} - 9s(M_\pi - s)J_\pi(s)\Big) \tag{A.52}$$

u-Kanal $\pi^+\pi^0$ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{9F^4}\Big(-\frac{3M_\pi^4}{4\pi^2} + \frac{3M_\pi^2 t}{8\pi^2} + \frac{5M_\pi^2 u}{16\pi^2} - \frac{tu}{16\pi^2} - \frac{u^2}{32\pi^2} + (3t - u)F_{M_\pi}$$

$$+ \Big(- 3M_\pi^4 - 3uM_\pi^2 + 6tM_\pi^2 - \tfrac{3}{2}tu + \tfrac{3}{2}u^2 \Big) J_\pi(u) \Bigg) \tag{A.53}$$

<u>s-Kanal K^+ - Loop:</u>

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\bigg(- \frac{5s}{72}F_{M_K} + \frac{s^2}{16}J_{\mathrm{K}}(s)\bigg) \tag{A.54}$$

<u>s-Kanal K^0 - Loop:</u>

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\bigg(- \frac{5s}{72}F_{M_K} + \frac{s^2}{16}J_{\mathrm{K}}(s)\bigg) \tag{A.55}$$

<u>s-Kanal η - Loop:</u>

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\bigg(\frac{M_\eta^4}{18}J_\eta(s)\bigg) \tag{A.56}$$

<u>u-Kanal K^0K^+ - Loop:</u>

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\bigg(& - \frac{M_\pi^2 M_K^2}{24\pi^2} + \frac{M_K^2 t}{48\pi^2} + \frac{M_\pi^2 u}{144\pi^2} + \frac{M_K^2 u}{96\pi^2} - \frac{tu}{288\pi^2} - \frac{u^2}{576\pi^2} \\ & + \bigg(- \frac{2M_\pi^2 M_K^2}{3} + \frac{M_K^2 t}{3} + \frac{M_\pi^2 u}{6} + \frac{M_K^2 u}{6} - \frac{tu}{12} - \frac{u^2}{24}\bigg) J_{\mathrm{K}}(u) \\ & + \bigg(- \frac{M_\pi^2}{3} + \frac{t}{6} + \frac{u}{12}\bigg) F_{M_K}\bigg) \end{aligned} \tag{A.57}$$

Die entsprechenden t-Kanal-Beiträge erhält man durch Vertauschung von u und t in den u-Kanal-Beiträgen.

A.4.2 Ein-Loop-Diagramme mit einem Sechser-Vertex

π^0 - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\left(-\frac{13M_\pi^2}{30} + \frac{2s}{5} - \frac{2t}{45} - \frac{2u}{45}\right) F_{M_\pi} \tag{A.58}$$

π^+ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\left(\frac{14M_\pi^2}{45} + \frac{14s}{45} - \frac{16t}{45} - \frac{16u}{45}\right) F_{M_\pi} \tag{A.59}$$

K^+ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\left(\frac{2M_\pi^2}{45} + \frac{11s}{60} - \frac{17t}{180} - \frac{17u}{180}\right) F_{M_K} \tag{A.60}$$

K^0 - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\left(\frac{2M_\pi^2}{45} + \frac{11s}{60} - \frac{17t}{180} - \frac{17u}{180}\right) F_{M_K} \tag{A.61}$$

η - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\frac{M_\pi^2}{18} F_{M_\eta} \tag{A.62}$$

A.5 Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_4$

Wir werden hier nicht die ganze Lagrangedichte $\mathcal{L}_4$ bis zur vierten Ordnung in allen Mesonen angeben, sondern nur die Terme die für die Renormierung der Felder, Massen und Zerfallskonstante und für den $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Treelevel-Beitrag nötig sind.

$\mathcal{O}(\phi^2)$-Term von $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_4^{\phi^2} = \frac{1}{F_0^2}\Big(4L_4\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\rangle\langle\mathcal{M}^2\rangle + 4L_5\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\,\mathcal{M}^2\rangle - 8L_6\langle\mathcal{M}^2\rangle\langle\phi^2\mathcal{M}^2\rangle \\ - 8L_7\langle\phi\mathcal{M}^2\rangle^2 - 4L_8\langle\mathcal{M}^2\phi^2\rangle - 4L_8\langle\mathcal{M}^2\,\phi\mathcal{M}^2\phi\rangle\Big) \tag{A.63}$$

$\mathcal{O}(\pi^2)$-Term von $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_4^{\pi^2} = \frac{1}{F_0^2}\Big((8L_4M_{0K}^2 + 4L_4M_{0\pi}^2 + 4L_5M_{0\pi}^2)(\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + 2\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^-) \\ - (16L_6M_{0K}^2M_{0\pi}^2 + 8L_6M_{0\pi}^4 + 8L_8M_{0\pi}^4)(\pi^{0\,2} + 2\pi^+\pi^-)\Big) \tag{A.64}$$

$\mathcal{O}(\phi^4)$-Term von $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_4^{\phi^4} = \frac{1}{F_0^2}\Big(\tfrac{4}{3}L_6\langle\mathcal{M}^2\rangle\langle\phi^4\mathcal{M}^2\rangle + 4L_6\langle\phi^2\mathcal{M}^2\rangle^2 + \tfrac{16}{3}L_7\langle\phi\mathcal{M}^2\rangle\langle\phi^3\mathcal{M}^2\rangle \\ + \tfrac{2}{3}L_8\langle\mathcal{M}^{2^2}\phi^4\rangle + \tfrac{8}{3}L_8\langle\mathcal{M}^2\phi^3\mathcal{M}^2\phi\rangle + 2L_8\langle\mathcal{M}^2\phi^2\mathcal{M}^2\phi^2\rangle \\ + \tfrac{4}{3}L_4\langle\partial_\mu\phi\,\phi\,\partial^\mu\phi\,\phi\rangle\langle\mathcal{M}^2\rangle - \tfrac{4}{3}L_4\langle\partial_\mu\phi\,\phi^2\,\partial^\mu\phi\rangle\langle\mathcal{M}^2\rangle \\ - 4L_4\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\rangle\langle\phi^2\mathcal{M}^2\rangle - \tfrac{4}{3}L_5\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\,\phi^2\mathcal{M}^2\rangle \\ + \tfrac{2}{3}L_5\langle\partial_\mu\phi\,\phi\,\partial^\mu\phi\,\phi\mathcal{M}^2\rangle - \tfrac{2}{3}L_5\langle\partial_\mu\phi\,\phi^2\,\partial^\mu\phi\mathcal{M}^2\rangle \\ - 2L_5\langle\phi\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\,\phi\mathcal{M}^2\rangle + \tfrac{2}{3}L_5\langle\phi\,\partial_\mu\phi\,\phi\,\partial^\mu\phi\mathcal{M}^2\rangle \\ - \tfrac{4}{3}L_5\langle\phi^2\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\mathcal{M}^2\rangle + 4L_1\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\rangle^2 \\ + 4L_2\langle\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi\rangle\langle\partial^\mu\phi\,\partial^\nu\phi\rangle + 4L_3\langle\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi\,\partial_\nu\phi\,\partial^\nu\phi\rangle\Big) \tag{A.65}$$

