

Phänomen der disorientierten
chiralen Kondensate in ultrarelativistischen
Schwerionenkollisionen

Diplomarbeit

vorgelegt von
Xu, Zhe
aus Tian-Jin, V.R.China

Institut für Theoretische Physik
der Justus Liebig Universität Gießen

Gießen 1999

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Phänomen der disorientierten chiralen Kondensate	9
2.1	Die chirale Symmetrie und eine intuitive Vorstellung von DCC-Formation	9
2.2	Das Signal	12
2.3	Das Experiment	14
2.4	Das Modell	15
2.4.1	Das lineare σ -Modell	16
2.4.2	Die Hartree-Approximation	17
2.5	DCC-Szenarien	19
2.5.1	Das „quenched“ Szenario	20
2.5.2	Expansion und Anfangsbedingung	22
2.6	Das Langevin-Szenario	26
3	Die Langevin-Gleichung	29
3.1	Stochastische Prozesse	29
3.1.1	Formulierung und Klassifizierung stochastischer Prozesse	29
3.1.2	Der Gauß'sche Prozeß	31
3.1.3	Fourier-Transformation für stationäre Prozesse	34
3.2	Rauschen	35
3.3	Die Brown'sche Bewegung	43
3.4	Verallgemeinerte Langevin-Gleichung	50
3.5	Die Bewegung eines Oszillators in einer Flüssigkeit	56
4	Die semiklassische Bewegungsgleichung	63
4.1	System in Wechselwirkung mit einem Wärmebad	64
4.1.1	Der Zeitentwicklungsoperator und die Zeitentwicklungsamplitude der Wellenfunktion	64

4.1.2	Dichtematrix	65
4.1.3	Das Influenz-Funktional	67
4.1.4	Perturbative Auswertung des Influenz-Funktional	69
4.2	Der klassische Limes	76
4.2.1	Das Gauß'sche Rauschen	76
4.2.2	Die Bewegungsgleichung im klassischen Limes	77
4.3	Influenz-Wirkung in der Φ^4 -Theorie	80
4.3.1	Selbstwechselwirkendes skalares Quantenfeld	81
4.3.2	Das Influenz-Funktional der Φ^4 -Theorie	82
4.3.3	Der klassische Limes in der Φ^4 -Theorie	90
4.3.4	Dissipationskernel, dynamische Massenverschiebung	96
4.4	Die Φ^4 -Theorie für den $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ -Fall	98
5	Numerische Resultate im Langevin-Szenario	101
5.1	Lösungsmethode	103
5.2	Ordnungsparameter und effektive Pion- und Sigma-Masse	105
5.3	Der reduzierte Dissipationskernel und der Reibungskoeffizient	106
5.4	Anfangsparameter und Anfangsbedingungen	108
5.5	Numerische Resultate	109
5.6	Variation der Anfangsparameter und der Expansionsdynamik	114
6	Zusammenfassung	123
A	Zur Berechnung des Kernels $\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$	127

Kapitel 1

Einleitung

Wir glauben heute, daß Nukleonen (Proton und Neutron) eine Unterstruktur besitzen. Sie bestehen aus je drei Quarks. Aus heutiger Sicht bilden die Quarks zusammen mit den Leptonen die elementaren Bausteine der Materie. Mittlerweile sind sechs Sorten von Quarks experimentell entdeckt worden. Die Quarks im Nukleon werden durch die elementaren Kräfte der starken Wechselwirkung gebunden, die durch Austausch von Gluonen zustande kommen, welche massenlose Teilchen mit ganzzahligem Spin sind. Die Theorie der starken Wechselwirkung heißt *Quantenchromodynamik* (QCD).

Da die Reichweite der Kräfte zwischen den Quarks auf kleine Dimension, etwa die Ausdehnung des Nukleons $10^{-14} \sim 10^{-15}$ cm, beschränkt ist, benötigen wir relativ zur Atom- und Kernphysik höhere Einschußteilchenenergie, um in die Welt der Quarks einzudringen. Hochenergetische Nukleon-Nukleon-Kollisionen sind ein Instrument zur Untersuchung der inneren Welt der Nukleonen und ihrer kollektiven Wechselwirkung. Eine wichtige Charakteristik hochenergetischer Nukleonen-Nukleonen-Kollisionen besteht darin, daß nach der Kollision eine große Menge von Energie in einem kleinen Raumzeitbereich deponiert wird. Wenn eine Energiedichte von einigen GeV/fm^3 erreicht wird, erwartet man, daß die dort befindlichen Nukleonen „verschmelzen“. Das heißt, daß die Bindungen zwischen den Quarks aufgebrochen werden und die Quarks sich frei bewegen können. Wir erhalten einen Zustand von Quarks und Gluonen. Dieser neue Zustand der Materie bei den extremen Bedingungen hoher Energiedichte und Temperatur heißt „Quark-Gluon Plasma“ (QGP).

Die kurzzeitige experimentelle Realisierung dieses Zustandes erhofft man sich mittels ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen. Wir können uns den Vorgang einer Kollision wie folgt vorstellen. In dem Schwerpunktsystem fliegen beide Ionen aufeinander zu. Die totale Energie beträgt einige Hunderte GeV pro Nukleon. Aufgrund der Lorentz-Kontraktion haben die Ionen die Form einer dünnen Scheibe. Folglich finden alle Nukleon-Nukleon-Stöße nahezu gleichzeitig statt. Inelastische Stöße sind dabei dominant. Die Nukleo-

nen verlieren nach der Kollision einen großen Teil ihrer Energie. Die von den Nukleonen verlorene Energie wird in der Nähe des Schwerpunktes innerhalb einer kleinen Region für einen kurzen Moment deponiert. Die Energiedichte dort kann eventuell einige GeV/fm^3 erreichen. Unter dieser extremen Bedingung kann ein QGP entstehen. Die Baryonen (Nukleonen und ihre angeregten Zustände) werden wegen der hohen Einschußenergie wenig gestoppt und fliegen weg. Wir können also den Vorgang der Kollision als ein Durchlaufen zweier dünner Scheiben ansehen. Zwischen den durchgelaufenen Scheiben liegt eine heiße und baryonarme Region vor, in der man die Bildung des QGPs erwartet.

Das QGP lebt nur für einen kurzen Moment. Wegen der schnellen Expansion nach der Kollision sinken Energiedichte und Temperatur. Die Quarks im QGP werden sich so gruppieren, daß nur Gruppen mit drei Quarks und Gruppen mit Quark-Antiquark-Paaren vorkommen. Dann schließt sich jede Gruppe voneinander ab und bildet ein Hadron (Baryon oder Meson). Diesen Vorgang nennen wir Hadronisation. Während der Hadronisation findet der Phasenübergang von der Phase des QGPs zur hadronischen Phase statt. Dieser Phasenübergang heißt „deconfinement/confinement“ Phasenübergang.

Bis heute kennen wir kein eindeutiges Signal zur Identifizierung des QGPs. Die Teilchen, die durch die vermuteten Prozesse im QGP produziert werden, werden von dem gleichen Typ begleitet, die aus den Prozessen in der hadronischen Phase entstehen. Es liegt die Schwierigkeit vor, aus den gemischten Meßdaten die Existenz des QGPs zu extrahieren. Es gibt einige zu erwartende Signale, wie z.B. eine erhöhte Dilepton-Produktion oder eine J/ψ -Unterdrückung. Leider zeigen zur Zeit die Untersuchungen in diesen Richtungen keinen klaren Beweis für die Existenz des QGPs. Wir müssen versuchen, die Dynamik der Kollision und der möglichen Hadronisation detailliert zu verstehen, da nur dies uns helfen kann, mögliche Signale, die im QGP und während der Hadronisation entstehen können, aufzufinden.

Neben dem „deconfinement/confinement“ Phasenübergang erwartet man unter denselben Bedingungen in der Kollision, daß während des Sinkens der Temperatur der chirale Phasenübergang stattfinden wird. Der chirale Phasenübergang ist ein Übergang von einer Phase, in der die chirale Symmetrie gewährleistet ist, zu einer Phase, in der die chirale Symmetrie spontan gebrochen ist. Es wird spekuliert, daß beide Phasenübergänge bei nahezu gleicher Temperatur $T_c \approx 150 - 190 \text{ MeV}$ stattfinden. Es stellt sich unmittelbar die Frage nach möglichen experimentellen Signaturen des chiralen Phasenübergangs. Diese Signale könnten Informationen der früheren Phase enthalten und die spontane Brechung der chiralen Symmetrie verifizieren. Die Formation eines sogenannten disorientierten chiralen Kondensats (DCC) ist ein solches Signal. Bevor wir erläutern, was ein DCC ist, erklären wir kurz, was man unter der spontanen Brechung der Symmetrie versteht.

Nehmen wir ein bekanntes Beispiel, den Phasenübergang eines Ferroma-

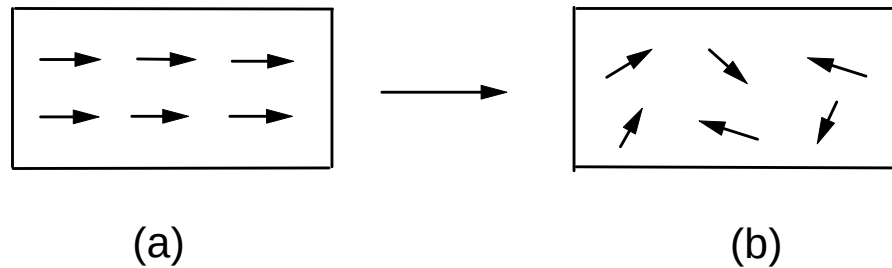


Abbildung 1.1: Ein Bezirk in einem Ferromagneten bei niedriger Temperatur(a) und bei hoher Temperatur(b). Jeder Pfeil zeigt die Spinrichtung des Atoms.

gneten. Bei niedriger Temperatur kann man sich einen Ferromagneten als eine Zusammensetzung von Bezirken mit unterschiedlicher Größe vorstellen. In jedem Bezirk richten sich die Spins der Atome in einer festen Richtung aus. Abb. 1.1(a) stellt einen Bezirk dar. Die Ausrichtung der Spins entlang einer Richtung bedeutet, daß sich in diesem Fall das System in dem energetisch günstigsten Zustand, dem Grundzustand, befindet. Aus der Lagrange-Funktion des Systems kann man zeigen, daß die Energie des Systems den niedrigsten Wert einnimmt, wenn sich die Spins der Atome innerhalb des Bezirkes aufgrund der Dipol-Dipol-Wechselwirkung in der gleichen Richtung orientieren. Die Auswahl dieser Richtung ist aber willkürlich. Das bedeutet, daß die Lagrange-Funktion invariant unter einer Rotation der kollektiven Spinrichtung ist. Der Grundzustand hingegen ist unter einer solchen Rotation nicht invariant, da er eine feste Richtung auszeichnet. Folglich ist die Symmetrie, die man aus der Invarianz der Lagrange-Funktion unter der obigen Transformation erwartet, wegen einer Auszeichnung des Grundzustandes **spontan** gebrochen. Wir können einen Ordnungsparameter definieren, um diese Phase zu beschreiben. Im Fall des Ferromagneten ist der Ordnungsparameter die Magnetisierung $\mathbf{M}$, die die Summe aller magnetischen Momente der Atome im Bezirk darstellt. Solange $|\mathbf{M}|$ ungleich Null ist, ist die Symmetrie spontan gebrochen.

Steigt die Temperatur, so wird die Ausrichtung der Spins aufgrund der thermischen Bewegung der Atome zusehends gestört. Ab der Überschreitung der kritischen Temperatur T_c (Curie Temperatur) verschwindet jegliche kollektive Ausrichtung der Spins. Die Spins orientieren sich unabhängig voneinander, wie in Abb. 1.1(b) dargestellt. Der Ordnungsparameter $\mathbf{M}$ verschwindet, und der Ferromagnet ist entmagnetisiert. In dieser Phase, wo keine Auszeichnung der Spinrichtung vorliegt, ist die Rotationssymmetrie wiederhergestellt.

Wir können uns den chiralen Phasenübergang in Analogie zum Phasenübergang des Ferromagneten vorstellen. Der entsprechende Ordnungsparameter hier ist $\langle \Phi \rangle = (\langle \sigma \rangle, \langle \pi \rangle)$, der Erwartungswert des Sigma- und Pion-Feldes. Bei der Null-Temperatur verschwindet der Erwartungswert des Pion-Feldes. Das Sigma-Feld besitzt aber einen endlichen Erwartungswert, $\langle \sigma \rangle \neq 0$. Wenn man sich das chirale Feld Φ als einen Vierervektor in einem vierdimensionalen Raum vorstellt, richtet es sich bei der Null-Temperatur in der σ -Richtung aus und zwar überall im Vakuum. Diese Situation ist ähnlich wie der des Ferromagneten bei niedriger Temperatur, wie in Abb. 1.1(a) illustriert. Jeder Pfeil im Bezirk zeigt in die σ -Richtung. Man bezeichnet einen solchen Bezirk als ein chirales Kondensat. Es stellt den Grundzustand des chiralen Feldes Φ dar. Die chirale Symmetrie bedeutet, daß die Lagrange-Funktion des Feldes Φ invariant unter einer Rotation von Φ ist, wobei die Pion-Komponente des Ordnungsparameters allerdings nicht verschwindet. Die chirale Symmetrie ist somit wegen der Auszeichnung des Grundzustands spontan gebrochen. Es wird erwartet, daß bei hoher Temperatur die chirale Symmetrie wiederhergestellt werden kann. In dieser symmetrischen Phase verschwindet der chirale Ordnungsparameter $\langle \sigma \rangle = \langle \pi \rangle = 0$. Das chirale Feld besitzt keine bevorzugte Richtung mehr, wie in Abb. 1.1(b) illustriert. Da das chirale Feld normalerweise räumlich korreliert ist, kann man erwarten, daß eine Domäne aus der symmetrischen Phase entstehen kann, in der das Feld sich in einer anderen Richtung ausrichtet. Die Auswahlmöglichkeiten für diese Richtung sind (fast) gleichwahrscheinlich im vierdimensionalen Raum verteilt. Daher wird eine solche Domäne als ein „**disoriented chiral condensate**“ (DCC) bezeichnet.

Entsteht ein DCC in der späteren Phase der Nukleonen-Nukleonen-Kollision, wird es während des vollziehenden Phasenübergangs allmählich zum Grundzustand relaxieren. Die kollektive Pion-Komponente des chiralen Feldes wird immer schwächer. Das bedeutet, daß ein DCC während des chiralen Phasenübergangs in den Grundzustand zerfallen wird, wobei Pionen emittiert werden. Theoretisch gesehen liegt eine eigenartige Verteilung des Verhältnisses zwischen der Anzahl der neutralen Pionen und der Anzahl der geladenen Pionen aus einer zerfallenden DCC-Domäne vor. Bei einer experimentellen Identifizierung dieser Verteilung könnte man auf das Vorhandensein einer DCC-Formation zurückschließen. Es gibt zur Zeit zwei Experimente zur Untersuchung der DCC-Formation. Beim Experiment WA98 am CERN benutzt man den Pb-Ionen-Strahl mit 33 TeV von CERN-SPS. Das andere Experiment, MiniMax, wird am Fermilab Tevatron Collider durchgeführt. Beide Gruppen konnten bisher nicht das Signal der DCC-Formation eindeutig identifizieren. Die Schwierigkeit liegt darin, daß die Pionen, die im Detektor registriert werden, nicht nur aus dem DCC-Zerfall (angenommen es hätte ein DCC existiert) kommen, sondern auch aus anderen Produktionsprozessen. Wenn die Pion-Produktion aus dem DCC-Zerfall kein dominanter Prozeß ist, ist es ungleich schwieriger, auf eine mögliche DCC-Formation zu schließen. Die bisherigen

experimentellen Ergebnisse zeigen, daß diese Situation wohl vorliegt.

Zum Verständnis der DCC-Formation sind einige quantitative Vorhersagen, z.B. über die Größe der DCC-Domäne, gefragt. Wenn man dies abschätzen kann, dann weiß man ungefähr, wieviele Pionen emittiert werden können, woraus man auf die Dominanz der Pion-Produktion bei dem DCC-Zerfall schließen kann. Auch die Verteilung der Anzahl der gesamten Pionen aus dem DCC-Zerfall ist von Interesse. Wenn man diese Form kennt, dann kann man abschätzen, wie oft eine große Domäne vorliegt. Obwohl diese Fragen zur Zeit durch Experimente nicht beantwortet werden können, lassen sich die interessanten Größen, wie die DCC-Domänengröße oder die Verteilung der DCC-Formation, durch einfache Modellrechnungen theoretisch untersuchen.

Die meisten theoretischen Szenarien zur Untersuchung der DCC-Formation basieren auf einer (semi)klassischen Bewegungsgleichung des chiralen Feldes Φ im Rahmen des linearen σ -Modells, welches ein effektives Modell zur Beschreibung des chiralen Phasenübergangs darstellt. Die früheren Arbeiten richteten sich auf das qualitative Verständnis der DCC-Formation und auf die Abschätzung der DCC-Domänengröße. Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns auf die Zeitentwicklung des Ordnungsparameters und auf die Statistik der Pionanzahl aus dem DCC-Zerfall. Wir benutzen ebenfalls das lineare σ -Modell und nehmen an, daß der chirale Ordnungsparameter mit einem lokalen Wärmebad thermisch wechselwirkt. Mit dieser Annahme können wir die semiklassische Bewegungsgleichung des Ordnungsparameters in der thermischen $\mathcal{O}(4)$ ϕ^4 -Theorie herleiten. Die hergeleitete Bewegungsgleichung ist eine stochastische Differentialgleichung vom Langevin-Typ. Unter einer Langevin-Gleichung versteht man Bewegungsgleichungen ähnlich wie die zur effektiven Beschreibung eines in einer Flüssigkeit suspendierten Brown'schen Teilchens. Mit einem von uns entwickelten Verfahren lösen wir die Bewegungsgleichung des Ordnungsparameters numerisch. Daraus können wir die Pionanzahl zu einem späteren Zeitpunkt erhalten, bei dem alle Pionen emittiert sind. Die stochastische Eigenschaft dieses Modells ermöglicht uns, ein Ensemble unabhängiger Ereignisse (events) zu bekommen, mit dem wir eine statistische Aussage über die Verteilung der Pionanzahl machen können.