$\mathcal{O}(\pi^{0\,2}\pi^+\pi^-)$-Term von $\mathcal{L}_4$:

$$\mathcal{L}_4^{\pi^{0\,2}\pi^+\pi^-} = \frac{1}{F_0^2}\Big[\Big(\tfrac{16}{3}L_6M_{0K}^2M_{0\pi}^2 + \tfrac{56}{3}L_6M_{0\pi}^4 + \tfrac{32}{3}L_8M_{0\pi}^4\Big)\pi^{0\,2}\pi^+\pi^- \\ - \Big(\tfrac{16}{3}L_4M_{0K}^2 + \tfrac{32}{3}L_4M_{0\pi}^2 + \tfrac{20}{3}L_5M_{0\pi}^2\Big) \\ \times\Big(\pi^{0\,2}\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^- + \pi^+\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big(\tfrac{16}{3}L_4M_{0K}^2+\tfrac{8}{3}L_4M_{0\pi}^2+\tfrac{8}{3}L_5M_{0\pi}^2\Big)\\
&\quad\times\Big(\pi^0\pi^+\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^0+\pi^0\pi^-\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^0\Big)\\
&+\big(16L_1+8L_3\big)\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^-\partial_\nu\pi^0\partial^\nu\pi^0\\
&+16L_2\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+\partial_\nu\pi^0\partial^\nu\pi^-\Big]
\end{aligned}
\tag{A.66}
$$

A.5.1 Treelevel-Beitrag zur $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude

$$
\begin{aligned}
= \frac{8i}{3F^4}\Big(&4L_6M_K^2M_\pi^2+14L_6M_\pi^4\\
&+(4L_4M_K^2+8L_4M\pi^2+5L_5M\pi^2)(k_1k_2+k_3k_4)\\
&+6(2L_1+L_3)(k_1k_2)(k_3k_4)+6L_2((k_1k_3)(k_2k_4)+(k_1k_4)(k_2k_3))\\
&+(2L_4M_K^2+L_4M\pi^2+L_5M_\pi^2)(k_1+k_2)^2\Big)
\end{aligned}
\tag{A.67}
$$

A.6 Amplitude in vierter Ordnung in $SU(3)$

Die von uns, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, berechnete Amplitude für $T=0$ in $SU(3)$, welche mit [11] übereinstimmt:

$$
\begin{aligned}
A(s,t,u)=&\frac{s-M_\pi^2}{F^2}-\frac{\mu_\pi}{3F^2M_\pi^2}\left\{4s^2-4tu-4sM_\pi^2+9M_\pi^4\right\}\\
&-\frac{\mu_K}{6F^2M_K^2}\left\{s^2-tu+2sM_\pi^2\right\}-\frac{\mu_\eta M_\pi^4}{9F^2M_\eta^2}\\
&+\frac{4}{F^4}\left\{(2L_1^r+L_3)(s-2M_\pi^2)^2+L_2^r[(t-2M_\pi^2)^2+(u-2M_\pi^2)^2]\right\}\\
&+\frac{8M_\pi^2}{F^4}\left\{(2L_4^r+L_5^r)s+2(2L_6^r+L_8^r-2L_4^r-L_5^r)M_\pi^2\right\}\\
&+\frac{1}{576\pi^2F^4}\left\{30(M_\pi^2-s)s+21tu-56M_\pi^4\right\}\\
&+\frac{1}{2F^4}\left\{\frac{s^2\bar{J}_K(s)}{4}+\frac{M_\pi^4\bar{J}_\eta(s)}{9}+(s^2-M_\pi^4)\bar{J}_\pi(s)\right\}\\
&+\frac{1}{6F^4}\Bigg\{\frac{(t-4M_K^2)(2s+t-4M_\pi^2)\bar{J}_K(t)}{4}\\
&+\left[t(t-u)-2M_\pi^2(t-2u+M_\pi^2)\right]\bar{J}_\pi(t)+[t\leftrightarrow u]\Bigg\}\quad .
\end{aligned}
\tag{A.68}
$$

A.7 Amplitude in vierter Ordnung in $SU(2)$

Die Amplitude für $T = 0$ in $SU(2)$ aus [8]:

$$\begin{aligned}A(s,t,u) =& \frac{s - M_\pi^2}{F^2} + \frac{1}{\pi^2 F^4}\left\{\frac{1}{8}M_\pi^2 s(\bar{l}_4 - 1) + M_\pi^4\left(\frac{\bar{l}_4}{8} - \frac{\bar{l}_3}{32} + \frac{15}{96}\right)\right. \\ & \left. + \frac{1}{96}\left[(2\left(\bar{l}_1 - \frac{4}{3}\right)(s - 2M_\pi^2)^2 + \left(\bar{l}_2 - \frac{5}{6}\right)(s^2 + (t-u)^2)\right]\right\} \\ & + \frac{1}{6F^4}\left[3(s^2 - M_\pi^2)J_\pi(s) + (t(t-u) - 2M_\pi^2 t + 4M_\pi^2 u - 2M_\pi^4)J_\pi(t)\right. \\ & \left. + u(u-t) - 2M_\pi^2 u + 4M_\pi^2 t - 2M_\pi^4)J_\pi(u)\right] \quad . \qquad \text{(A.69)}\end{aligned}$$

A.8 Beziehung zwischen den L_i^{r} und den $\bar{l}_i$

Beziehung zwischen den chiralen Parametern L_i^{r} aus dem $SU(3)$-Fall und den $\bar{l}_i$ aus dem $SU(2)$-Fall [8, 9]:

$$\begin{aligned}l_1^{\mathrm{r}} &= 4L_1^{\mathrm{r}} + 2L_3^{\mathrm{r}} - \frac{1}{24}\nu_K \\ l_2^{\mathrm{r}} &= 4L_2^{\mathrm{r}} - \frac{1}{12}\nu_K \\ l_3^{\mathrm{r}} &= -8L_4^{\mathrm{r}} - 4L_5^{\mathrm{r}} + 16L_6^{\mathrm{r}} + 8L_8^{\mathrm{r}} - \frac{1}{18}\nu_\eta \\ l_4^{\mathrm{r}} &= 8L_4^{\mathrm{r}} + 4L_5^{\mathrm{r}} - \frac{1}{2}\nu_K \quad , \qquad \text{(A.70)}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\nu_P &= \frac{1}{32\pi^2}\left(\ln\frac{M_P^2}{\mu^2} + 1\right) \\ l_i^{\mathrm{r}} &= \frac{\gamma_i}{32\pi^2}\left(\bar{l}_i + \ln\frac{M^2}{\mu^2}\right) \qquad \text{(A.71)}\end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{3}, \qquad \gamma_2 = \frac{2}{3}, \qquad \gamma_3 = -\frac{1}{2}, \qquad \gamma_4 = 2 \quad , \qquad \text{(A.72)}$$

wobei μ die betrachtete Energieskala ist.

Anhang B

Wichtige Formeln bei $T > 0$

Bei allen Berechnungen die wir für $T > 0$ im Euklidischen machen, benutzten wir die Metrik $(- \; - \; - \; -)$.

B.1 Loop-Integrale bei $T > 0$

Zur vereinfachten Notation schreiben wir:

$$\int_\beta \frac{d^d q}{(2\pi)^d} := \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int \frac{d^{D-1}}{(2\pi)^{D-1}} \quad , \tag{B.1}$$

mit $\beta = 1/T$

Alle in unsere Berechnung vorkommenden Loop-Integrale lassen sich durch die, wie folgt definierten Integrale, ausdrücken, wobei $q_0 = 2\pi n T$ und $Q_0 = 2\pi k T$:

$$F_\beta := \int_\beta \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2 - m^2} \tag{B.2}$$

$$J_k(Q_0, |\mathbf{Q}|; T) := \int_\beta \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_0^k}{(q^2 - m^2)((q-Q)^2 - m^2)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad , \tag{B.3}$$

Wobei J_1 durch J_0 ausgedrückt werden kann:

$$J_1(Q_0, |\mathbf{Q}|; T) = \frac{Q_0}{2} J_0(Q_0, |\mathbf{Q}|; T) \quad . \tag{B.4}$$

Für alle diese Integrale definieren wir

$$\Delta I(T) := I(T) - I(T = 0) \quad . \tag{B.5}$$

Alle $\Delta I(T)$ sind dann endlich, da die Temperaturkorrekturen alle durch den Bolzmann-Faktor

$$n_\beta(E) = \frac{1}{e^{\beta E} - 1} \tag{B.6}$$

unterdrückt werden.

B.1.1 Loop-Integrale für $|\mathbf{Q}| > 0$

Die vorkommenden Loop-Integrale lassen sich wie folgt durch die oben definierten Integrale ausdrücken [10]:

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = -\frac{Q_i}{|\mathbf{Q}|^2}\left(Q_0J_1 + \frac{1}{2}J_0Q^2\right) \tag{B.7}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu Q^\mu}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = \frac{Q^2}{2}J_0 \tag{B.8}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_0 q_i}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = -\frac{Q_i}{|\mathbf{Q}|^2}\left(Q_0J_2 + \frac{1}{2}J_1Q^2 + \frac{1}{2}Q_0F_\beta\right) \tag{B.9}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i q_j}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = Q_iQ_jI_a + g_{ij}I_b \tag{B.10}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_0 q\cdot q}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = Q_0F_\beta + m^2J_1 \tag{B.11}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i q\cdot q}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = Q_iF_\beta - m^2\frac{Q_i}{|\mathbf{Q}|^2}\left(Q_0J_1 + \frac{1}{2}Q^2J_0\right) \tag{B.12}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{(q\cdot q)^2}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = (Q^2+2m^2)F_\beta + m^4J_0 \tag{B.13}$$

mit

$$\begin{aligned} I_a =& \frac{1}{(D-2)|\mathbf{Q}|^4}\Bigg[\left((D-1)Q_0^2 + |\mathbf{Q}|^2\right)J_2 + (D-1)Q_0Q^2J_1 \\ &+ \left(\frac{D-1}{4}Q^4 + m^2|\mathbf{Q}|^2\right)J_0 + \left(\left(\frac{Q^2}{2} + Q_0^2\right)(D-1) + |\mathbf{Q}|^2\right)F_\beta\Bigg] \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$I_b = \frac{1}{(D-2)|\mathbf{Q}|^2}\left[-Q^2J_2 + Q_0Q^2J_1 + \left(\frac{Q^4}{4} + m^2|\mathbf{Q}|^2\right)J_0 - \frac{Q^2}{2}F_\beta\right] \quad . \tag{B.15}$$

B.1.2 Loop-Integrale für $|\mathbf{Q}| = 0$

Im Falle von $|\mathbf{Q}| = 0$ sind einige der oben angegebenen Ergebnisse nicht definiert. Für die, auf die dies zutrifft, erhält man dann die hier angegebenen Relationen.

Aus Symmetriegründen sind folgende Integrale Null:

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = 0 \tag{B.16}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i q_0}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = 0 \tag{B.17}$$

$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i q^2}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = 0 \quad . \tag{B.18}$$

Man erhält außerdem:

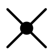
$$\int_\beta \frac{d^dq}{(2\pi)^d} \frac{q_i q_j}{(q^2-m^2)((q-Q)^2-m^2)} = -\frac{1}{3}\left(F_\beta + m^2 J_0 + J_2\right)\delta_{ij} \quad . \tag{B.19}$$

B.1.3 Vierer Vertizes aus $\mathcal{L}_2$

Wir geben hier die Vierer-Vertizes an, die sich aus dem Wechselwirkungsanteil von $\mathcal{L}_2$ ergeben. Wir verwenden die in Abbildung A.1 dargestellte Definition für die Impulse. $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ gibt jeweils den Term der Lagrangedichte an, der den Vertex liefert.

<u>$\pi^{0\,4}$ - Vertex:</u>

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^2}\left(\frac{1}{8}M_{0\pi}^2 \pi^{0\,4} + \frac{1}{2}\pi^{0\,2}\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0\right) \tag{B.20}$$

 $$= i\frac{1}{F^2}\left(-3M_\pi^2 + 2(k_1-k_2)^2 + 2(k_1k_3 + k_2k_4)\right) \tag{B.21}$$

<u>$\pi^{+2}\pi^{-2}$ - Vertex:</u>

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2F_0^2}\big(&-M_{0\pi}^2 \pi^{+2}\pi^{-2} + \pi^{+2}\partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ + 2\pi^-\pi^+\partial_\mu \pi^- \partial^\mu \pi^+ \\ &+ \pi^{-2}\partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^+\big)\end{aligned} \tag{B.22}$$

 $$= \frac{i}{F^2}\big(-2M_\pi^2 + (k_2-k_3)^2 + 2(k_2k_3 + k_1k_4)\big) \tag{B.23}$$

<u>$\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}$ - Vertex:</u>

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2F_0^2}\big(-M_{0\pi}^2 \pi^{0\,2}\pi^+\pi^- + 2\pi^0\pi^+\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^- + 2\pi^0\pi^-\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^+\big) \tag{B.24}$$

 $$= \frac{i}{F^2}\big((k_1+k_2)^2 - M_\pi^2\big) \tag{B.25}$$

B.1.4 Sechser Vertizes aus $\mathcal{L}_2$

Wir geben hier die Sechser-Vertizes an, die sich aus dem Wechselwirkungsanteil von $\mathcal{L}_2$ ergeben. Wir verwenden die in Abbildung A.1 dargestellte Definition für die Impulse. $\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}}$ gibt jeweils den Term der Lagrangedichte an, der den Vertex liefert.