Neben der Aussage über die Verteilung der Pionanzahl als quantitative Untersuchung zur DCC-Formation beinhaltet die vorliegende Arbeit ein eigenständig entwickeltes Verfahren zum Lösen verallgemeinerter Langevin-Gleichungen. Dieses Verfahren erlaubt es, sogenanntes farbiges Rauschen zu simulieren und „Gedächtniseffekte“ zu untersuchen, so daß es auch für andere Arbeitsgebiete von Relevanz sein könnte.

In Kapitel 2 der Arbeit werden wir die Entstehung eines DCC näher erläutern, die Strategie der Datenanalyse in den Experimenten kurz erwähnen und das lineare σ -Modell vorstellen. Darüberhinaus geben wir einen Rückblick auf die theoretischen Modelle zur Untersuchung der DCC-Formation mit dem linearen

σ -Modell. Wir werden in Kapitel 3 die Langevin-Gleichung und ihre verallgemeinerte Form betrachten. Dabei entwickeln wir ein Verfahren, um das farbige Rauschen zu simulieren und die Langevin-Gleichung zu lösen. Wir werden in Kapitel 4 die Bewegungsgleichung des chiralen Ordnungsparameters mit dem linearen σ -Modell herleiten. Diese Gleichung werden wir in Kapitel 5 mit dem in Kapitel 3 entwickelten Verfahren lösen. Wir stellen daraufhin unsere erzielten Ergebnisse zur DCC-Formation kritisch den möglichen Signalen gegenüber. Schließlich geben wir eine kurze Zusammenfassung dieser Arbeit und einen Ausblick.

Kapitel 2

Phänomen der disorientierten chiralen Kondensate

2.1 Die chirale Symmetrie und eine intuitive Vorstellung von DCC-Formation

Wie in der Einleitung bereits kurz erläutert, ist die DCC-Formation ein mit der chiralen Symmetrie der QCD verbundenes Phänomen. Zunächst geben wir kurz eine mathematische Darstellung und ein anschauliches Bild der chiralen Symmetrie. Detailliertere Ausführungen über die chirale Symmetrie kann man in [W 96] finden.

Die chirale Symmetrie ist eine Symmetrie der QCD für Quarks. Im Fall, daß wir nur die zwei leichtesten Quarks, „up“ und „down“ Quarks, betrachten, wird die Lagrange-Funktion der zwei Quarks als $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \bar{\psi}m\psi$ geschrieben, wobei $\psi = (u, d)$. m bezeichnet den Massentensor der Quarks. Die chirale Symmetrie bedeutet, daß die Lagrange-Funktion für masselose Quarks ($m = 0$) invariant unter den folgenden Transformationen ist:

$$\begin{aligned}\Lambda_V &: \psi \rightarrow e^{-i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\theta}_V} \psi \simeq (1 - i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\theta}_V) \psi \\ \text{und } \Lambda_A &: \psi \rightarrow e^{-i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\theta}_A} \psi \simeq (1 - i\gamma_5\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\boldsymbol{\theta}_A) \psi ,\end{aligned}$$

wobei $\boldsymbol{\tau}$ die Paulimatrix und γ_μ die Gamma-Matrix ist. $\boldsymbol{\theta}$ entspricht einem Rotationswinkel. Die Transformationen Λ_V und Λ_A bezeichnet man als isovektorielle und isoaxialvektorielle Transformation. Die chirale Symmetrie gehört zu der Symmetriegruppe $SU(2)_V \times SU(2)_A$. Der Massenterm bricht die Symmetrie unter Λ_A explizit. Da die Massen der u- und d-Quarks relativ klein im Vergleich zu den Massen der Hadronen sind, ist die chirale Symmetrie unter Λ_A eine approximative Symmetrie.

Wenden wir die Transformationen Λ_V und Λ_A auf die Mesonen (Quark-

ströme),

$$\boldsymbol{\pi} = i\bar{\psi}\boldsymbol{\tau}\gamma_5\psi \quad \text{und} \quad \sigma = \bar{\psi}\psi,$$

an, so erhalten wir:

$$\Lambda_V : \boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\theta}_V \times \boldsymbol{\pi}, \quad \sigma \rightarrow \sigma \quad (2.1)$$

$$\text{und } \Lambda_A : \boldsymbol{\pi} \rightarrow \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\theta}_A \sigma, \quad \sigma \rightarrow \sigma - \boldsymbol{\theta}_A \cdot \boldsymbol{\pi}. \quad (2.2)$$

Die Transformation (2.1) entspricht offensichtlich einer Isospinrotation. Da es bekannt ist, daß in der starken Wechselwirkung der Isospinstrom eine Erhaltungsgröße ist, liegt eine Symmetrie unter Λ_V vor. Die Transformation (2.2) deutet an, daß $\boldsymbol{\pi}$ und σ sich zueinander rotieren. Unter der Annahme, daß die Lagrange-Funktion der Mesonen invariant unter Λ_A ist, würde man sich ein Potential, wie in Abb. 2.1(a) skizziert, vorstellen. Somit würden das Pion- und Sigma-Meson die gleiche Masse besitzen, was aber in der Natur nicht der Fall ist. Bei niedriger Temperatur ist $m_\sigma \approx 600$ MeV und $m_\pi = 140$ MeV. Auf der anderen Seite erwartet man wegen der approximativen Erhaltung des Axialstroms, daß die Lagrange-Funktion invariant unter Λ_A sein muß, wenn ψ der Isospinor der masselosen Quarks ist.

Das Problem läßt sich durch folgende Idee lösen: Die chirale Symmetrie unter Λ_A ist spontan gebrochen. Dies verstehen wir am leichtesten anhand von Abb. 2.1(b). Die Position der kleinen Kugel in dem Tal des Potentials zeichnet

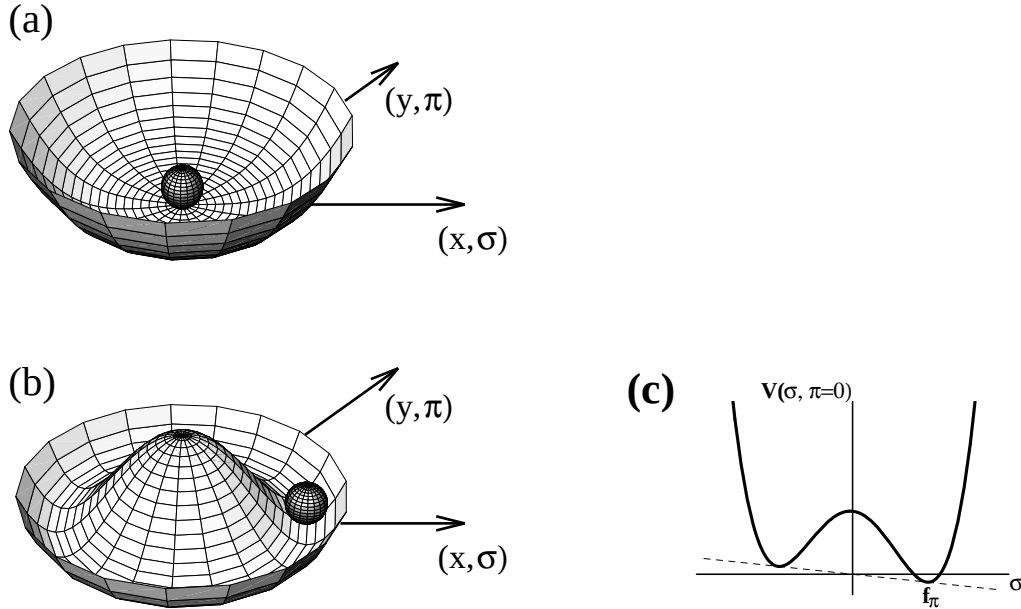


Abbildung 2.1: Das Potential der Mesonen in der symmetrischen Phase(a) und der spontan gebrochenen Phase(b). (c) zeigt eine explizite Brechung der chiralen Symmetrie.

den Grundzustand aus, der auf der σ -Achse liegt. Die spontane Brechung der

Symmetrie bedeutet, daß zwar das Potential invariant unter der Rotation um die chirale Z -Achse ist, der Grundzustand aber nicht. (Die Rotation um die Z -Achse repräsentiert die Transformation Λ_A .) Die Symmetrie ist gebrochen durch die Auszeichnung des Grundzustandes. Da das Rollen der Kugel im Tal keine Energie kostet, identifiziert man das Pion mit einem masselosen Goldstone Boson. Dagegen muß bei der Anregung in der σ -Richtung um den Grundzustand offensichtlich Energie zugefügt werden. Folglich ist die Masse des σ -Mesons viel schwerer.

Wegen den kleinen aber nicht verschwindenden Quarkmassen ist die chirale Symmetrie unter Λ_A explizit aber schwach gebrochen. Die explizite Brechung der chiralen Symmetrie läßt sich, wie in Abb. 2.1(c) dargestellt, durch eine Neigung des Potentials in der σ -Richtung illustrieren, so daß der Grundzustand eindeutig wird und das Pion eine sehr kleine Masse erfährt.

Es wird nun erwartet, daß bei sehr hoher Temperatur die chirale Symmetrie nicht mehr spontan gebrochen ist. Diese Phase bezeichnen wir dann als die symmetrische Phase, da die chirale Symmetrie wiederhergestellt ist. Das Potential dieser Phase ist in Abb. 2.1(a) dargestellt. Die Massen des Pion- und Sigma-Mesons sind gleich groß.

In einer Schwerionenkollision erwartet man eine sehr heiße und baryonarme Region, in der die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird. Der energetisch günstigste Zustand liegt in dieser Phase bei $(\sigma=0, \boldsymbol{\pi}=\mathbf{0})$, wo der Ordnungsparameter an der in Abb. 2.1(a) skizzierten Stelle sitzt. Aufgrund der Expansion sinkt im weiteren die Temperatur. Bei einer kritischen Temperatur wird der chirale Phasenübergang stattfinden. Der chirale Ordnungsparameter, die Erwartungswerte der Felder $(\sigma, \boldsymbol{\pi})$, wird zu einem neuen energetisch günstigsten Zustand, der auf der σ -Richtung liegt, wandern, da das Potential an der Position $(\sigma=0, \boldsymbol{\pi}=\mathbf{0})$ ein lokales Maximum ausgebildet hat. Im Prinzip ist hier jede „Laufbahn“ des Ordnungsparameters denkbar. Aufgrund der expliziten Brechung der Symmetrie wird der chirale Ordnungsparameter im Tal um den Grundzustand $(\sigma, \mathbf{0})$ oszillieren. Daher haben wir in Endstadium ein oszillierendes, kohärentes Pion-Feld. Bei der Oszillation ändert sich nur der Betrag des Feldes $|\boldsymbol{\pi}|$. Die Richtung von $\boldsymbol{\pi}$ ändert sich nicht. Diese Situation kann man sich wie in Abb. 2.2 skizziert vorstellen. Das Pion-Feld oszilliert um den Nullpunkt entlang einer festen Linie.

Falls ein DCC in der symmetrischen Phase entsteht, dann haben wir jetzt eine kollektive Oszillation des Pion-Feldes innerhalb der DCC-Domäne. Die Domänengröße wird mit der Expansion anwachsen, bis der Zeitpunkt des „freeze-out“ erreicht wird. Dann werden die langwelligen Pionen während des DCC-Zerfalls emittiert. Folglich verliert das Pion-Feld Energie, und die Oszillation des Pion-Feldes wird immer schwächer. Wenn das Pion-Feld völlig gedämpft ist, bleibt der chirale Ordnungsparameter im Grundzustand $(\sigma, \mathbf{0})$, der das Vakuum auszeichnet.

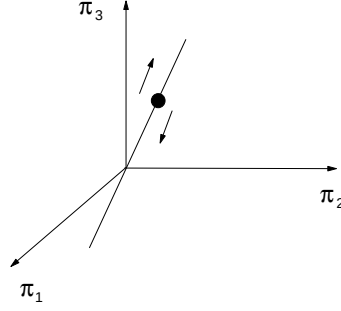


Abbildung 2.2: Die Oszillation des Pion-Feldes im Isospinraum

Eine Alternative der Vorstellung der DCC-Produktion, das „Baked-Alaska“-Szenario, wurde von Bjorken, Kowalski and Taylor [BKT 93] vorgeschlagen. Sie haben den folgenden Produktionsmechanismus angenommen: In der Hadron-Hadron-Kollision entsteht eine heiße Region, die von einer dünnen Schale hadronischer Materie umgeben ist. Die Schale expandiert mit Lichtgeschwindigkeit, und die Relaxation der inneren Region zu dem äußeren Vakuum entspricht der Formation eines DCC.

Wenn die Anzahl der Pionen aus dem DCC-Zerfall relativ groß im Vergleich zum Hintergrund ist, sollte es möglich sein, das Signal in Kollisionsexperimenten zu beobachten. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, welches Signal erwartet wird, sofern die Pionen aus dem DCC-Zerfall identifiziert werden können.

2.2 Das Signal

Stellen wir uns eine ideale DCC-Domäne vor, in der das Pion-Feld entlang einer festen Richtung oszilliert, wie in Abb. 2.2 dargestellt. Die reellen Felder π_1 , π_2 und π_3 lassen sich in Kugelkoordinaten ausdrücken:

$$\pi_1 = |\boldsymbol{\pi}| \sin\theta \cos\varphi, \quad \pi_2 = |\boldsymbol{\pi}| \sin\theta \sin\varphi, \quad \pi_3 = |\boldsymbol{\pi}| \cos\theta.$$

Da die Anzahl der Pionen proportional zum Quadrat der Feldstärke ist, d.h.

$$n_{\pi_0} \sim \pi_3^2 \quad \text{und} \quad n_{\pi_+} + n_{\pi_-} \sim (\pi_1 + \pi_2)^2,$$

ist das Verhältnis der Anzahl der neutralen Pionen zu den gesamten Pionen,

$$f = \frac{n_{\pi_0}}{n_{\pi_0} + n_{\pi_{\pm}}} = \frac{\pi_3^2}{(\pi_1 + \pi_2)^2 + \pi_3^2} = \cos^2\theta,$$

nur vom Winkel θ abhängig. Daher hängt die Verteilung von f , $p(f)$, von der Form von $p(\theta)$ ab:

$$p(f) = 2p(\theta) \left| \frac{d\theta}{df} \right|. \quad (2.3)$$

Der Faktor 2 deutet an, daß für θ und $\pi - \theta$ das Verhältnis f den gleichen Wert hat.

Wir fragen nach der Verteilung $p(f)$. Wenn wir annehmen, daß jede Richtung im Isospinraum gleichwahrscheinlich ist, folgt, daß

$$p(\Omega)d\Omega = \frac{1}{4\pi} d\Omega, \quad (2.4)$$

wobei $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, Ω also den Raumwinkel darstellt. Durch die Integration von (2.4) über φ erhalten wir die Verteilung $p(\theta)$:

$$p(\theta) = \int_0^{2\pi} p(\Omega) \sin\theta d\varphi = \frac{1}{2} \sin\theta. \quad (2.5)$$

Setzt man (2.5) in (2.3) ein, so ergibt sich

$$p(f) = \frac{1}{2 |\cos\theta|} = \frac{1}{2\sqrt{f}}. \quad (2.6)$$

Die Verteilung (2.6) ist in Abb. 2.3 mit der gepunkteten Linie dargestellt. Diese eigenartige Verteilung unterscheidet sich grundsätzlich von der auf dem

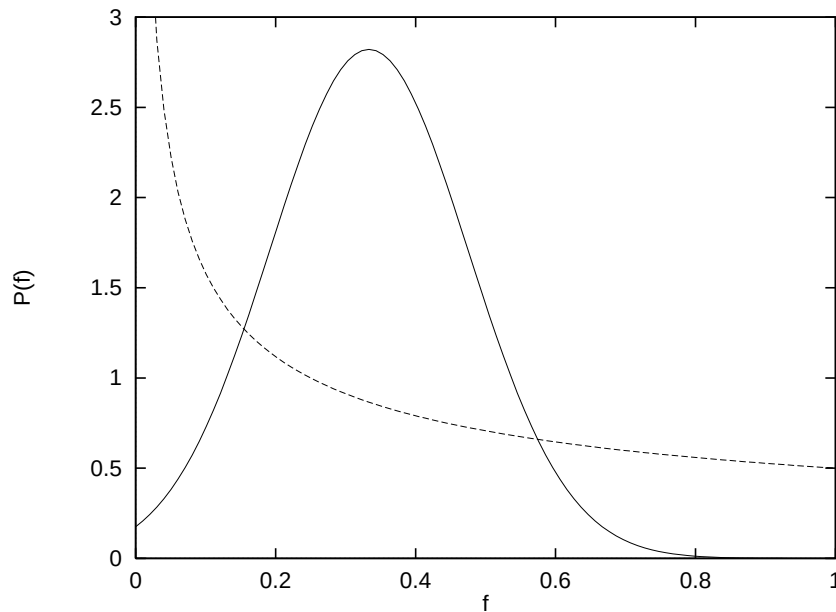


Abbildung 2.3: Die Verteilung $p(f)$. Die gepunktete Linie entspricht der Funktion $1/2\sqrt{f}$. Im Vergleich dazu stellt die durchgezogene Linie eine Binomialverteilung mit gewisser Breite dar.