$\pi^+\pi^-\pi^{0\,4}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{F_0^4}\Bigg(\frac{-3M_{0\pi}^2}{8}\pi^{0\,4}\pi^+\pi^- + \pi^{0\,2}\pi^+\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^0 + \pi^{0\,3}\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- + \pi^{0\,3}\pi^-\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+\Bigg) \tag{B.26}$$

$$= \frac{i}{F^4}\Big(-9M_\pi^2 + 4\big((k_3+k_4)(k_5-k_6) + k_5k_6 - k_3k_4\big) + 6(k_1+k_2)^2\Big) \tag{B.27}$$

$\pi^+\pi^-\pi^{0\,2}\pi^{+\,2}$ - Vertex:

$$\mathcal{L}_2^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2F_0^4}\Bigg(-\frac{3}{2}M_{0\pi}^2\pi^{0\,2}\pi^{+\,2}\pi^{-\,2} + 4\pi^0\pi^-\pi^{+\,2}\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^- + \pi^{0\,2}\pi^{+\,2}\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^- + 4\pi^0\pi^{-\,2}\pi^+\partial_\mu\pi^0\partial^\mu\pi^+ + 2\pi^{0\,2}\pi^-\pi^+\partial_\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ + \pi^{0\,2}\pi^{-\,2}\partial_\mu\pi^+\partial^\mu\pi^+\Bigg) \tag{B.28}$$

$$= \frac{i}{F^4}\Big(-6M_\pi^2 + 4(k_3+k_4)^2 + 2(k_1+k_5)(k_6-k_2) + 4k_2k_6 - 4k_1k_5\Big) \tag{B.29}$$

B.2 Ein-Loop-Diagramme aus $\mathcal{L}_2$

Wir listen hier die Beiträge aller Ein-Loop-Diagramme auf, die in die $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude eingehen. Wir unterteilen sie in zwei Typen, zum einen die, die zwei Vierer-Vertizes enthalten wie die Diagramme in Abbildung (3.2) und zum anderen die, die einen Sechser-Vertizes, wie in Abbildung (3.3) dargestellt, enthalten. In den Loops werden alle Mesonen betrachtet, die nach Quantenzahlerhaltung möglich sind. Da alle diese Beiträge vierter Ordnung sind, können wir sie durch die physikalischen Massen ausdrücken, indem wir die in $\mathcal{L}_2$ auftretenden

Massenparameter durch die physikalischen Massen ersetzen.
In B.1 haben wir gesehen, dass einige Loop-Integrale für den Fall $|\mathbf{Q}| = 0$ weiter vereinfacht werden können. Daher sind hier die Beiträge der Loop-Diagramme, für die das relevant ist, zusätzlich für den Fall $|\mathbf{S}| = 0$ bzw. $|\mathbf{T}| = 0$ angegeben.

B.2.1 Ein-Loop-Diagramme mit zwei Vierer-Vertizes

s-Kanal π^0 - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{s - M_\pi^2}{2F^4}\Big(\big(M_\pi^2 + 2k_4S - s\big)J_0(S) + 2F_\beta\Big) \tag{B.30}$$

s-Kanal π^+ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{s - M_\pi^2}{F^4}\left(\left(2k_1S - \frac{\mathbf{k_1S}}{|\mathbf{S}|^2}s\right)J_0(S) - 2\left(k_1^0 - \frac{\mathbf{k_1S}}{|\mathbf{S}|^2}S_0\right)J_1(S) + F_\beta\right) \tag{B.31}$$

$$i\mathcal{M}_{|\mathbf{S}|=0} = \frac{s - M_\pi^2}{F^4}\Big(2k_1SJ_0(S) - 2k_1^0J_1(S) + F_\beta\Big) \tag{B.32}$$

t-Kanal $\pi^0\pi^-$ - Loop:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M} =& \frac{1}{F^4}\Bigg\{ -4k_1^0k_2^0J_2 - 4(k_1^0\mathbf{k_2} + k_2^0\mathbf{k_1})\frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|^2}\left(\frac{1}{2}T_0F_\beta - T_0J_2 + \frac{1}{2}tJ_1\right) \\
&- 2\frac{(\mathbf{k_1T})(\mathbf{k_2T})}{|\mathbf{T}|^4}\Bigg[\left(-3T_0^2 + \frac{3t}{2} + |\mathbf{T}|^2\right)F_\beta + \left(\frac{3}{4}t^2 + M_\pi^2|\mathbf{T}|^2\right)J_0 \\
&\qquad - 3T_0tJ_1 + (-|\mathbf{T}|^2 + 3T_0^2)J_2\Bigg] \\
&+ 2\frac{\mathbf{k_1k_2}}{|\mathbf{T}|^2}\left(-\frac{t}{2}F_\beta + \left(\frac{t^2}{4} + M_\pi^2|\mathbf{T}|^2\right)J_0 - T_0tJ_1 + tJ_2\right) \\
&+ 2(\mathbf{k_1} - \mathbf{k_2})\mathbf{T}\left[F_\beta - \frac{M_\pi^2}{|\mathbf{T}|^2}\left(-T_0J_1 + \frac{1}{2}tJ_0\right)\right] \\
&- 2(k_1^0 - k_2^0)(T_0F_\beta + M_\pi^2J_1) + (2M_\pi^2 + t)F_\beta + M_\pi^4J_0\Bigg\}
\end{aligned} \tag{B.33}$$

$$i\mathcal{M}_{|\mathbf{T}|=0} = \frac{1}{F^4}\left[\frac{4}{3}\mathbf{k_1 k_2}(F_\beta + M_\pi^2 J_0 - J_2) - 2(k_1^0 - k_2^0)(T_0 F_\beta + M_\pi^2 J_1) \right.$$
$$\left. - 4k_1^0 k_2^0 J_2 + (2M_\pi^2 + t)F_\beta + M_\pi^4 J_0\right] \quad . \qquad \text{(B.34)}$$

mit $J_i = J_i(T)$. Den u-Kanal-Beitrag erhält man durch Vertauschung von T und U.

B.2.2 Ein-Loop-Diagramme mit einem Sechser-Vertex

π^0 - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{2F^4}\left(M_\pi^2 - 4s^2\right)F_\beta \qquad \text{(B.35)}$$

π^+ - Loop:

$$i\mathcal{M} = \frac{1}{F^4}\left(2M_\pi^2 - 3s^2\right)F_\beta \qquad \text{(B.36)}$$

B.3 Temperaturkorrektur der Streuamplitude in $SU(2)$

Wir geben hier die Temperaturkorrekturen zur $\pi^+\pi^- \to \pi^0\pi^0$-Streuamplitude in $SU(2)$ an, die, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, berechnet wurde.

B.3.1 Die allgemeinste Kinematik

Im allgemeinsten Fall erhalten wir in Übereinstimmung mit [10]:

$$\Delta A_4(S,T,U;\beta) =$$
$$\frac{1}{F^4}\left\{(s - M_\pi^2)\left[- 2k_1^0 \Delta J_1(S) + \frac{\Delta J_0(S)}{2}(M_\pi^2 + 3s - 2k_3 S) \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\mathbf{k_1 S}(s\Delta J_0(S) - 2S_0 \Delta J_1(S))}{|\mathbf{S}|^2}\right]$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg[&- \frac{M_\pi^2}{|\mathbf{T}|^2}\Big[(\mathbf{k_1}-\mathbf{k_2})\mathbf{T}[t\Delta J_0(T) - 2T_0\Delta J_1(T)]\Big] \\
&+ M_\pi^4 \Delta J_0(T) - 2(k_1^0 - k_2^0)M_\pi^2\Delta J_1(T) - 4k_1^0k_2^0\Delta J_2(T) \\
&- \frac{2}{|\mathbf{T}|^2}\Big(k_1^0\mathbf{k_2} + k_2^0\mathbf{k_1}\Big)\mathbf{T}[t\Delta J_1(T) - 2T_0\Delta J_2(T)] \\
&- \frac{2(\mathbf{k_1T})(\mathbf{k_2T})}{|\mathbf{T}|^4}\Bigg[\big(3T_0^2 - |\mathbf{T}|^2\big)\Delta J_2(T) - 3T_0t\Delta J_1(T) \\
&\qquad + \left(\frac{3t^2}{4} + M_\pi^2|\mathbf{T}|^2\right)\Delta J_0(T)\Bigg] \\
&+ 2\frac{\mathbf{k_1k_2}}{|\mathbf{T}|^2}\left[\left(\frac{t^2}{4} + M_\pi^2|\mathbf{T}|^2\right)J_0(T) - T_0tJ_1(T) + tJ_2(T)\right] + (T \leftrightarrow U)\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{B.37}
$$

B.3.2 Das ruhende ρ-Meson

Wir geben hier die bereits gemäß Gl. (5.3) auf Isospin $I = 1$ projizierte Amplitude für das ruhende ρ-Meson an:

$$
\begin{aligned}
\Delta T_4^{I=1} &= \\
\frac{1}{F_\pi^4}\Bigg\{ &- \frac{1}{6}(u-t)\left(s - 4M_\pi^2\right)\Delta J_0(S) + \frac{13}{12}(u-t)\Delta F_\beta \\
&+ s(\Delta J_2(U) - \Delta J_2(T)) \\
&+ \frac{1}{2}\left[u\Delta J_2(U) - \left(\frac{u^2}{4} + 3M_\pi^2 u - 3M_\pi^4\right)\Delta J_0(U)\right] \\
&- \frac{1}{2}\left[t\Delta J_2(T) - \left(\frac{t^2}{4} + 3M_\pi^2 t - 3M_\pi^4\right)\Delta J_0(T)\right] \\
&+ \frac{t-u}{2u}\left[u\Delta J_2(U) + \left(\frac{u^2}{4} - M_\pi^2 u\right)\Delta J_0(U)\right] \\
&- \frac{u-t}{2t}\left[t\Delta J_2(T) + \left(\frac{t^2}{4} - M_\pi^2 t\right)\Delta J_0(T)\right]\Bigg\} \quad .
\end{aligned}
\tag{B.38}
$$

B.3.3 Das sich bewegende ρ-Meson

Wir geben hier die bereits gemäß Gl. (5.3) auf Isospin $I = 1$ projizierte Amplitude des sich bewegenden ρ-Mesons an. Die Kinematik ist in Abschnitt 5.4 beschrieben.

$$
\Delta T_4^{I=1} =
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{32F_\pi^4}\Bigg\{ & 8(s-4M_\pi^2)\left(\frac{2s}{K_\rho^2}-3\right)x\Delta F_\beta \\
& + \frac{8}{K_\rho^2}(4M_\pi^2-s)(4K_\rho^2M_\pi^2+s^2)x\Delta J_0(S) \\
& + \frac{32}{K_\rho^2}(s-4M_\pi^2)x\Big[s\sqrt{K_\rho^2+s}\Delta J_1(S)-s\Delta J_2(S)\Big] \\
& + \Big[16M_\pi^4(4-6x+3x^2)-8M_\pi^2 s(4-5x+3x^2) \\
& \quad + s^2(1-4x+3x^2)+2K_\rho^2(s(1-x)+4M_\pi^2(1+x))\Big]\Delta J_0(T) \\
& - \Big[16M_\pi^4(4+6x+3x^2)-8M_\pi^2 s(4+5x+3x^2) \\
& \quad + s^2(1+4x+3x^2)+2K_\rho^2(s(1+x)+4M_\pi^2(1-x))\Big]\Delta J_0(U) \\
& - 8\big[6K_\rho^2-s(x-3)+4M_\pi^2(1+x)\big]\Delta J_2(T) \\
& + 8\big[6K_\rho^2+s(x+3)+4M_\pi^2(1-x)\big]\Delta J_2(U)\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{B.39}
$$

mit $x = \cos\theta$ wobei θ der durch $\cos\theta = \frac{\mathbf{k_1 k_3}}{|\mathbf{k_1}||\mathbf{k_3}|}$ gegebene Streuwinkel ist.

Anhang C

Numerik

In diesem Teil des Anhangs wollen wir nun noch die Probleme, die beim Berechnen der Loop-Integrale aus Anhang B.1 aufgetaucht sind, diskutieren. Dazu werden wir zunächst angeben, wie sich diese vierdimensionalen Integrale[1] auf eindimensionale reduzieren lassen. Danach zeigen wir, wie man die Probleme, die durch die Pole dieser Funktionen bei der numerischen Auswertung entstehen, beheben kann.
Wir betrachten hier die Integrale F_β, J_0 und J_2 aus Gl. (B.2) und (B.3). J_1 lässt sich mit Hilfe von Gl. (B.4) durch J_0 ausdrücken und wir daher hier nicht angegeben.

C.1 Berechnung der Matsubara-Summen

Die Matsubara-Summen berechnen wir mit Hilfe des folgenden Theorems aus der Funktionentheorie:
Ist $f(z)$ analytisch bis auf endlich viel isolierte Singularitäten z_i, von denen keine eine ganze Zahl ist und $f(z)$ schneller als $1/z$ fällt für $|z| \to \infty$ so ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum_{z_i} \mathrm{Res}_g\ (z_i) \quad , \tag{C.1}$$

wobei

$$g(z) = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} f(z). \tag{C.2}$$

Nach Auswertung der Matsubara-Summen erhalten wir für die betrachteten Integrale in Übereinstimmung mit [1]:

[1]Hier wurde die Matsubara-Summe auch als eine Integration gezählt.

$$F_\beta = -\frac{1}{2}\int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1+2n_\beta(E_k)}{E_k} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned} J_0(Q_0,|\mathbf{Q}|;T) = & \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1+2n_\beta(E_k)}{4E_k E_{k-Q}} \Bigg(\frac{1}{iQ_0+E_k+E_{k-Q}} \\ & - \frac{1}{iQ_0-E_k-E_{k-Q}} - \frac{1}{iQ_0+E_k-E_{k-Q}} + \frac{1}{iQ_0-E_k+E_{k-Q}} \Bigg) \end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned} J_2(Q_0,|\mathbf{Q}|;T) = & \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1+2n_\beta(E_k)}{8E_k E_{k-Q}} \\ & \times \Bigg[\frac{2E_k^2+2iE_kQ_0+Q_0^2}{iQ_0+E_k-E_{k-Q}} - \frac{2E_k^2+2iE_kQ_0-Q_0^2}{iQ_0+E_k+E_{k-Q}} \\ & - \frac{2E_k^2-2iE_kQ_0+Q_0^2}{iQ_0-E_k+E_{k-Q}} + \frac{2E_k^2-2iE_kQ_0+Q_0^2}{iQ_0-E_k-E_{k-Q}} \Bigg] \quad , \end{aligned} \tag{C.5}$$

mit folgenden Abkürzungen:

$$n_\beta(E) = \frac{1}{e^{\beta E}-1} \tag{C.6}$$

$$E_k = \sqrt{k^2+M_\pi^2}, \qquad E_k = \sqrt{k^2+|\mathbf{Q}|^2-2\mathbf{Qk}+M_\pi^2} \quad . \tag{C.7}$$