Mittelwert $\frac{1}{3}$ zentrierten Binomialverteilung (durchgezogene Linie in Abb. 2.3), die wir für den unkorrelierten Fall erwarten würden, also für eine voneinander

unabhängige Emission der drei Pionsorten. Deshalb stellt die Verteilung (2.3) die Asymmetrie der Isospin-Verteilung der Pionen dar.

Die Verteilung (2.6) wurde in vielen Arbeiten diskutiert. Man vermutet, daß die eigenartigen Ereignissen, „Centauros“ [LFH 80], die bei den Untersuchungen der kosmischen Strahlung experimentell gefunden worden sind, mit einer DCC-Formation zusammenhängt. Centauros sind Ereignisse, in denen viele geladene Hadronen, aber sehr wenige Photonen (Ein neutrales Pion zerfällt in zwei Photonen.) registriert werden.

2.3 Das Experiment

Wie schon in der Einleitung erwähnt, gibt es zur Zeit zwei Experimente zur Erforschung einer möglichen DCC-Formation. Bei dem WA98 Experiment [N 97] am CERN-SPS benutzt man den Pb-Strahl mit einer Energie von 158 GeV pro Nukleon. Im Experiment MiniMax [BB 96] am Fermilab verwendet man Proton-Antiproton-Kollisionen im Tevatron. Die Anzahl der Photonen, die teilweise durch den Zerfall der neutralen Pionen entstehen, und die Anzahl der geladenen Teilchen werden hier auf einer „event-by-event“ Basis analysiert. Aus den Analysen beider Gruppen ist kein klarer Beweis für das Signal (2.6) zu erkennen. Die experimentelle Schwierigkeit wurde bereits in der Einleitung erwähnt. Folgende Strategien der Datenanalyse wurden angegangen.

1. „Global Event Characteristics“ [N 97]

Diese Methode ist geeignet für die Untersuchung der Formation einer einzigen DCC-Domäne, die vermutlich in einer zentralen Kollision entstehen kann. In Abb. 2.4 ist links das Verhältnis zwischen der Anzahl der Photonen und der Anzahl der geladenen Teilchen aus zentralen Kollisionen in WA98 dargestellt. Das rechte Bild in Abb. 2.4 zeigt eine Monte Carlo Simulation mit der Annahme, daß 0% oder 60% der Pionen aus dem DCC-Zerfall emittiert worden sind. Die festgelegten Linien in beiden Bildern deuten an, daß Events über den Linien als Kandidaten mit dominanter Pionemission aus DCC angesehen werden können. In den in Abb. 2.4 links dargestellten experimentellen Daten ersieht man nur einen möglichen Kandidaten.

2. „Normalized Factorial Moments Analysis“

Diese Methode der Datenanalyse wurde von der MiniMax Kollaboration benutzt [BB 96]. Die Beobachtungsgröße ist das Verhältnis der Momente F :

$$r_{i,1} = \frac{F_{i,1}}{F_{i+1,0}}$$

$$\text{mit } F_{i,j} = \frac{\langle N_{ch}(N_{ch}-1) \cdots (N_{ch}-i+1) N_\gamma(N_\gamma-1) \cdots (N_\gamma-i+1) \rangle}{\langle N_{ch} \rangle^i \langle N_\gamma \rangle^j}.$$

Man erhält $r_{i,1} = 1$ für den 0% DCC-Beitrag und $r_{i,1} = 1/(i+1)$ für den 100%

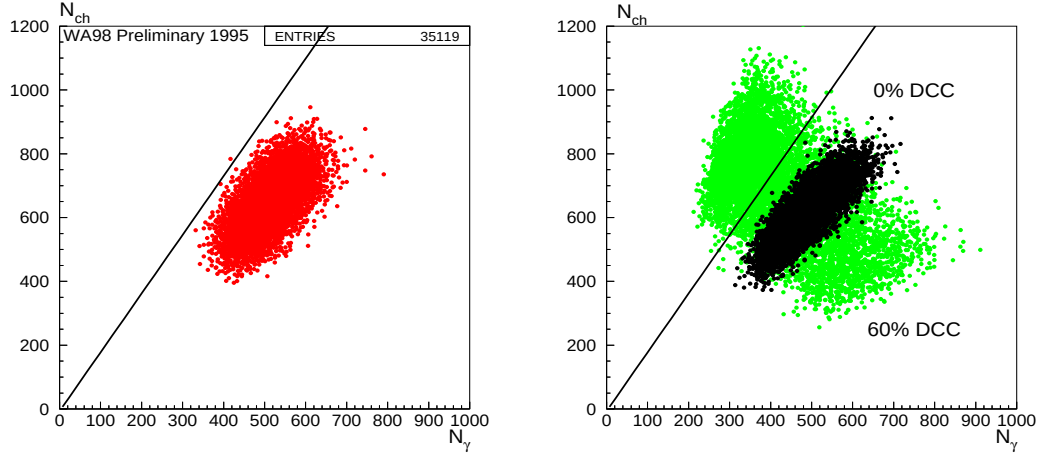


Abbildung 2.4: WA98-Datenanalyse [N 97]. (a) Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Photonen und der Anzahl der geladenen Teilchen aus den Daten aus zentralen Kollisionen in WA98. (b) Monte Carlo Simulation mit 0% und 60% DCC-Beitrag. Die geraden Linien stellen ein Kriterium für die Bestimmung möglicher DCC-Kandidaten dar.

DCC-Beitrag. Die experimentellen Daten liefern Werte um Eins.

3. „Wavelet Analyse“ [N 97]

Es gibt noch eine weitere Methode, „Wavelet Analyse“ [HSTW 96], die von der WA98 Kollaboration angewendet wurde. Man berechnet in dieser Methode den Mutter-Funktion-Koeffizient oder den Vater-Funktion-Koeffizient sowohl mit den realen Daten als auch mit den simulierten Daten und vergleicht die beiden Koeffizienten miteinander. Diese Untersuchungen sind zur Zeit noch nicht abgeschlossen.

2.4 Das Modell

In den vorherigen Abschnitten haben wir die Vorstellung der DCC-Formation in Schwerionenkollisionen und Hadron-Hadron-Kollisionen und das erwartete Signal vorgestellt. Aus experimenteller Sicht haben wir wenige Meßgrößen zur Verfügung. Was können wir vom theoretischen Standpunkt aus tun, um die intuitive Vorstellung der DCC-Formation zu „realisieren“? Da das nichtperturbative Verhalten der QCD noch weitgehend unverstanden ist, entfällt eine direkte Untersuchung auf dieser Basis. Wir benötigen ein einfaches Modell, das den chiralen Phasenübergang beschreiben kann. Das lineare σ -Modell ist ein solches Modell.

2.4.1 Das lineare σ -Modell

Das lineare σ -Modell wurde zuerst als ein Modell zur Beschreibung der Pion-Nukleon Wechselwirkung niedriger Energie von Gell-Mann und Lévy [GML 60] vorgeschlagen. Es eignet sich darüberhinaus aber auch als ein effektives Modell zur Untersuchung des chiralen Phasenübergangs.

In dem linearen σ -Modell wird das skalare Sigma-Feld mit dem vektoriellen Pion-Feld zu $\Phi = (\sigma, \boldsymbol{\pi})$ verknüpft. Die Lagrange-Funktion für Φ im linearen σ -Modell lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi^a - V(\Phi)$$

mit $V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi_a \Phi^a - v^2)^2 - H \Phi_0,$

wobei $\Phi_0 \equiv \sigma$. Das Potential $V(\Phi)$ ist als „Mexican-hat“ Potential bekannt. Die Gestalt des Potentials entspricht der in Abb. 2.1(b) skizzierten. Der Term $H \Phi_0$ modelliert die explizite Brechung der chiralen Symmetrie, so daß das Potential auf der σ -Richtung ein einziges Minimum besitzt. Das Minimum liegt bei $(f_\pi, \mathbf{0})$, wobei f_π die Zerfallskonstante des Pions ist. Die Parameter λ , v^2 und H sind mit f_π und den Massen der Mesonen verbunden:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_{\text{Grundzustand}} = \lambda f_\pi (f_\pi^2 - v^2) - H \\ m_\pi^2 &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i^2} \right|_{\text{Grundzustand}} = \frac{H}{f_\pi} \\ m_\sigma^2 &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\text{Grundzustand}} = 2\lambda f_\pi^2 + \frac{H}{f_\pi} \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2}, \quad v^2 = f_\pi^2 - \frac{m_\pi^2}{\lambda}, \quad H = f_\pi m_\pi^2.$$

Falls wir annehmen, daß $m_\pi = 140$ MeV, $m_\sigma \approx 600$ MeV und $f_\pi = 92$ MeV, dann erhalten wir für die drei Parameter die folgenden Werte:

$$\lambda = 20.1, \quad v^2 = (86.54 \text{ MeV})^2, \quad H = (121.72 \text{ MeV})^3.$$

Aus dem Variationsprinzip erhalten wir in bekannter Weise die klassische Bewegungsgleichung für Φ :

$$\square \Phi + \lambda(\Phi^2 - v^2) \Phi = H \hat{\sigma}, \quad (2.7)$$

wobei $\hat{\sigma} = (1, \mathbf{0})$ und somit in die σ -Richtung zeigt. Die Bewegungsgleichung (2.7) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie kann eindeutig gelöst

werden, wenn die Anfangsbedingungen $\Phi(t = 0)$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t = 0)$ an jedem Raumpunkt vorgegeben werden.

Mittels der sogenannten Hartree-Approximation in der Bewegungsgleichung (2.7) werden wir die statistischen Eigenschaften des linearen σ -Modells diskutieren und uns überzeugen, daß das Modell einen chiralen Phasenübergang bei endlichen Temperaturen beschreibt.

2.4.2 Die Hartree-Approximation

Wir separieren das Feld Φ in ein mittleres Feld („mean-field“) und einen Fluktuationsterm:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(t) + \delta\phi(\mathbf{r}, t).$$

Der „mean-field“ Term ist definiert als das Raummittel von $\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\phi(t) = \langle \Phi(\mathbf{r}, t) \rangle := \frac{1}{V} \int d^3r \Phi(\mathbf{r}, t),$$

so daß $\langle \delta\phi(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Wir identifizieren $\phi(t) := (\sigma_0, \boldsymbol{\pi}_0)$ mit dem chiralen Ordnungsparameter und $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$ mit den Quasiteilchen.

Führen wir die Raummittelung von (2.7) durch, so erhalten wir

$$\ddot{\phi} + \lambda[\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2\langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2] \phi = H\hat{\sigma}, \quad (2.8)$$

wobei $\delta\phi_{\parallel}$ das zu ϕ parallel orientierte σ -ähnliche Quasiteilchen darstellt. Das zu ϕ senkrecht orientierte $\boldsymbol{\pi}$ -ähnliche Quasiteilchen wird als $\delta\phi_{\perp}$ bezeichnet. Folglich ist $\langle \delta\phi^2 \rangle = \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle + 3\langle \delta\phi_{\perp}^2 \rangle$. Subtrahieren wir (2.8) von (2.7), so erhalten wir die folgenden approximativen Bewegungsgleichungen für die Quasiteilchen:

$$(\square + \mu_{\parallel}^2) \delta\phi_{\parallel} = 0, \quad (\square + \mu_{\perp}^2) \delta\phi_{\perp} = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{wobei} \quad \mu_{\parallel}^2 &= \lambda(3\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2\langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2), \\ \mu_{\perp}^2 &= \lambda(\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2\langle \delta\phi_{\perp}^2 \rangle - v^2). \end{aligned}$$

$\mu_{\parallel}$ und $\mu_{\perp}$ stellen die effektiven Massen der Quasiteilchen dar. Bei der Herleitung von (2.9) haben wir die folgenden Näherungen angewendet:

$$\delta\phi_i \delta\phi_j \rightarrow \langle \delta\phi_i \delta\phi_j \rangle$$

$$\text{und} \quad \delta\phi_i \delta\phi_j \delta\phi_k \rightarrow \langle \delta\phi_i \delta\phi_j \rangle \delta\phi_k + \langle \delta\phi_j \delta\phi_k \rangle \delta\phi_i + \langle \delta\phi_k \delta\phi_i \rangle \delta\phi_j.$$

Im Hinblick auf (2.8) befindet sich ϕ in einem effektiven Potential

$$V_{eff}(\phi) := \frac{\lambda}{4} (\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2\langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2)^2 - H\phi_0. \quad (2.10)$$

Falls die räumliche Ausdehnung $V^{1/3}$ viel größer als die Korrelationslänge des Feldes Φ im thermischen Gleichgewicht mit der Temperatur T ist, können wir die Raummittelung $\langle \delta\phi^2 \rangle$ durch die Ensemblemittelung $\langle \delta\phi^2 \rangle_E$ ersetzen. Diese stellt die thermische Fluktuation des Feldes Φ dar und ist von der Temperatur abhängig ist: Je höher die Temperatur ist, desto größer ist die Fluktuation. Falls die Fluktuation groß ist, so daß $\langle \delta\phi^2 \rangle > +2 \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2 > 0$, befindet sich das System in der symmetrischen Phase. Dagegen befindet sich das System in der spontan gebrochenen Phase, falls bei einer niedrigen Temperatur $\langle \delta\phi^2 \rangle < +2 \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2 < 0$ ist. In Abb. 2.5 ist das effektive Potential bei drei verschiedenen Temperaturen $T = T_c$, $T = T_c/3$ und $T = 0$ schematisch illustriert, wobei T_c die Übergangstemperatur darstellt. (Die genaue Form des effektiven Potentials in Abhängigkeit von der Temperatur ist in [R 97] angegeben.)

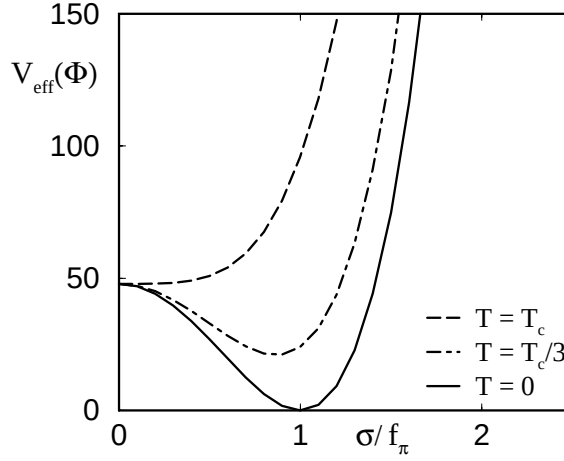


Abbildung 2.5: Das effektive Potential V_{eff} bei verschiedenen Temperaturen

Das Minimum des effektiven Potentials bei einer Temperatur T wird sowohl von ϕ als auch von Φ mit größerer Wahrscheinlichkeit besetzt als die anderen Stellen. Die wichtige Frage, in welcher Phase (symmetrisch oder spontan gebrochen) das System vorliegt, ist, wie aus dem effektiven Potential $V_{\text{eff}}(\phi)$ (2.10) ersichtlich, allein durch den Beitrag der Fluktuation $\langle \delta\phi^2 \rangle$ bestimmt.

Die statistischen Eigenschaften des linearen σ -Modells wurden von Randrup [R 97] untersucht. In Abb. 2.6 ist die Lage des Minimums von V_{eff} in Abhängigkeit der Temperatur dargestellt. Die Rechnung wurde mittels eines kubischen Gitters mit verschiedener Seitenlänge $L = 5 \text{ fm}$, 8 fm und $\rightarrow \infty$ durchgeführt. Die offenen Kreise stellen die Rechenwerte für $H = 0$ dar. Abb. 2.6 gibt uns eine qualitative Vorstellung für das Verhalten von ϕ im thermischen Gleichgewicht. Bei hoher Temperatur fluktuiert das Feld ϕ stark um $(\sigma \approx 0, \mathbf{0})$ und bei niedriger Temperatur schwach um $(\sigma \approx f_\pi, \mathbf{0})$ für ein endliches Volumen. Bei der Nulltemperatur verschwindet die Fluktuation und das Feld ϕ befindet

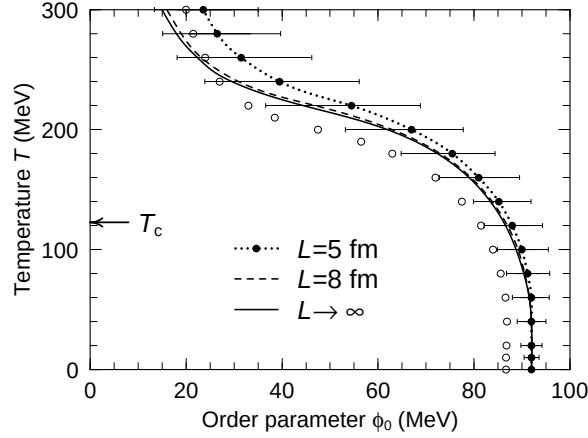


Abbildung 2.6: Die am wahrscheinlichsten besetzte Feldkonfiguration $\phi_0 \equiv (\sigma_0, \mathbf{0})$ im thermischen Gleichgewicht der Temperatur T . Die Rechnung wurde mittels eines kubischen Gitters mit dem Volumen $V = L^3$ durchgeführt [R 97]. Die offenen Kreise stellen die Werte für $H = 0$ dar. Die Halbwertsbreite der Verteilung von ϕ_0 ist für den Fall $L = 5$ fm angezeigt.

sich im Vakuum ($f_\pi, \mathbf{0}$).

2.5 Szenarien zur Modellierung der DCC-Formation mit dem linearen σ -Modell

Gemäß der intuitiven Vorstellung der DCC-Produktion in Abschnitt 2.1 erkennen wir, daß der „roll down“ Mechanismus für die DCC-Produktion entscheidend ist. Rajagopal und Wilczek [RW 93] haben gezeigt, daß während eines Phasenübergangs im thermischen Gleichgewicht durch sehr langsame Kühlung kein DCC produziert werden kann. Die DCC-Produktion ist ein reines Nichtgleichgewichtsphänomen. Die Nichtgleichgewichtsdynamik des „roll down“ Mechanismus muß in der theoretischen Berechnung miteinbezogen werden.