C.2 Der Realteil

In allen Integralen aus Anhang C.1 hat der Integrand einen Faktor $1+2n_\beta(E_k)$. Hierbei liefert der Term, der zu 1 gehört, einen unendlicher Beitrag, der dem für $T=0$ entspricht. Um die Temperaturkorrektur ΔF_β bzw. ΔJ_i zu berechnen, benötigen wir nur den Teil, proportional zu $2n_\beta(E_k)$. Dieser ist aufgrund von $n_\beta(E_k)$ endlich. Somit können wir in ganzzahligen Dimensionen rechnen und $d=3$ setzten.

Für ΔF_β erhalten wir, wenn wir das Integral in Kugelkoordinaten schreiben:

$$\Delta F_\beta = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 \frac{n_\beta(E_k)}{E_k} \quad . \tag{C.8}$$

dieses Integral lässt sich nun problemlos numerisch berechnen.

Schreiben wir die Integration für J_0 und J_2 ebenfalls in Kugelkoordinaten, so können wir die Winkelintegration analytisch ausführen. Gehen wir nun vom euklidischen Raum über in den Minkowski-Raum indem wir $\omega = iQ_0$ setzten [10], so erhalten wir im Falle $|\mathbf{Q}| = 0$:

$$J_0(-i\omega, 0; T) = -\frac{1}{\pi^2}\int_{M_\pi}^{\infty} dE\ \frac{\sqrt{E^2 - M_\pi^2} n_\beta(E)}{w^2 - 4E^2} \tag{C.9}$$

$$J_2(-i\omega, 0; T) = \frac{\omega^2}{4} J_0(-i\omega, 0; T) + \frac{F_\beta}{2} \tag{C.10}$$

in Übereinstimmung mit [10]. Im allgemeineren Fall $|\mathbf{Q}| > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} J_0(-i\omega,&|\mathbf{Q}|; T) = \\ &\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dk\, \frac{k n_\beta(E_k)}{E_k|\mathbf{Q}|}\left[\ln\left(\frac{2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 - 2\omega E_k}{-2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 - 2\omega E_k}\right)^2\right. \\ &\left. + \ln\left(\frac{2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 + 2\omega E_k}{-2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 + 2\omega E_k}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned} &J_2(-i\omega, |\mathbf{Q}|; T) = \\ &\frac{1}{16\pi^2}\int_0^\infty dk\, \frac{k n_\beta(E_k)}{E_k|\mathbf{Q}|}\left[\left(2 + 2\frac{\omega}{E_k} + \frac{\omega^2}{E_k^2}\right)\ln\left(\frac{2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 - 2\omega E_k}{-2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 - 2\omega E_k}\right)^2\right. \\ &\left. + \left(2 - 2\frac{\omega}{E_k} + \frac{\omega^2}{E_k^2}\right)\ln\left(\frac{2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 + 2\omega E_k}{-2k|\mathbf{Q}| + |\mathbf{Q}|^2 - \omega^2 + 2\omega E_k}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{C.12}$$

Diese stimmen für $\omega = 0$ mit den in [10] gegebenen überein.
Aufgrund der Nullstellen k_{0i} der Zähler und Nenner in den Logarithmen, welche zu Polen führen, kommt es zu Problemen bei der numerischen Berechnung der Integrale. Diese lassen sich aber beheben, indem man die Pole durch Addition von Termen der Form $\pm\ln(k - k_{0i})^2$ beseitigt. Bei Nullstellen des Zähler ist das Vorzeichen negativ, bei denen des Nenner positiv zu wählen. Die so erhaltene Funktion kann dann problemlos integriert werden, da sie keine Pole mehr hat. Der addierte Term der Form $\pm\ln(k-k_{0i})^2$ kann analytisch integriert werden. Wir geben hier alle k_{0i} zusammen mit den A_i an, für die dann gilt:

$$Z(k_{0i}) = 0 \quad \text{und} \quad \ln Z(k) - \ln(k - k_{0i})^2 = A_i \quad \text{für } k \to k_{0i} \tag{C.13}$$

bzw.

$$N(k_{0i}) = 0 \quad \text{und} \quad \ln N(k) + \ln(k - k_{0i})^2 = A_i \quad \text{für } k \to k_{0i} \tag{C.14}$$

wobei Z und N die Zähler bzw. Nenner der Brüche in den Logarithmen sind. Die A_i sind wichtig um die Integranden bei $k = k_{0i}$ auszuwerten.
Es zeigt sich, dass die Nullstellen k_{0i} der Polynome unabhängig von dem Vorzeichen von $2\omega E_k$ sind. Wir brauchen somit nicht zwischen den beiden Logarithmen zu unterscheiden. Es ist nötig die beiden Fälle

$$|\mathbf{Q}| < \frac{1}{2M_\pi}\sqrt{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2 - 4M_\pi^2}\sqrt{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2} \tag{C.15}$$

und

$$|\mathbf{Q}| > \frac{1}{2M_\pi}\sqrt{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2 - 4M_\pi^2}\sqrt{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2} \tag{C.16}$$

zu unterscheiden.
Im ersten Fall gibt es eine Nullstelle des Zählers bei

$$k_{01} = \frac{-|\mathbf{Q}| + H}{2M_\pi} \qquad \text{mit} \qquad A_1 = \frac{2\omega(H - |\mathbf{Q}|)}{\sqrt{4M_\pi^2 + (H - |\mathbf{Q}|)^2}} + 2|\mathbf{Q}| \tag{C.17}$$

und eine des Nenners bei

$$k_{02} = \frac{|\mathbf{Q}| + H}{2M_\pi} \qquad \text{mit} \qquad A_2 = \frac{2\omega(H + |\mathbf{Q}|)}{\sqrt{4M_\pi^2 + (H - |\mathbf{Q}|)^2}} - 2|\mathbf{Q}| \quad , \tag{C.18}$$

wobei

$$H = \omega\sqrt{\frac{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2 - 4M_\pi^2}{\omega^2 - |\mathbf{Q}|^2}} \quad . \tag{C.19}$$

Im zweiten Fall gibt es die gleiche Nullstelle des Nenners mit gleichem A_i und eine weitere bei

$$k_{03} = \frac{|\mathbf{Q}| - H}{2M_\pi} \qquad \text{mit} \qquad A_3 = \frac{2\omega(H - |\mathbf{Q}|)}{\sqrt{4M_\pi^2 + (H - |\mathbf{Q}|)^2}} - 2|\mathbf{Q}| \quad . \tag{C.20}$$

Damit ist die numerische Integration problemlos durchführbar.
Wir weisen darauf hin, dass diese Betrachtung nur für physikalisch sinnvolle Werte von ω, d. h., $\omega^2 > |\mathbf{Q}|^2 + 4M_\pi^2$, durchgeführt wurde.