Auf der anderen Seite bietet das lineare σ -Modell nur Spielraum für die Auswahl der Anfangsbedingungen. Solange die Anfangsbedingungen festgelegt sind, ist die Entwicklung von Φ durch die Bewegungsgleichung (2.7) eindeutig bestimmt. Das bedeutet, daß die Anfangsbedingungen die Nichtgleichgewichtsdynamik repräsentieren müssen. Dies führt zu dem sogenannten „quench“ Szenario.

2.5.1 Das „quenched“ Szenario

In diesem Szenario von Rajagopal und Wilczek [RW 93] wurde die klassische Bewegungsgleichung (2.7) auf einem dreidimensionalen kubischen Gitter mit der Größe $(64a)^3$ numerisch gelöst. Der Gitterabstand betrug $a = (200 \text{ MeV})^{-1} \hat{=} 1 \text{ fm}$. Die Anfangsbedingungen an jedem Gitterpunkt werden durch Gaußverteilungen für Φ und $\dot{\Phi}$ mit $\langle \Phi \rangle = \langle \dot{\Phi} \rangle = 0$ und $\langle \Phi^2 \rangle = \frac{v^2}{4}$, $\langle \dot{\Phi}^2 \rangle = v^2$ unabhängig voneinander ermittelt. Der Gitterabstand a stellt daher die Anfangskorrelationslänge des Feldes Φ dar.

Da das Feld Φ am Anfang um Null gewählt wird, ist $\langle \Phi^2 \rangle$ gleich der Anfangsfluktuation $\langle \delta\phi^2 \rangle$. Diese kleine Anfangsfluktuation deutet an, daß das System sich in einer spontan gebrochenen Phase bei einer niedrigen Temperatur befindet. Wir können die Auswahl der Anfangsbedingungen des „quenched“ Szenarios wie folgt verstehen: Die Anfangstemperatur ist sehr hoch, so daß sich das System am Anfang in der symmetrischen Phase befindet. Deswegen zentriert sich das Feld um Null. Durch ein sehr schnelles „quenching“ (spontane Abkühlung) sinkt die Temperatur plötzlich (ad hoc) auf einen kleinen Wert, der sich in einer kleinen Fluktuation widerspiegelt. Nun befindet sich das Feld an einer instabilen Stelle. Das Feld wird nach unten zu dem neu generierten Minimum des effektiven Potentials rollen.

Wir betrachten die Bewegungsgleichung des Ordnungsparameters (2.8) für π_0 :

$$\begin{aligned} \ddot{\pi}_0 &= -\mu_0^2 \pi_0 \\ \text{mit} \quad \mu_0^2 &= \lambda (\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2 \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Unter der „quenched“ Bedingung ist μ_0^2 negativ. Folglich wächst π_0 exponentiell an, bis ϕ^2 und $\langle \delta\phi^2 \rangle$ so groß sind, daß μ_0^2 wieder positiv ist. π_0 bezeichnet die Null-Mode in der Fourier-Entwicklung von π . Die approximative Gleichung für die $\mathbf{k}$ -Moden können wir durch die Fourier-Transformation von (2.9) erhalten:

$$\begin{aligned} \ddot{\pi}_{\mathbf{k}} &= -\mu_k^2 \pi_{\mathbf{k}} \\ \text{mit} \quad \mu_k^2 &= k^2 + \lambda (\phi^2 + \langle \delta\phi^2 \rangle + 2 \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Unter der „quenched“ Bedingung wird auch μ_k^2 für $k < k_c$ negativ, wobei $\mu_{k_c}^2 = 0$.

Die obige Analyse mit der Hartree-Approximation zeigt uns, daß die langwelligen Moden von π unter der „quenched“ Bedingung instabil sind. Sie können während der „roll down“ Periode kurzzeitig exponentiell anwachsen. Die kurzwelligen Moden sind dagegen stabil und schwingen mit nahezu konstanter Amplitude. Mit dieser Folgerung können wir die Ergebnisse von Rajagopal und Wilczek, d.h. die Zeitentwicklungen in der Stärke der Pionen $P(k, t)$ für ver-

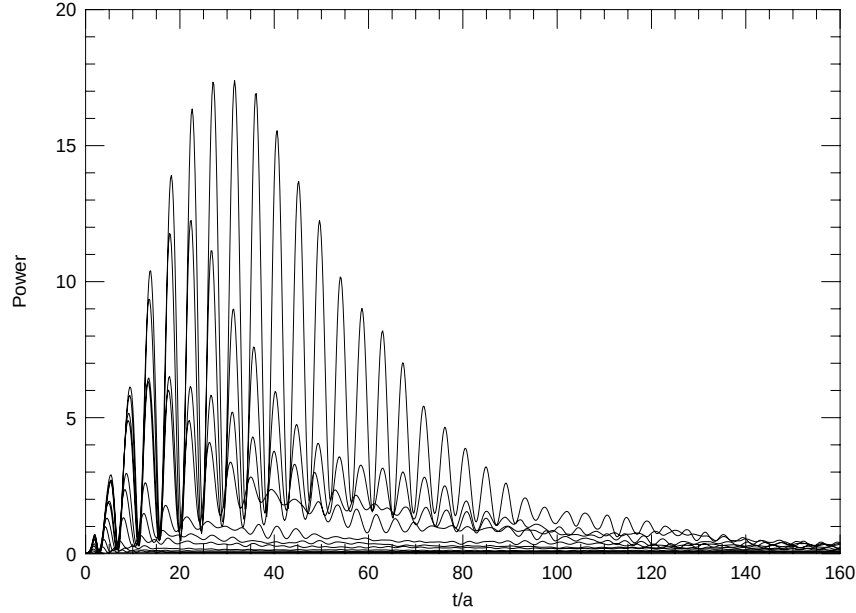


Abbildung 2.7: Die Zeitentwicklungen der Stärke der Pionen $P(k, t)$ [RW 93] für einige Pion-Moden nach dem „quenching“ bei $t = 0$. Die Kurven (von oben nach unten) entsprechen $ka = 0.20, 0.26, 0.31, 0.37, 0.48, 0.60, 0.71, 0.94, 1.16, 1.39$ und 1.84 , wobei $a = (200 \text{ MeV})^{-1}$.

schiedene Moden, qualitativ verstehen. $P(k, t)$ ist definiert als

$$P(k, t) = \sum_{|\mathbf{k}|=k} \frac{1}{V} \left| \int d^3r \, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right|^2 = \sum_{|\mathbf{k}|=k} V \, \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\pi}_{-\mathbf{k}}. \quad (2.13)$$

In Abb. 2.7 ist $P(k, t)$ für verschiedene k dargestellt. Wir erkennen aus Abb. 2.7, daß die langwelligen Moden temporär stark anwachsen. Obwohl die „quench“ Bedingung eine recht drastische Annahme darstellt, und wahrscheinlich in der Wirklichkeit nicht realisiert wird, bringt die numerische Rechnung im „quench“ Szenario eine qualitative Erkenntnis über die Entwicklung der chiralen Felder: Die langwelligen Pion-Moden sind instabil und wachsen an.

Die Größe der DCC-Domäne ist eine wichtige Größe. Nur eine große Domäne ist von experimentellem Interesse, da sie eine große Anzahl von Pionen emittieren kann. Das Anwachsen der langwelligen Pion-Moden im „quench“ Szenario bedeutet qualitativ ein Anwachsen der DCC-Domäne. Um die Domänengröße zu charakterisieren, verwenden viele Autoren die Korrelationslänge von $\boldsymbol{\pi}$ mittels einer Korrelationsfunktion, die man wie folgt definiert:

$$C(\mathbf{x}, t) := \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{0}, t) \rangle = \int d^3y \, \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t) \boldsymbol{\pi}(\mathbf{y}, t),$$

wobei $\langle \dots \rangle$ eine Raummittlung bedeutet. Die Korrelationslänge wird hierbei als mittlere Größe der DCC-Domäne interpretiert. Gavin, Gocksch und

Pisarski [GGP 94] haben die Korrelationslänge von π zu einem späteren Zeitpunkt unter der „quench“ Bedingung berechnet. Sie erhielten einen sehr kleinen Wert, ~ 2 fm.

Rajagopal kritisierte, daß die Korrelationslänge von π in der Nichtgleichgewichtphysik wenig Bedeutung habe [RW 93], da keine eigentliche charakteristische Längenskala für alle Moden vorliegt. Wir werden an späterer Stelle zur Quantisierung der „Größe“ eines DCCs die gesamte Anzahl der aus dem DCC emittierten Pionen betrachten.

2.5.2 Expansion und Anfangsbedingung

In einer Schwerionenkollision expandiert das System mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. Durch die Expansion wird das Feld Φ gedämpft. Folglich sinken die Fluktuationen $< \delta\phi^2 >$ (wie auch die Temperatur). Falls die Expansion so schnell abläuft, daß der Ordnungsparameter ϕ nicht gleich schnell reagieren kann und immer noch um den zu höherer Temperatur gehörigen Wert zentriert ist, kann Instabilität für die langwelligen Pion-Moden hergestellt werden.

Nach Bjorken's Idee der „boost“ invarianten longitudinalen Expansion [B 83] können wir die Gleichung (2.7) in neue Koordinaten (x, y, τ, η) transformieren, wobei $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ die Eigenzeit und $\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{t+z}{t-z}$ die Rapidity ist. Wir erhalten die neue Bewegungsgleichung durch die folgende Substitution in (2.7):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\tau^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right].$$

Mit der Annahme, daß das Feld $\Phi(x, y, \tau, \eta)$ von η unabhängig ist, lösen Asakawa, Huang und Wang [AHW 95] $\Phi(x, y, \tau)$ auf einem zweidimensionalen Gitter. Die zu lösende Bewegungsgleichung lautet:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Phi + \lambda(\Phi^2 - v^2)\Phi = H \hat{\sigma}.$$

Die Anfangseigenzeit wurde mit $\tau_0 = 1$ fm angesetzt. Die Anfangsbedingungen an jedem Gitterpunkt werden wie folgt gewählt: Außerhalb eines Kreises mit dem Radius 5 fm ist Vakuum. Innerhalb des Kreises werden die Anfangsbedingungen ähnlich wie bei dem „quench“ Szenario festgelegt. Der Unterschied zu dem „quench“ Szenario ist der Gitterabstand $a = 0.25$ fm, der kleiner als die Anfangskorrelationslänge $l = 0.5$ fm ist. Aus der numerischen Rechnung fanden die Autoren, daß die Korrelationslänge zu einem späteren Zeitpunkt $\tau = 7$ fm ungefähr 2.5 fm beträgt. Das bedeutet, daß unter der eindimensionalen Expansion keine große DCC-Domäne produziert werden kann. Ähnliche Rechnungen mit der Berücksichtigung der Abhängigkeit von der Rapidity η wurden von Blaizot und Krzywicki [BK 94], Cooper [CKMP 95] und Lampert [LDC 96] durchgeführt.

Gavin und Müller [GM 94] haben eine dreidimensionale Expansion angenommen. Sie betrachteten die Bewegung des Ordnungsparameters ϕ , der nur von der Eigenzeit $\tau = \sqrt{t^2 - r^2}$ abhängt. Die Bewegungsgleichung für ϕ ist:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{3}{\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \phi + \lambda(\phi^2 + \langle \delta \phi^2 \rangle + 2 \langle \delta \phi_{\parallel}^2 \rangle - v^2) = H \hat{\sigma}.$$

Die Fluktuation in der obigen Gleichung wird so modelliert, daß sie mit der Zeit sinkt:

$$\langle \delta \phi^2 \rangle + 2 \langle \delta \phi_{\parallel}^2 \rangle \approx \epsilon v^2 \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2,$$

wobei ϵ als eine Konstante in der Größenordnung 1 angesetzt wurde [GM 94]. Dieses Szenario, auch „annealing“ Szenario genannt, unterscheidet sich grundsätzlich von dem „quench“ Szenario. Im „annealing“ Szenario werden die Anfangsbedingungen sowohl für ϕ und $\dot{\phi}$ als auch für die Fluktuation im thermischen Gleichgewicht der symmetrischen Phase gewählt. Durch die starke Expansion sinkt die Fluktuation (Temperatur). Die Symmetrie wird spontan gebrochen. Da die Geschwindigkeit der Expansion viel größer als die Geschwindigkeit des „roll down“ ist, kommt es zu einer Instabilität der langwelligen Moden. Das Feld π_0 wächst in der „roll down“ Periode exponentiell an. Da diese „roll down“ Periode größer als die im „quench“ Szenario ist, spekulierten Gavin und Müller, daß eine große DCC-Domäne mit einer Korrelationslänge von ungefähr 7 fm produziert werden kann.

In [AHW 95] haben Asakawa, Huang und Wang auch die Rechnung mit den Anfangsbedingungen des „annealing“ Szenarios durchgeführt (eindimensionale Expansion ohne Modellierung der Fluktuation). Sie fanden, daß „annealing“ zu einer kleineren Domänengröße führte als „quenching“. Sie demonstrierten ferner, daß eine „quench“ Bedingung nicht durch ein „annealing“ Szenario bei sehr hoher Temperatur effektiv erhalten werden kann. Der tiefere Grund dafür ist die Eigenschaft der starken Kopplung des linearen σ -Modells ($\lambda = 20$). In dem Regime der starken Kopplung ist die Zeit der Wechselwirkung zwischen dem Ordnungsparameter und den Quasiteilchen sehr kurz (zumindestens in der eindimensionalen Expansion). Folglich existiert die Instabilität nur für kurze Zeit.

Eine dreidimensionale Gitterrechnung wurde von Randrup [R 97] durchgeführt, wobei er der Gleichung (2.7) eine Pseudo-Expansion $\frac{D}{t} \partial_t \Phi$ hinzufügte:

$$\square \Phi + \frac{D}{t} \partial_t \Phi + \lambda(\Phi^2 - v^2) \Phi = H \hat{\sigma}. \quad (2.14)$$

Damit können die verschiedenen Expansions-Szenarien simuliert werden: $D = 1$ für longitudinale, $D = 2$ für transversale und $D = 3$ für isotrope Expansion. Die Berechnung startet bei $t_0 = 1$ fm. Die Anfangsbedingungen an jedem Gitterpunkt werden nach der Methode von Randrup [R 97] im thermischen

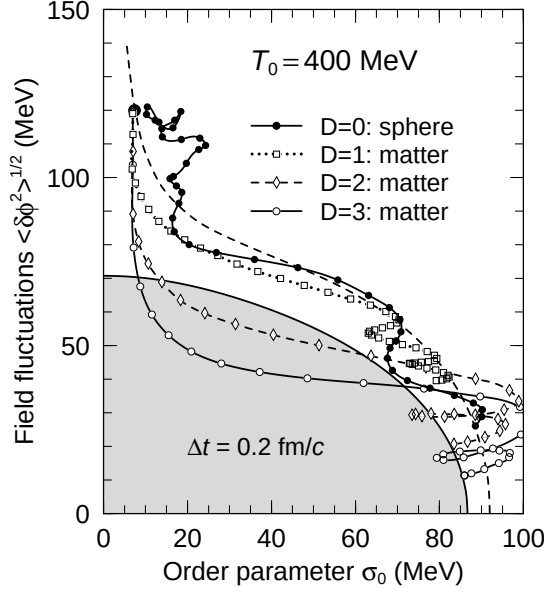


Abbildung 2.8: Die dynamischen Verläufe für verschiedene Expansions-Szenarien [R 97]. Als Anfangstemperatur wurde $T_0 = 400$ MeV gewählt. Das Zeitintervall zwischen den nachfolgenden Symbolen auf den Linien beträgt $\Delta t = 0.2 \text{ fm}/c$. Die schattierte Fläche stellt die instabile Region dar, in der μ_0^2 negativ ist.

Gleichgewicht gewählt. (Eine ähnliche Methode für die Auswahl der Anfangsbedingungen im thermischen Gleichgewicht ist auch von Csernai [MCL 98] entwickelt worden.) In Abb. 2.8 sind der Ordnungsparameter in σ -Richtung und die Wurzel der Fluktuation zu verschiedenen Zeitpunkten für verschiedene Expansions-Szenarien dargestellt. Die Anfangstemperatur wurde mit $T_0 = 400$ MeV angesetzt. Die schattierte Fläche ist die instabile Region, in der μ_0^2 negativ ist. Die gepunktete Linie (ohne Markierung) zeigt den Verlauf mit sehr langsamer Expansion. In Abb. 2.8 ist deutlich zu erkennen, daß in der ($D = 1$)-Expansion kaum Instabilität erreicht wird und eine ($D = 3$)-Expansion zu einem deutlichen Eindringen in die instabile Region führt. Folglich kann eine große DCC-Domäne durch eine schnelle Expansion produziert werden.