C.3 Der Imaginärteil

Die Integrale J_0 und J_2 sind nicht reell für $\omega = E + i\varepsilon$. Wir müssen die Integrale aber für ein solches ω Bestimmen, aufgrund der notwendigen Verschiebung des Pols des Propagators von der reellen Achse [10]. Den Imaginärteil von J_0 und J_2 erhalten wir, indem wir die Brüche der Form

$$\frac{1}{E + i\epsilon + s1E_k + s2E_{k-Q}} \quad \text{durch} \quad \pi\delta(E + s1E_k + s2E_{k-Q}) \tag{C.21}$$

ersetzen [10], wobei $s1, s2 = 1, -1$. Wir müssen somit Integrale der Form

$$\begin{aligned} &\int \frac{dk^3}{(2\pi)^3}\, f_{s1,s2}(k,x)\delta(E + s1E_k + s2E_{k-Q}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} dx \int_0^\infty dk\, k^2 f_{s1,s2}(k,x)\delta(E + s1E_k + s2E_{k-Q}) \end{aligned} \tag{C.22}$$

berechnen. Hier wurde das Integral in Kugelkoordinaten umgeschrieben und ausgenutzt, dass E_k, E_{k-Q} und in unserem Fall $f_{s1,s2}(k,x)$ axialsymmetrisch sind. Wegen der δ-Funktion können wir nun die k-Integration ausführen und erhalten:

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} dx \sum_i F^i_{s1,s2}(x) \tag{C.23}$$

mit

$$F^i_{s1,s2}(x) = f_{s1,s2}(k_i^0(x),x)\frac{1}{|s1(E'_k)_{k=k_i^0(x)} + s2(E'_{k-Q})_{k=k_i^0(x)}|} \quad , \tag{C.24}$$

wobei $k_i^0(x)$ die positiven Nullstellen von $E + s1E_k + s2E_{k-Q}$ sind, welche von x abhängen. Als Nullstellen kommen nur folgende zwei in Frage:

$$k^0_\pm(x) = \frac{(Q^2 - E^2)Qx \pm E\sqrt{4M_\pi^2Q^2x^2 - 2Q^2E^2 + Q^4 - 4M_\pi^2E^2 + E^4}}{2(Q^2x^2 - E^2)} \quad . \tag{C.25}$$

Die ist aber nur eine notwendige Bedingung, keine hinreichende. Es kann aber numerisch leicht für jedes x überprüft werden, ob $k^0_\pm(x)$ Nullstellen sind. Diese müssen auch nicht notwendigerweise reell und positiv sein.
Für positive E hat $E + E_k + E_{k-Q}$ keine Nullstellen, somit ist $F^i_{1,1}(x) = 0$. $F^i_{-1,1}(x)$ und $F^i_{1,-1}(x)$ sind stetige Funktionen und lassen sich problemlos numerisch integrieren. $F^i_{-1,-1}(x)$ hat einen Pol bei

$$x_0 = \frac{1}{2M_\pi^2Q}\sqrt{-E^4 - Q^4 + 2E^2(2M_\pi^2 + Q^2)} \quad , \tag{C.26}$$

welcher nicht notwendigerweise im Integrationsintervall $[-1,1]$ liegen muss. Liegen sie im Intervall so ist

$$k^0_\pm(x_0) = \frac{(Q^2-E^2)Qx_0}{2(Q^2x_0-E^2)} \quad . \tag{C.27}$$

Für kleine ε gilt folgende Entwicklung:

$$\frac{1}{s1(E'_k)_{k=k_i^0(x0+\varepsilon)} + s2(E'_{k-Q})_{k=k_i^0(x0+\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(A+B\sqrt{\varepsilon}) \quad , \tag{C.28}$$

mit

$$\begin{aligned}
A =& -\frac{\sqrt{M_\pi Q}(E^2-Q^2)^2(-E^4-Q^4+2E^2(2M_\pi^2+Q^2))^{1/4}}{2E^2M_\pi^2(-E^2+2M_\pi^2+Q^2)} \\
B =& \frac{-1}{2E^3M_\pi^2(-E^2+2M_\pi^2+Q^2)^2)} \\
&\times \Big(Q(-E^2+Q^2)(-E^6+4M_\pi^2Q^4+Q^6E^4(8M_\pi^2+3Q^2) \\
&\quad -E^2(16M_\pi^4+12M_\pi^2Q^2+3Q^4)\Big) \quad .
\end{aligned} \tag{C.29}$$

Für unsere Berechnungen ist $f_{-1,-1}(k,x)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
f_{-1,-1}(k,x) &= \frac{1+2n_\beta(E_k)}{4E_kE_{k-Q}} && \text{im Falle von} \quad J_0 \\
f_{-1,-1}(k,x) &= \frac{1+2n_\beta(E_k)}{8E_kE_{k-Q}}\big(2E_k^2-2iE_kQ_0+Q_0^2\big) && \text{im Falle von} \quad J_2
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Sie lassen sich für kleine ε wie folgt entwickeln:

$$f_{-1,-1}(k^0_\pm(x_0+\varepsilon), x_0+\varepsilon){k^0_\pm}^2(x_0+\varepsilon) = C + D\sqrt{\varepsilon} \quad , \tag{C.31}$$

mit $C = f(k^0_\pm(x_0), x_0){k^0_\pm}^2(x_0)$ und

$$\begin{aligned}
D =& \frac{(-E^4-Q^4+2E^2(2M_\pi^2+Q^2))^{3/4}Q}{8E^3(b-1)^2\sqrt{M_\pi Q}(E^2-Q^2)^2(-E^2+2M_\pi^2+Q^2)^2} \\
&\times \Bigg[(b^2-1)\big(E^8-4E^6Q^2-4E^2Q^4(2M_\pi^2+Q^2)+Q^6(4M_\pi^2+Q^2) \\
&\qquad +2E^4Q^2(2M_\pi^2+3Q^2)\big) \\
&\quad +bM_\pi^2\beta\big(4E^7-(12E^5+4EQ^4)(2M_\pi^2+Q^2) \\
&\qquad +4E^3(8M_\pi^4+8M_\pi^2Q^2+3Q^4)\big)\Bigg]
\end{aligned} \tag{C.32}$$