In Abb. 2.9 ist die Stärke der Pion-Moden, welche in [R 97] anders definiert als in (2.13),

$$P_k \sim \sum_{|\mathbf{k}|=k} \omega_k^2 |\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{k}}|^2,$$

als eine Funktion der kinetischen Energie des Pions, $\omega_k - m_k$, wobei $\omega_k^2 = k^2 + m_k^2$, zu einem späteren Zeitpunkt dargestellt. Das starke Anwachsen der langwelligen Pion-Moden in der ($D = 3$)-Expansion ist deutlich zu sehen. Dies folgt aus der Tatsache, daß nur die langwelligen Moden während der „roll

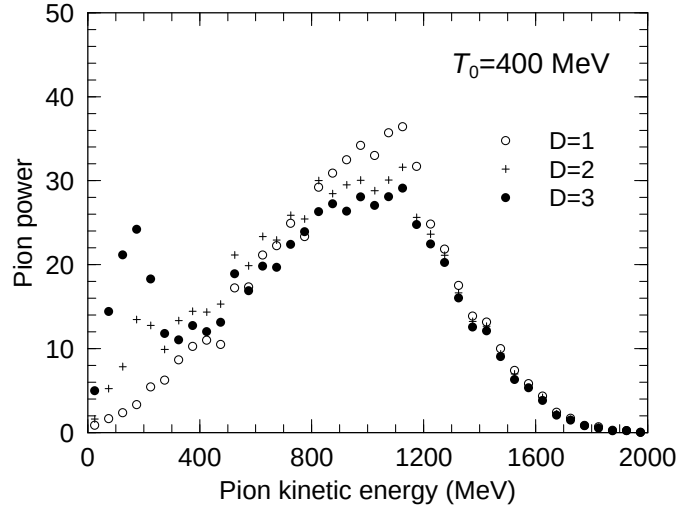


Abbildung 2.9: Das „Stärke-Spektrum“ der Pionen $P_k(E_k)$ für verschiedene Expansions-Szenarien [R 97].

down“ Periode instabil sind. Das „Stärke-Spektrum“ der Pionen liefert ein weiteres Signal für eine mögliche DCC-Formation.

Durch 100 Rechnungen mit unabhängigen Anfangskonfigurationen wurde die Verteilung des Bruchteils $f = \frac{n_{\pi_0}}{n_{\pi_{\pm}} + n_{\pi_0}}$ berechnet, wobei $n_k \sim \omega_k |\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{k}}|^2$ die gesamte Anzahl der Pionen aller $|\mathbf{k}| = k$ Moden ist. In Abb. 2.10 ist das Resultat von $p(f)$ für verschiedene Expansions-Szenarien und für verschiedene k -Bereiche sowohl durch das Lösen von (2.14) (links) als auch mittels der approximativen Gleichungen (2.11) (2.12) (rechts) dargestellt. Aus Abb. 2.10 erkennen wir, daß das $\frac{1}{2\sqrt{f}}$ Verhalten nur für $k = 0$ Mode näherungsweise erfüllt ist, während für $\sum_k n_k$ die Verteilung um 1/3 zentriert ist, so daß das charakteristische Signal völlig ausgelöscht wird. Deswegen hängt das Beobachtungsvermögen des $\frac{1}{2\sqrt{f}}$ Verhaltens von der Fähigkeit der Identifikation der Null-Pion-Mode ab.

In den bisher vorgestellten Modellierungen ist die Zeitentwicklung der chiralen Felder eindeutig bestimmt, sobald die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Variation der Anfangsbedingungen kann zu einer statistischen Analyse führen. In einer Schwerionenkollision ist die Zeitentwicklung der Felder viel komplizierter und schwer vorhersagbar. Hier bedarf es einer statistischen Betrachtung. In dem nächsten Abschnitt werden wir hierzu das Langevin-Szenario vorstellen.

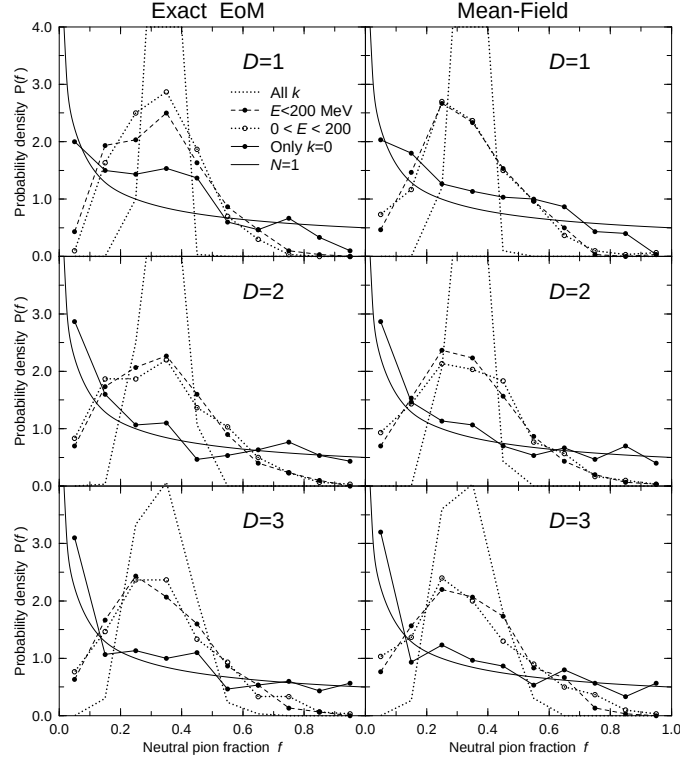


Abbildung 2.10: Die Verteilung $p(f)$ für verschiedene Expansions-Szenarien und für verschiedene k -Bereiche [R 97]

2.6 Das Langevin-Szenario

In dem Szenario von Biro und Greiner [BG 97] wird die Null-Mode des Feldes Φ als der Ordnungsparameter betrachtet. Sie nahmen an, daß alle anderen Moden im lokalen thermischen Gleichgewicht sind und ein Wärmebad mit der Temperatur T bilden. Die Wechselwirkung zwischen dem Ordnungsparameter und dem Wärmebad läßt sich in thermischer Feldtheorie näherungsweise berechnen. Aus dem 1-loop Beitrag erhalten wir einen temperaturabhängigen Massenterm $\langle \delta\phi^2 \rangle + 2 \langle \delta\phi_{\parallel}^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \lambda T^2$ in der Bewegungsgleichung des Ordnungsparameters. Somit ist die Bewegungsgleichung der im „annealing“ Szenario ähnlich. Die Berechnung des 2-loop Beitrages führt zu einem Dissipationsterm und einem Rauschterm [GM 97], die in der Bewegungsgleichung (2.8) des Ordnungsparameters mit der Hartree-Approximation nicht beinhaltet sind. Die effektive Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\phi}(\tau) + \left(\frac{D}{\tau} + \eta \right) \dot{\phi}(\tau) + \lambda \left(\phi^2(\tau) + \frac{1}{2} T^2(\tau) - v^2 \right) \phi(\tau) = H \hat{\sigma} + \xi(\tau), \quad (2.15)$$

wobei τ die Eigenzeit und D die Expansionsdimension darstellt. Die stochastische Gleichung (2.15) ist vom Langevin-Typ. Der Rauschterm $\xi(\tau)$ wurde als

weiß angenommen und mit dem Reibungskoeffizient η des Dissipationsterms verknüpft:

$$\langle \xi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(\tau_1) \xi_j(\tau_2) \rangle = \frac{2T}{V} \eta \delta_{ij} \delta(\tau_1 - \tau_2).$$

Der Reibungskoeffizient wird mit der „on-shell“ Plasma-Dämpfung der ϕ^4 -Theorie identifiziert. In [BG 97] wurde $\eta = (2.2 \text{ fm})^{-1}$, der Wert bei der Übergangstemperatur $T_c = 123 \text{ MeV}$, als eine Konstante in (2.15) angenommen.

Die Expansion und die Kühlung des Systems werden durch die Gleichungen

$$\frac{\dot{V}}{V} - \frac{D}{\tau} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\dot{T}}{T} + \frac{D}{3\tau} = 0$$

beschrieben. Man erhält mögliche Anfangsbedingungen für $\phi(\tau = \tau_0)$ und $\dot{\phi}(\tau = \tau_0)$ dadurch, daß (2.15) ohne Expansion ($D=0$) mit konstanter Temperatur $T(\tau) = T(\tau_0)$ und konstantem Volumen $V(\tau) = V(\tau_0)$ für hinreichend lange Zeit propagiert wird. Dieser Vorgang wird Vorheizen genannt und dient zur Auswahl der Anfangsbedingungen. Damit kann ein Ensemble von unabhängigen Anfangskonfigurationen des Feldes erhalten werden.

In [BG 97] lösten Biro und Greiner die Gleichung (2.15) mit $D = 1$, $\tau_0 = 1 \text{ fm}$, $T(\tau_0) = T_c$ und einem Ensemble von 1000 unabhängigen Anfangsbedingungen. Sie fanden, daß das (Ensemble-)gemittelte Quadrat der effektiven Pion-Masse,

$$\mu_0^2(\tau) = \lambda \left(\phi^2(\tau) + \frac{1}{2} T^2(\tau) - v^2 \right),$$

während der Zeitentwicklung stets positiv ist. Das bedeutet, daß eine eindimensionale Expansion im Mittel zu keiner Instabilität führt. Jedoch ist für fast alle einzelne Verläufe des Ensembles μ_0^2 über einige Zeitintervalle negativ. Dies demonstriert, daß es möglich sein kann, eine DCC-Domäne sogar in ($D = 1$)-Expansion zu produzieren.

Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, ist die Gleichung (2.15) nur eine markovsche Näherung einer verallgemeinerten Langevin-Gleichung mit einem Gedächtniskernel und farbigen Rauschen. Im nächsten Kapitel betrachten wir die Langevin-Gleichung und ihre verallgemeinerte Form.

Kapitel 3

Die Langevin-Gleichung

Betrachten wir ein Vielteilchensystem, so ist oft die Zeitentwicklung des Systems nicht eindeutig bestimmt. Gründe hierfür sind beispielweise mangelnde Kenntnisse über den Anfangszustand, die Wechselwirkung zwischen den Teilchen und einen möglichen äußeren Einfluß. In vielen Fällen kann eine Wahrscheinlichkeitsaussage für eine Realisierung der Zeitentwicklung des Systems gemacht werden. Es handelt sich in diesem Fall um ein statistisches Problem.

In diesem Kapitel werden wir zunächst stochastische Prozesse mathematisch darstellen. Als nächstes wird Rauschen, ein spezieller stochastischer Prozeß, diskutiert und numerisch simuliert. Das dabei entwickelte mathematische Konzept wird auf das Lösen der Langevin-Gleichung und ihrer verallgemeinerten Form zur Beschreibung der Brown'schen Bewegung angewendet. Am Ende dieses Kapitels werden wir als weiteres Beispiel die Bewegung eines Oszillators in einer Flüssigkeit betrachten.

3.1 Stochastische Prozesse

In diesem Abschnitt werden stochastische Prozesse mathematisch formuliert und klassifiziert. Ein wichtiger stochastischer Prozeß, der Gauß'sche Prozeß, wird erläutert. Wir betrachten ferner die Fourier-Transformation für stationäre Prozesse.

3.1.1 Formulierung und Klassifizierung stochastischer Prozesse

Ein Prozeß beschreibt die Zeitentwicklung eines Zustandes. Die Realisierung eines Prozesses wird durch eine Funktion $f(t)$ dargestellt, wobei $t \in [a, b]$. Da jeder Prozeß in der Praxis zu diskreten Zeiten t_i beobachtet wird, kann die Realisierung dieses Prozesses durch eine Folge $\{f(t_i), i = 1, \dots, n\}$ angegeben

werden, wobei $t_1 = a$ und $t_n = b$.

Ein Prozeß heißt *stochastisch*, wenn die Kenntnis über einen Zustand zu allen vorhergehenden Zeiten nicht ausreicht, seine zukünftige Entwicklung genau festzulegen. Es gibt also mehrere Möglichkeiten bei der Realisierung. Die Wahrscheinlichkeit der möglichen Realisierungen charakterisiert den stochastischen Prozeß.

Die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Realisierung $f(t)$ ist ein Funktional $P[f(t)]$. Im Fall diskreter Zeiten erhalten wir eine mehrdimensionale Wahrscheinlichkeit $P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n)$, welche die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von f_1 zu t_1 , ..., f_n zu t_n angibt. Durch Integration von $P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n)$ können wir die Wahrscheinlichkeit aller niedrigeren Ordnungen erhalten:

$$\begin{aligned} P_{n-1}(f_1, t_1; \dots; f_{n-1}, t_{n-1}) &= \int df_n P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n), \\ P_{n-2}(f_1, t_1; \dots; f_{n-2}, t_{n-2}) &= \int df_n df_{n-1} P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n), \\ &\vdots \\ P_1(f_1, t_1) &= \int df_n df_{n-1} \dots df_2 P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n). \end{aligned}$$

Falls die möglichen Realisierungen nicht eine Serie von diskreten Linien, sondern ein Band von beliebig dicht nebeneinander liegenden Linien darstellen, ist es nicht mehr sinnvoll, die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Realisierung zu definieren. Stattdessen können wir die Wahrscheinlichkeit dafür, eine bestimmte Realisierung $f(t)$ in einer infinitesimalen Klasse von Linien um $f(t)$ zu finden, angeben. Sie besitzt für den Fall der diskreten Zeiten die Form

$$P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) df_1 df_2 \dots df_n. \quad (3.1)$$

Wir definieren einen zu (3.1) äquivalenten Ausdruck für ein kontinuierliches $f(t)$:

$$P[f(t)] \mathcal{D}f(t).$$

$P[f(t)]$ und $P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n)$ stellen hier die Wahrscheinlichkeitsdichte dar. Die Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte folgt aus

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \mathcal{D}f(t) P[f(t)] = 1. \quad (3.2)$$

(3.2) stellt ein *Pfadintegral* [FH 65] dar, das eine Summe über alle möglichen $f(t)$ ist, wobei $t \in [a, b]$.

Ein anderer Zugang zur Analyse des stochastischen Prozesses besteht in der Einführung bedingter Wahrscheinlichkeiten [R 87]

$$P_{m|n}(f_{n+1}, t_{n+1}; \dots; f_{n+m}, t_{n+m} | f_1, t_1; \dots; f_n, t_n),$$

welche die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von f_{n+1} zu t_{n+1} , ..., f_{n+m} zu t_{n+m} unter der Bedingung, daß f_1 zu t_1 , ..., f_n zu t_n vorlag, angeben. Es gilt offenbar

$$\begin{aligned} & P_{n+m}(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n; f_{n+1}, t_{n+1}; \dots; f_{n+m}, t_{n+m}) \\ &= P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) P_{m|n}(f_{n+1}, t_{n+1}; \dots; f_{n+m}, t_{n+m} | f_1, t_1; \dots; f_n, t_n). \end{aligned}$$

Anhand der bedingten Wahrscheinlichkeit können wir die stochastischen Prozesse klassifizieren:

a) *Reiner Zufallsprozeß*:

$$P_{1|n}(f_{n+1}, t_{n+1} | f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) = P_1(f_{n+1}, t_{n+1})$$

Bei diesem einfachsten Typ ist die Wahrscheinlichkeit $P_1(f_{n+1}, t_{n+1})$ nicht von der Vorgeschichte abhängig. Der Prozeß enthält keine Korrelation zwischen den verschiedenen Zeitpunkten. Durch $P_1(f_{n+1}, t_{n+1})$ ist der reine Zufallsprozeß bestimmt:

$$P_m(f_1, t_1; \dots; f_m, t_m) = P_1(f_1, t_1) P_1(f_2, t_2) \cdots P_1(f_m, t_m).$$

b) *Markov-Prozeß*:

$$\begin{aligned} P_{1|n}(f_{n+1}, t_{n+1} | f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) &= P_{1|1}(f_{n+1}, t_{n+1} | f_n, t_n), \\ &\text{für } t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}. \end{aligned}$$

$P_{1|1}$ bezeichnen wir als die Übergangswahrscheinlichkeit. Ein Markov-Prozeß wird dadurch charakterisiert, daß die Übergangswahrscheinlichkeit nicht von der Vorgeschichte abhängt. Durch $P_1(f_1, t_1)$ und $P_{1|1}(f_{n+1}, t_{n+1} | f_n, t_n)$ ist dieser Prozeß bestimmt:

$$P_m(f_1, t_1; \dots; f_m, t_m) = P_1(f_1, t_1) P_{1|1}(f_2, t_2 | f_1, t_1) \cdots P_{1|1}(f_m, t_m | f_{m-1}, t_{m-1}).$$

c) *Nicht-Markov-Prozeß*:

Alle andere Prozesse, die nicht durch einen reinen Zufallsprozeß oder einen Markov-Prozeß beschrieben werden können, sind Nicht-Markov-Prozesse. Zur Beschreibung von Nicht-Markov-Prozessen benötigen wir höhere bedingte Wahrscheinlichkeit.

3.1.2 Der Gauß'sche Prozeß

Kennen wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $P[f(t)]$ eines stochastischen Prozesses, so können wir den Mittelwert einer Beobachtungsgröße $Q[f(t)]$, die auch ein Funktional von $f(t)$ ist, wie üblich definieren als

$$\langle Q[f(t)] \rangle := \int \mathcal{D}f(t) Q[f(t)] P[f(t)].$$

Speziell stellt der Mittelwert von $e^{i \int dt k(t) f(t)}$, wobei $k(t)$ eine reelle Funktion ist, die Funktional-Fourier-Transformierte von $P[f(t)]$ dar, die als *charakteristisches Funktional* $\Phi[k(t)]$ bezeichnet wird:

$$\Phi[k(t)] := \langle e^{i \int dt k(t) f(t)} \rangle = \int \mathcal{D}f(t) e^{i \int dt k(t) f(t)} P[f(t)] . \quad (3.3)$$

Das charakteristische Funktional $\Phi[k(t)]$ ist eine äquivalente Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte $P[f(t)]$, da $P[f(t)]$ durch

$$P[f(t)] = \int \mathcal{D}k(t) e^{-i \int dt k(t) f(t)} \Phi[k(t)]$$

zurücktransformiert werden kann.

Entwickeln wir $e^{i \int dt k(t) f(t)}$ in (3.3) nach $k(t)$, so erhalten wir

$$\Phi[k(t)] = 1 + i \int dt \langle f(t) \rangle k(t) - \frac{1}{2!} \int dt ds \langle f(t) f(s) \rangle k(t) k(s) + \dots$$

Aus der obigen Gleichung erkennen wir, daß neben der Wahrscheinlichkeitsdichte und dem charakteristischen Funktional auch die Kenntnisse über den Mittelwert $\langle f(t) \rangle$ und alle Korrelationen $\langle f(t) f(s) \rangle$, $\langle f(t) f(s) f(r) \rangle$, ..., zur Beschreibung eines stochastischen Prozesses dienen. Aus der Definition der Funktional-Ableitung [FH 65]

$$F[x(t) + \varepsilon(t)] = F[x(t)] + \int dt \frac{\delta F}{\delta x(t)} \varepsilon(t) + \frac{1}{2!} \int dt ds \frac{\delta^2 F}{\delta x(t) \delta x(s)} \varepsilon(t) \varepsilon(s) + \dots$$

folgt, daß

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= -i \left. \frac{\delta \Phi}{\delta k(t)} \right|_{k(t)=0} , \\ \langle f(t) f(s) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 \Phi}{\delta k(t) \delta k(s)} \right|_{k(t)=k(s)=0} , \\ \text{usw. .} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ein Prozeß, der durch den Mittelwert $\langle f(t) \rangle$ und die Korrelationsfunktion $\langle f(t) f(s) \rangle$ vollkommen charakterisiert ist, wird als *Gauß'scher Prozeß* bezeichnet. Das charakteristische Funktional des Gauß'schen Prozesses hat die folgende generelle Form:

$$\Phi[k(t)] = e^{i \int dt k(t) F(t)} e^{-\frac{1}{2} \int dt ds k(t) k(s) A(t,s)} . \quad (3.5)$$

Aus (3.4) folgt:

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle f(t) \rangle \\ \text{und} \quad A(t, s) &= \langle f(t) f(s) \rangle . \end{aligned}$$

Daher ist $F(t)$ der Mittelwert und $A(t, s)$ die Korrelationsfunktion des Prozesses. Aus den Funktional-Ableitungen höherer Ordnung von $\Phi[k(t)]$ (3.5) erkennen wir, daß die Korrelationen höherer Ordnung $\langle f(t)f(s)f(r) \rangle, \dots$, durch $F(t)$ und $A(t, s)$ bestimmt werden können. Speziell für $F(t) = 0$ verschwinden die Korrelationen ungerader Ordnung und für die Korrelationen gerader Ordnung gilt:

$$\langle f(t_1)f(t_2)\cdots f(t_n) \rangle = \sum_{\text{alle Permutationen}} \langle f(t_i)f(t_j) \rangle \cdots \langle f(t_k)f(t_l) \rangle .$$

Durch die Rücktransformation von $\Phi[k(t)]$ (3.5) erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte $P[f(t)]$ im Fall für $F(t) = 0$

$$P[f(t)] = c e^{-\frac{1}{2} \int dt ds f(t)f(s)B(t,s)} , \quad (3.6)$$

wobei c die Normierungskonstante ist und die Funktion $B(t, s)$ reziprok zu $A(t, s)$ ist, d.h.

$$\int ds A(t', s) B(s, t) = \delta(t' - t) . \quad (3.7)$$

Wenn wir die Zeitachse äquidistant mit einem hinreichenden kleinen Zeitabstand Δt zerlegen, können wir die n-dimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte $P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n)$ aus (3.6) erhalten:

$$P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) = c \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_i f_j B(t_i, t_j) (\Delta t)^2 \right] .$$

Aus (3.7) folgt

$$\sum_{i=1}^n A(t_k, t_i) B(t_i, t_j) \Delta t = \frac{1}{\Delta t} \delta_{kj} . \quad (3.8)$$

Wenn wir

$$b_{ij} := B(t_i, t_j) (\Delta t)^2$$

als ein Element der Matrix b definieren, dann deutet (3.8) an, daß die Matrix b die Inverse der Korrelationsmatrix a mit $a_{ij} := A(t_i, t_j)$ ist, d.h.

$$A(t_i, t_j) = a_{ij} = (b^{-1})_{ij} .$$

Folglich erhalten wir

$$P_n(f_1, t_1; \dots; f_n, t_n) = c \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_i f_j b_{ij} \right] . \quad (3.9)$$

Die Normierung von (3.9) liefert $c = (2\pi)^{-n/2} \sqrt{\det b}$. (3.9) stellt eine n-dimensionale Gauß-Verteilung dar [D 83]. Speziell für $n = 1$ und 2 erhalten

wir die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten von f_i zur Zeit t_i bzw. für das Auftreten von f_i und f_{i+1} zu nachfolgenden Zeiten t_i und t_{i+1} :

$$P_1(f_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{f_i^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.10)$$

$$\text{und } P_2(f_i, t_i; f_{i+1}, t_{i+1}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho(t_i, t_{i+1})}} \exp\left[-\frac{f_i^2 - 2\rho(t_i, t_{i+1})f_i f_{i+1} + f_{i+1}^2}{2\sigma^2(1-\rho^2(t_i, t_{i+1}))}\right], \quad (3.11)$$

wobei $\sigma^2 = \langle f^2(t) \rangle$ und $\rho(t_i, t_{i+1}) = \frac{\langle f(t_i)f(t_{i+1}) \rangle}{\sigma^2}$.

Der Gauß'sche Prozeß ist deswegen wichtig, weil viele physikalische Phänomene, bei denen die Beobachtungsgröße aus einer großen Anzahl von unabhängigen kleinen Ereignissen resultiert, approximativ Gauß'sche Prozesse sind. Es ist die Aussage des *Zentralen Grenzwert Theorems*, das wir später speziell am Beispiel des Gauß'schen Rauschens erläutern werden.

3.1.3 Fourier-Transformation für stationäre Prozesse

Wenn sich der Mittelwert und alle Korrelationen eines stochastischen Prozesses bei einer Verschiebung des Zeitpunktes nicht ändern, sprechen wir von einem *stationären Prozeß*. Insbesondere gilt für solche Fälle

$$F(t) = \langle f(t) \rangle = F(0) = \text{konstant} \\ \text{und} \quad A(t, s) = \langle f(t)f(s) \rangle = A(|t - s|).$$

Wir betrachten einen stationären Prozeß $f(t)$, der von $t = 0$ bis $t = T$ beobachtet wird. Die Funktion $f(t)$ kann mathematisch über das Intervall $[0, T]$ hinaus fortgesetzt werden, d.h. wir definieren

$$f_T(t) := \begin{cases} f(t) & : t \in [0, T] \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit der Fourier-Transformierten $f_T(\omega)$ von $f_T(t)$

$$f_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f_T(t) e^{i\omega t} \quad (3.12)$$

läßt sich die *Spektraldichte* $S(\omega)$ für den stationären Prozeß bestimmen:

$$S(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |f_T(\omega)|^2 \rangle. \quad (3.13)$$

Die Spektraldichte $S(\omega)$ gibt die mittlere Intensität an, die hinter einem schmalen Frequenzfilter in dem Intervall $(\omega, \omega + d\omega)$ gemessen wird. Setzen wir (3.12)

in (3.13) ein, so erhalten wir die folgende Beziehung zwischen der Spektraldichte $S(\omega)$ und der Korrelationsfunktion $A(\tau)$ eines stationären Prozesses:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt A(\tau) e^{i\omega\tau}$$

und
$$A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) e^{-i\omega\tau} . \quad (3.14)$$

Die Beziehung (3.14) ist bekannt als *Theorem von Wiener und Khinchin* [R 87]. Insbesondere gilt:

$$\langle f^2(t) \rangle = A(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) .$$

3.2 Rauschen

Wir betrachten Experimente, in denen zufällige Pulse detektiert werden. Eine typische Registrierung der zufälligen Pulse, die während der Meßzeit T an den Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots, t_n$ zentriert sind, wird in Abb. 3.1 dargestellt. Die

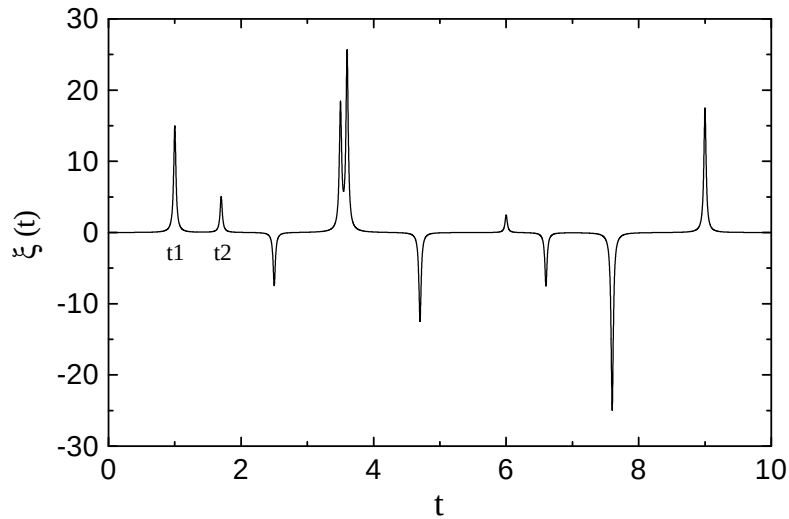


Abbildung 3.1: Registrierung einer Folge von zufälligen Pulsen. Hier ist die Einzel-Pulsform als eine Lorentzform angenommen.

Meßgröße $\xi(t)$, eine Funktion der Zeit, hat die Form

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n a_i b(t - t_i) , \quad t \in [0, T] ,$$

wobei $b(\tau)$ eine definierte einheitliche Pulsform (die zunächst als beliebig angenommen sei) und a_i die Pulshöhe darstellt [FH 65] [HEER]. In Abb. 3.1 hat $b(\tau)$ die Lorentzform.

Der Meßprozeß $\xi(t)$ stellt einen stochastischen Prozeß dar, der durch folgende drei zufällige Größen beschrieben wird. Erstens, die Zufälligkeit des Auftretens von n Pulsen während dem Meßintervall $[0, T]$ deutet an, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Auftreten eines Pulses zum Zeitpunkt t_i gleich groß wie für das Auftreten des Pulses zu den anderen Zeitpunkten ist, d.h. $p_{t_i} := \frac{p(t_i \in (t_i, t_i + dt))}{dt} = \frac{1}{T}$. Zweitens, die Pulshöhe a_i ist eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung unbekannt ist. Wir bezeichnen sie zunächst als $p(a_i)$. Ferner nehmen wir an, daß der Mittelwert von a_i Null ist, so daß $\xi(t)$ im Mittel verschwindet. Drittens, die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Pulse, die während dem Meßintervall $[0, T]$ auftreten sollen, ist gegeben durch die *Poisson-Verteilung*:

$$P_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}}, \quad \text{wobei } \bar{n} = \mu T.$$

μ ist die mittlere Anzahl der Pulse pro Zeiteinheit.

Aus den Wahrscheinlichkeitsdichten p_t und $p(a_i)$ und der Wahrscheinlichkeit P_n können wir die Wahrscheinlichkeit für die Realisierung $\xi(t)$ mit der Unschärfe $\mathcal{D}\xi(t)$ substituieren:

$$P[\xi(t)] \mathcal{D}\xi(t) \rightarrow \sum_n P_n p(a_1) da_1 \cdots p(a_n) da_n \frac{dt_1}{T} \cdots \frac{dt_n}{T}.$$

Daraus folgt für das charakteristische Funktional

$$\begin{aligned} \Phi[k(t)] &= \int e^{i \int dt k(t) \xi(t)} P[\xi(t)] \mathcal{D}\xi(t) \\ &= \sum_n P_n \int \exp \left[i \sum_j a_j \int dt k(t) b(t - t_j) \right] p(a_1) da_1 \cdots p(a_n) da_n \frac{dt_1}{T} \cdots \frac{dt_n}{T} \\ &= \sum_n P_n \prod_{j=1}^n \int_0^T \frac{dt_j}{T} \int_{-\infty}^{\infty} da_j p(a_j) e^{i a_j \int dt k(t) b(t - t_j)}. \end{aligned}$$

Wir definieren die *charakteristische Funktion* [FH 65] von $p(a_i)$ als

$$W(\omega) = \int da_i p(a_i) e^{i \omega a_i}. \quad (3.15)$$

Folglich hat $\Phi[k(t)]$ folgende Gestalt:

$$\Phi[k(t)] = \sum_n P_n \prod_{j=1}^n \int_0^T \frac{dt_j}{T} W \left(\int dt k(t) b(t - t_j) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_n P_n \left[\int_0^T \frac{ds}{T} W \left(\int dt k(t) b(t-s) \right) \right]^n \\
&= \sum_n \frac{(\mu T)^n}{n!} e^{-\mu T} \left[\int_0^T \frac{ds}{T} W \left(\int dt k(t) b(t-s) \right) \right]^n \\
&= \text{Exp} \left[-\mu T + \mu \int_0^T ds W \left(\int dt k(t) b(t-s) \right) \right] \\
&= \text{Exp} \left[-\mu \int_0^T ds \left\{ 1 - W \left(\int dt k(t) b(t-s) \right) \right\} \right]. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Entwickeln wir $e^{i\omega a_i}$ in (3.15), so wird

$$\begin{aligned}
W(\omega) &= 1 + i \langle a_i \rangle \omega - \frac{1}{2} \langle a_i^2 \rangle \omega^2 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \omega^2 + \dots. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Nach der obigen Annahme verschwindet der Mittelwert von a_i . σ^2 ist die Varianz der Verteilung $p(a_i)$. Einsetzen von (3.17) in (3.16) liefert:

$$\Phi[k(t)] = \text{Exp} \left[-\frac{\mu \sigma^2}{2} \int_0^T ds \int dt \int dt' k(t) k(t') b(t-s) b(t'-s) + \text{Rest} \right]. \quad (3.18)$$

Falls der stochastische Prozeß $\xi(t)$ mit einer großen Anzahl von schwachen zufälligen Pulsen verbunden ist, d.h., kleine σ^2 und große μ , wird der Restterm in dem Exponent von (3.18) verschwindend klein, da der Restterm mit mindestens einer Potenz von σ unterdrückt ist. In dem Limes, daß $\sigma \rightarrow 0$ und $\mu \rightarrow \infty$, so daß $\mu \sigma^2$ unverändert bleibt, hat das charakteristische Funktional $\Phi[k(t)]$ die Form des Gauß'schen Prozesses:

$$\Phi[k(t)] = e^{-\frac{1}{2} \int dt dt' k(t) k(t') A(t, t')}$$

$$\text{mit} \quad A(t, t') = \mu \sigma^2 \int_0^T ds b(t-s) b(t'-s).$$

Dies ist die Formulierung des *Zentralen Grenzwert Theorems* für das Beispiel der zufälligen Pulse.

Der Prozeß $\xi(t)$ ist daher ein approximativer Gauß'scher Prozeß, der durch

$$\begin{aligned}
&\langle \xi(t) \rangle = 0 \\
&\text{und} \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = A(t, t') = \mu \sigma^2 \int_0^T ds b(t-s) b(t'-s) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

charakterisiert ist. Wir bezeichnen den Prozeß $\xi(t)$ als *Gauß'sches Rauschen*. Durch die Näherung wird die genaue Kenntnis über die Wahrscheinlichkeits-

dichte $p(a_i)$ unwichtig. Der Einfachheit halber wählen wir für $p(a_i)$ die *Gauß-Verteilung*:

$$p(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{a_i^2}{2\sigma^2}}.$$

Speziell für $b(\tau) = \delta(\tau)$ erhalten wir

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = A(t, t') = \mu\sigma^2 \int_0^T ds \delta(t-s) \delta(t'-s) = \mu\sigma^2 \delta(t-t'). \quad (3.20)$$

Die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion ist in diesem Fall konstant, also unabhängig von der Frequenz ω . Wir bezeichnen solches Rauschen als *weißes Rauschen* $\xi_w(t)$. Im Vergleich zum weißen Rauschen wird eine andere Art des Gauß'schen Rauschens als *farbiges Rauschen* bezeichnet.

In dem verbleibenden Teil dieses Abschnittes werden wir ein Verfahren einführen, durch das sowohl weißes Rauschen als auch farbiges Rauschen numerisch simuliert werden können.

Aus der Form des Rauschens

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^n a_i b(t - t_i)$$

ergeben sich folgende Überlegungen zu dem Verfahren:

1) Mit vorgegebenem μ , der mittleren Anzahl der Pulse pro Zeiteinheit, können wir die Anzahl der Pulse n durch die Poisson-Verteilung generieren.

2) Mit vorgegebenem σ kann die Pulshöhe a_i durch die Gauß-Verteilung generiert werden.

3) Die Position t_i , an der der Puls zentriert sein wird, ist ein Vielfaches der konstanten Schrittweite Δt , so daß sie durch eine gleichmäßige Verteilung generiert werden muß.

4) Die Gleichung (3.19) deutet an, daß die einheitliche Pulsform $b(\tau)$ mit der Korrelationsfunktion $A(t, t')$ zusammenhängt. Nun versuchen wir $b(\tau)$ aus vorgegebenem $A(t, t')$ zu erhalten.