im Falle von J_0 und

$$\begin{aligned}
D =& \frac{(-E^4 - Q^4 + 2E^2(2M_\pi^2 + Q^2))^{3/4} Q}{16E(b-1)^2\sqrt{M_\pi Q}(E^2-Q^2)^4(-E^2+2M_\pi^2+Q^2)^2} \\
&\times \Bigg[(b^2-1)\Big(E^{12} - 6E^{10}Q^2 + Q^{10}(4M_\pi^2 + Q^2) \\
&\qquad - E^8(32M_\pi^4 - 4M_\pi^2 Q^2 - 15Q^4) \\
&\qquad + 4E^6(32M_\pi^6 + 24M_\pi^4 Q^2 - 4M_\pi^2 Q^4 - 5Q^6) \\
&\qquad - E^4(128M_\pi^8 + 256M_\pi^6 Q^2 + 96M_\pi^4 Q^4 - 24M_\pi^2 Q^6 - 15Q^8) \\
&\qquad + 2E^2Q^2(64M_\pi^8 + 64M_\pi^6 Q^2 + 16M_\pi^4 Q^4 - 8M_\pi^2 Q^6 - 3Q^8)\Big) \\
&\quad + bM_\pi^2\beta\Big(4E^{11} - 20E^9(2M_\pi^2 + Q^2) + 8E^7(20M_\pi^4 + 18M_\pi^2 Q^2 + 5Q^4) \\
&\qquad - 4EQ^4(16M_\pi^6 + 16M_\pi^4 Q^2 + 6M_\pi^2 Q^4 + Q^6) \\
&\qquad - 8E^5(40M_\pi^6 + 48M_\pi^4 Q^2 + 24M_\pi^2 Q^4 + 5Q^6) \\
&\qquad + 4E^3(64M_\pi^8 + 96M_\pi^6 Q^2 + 72M_\pi^4 Q^4 + 28M_\pi^2 Q^6 + 5Q^8)\Big)\Bigg]
\end{aligned} \tag{C.33}$$

im Falle von J_2, wobei

$$b = \exp\left(\frac{2EM_\pi^2\beta}{E^2 - Q^2}\right) \quad . \tag{C.34}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklungen lässt sich der Pol von $F^i_{-1,-1}(x)$ abziehen und man erhält eine stetige Funktion, die sich problemlos numerisch integrieren lässt. Die Entwicklung kann analytisch Integriert werden.
Im Spezialfall $|\mathbf{Q}| = 0$ kann der Imaginärteil analytisch berechnet werden [10]:

$$\mathrm{Im}\, J_i(E, \mathbf{0}; T) = \frac{\mathrm{sgn}(E)}{16\pi}\theta(s - 4M_\pi^2)\sigma_T(E)\left(\frac{E}{2}\right)^i \quad . \tag{C.35}$$

Wir haben unsere numerische Berechnung im Grenzfall $|\mathbf{Q}| \to 0$ mit dieser Formel verifiziert.

Literaturverzeichnis

[1] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory.* Cambridge University Press, 1996. C.1

[2] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry.* Cambridge University Press, 1985. 6

[3] A. Das. *Finite Temperature Field Theorie.* World Scientific, 1997. 4.2.1, 4.2.2

[4] A. Dobado, A. Gomez Nicola, F. J. Llanes-Estrada, and J. R. Pelaez. Thermal rho and sigma mesons from chiral symmetry and unitarity. *Phys. Rev.*, C66:055201, 2002. hep-ph/0206238. 6, 6, 6.1, 6.1, 6.3.1

[5] D. Ebert. *Eichtheorien.* Akademie-Verlag Berlin, 1989. 2.1.1

[6] Felipe J. Llanes Estrada. Private Mitteilung. 4.3

[7] Charles Gale and Joseph Kapusta. Vector dominance model at finite temperature. *Nucl. Phys.*, B357:65–89, 1991. 6.2.1, 7

[8] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory to one loop. *Ann. Phys.*, 158:142, 1984. 2.2.4, 2.2.5, 3.6, A.7, A.8

[9] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nucl. Phys.*, B250:465, 1985. 3.1, 3.6, A.2, A.8

[10] A. Gomez Nicola, F. J. Llanes-Estrada, and J. R. Pelaez. Finite temperature pion scattering to one-loop in chiral perturbation theory. *Phys. Lett.*, B550:55–64, 2002. hep-ph/0203134. 4.3, 5.2, B.1.1, B.3.1, C.2, C.2, C.2, C.3, C.3, C.3

[11] A. Gomez Nicola and J. R. Pelaez. Meson meson scattering within one loop chiral perturbation theory and its unitarization. *Phys. Rev.*, D65:054009, 2002. hep-ph/0109056. 3, 5.1.1, 5.1.2, 5.2, 5.2, 6, A.1, A.1, A.2, A.6

[12] K. Hagiwara et al. Review of particle physics. *Phys. Rev.*, D66:010001, 2002. 2.1, 5.1.1, 6.2

[13] Y. B. He, J. Hufner, S. P. Klevansky, and P. Rehberg. pi pi scattering in the rho meson channel at finite temperature. *Nucl. Phys.*, A630:719–742, 1998. nucl-th/9712051. 6.2.1, 7

[14] F. Klingl, Norbert Kaiser, and W. Weise. Effective lagrangian approach to vector mesons, their structure and decays. *Z. Phys.*, A356:193–206, 1996. hep-ph/9607431. 6.3.1

[15] E. Laermann. Lattice QCD at finite temperature. Prepared for 17th Autumn School: QCD: Perturbative or Nonperturbative? (AUTUMN 99), Lisbon, Portugal, 29 Sep - 4 Oct 1999. 6.1

[16] Stefan Leupold. Rho meson properties from combining QCD-based models. 2003. hep-ph/0303020. 5.2

[17] R. Rapp and J. Wambach. Chiral symmetry restoration and dileptons in relativistic heavy-ion collisions. *Adv. Nucl. Phys.*, 25:1, 2000. hep-ph/9909229. 1

[18] Stefan Scherer. Introduction to chiral perturbation theory. 2002. hep-ph/0210398. 2.1.2, 4, 4, 5, 2.2.1, 2.2.1, 7, 2.2.2, 2.2.3, 8, 8, 2.2.4, 3.1

[19] Wu-Ki Tung. *Group Theory in Physics.* World Scientific, 1985. 2, 2.2.2, 5.4

[20] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books, 1995. 2.1.1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 3.5, 4.1, A.1

[21] Steven Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica*, A96:327, 1979. 2.2.3

Danksagung

An ersten Stelle gilt mein Dank Professor Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in das Institut und die interessante Themenstellung.

Größten Dank bin ich auch Dr. Stefan Leupold schuldig. Er hat alle meine Fragen geduldig beantwortet und war immer da, wenn ich mal nicht weiter kam. Durch die sehr schnelle und gründliche Durchsicht dieses Manuskripts hat er sich zusätzlich verdient gemacht.

Meinen Zimmerkollegen Frank Frömel und Pascal Mühlich danke ich für die angenehme Gesellschaft, auch wenn sie mir nicht bis zu Ende treu blieben.

Frank Frömel danke ich des Weiteren dafür, dass er bei Computerfragen immer zur Stelle war.

Elke Jung war bei der Bewältigung administrativer Probleme unentbehrlich. Dank ihrer hilfsbereiten Art war der 'Papierkram' immer schnell erledigt.

Allen anderen Mitgliedern des Instituts, die hier nicht namentlich erwähnt werden, sei für das für das angenehme Arbeitsklima gedankt.

Schließlich muss ich noch meinem Vater ein herzliches Dankeschön aussprechen. Der Rückhalt, den er mir gegeben hat, ist von unschätzbarem Wert.