Zunächst nehmen wir an, daß $b(\tau)$ symmetrisch zum Mittelpunkt und innerhalb des Zeitintervalls $[-\Delta, \Delta]$ definiert ist, wobei $\Delta \ll T$. Die Abb. 3.2 stellt einen solchen Puls dar. Als nächstes substituieren wir in (3.19) $t'' = s - t$, so daß

$$\begin{aligned} A(t, t') &= \mu\sigma^2 \int_{-t}^{T-t} dt'' b(-t'') b(t' - t - t'') \\ &= \mu\sigma^2 \int_{-t}^{T-t} dt'' b(t'') b(t'' + t - t'). \end{aligned}$$

Falls t und $T - t$ größer als Δ sind, gilt

$$A(t, t') = \mu\sigma^2 \int_{-\Delta}^{\Delta} dt'' b(t'') b(t'' + t - t') = A(t - t').$$

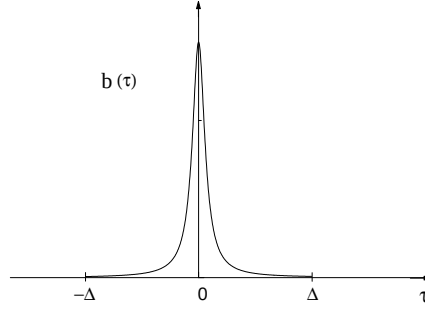


Abbildung 3.2: Einheitlicher Puls (Lorentzform)

Da aus (3.19) $A(t, t')$ invariant unter der Vertauschung von t und t' ist, erhalten wir

$$A(t, t') = A(|t - t'|).$$

Das Gauß'sche Rauschen wird also stationär. Aus dem Theorem von Wiener und Khinchin (3.14) erhalten wir die Spektraldichte $S(\omega)$ durch Fourier-Transformation von $A(\tau)$ mit $\tau = t - t'$:

$$S(\omega) = \mu \sigma^2 |\bar{b}(\omega)|^2, \quad (3.21)$$

wobei $\bar{b}(\omega)$ die Fouriertransformierte von $\bar{b}(\tau)$ ist, die wir definieren als

$$\bar{b}(\tau) := \begin{cases} b(\tau) & : \tau \in [-\Delta, \Delta] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}. \quad (3.22)$$

Da $\bar{b}(\tau)$ eine gerade Funktion ist, ist $\bar{b}(\omega)$ reell und symmetrisch in ω . Wegen der Identifikation (3.21) dürfen wir annehmen, daß $b(\omega) \geq 0$ gegeben sei. Folglich ist

$$\bar{b}(\omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\mu}} \sqrt{S(\omega)}. \quad (3.23)$$

Aufgrund des Theorems von Wiener und Khinchin (3.14) und (3.21) gilt für Spektraldichte stets $S(\omega) \geq 0$. Folglich dürfen wir nur solche Funktionen als Korrelationsfunktionen $A(\tau)$ wählen, deren Fouriertransformierte nicht negativ auf der ganzen Frequenzachse sind. Aus (3.23) erhalten wir die einheitliche Pulsform:

$$b(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\sigma \sqrt{\mu}} \sqrt{S(\omega)} e^{-i\omega\tau} \quad \text{für } \tau \in [-\Delta, \Delta].$$

Ferner definieren wir

$$G(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{S(\omega)} e^{-i\omega\tau},$$

so daß $b(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\mu}} G(\tau)$, wobei $G(\tau)$ unabhängig von den Werten σ und μ ist.

Für das weiße Rauschen ist die Form von $b(\tau)$ eine δ -Funktion. Es folgt

$$\xi_w(t) = \sum_{i=1}^n a_i \delta(t - t_i) .$$

Falls die Korrelationsfunktion des weißen Rauschens mit konstantem D als

$$A_w(t - t') = D \delta(t - t')$$

vorgegeben wird, so ist nach (3.20) $D = \mu\sigma^2$. Es folgt

$$\begin{aligned} \xi_w(t) &= \sqrt{D} \tilde{\xi}_w(t) , \\ \text{wobei} \quad \tilde{\xi}_w(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \delta(t - t_i) = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \frac{1}{\sqrt{\mu}} \delta(t - t_i) \quad \text{mit } \bar{a}_i := \frac{a_i}{\sigma} . \end{aligned}$$

$\bar{a}_i$ wurde eingeführt, da die Gauß-Verteilung $p(\bar{a}_i)$ die Varianz Eins besitzt:

$$p(\bar{a}_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\bar{a}_i^2}{2}} .$$

Ferner nehmen wir an, daß die mittlere Anzahl der Pulse gleich der Anzahl des Zeitschrittes ist, d.h. $\bar{n} = \mu T = \frac{T}{\Delta t}$, wobei Δt die Schrittweite ist. Es folgt $\mu = \frac{1}{\Delta t}$. Für sehr große $\bar{n}$ ist die relative mittlere Abweichung von $\bar{n}$

$$\frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{\sqrt{n^2 - \bar{n}^2}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}$$

sehr klein. Deswegen halten wir die Anzahl der Pulse n als Konstante $\bar{n}$ fest. Wir nehmen noch zusätzlich an, daß die Überlagerung von Pulsen ausgeschlossen ist. Folglich gibt es an jedem Zeitschritt einen δ -förmigen Puls

$$\xi_w(t_i) = \sqrt{D} \bar{a}_i \frac{1}{\sqrt{\mu}} \delta(t_i) ,$$

wobei die δ -Funktion durch

$$\delta(t_i) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} & : t = t_i \\ 0 & : t \neq t_i \end{cases}$$

numerisch approximiert wird. Daraus folgt

$$\xi_w(t_i) = \sqrt{D} \bar{a}_i \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta t}}} \frac{1}{\Delta t} = \sqrt{D} \bar{a}_i \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} .$$

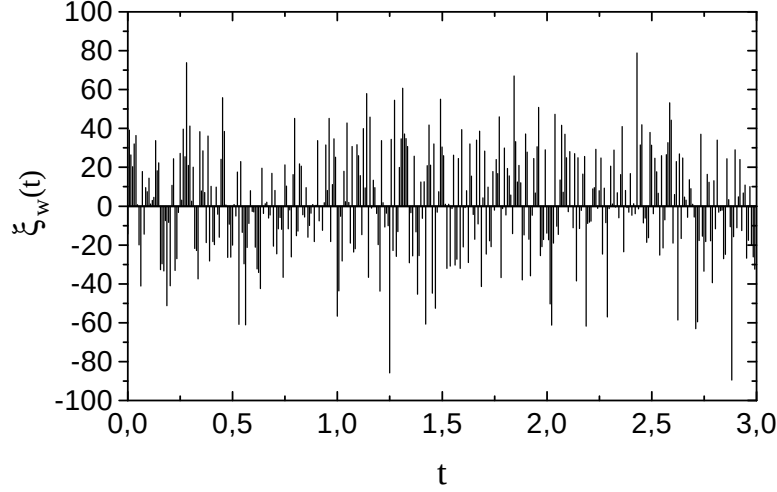


Abbildung 3.3: Weißes Rauschen. $\xi_w(t_i) = \sqrt{D} \bar{a}_i \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ mit $D = 5$ und $\Delta t = 2^{-7}$. $p(\bar{a}_i)$ hat die Varianz Eins.

Eine Folge von $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ wird durch den Gauß-Generator [P 92] mit einem festen Startwert simuliert. Die Abb. 3.3 zeigt eine Registrierung des weißen Rauschens mit $D = 5$ und $\Delta t = 2^{-7}$.

Die Simulation von farbigem Rauschen kann auf die Simulation weißen Rauschens zurückgeführt werden, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 \xi(t) &= \sum_{i=1}^n a_i b(t - t_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n a_i \int_0^T dt' b(t - t') \delta(t' - t_i) = \int_0^T dt' b(t - t') \sum_{i=1}^n a_i \delta(t' - t_i) \\
 &= \int_0^T dt' b(t - t') \xi_w(t') = \int_0^T dt' \frac{1}{\sigma \sqrt{\mu}} G(t - t') \xi_w(t') \\
 &= \int_0^T dt' G(t - t') \tilde{\xi}_w(t'),
 \end{aligned}$$

wobei $G(\tau)$ die Fouriertransformierte von $\sqrt{S(\omega)}$ ist. Abb. 3.4 zeigt eine Registrierung des stationären farbigen Rauschens mit $\Delta t = 2^{-7}$. Dabei haben wir als Korrelationsfunktion $\frac{1}{2}e^{-t}$ gewählt.

Wenn die Simulation des Rauschens mehrmals wiederholt wird, dann erhalten wir ein Ensemble. Dabei muß beachtet werden, daß der Startwert für jede Wiederholung auch zufällig ermittelt werden muß. In Abb. 3.5 wird der Mittelwert von $\xi(t)\xi(0)$ aus einem Ensemble von 1000 Simulationen des far-

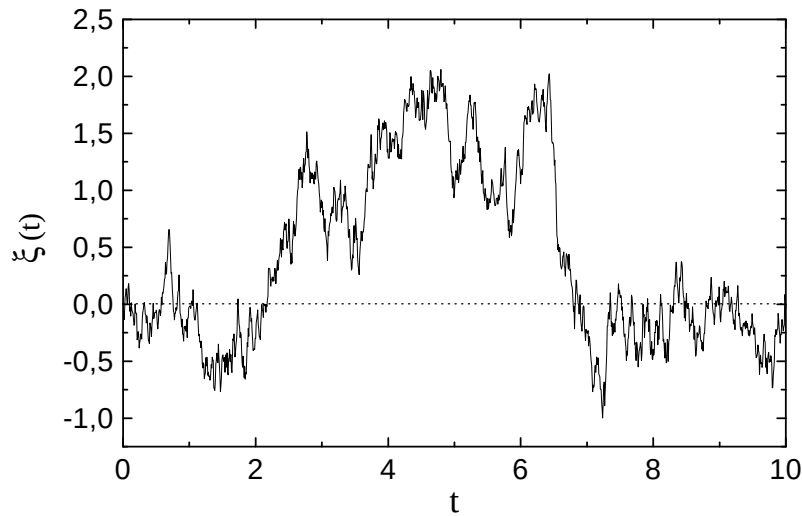


Abbildung 3.4: Farbiges Rauschen

bigen Rauschens im Vergleich zur vorgegebenen Korrelationsfunktion (dickere Linie) gezeigt. Wir sehen, daß die numerische Simulation zuverlässig ist.

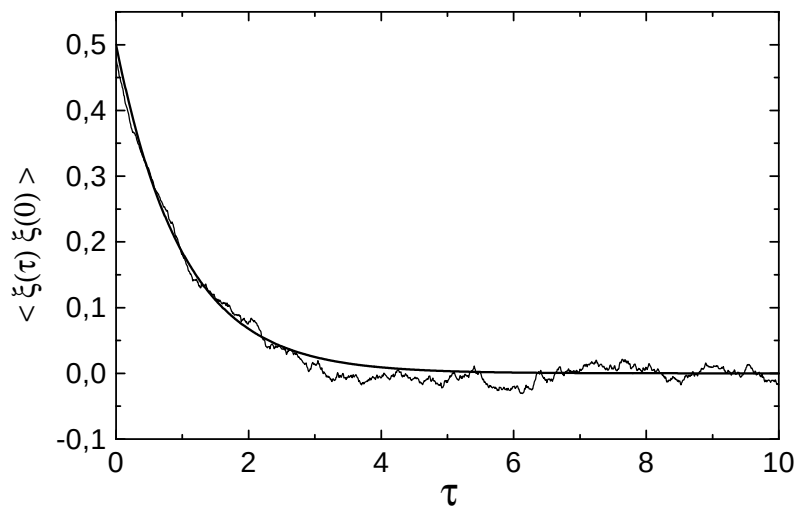


Abbildung 3.5: Mittelung von $\xi(t)\xi(0)$ nach 1000 Realisierungen. Die dickere Linie stellt die vorgegebene Korrelationsfunktion $\frac{1}{2}e^{-t}$ dar.

Unser Verfahren zur Simulation des (farbigen) Rauschens erfordert numerisch keinen großen Aufwand. Als Anwendung werden die mit Rauschen

verbundenen stochastischen Bewegungen in den nächsten drei Abschnitten ausführlich behandelt werden.

3.3 Die Brown'sche Bewegung

Die *Brown'sche Bewegung*, die 1827 von dem englischen Botaniker Brown beobachtet wurde, beschreibt eine ungeordnete Bewegung eines in einer Flüssigkeit suspendierten schweren (im Vergleich zu der Masse des Flüssigkeitsmoleküls) Teilchens. Die Spur solch eines Teilchens zeigt Abb. 3.6.

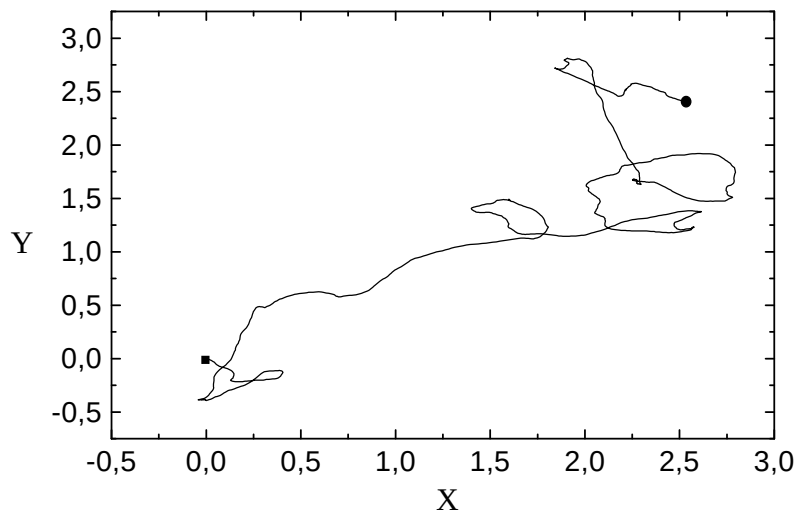


Abbildung 3.6: Die Brown'sche Bewegung. Das Brown'sche Teilchen wird durch eine Kugel symbolisiert. Die Bewegung beginnt an dem mit dem Kästchen markierten Punkt $(0,0)$.

Einstein erklärte das Phänomen dadurch, daß das suspendierte Teilchen ständig Stöße mit den Flüssigkeitsmolekülen erfährt. Diese Stöße führen zu einer resultierenden makroskopischen stochastischen Kraft, die auf das Teilchen wirkt.

Stellen wir uns ein Brown'sches Teilchen vor, welches sich mit einer Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einer Flüssigkeit bewegt. Im Mittel erfährt das Teilchen mehr Stöße von vorne als von hinten. Die Differenz führt zu einer Reibungskraft $\mathbf{F}$, die durch die *Stokes-Formel*

$$\mathbf{F} = -\gamma \mathbf{v}$$

beschrieben werden kann. Die Reibungskraft hängt also linear von der Geschwindigkeit des Brown'schen Teilchens ab. Der Reibungskoeffizient γ ist pro-

portional zu der Dichte ϱ und Viskosität ν der Flüssigkeit und hängt von der Größe des Brown'schen Teilchens ab. Für ein sphärisches Teilchen mit dem Radius R hat γ folgende Gestalt:

$$\gamma = 6\pi R\varrho\nu.$$

Nun können wir die stochastische Kraft, die das Brown'sche Teilchen erfährt, aus zwei Teilen konstruieren: der Reibungskraft $\mathbf{F}(t)$ und der Kraft $\boldsymbol{\xi}(t)$, die unabhängig von der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ ist und im Mittel verschwindet. Wir erhalten für das suspendierte Teilchen mit der Masse m die Bewegungsgleichung

$$m\dot{\mathbf{v}}(t) = -\gamma\mathbf{v}(t) + \boldsymbol{\xi}(t). \quad (3.24)$$

Die Gleichung (3.24) ist bekannt als *Langevin-Gleichung*. $\boldsymbol{\xi}(t)$ wird als *Langevin-Kraft* bezeichnet, die die folgenden Eigenschaften haben soll:

- 1) Der Mittelwert von $\boldsymbol{\xi}(t)$ verschwindet zu jeder Zeit

$$\langle \boldsymbol{\xi}(t) \rangle = 0,$$

so daß die Kraft auf das Brown'sche Teilchen im Mittel durch die Reibungskraft beschrieben werden kann.

- 2) Da ein Brown'sches Teilchen eine enorme Anzahl von Stöße erfährt, typischweise 10^{21} pro Sekunde [HL 84], sind die Langevin-Kräfte zu den verschiedenen Zeiten in der makroskopischen Zeitskala nicht korreliert, d.h.

$$\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = D\delta_{ij}\delta(t-t'), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Aufgrund des Zentralen Grenzwert Theorems wird der stochastische Prozeß $\boldsymbol{\xi}(t)$ durch das weiße Rauschen, eines Gauß'schen Prozesses, beschrieben.

Die Langevin-Gleichung (3.24) ist eine stochastische Differentialgleichung, aus der sich zu jeder Realisierung von $\boldsymbol{\xi}(t)$ die Lösung $\mathbf{v}(t)$ berechnen läßt. Auf diese Weise bestimmt der stochastische Prozeß $\boldsymbol{\xi}(t)$ den Prozeß $\mathbf{v}(t)$. Die δ -Korrelation des weißen Rauschens $\boldsymbol{\xi}(t)$ deutet an, daß $\mathbf{v}(t)$ ein Markov-Prozeß ist. Außerdem ist $\mathbf{v}(t)$ ein Gauß'scher Prozeß, da $\mathbf{v}(t)$ linear mit $\boldsymbol{\xi}(t)$ verknüpft ist [VK 81]. Aus demselben Grund stellt auch die Position des Brown'schen Teilchens $\mathbf{x}(t)$ einen Gauß'schen Prozeß dar.

Da verschiedene Komponenten von $\boldsymbol{\xi}(t)$ bzw. $\mathbf{v}(t)$ unkorreliert sind, reduziert sich die Gleichung (3.24) auf ein eindimensionales Problem:

$$m\dot{v}(t) + \gamma v(t) = \xi(t) \quad \text{mit } v(t=0) = v_0. \quad (3.25)$$

(3.25) kann auf verschiedene Weise analytisch gelöst werden, z.B. durch die Methode mit der Green'schen Funktion. Die Lösung $v(t)$ lautet:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} \xi(t'), \quad (3.26)$$

wobei $e^{-\gamma/m(t-t')}$ die Green'sche Funktion $G(t-t')$ zu $v(t)$ darstellt. Aus (3.26) erhalten wir den Mittelwert

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t} + \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{-\frac{\gamma}{m}(t-t')} \langle \xi(t') \rangle = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

und die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned} \langle v(t)v(t') \rangle &= v_0^2 e^{-\frac{\gamma}{m}(t+t')} + \frac{1}{m^2} \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' e^{-\frac{\gamma}{m}(t-s)} e^{-\frac{\gamma}{m}(t'-s')} \langle \xi(s)\xi(s') \rangle \\ &= \left(v_0^2 - \frac{D}{2m\gamma} \right) e^{-\frac{\gamma}{m}(t+t')} + \frac{D}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}|t-t'|}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Für hinreichend große Zeiten t und t' werden

$$\begin{aligned} \langle v(t) \rangle &= 0 \\ \text{und} \quad \langle v(t)v(t') \rangle &= \frac{D}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}|t-t'|} \end{aligned} \quad (3.28)$$

invariant gegenüber Zeitverschiebungen. Der Prozeß $v(t)$ ist für großes t also stationär. Die Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist zu diesem Zeitpunkt nicht mehr in der Erinnerung des Brown'schen Teilchens. Das Teilchen steht nun im thermischen Gleichgewicht mit der umgebenden Flüssigkeit.

Der stationäre Gauß'sche Markov-Prozeß $v(t)$, der die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit eines Brown'schen Teilchens im thermischen Gleichgewicht beschreibt, wird als der *Ornstein-Uhlenbeck Prozeß* [HL 84] bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_n(v_1, t_1; \dots, v_n, t_n)$ für eine sukzessive Beobachtung der Geschwindigkeit ist nach der Definition des Markov-Prozesses durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $P_1(v, t)$ und die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{1|1}(v', t'|v, t)$ bestimmt, die nach (3.10) und (3.11) die folgende Form haben:

$$\begin{aligned} P_1(v, t) &= \left(2\pi \frac{D}{2m\gamma} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \frac{v^2}{\frac{D}{2m\gamma}} \right] \\ \text{und} \quad P_{1|1}(v', t'|v, t) &= \frac{P_2(v, t; v', t')}{P_1(v, t)} \\ &= \left[2\pi \frac{D}{2m\gamma} \left(1 - e^{-\frac{2\gamma}{m}|t-t'|} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \text{Exp} \left[-\frac{1}{2} \frac{\left(v' - v e^{-\frac{\gamma}{m}|t-t'|} \right)^2}{\frac{D}{2m\gamma} \left(1 - e^{-\frac{2\gamma}{m}|t-t'|} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Befindet sich das Brown'sche Teilchen im thermischen Gleichgewicht, folgt aus dem Gleichverteilungssatz

$$\frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (3.29)$$

Ein Vergleich von (3.29) mit (3.28) für $t = t'$ liefert daher

$$\frac{D}{\gamma} = 2k_B T.$$

Diese Beziehung stellt einen Zusammenhang zwischen der makroskopischen Größe, dem Reibungskoeffizient γ , und der mikroskopischen Größe, der Stärke der Langevin-Kraft D , bei gegebener Temperatur T dar. Sie wird als die *Nernst-Einstein Relation* bezeichnet. Aus dieser Beziehung können wir erklären, warum die Brownsche Bewegung aktiver wird, wenn die Temperatur der Flüssigkeit erhöht wird.

Bevor das Brown'sche Teilchen im thermischen Gleichgewicht steht, ist der Prozeß $v(t)$ keineswegs stationär. Die Dauer des Übergangs vom Anfang der Brown'schen Bewegung bis in das thermische Gleichgewicht beschreibt die Thermalisierungsdauer. Aus (3.27) mit $t = t'$, d.h.

$$\langle v^2(t) \rangle = \frac{D}{2m\gamma} + \left(v_0^2 - \frac{D}{2m\gamma} \right) e^{-2\frac{\gamma}{m}t}, \quad (3.30)$$

erkennen wir, daß die Inverse von γ/m die mittlere Dauer des Übergangs darstellt. Je leichter das Brown'sche Teilchen ist und je größer der Reibungskoeffizient γ ist, d.h. je dichter und viskoser die Flüssigkeit ist, desto schneller geht das Brown'sche Teilchen in das thermische Gleichgewicht.

Zum Vergleich mit den analytischen Ergebnissen lösen wir die eindimensionale Langevin-Gleichung (3.25) numerisch durch das einfache Euler-Cauchy-Verfahren [DH 92]. Zunächst simulieren wir ein Ensemble von 1000 Ereignissen des weißen Rauschens. Für jedes Ereignis berechnen wir die numerische Lösung $v(t)$. Dadurch erhalten wir ein Ensemble von 1000 Realisierungen des Prozesses $v(t)$. Die numerischen Ergebnisse werden in Abb. 3.7, 3.8 und 3.9 dargestellt. Bei der Berechnung haben wir die folgenden Parameter festgesetzt:

$$v_0 = 0 \quad , \quad m = 1 \quad , \quad k_B T = 1 \quad \text{und} \quad \gamma = 2.5.$$

Abb. 3.7 zeigt die Geschwindigkeit eines Teilchens in einer realisierten Brown'schen Bewegung. In Abb. 3.8 und 3.9 werden die mittlere kinetische Energie und die Korrelationsfunktion $\langle v(t)v(0) \rangle$ (stationärer Fall) sowohl nach den analytischen Formeln (3.30) und (3.28) durch die dickeren Linien als auch nach numerischer Mittelung über dem Ensemble von 1000 Ereignissen dargestellt. Wir sehen eine gute Übereinstimmung der numerischen Resultate mit den analytischen Ergebnissen.

Als nächstes berechnen wir die Positionsverschiebung $\Delta x(t)$ des Brown'schen Teilchens bzgl. der Anfangslage, die aus Integration von der Geschwindigkeit $v(t)$ erfolgt:

$$\Delta x(t) = x(t) - x(0) = \int_0^t v(t') dt'.$$

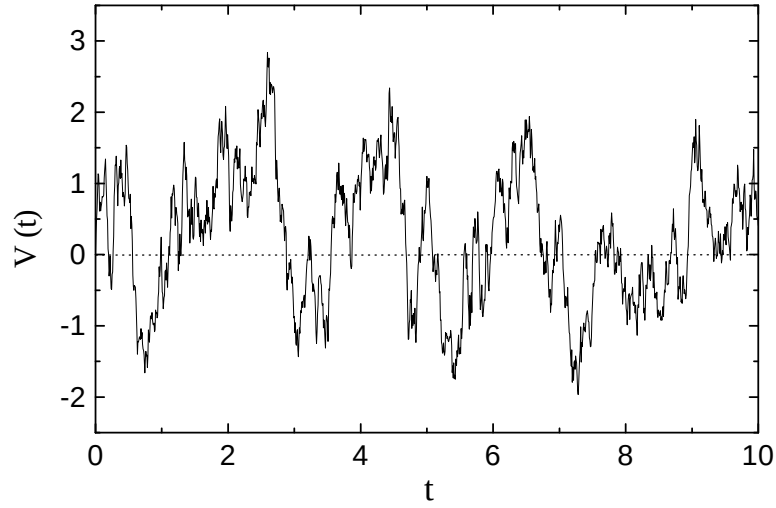
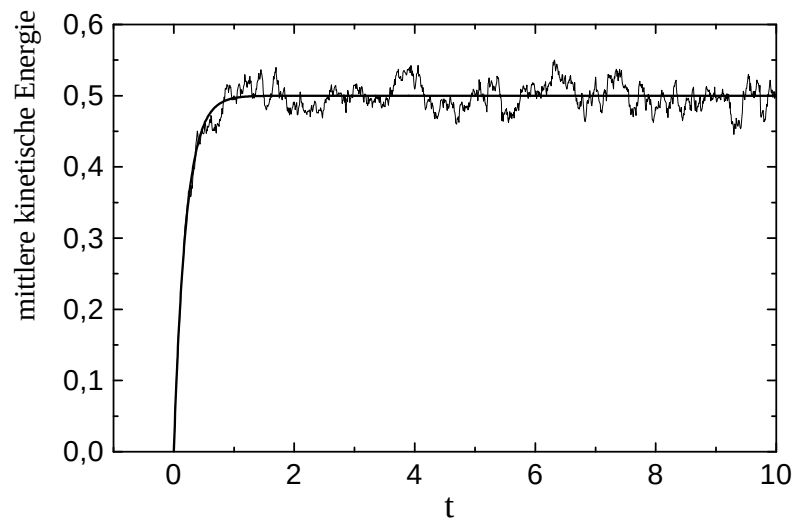


Abbildung 3.7: Geschwindigkeit eines Brown'schen Teilchens

Abbildung 3.8: Die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle$ des Brown'schen Teilchens. Die dickere Linie stellt die analytische Lösung (3.30) dar.

Wie schon erwähnt ist $\Delta(t)$ ein Gauß'scher Prozeß, welcher durch den Mittelwert

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \int_0^t \langle v(t') \rangle dt' = \frac{v_0 m}{\gamma} \left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t} \right)$$

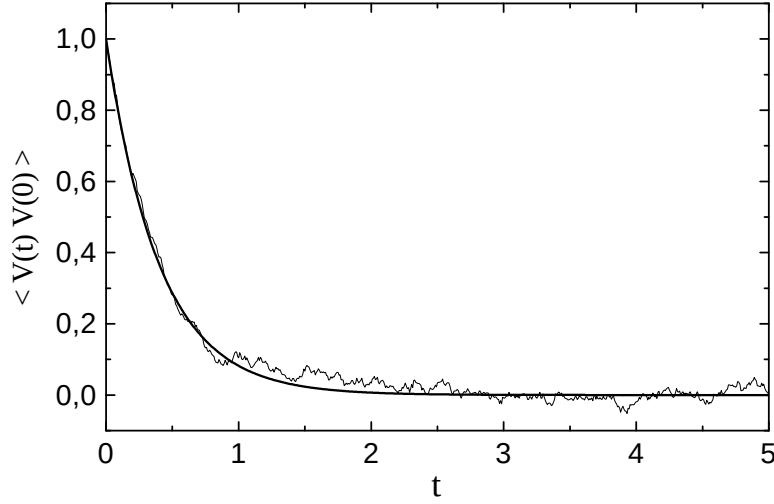


Abbildung 3.9: Mittelung von $v(t)v(0)$ nach 1000 Realisierungen. Die dickere Linie zeigt die analytische Kurve nach (3.28).

und die Korrelationsfunktion

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle &= \int_0^t ds \int_0^{t'} ds' \langle v(s) v(s') \rangle \\
 &= \frac{v_0^2 m^2}{\gamma^2} \left(e^{-\frac{\gamma}{m} t} - 1 \right) \left(e^{-\frac{\gamma}{m} t'} - 1 \right) + \frac{2mk_B T}{\gamma^2} \left(e^{-\frac{\gamma}{m} t} + e^{-\frac{\gamma}{m} t'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{m} |t-t'|} - \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{m} (t+t')} + \frac{\gamma}{m} t \theta(t' - t) + \frac{\gamma}{m} t' \theta(t - t') - 1 \right) .
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

vollständig bestimmt wird. Befindet sich das Brown'sche Teilchen im thermischen Gleichgewicht, so ist für große t und t'

$$\langle \Delta x(t) \rangle = \frac{v_0 m}{\gamma} \tag{3.32}$$

und

$$\langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle = \frac{2mk_B T}{\gamma^2} \left(\frac{\gamma}{m} t \theta(t' - t) + \frac{\gamma}{m} t' \theta(t - t') - \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{m} |t-t'|} \right) . \tag{3.33}$$

$\langle \Delta x(t) \rangle$ stellt die Weglänge dar, die das Brown'sche Teilchen während der mittleren Dauer der Thermalisierung $\frac{m}{\gamma}$ zurücklegte. Außerdem deutet (3.32) an, daß das Brown'sche Teilchen sich im thermischen Gleichgewicht wie einen Zufallswanderer verhält. Der Prozeß des Zufallswanderers ist kein stationärer Prozeß. Wir erkennen das direkt an (3.33).

Aus (3.31) erhalten wir speziell für $v_0 = 0$ das mittlere Verschiebungsquadrat

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \frac{2mk_B T}{\gamma^2} \left(2e^{-\frac{\gamma}{m}t} - \frac{1}{2}e^{-2\frac{\gamma}{m}t} + \frac{\gamma}{m}t - \frac{3}{2} \right). \quad (3.34)$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt $\langle \Delta x^2(t) \rangle \rightarrow 2 \frac{k_B T}{\gamma} t$, wobei $\frac{k_B T}{\gamma}$ die Diffusionskonstante [D 83] darstellt. Für $t \rightarrow 0$ erhalten wir $\langle \Delta x^2(t) \rangle \rightarrow \frac{2}{3} \frac{k_B T \gamma}{m^2} t^3$.

Die Position $x(t)$ des Brown'schen Teilchens läßt sich durch

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = \xi(t)$$

$$\text{mit } x(t=0) = x_0 \quad \text{und} \quad v(t=0) = v_0$$

numerisch lösen. (Durch diese Gleichung lösen wir $x(t)$ und $v(t)$ gleichzeitig.) Analog zu der Berechnung von $v(t)$ erhalten wir ein Ensemble von 1000 Verläufen des Brown'schen Teilchens. Zwei davon können als zwei Komponenten des Ortsvektors einer zweidimensionalen Brown'schen Bewegung angesehen werden. Ein solcher zweidimensionaler Verlauf wurde bereits in Abb. 3.6 dargestellt. In Abb. 3.10 ist das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle \Delta x^2(t) \rangle$ dargestellt. Wir erkennen, daß das numerische Resultat (durchgezogene Linie)

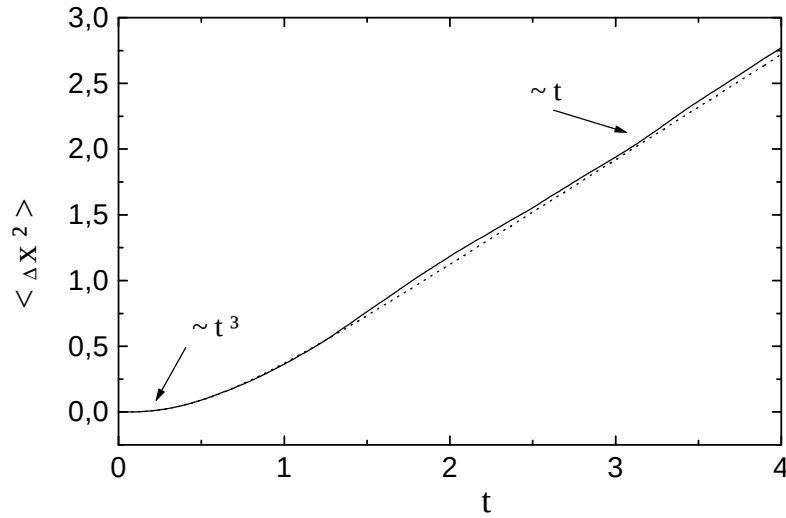


Abbildung 3.10: Das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle \Delta x^2(t) \rangle$

mit dem analytischen (gepunktete Linie) sehr gut übereinstimmt.

Der Prozeß $\Delta x(t)$ ist kein Markov-Prozeß, da die Geschwindigkeiten zu nachfolgenden Zeiten korreliert sind. In der Form der Korrelationsfunktion der Geschwindigkeit im thermischen Gleichgewicht

$$\langle v(t)v(t') \rangle = \frac{D}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}|t-t'|}$$

stellt m/γ die Korrelationszeit dar. Falls sie so klein gegen die Zeitskala ist, daß die Korrelation δ -förmig approximiert werden darf, wird $\Delta x(t)$ ein approximativer Makrov-Prozeß. In ähnlicher Weise ist der Prozeß $v(t)$ selbst auch ein approximativer Makrov-Prozeß, da die Korrelationszeit des Rauschens verschwindend klein gegen die makroskopische Zeitskala ist. Wir widmen uns nun der Frage, wie ein Prozeß behandelt werden soll, und welche Effekte auftreten, wenn die Korrelationszeit des Rauschens in der Größenordnung der makroskopischen Zeitskala liegt. Es ist die Aufgabe des nächsten Abschnittes, dies zu beantworten.

3.4 Verallgemeinerte Langevin-Gleichung

In diesem Abschnitt wird die Theorie der Brown'schen Bewegung verallgemeinert. Die ungeordnete Bewegung eines von einer Flüssigkeit umgebenen Teilchens wird nach den Erkenntnissen des letzten Abschnittes durch die stochastische Kraft aufgrund der Stöße mit den Flüssigkeitsmolekülen verursacht. Die stochastische Kraft, die das Teilchen erfährt, besteht aus der Reibungskraft $F(t)$ und der Langevin-Kraft $\xi(t)$. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt haben $F(t)$ und $\xi(t)$ nun die verallgemeinerten Darstellungen:

- 1) Die Langevin-Kräfte zu den verschiedenen Zeiten sind korreliert:

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = I(t - t').$$

Aufgrund des Zentralen Grenzwert Theorems wird der Prozeß $\xi(t)$ durch das farbige Rauschen beschrieben.

- 2) Die Reibungskraft $F(t)$, die das Teilchen zu einer bestimmten Zeit t erfährt, hängt auch von der Geschwindigkeit zu früheren Zeiten ab. Dieser Gedächtniseffekt läßt sich dadurch erklären, daß das Teilchen aufgrund seiner Bewegung eine Störung in seiner Umgebung verursacht, die zu späterer Zeit auf das Teilchen wieder zurückwirkt. Folglich hat die Reibungskraft $F(t)$ die folgende Form:

$$F(t) = 2 \int_0^t dt' \Gamma(t - t') v(t').$$

Dabei haben wir die Anfangszeit Null gesetzt. $\Gamma(t - t')$ bezeichnen wir als den Dissipationskernel, der nach dem *Fluktuation-Dissipations-Theorem* [HEER] [R 87] mit der Korrelationsfunktion $I(t - t')$ des Rauschens zusammenhängt:

$$\Gamma(t - t') = \frac{1}{2k_B T} I(t - t'). \quad (3.35)$$

Aus der verallgemeinerten Form der stochastischen Kraft erhalten wir die Bewegungsgleichung des Teilchens:

$$m\dot{v}(t) + 2 \int_0^t dt' \Gamma(t - t') v(t') = \xi(t) \quad (3.36)$$

$$\text{mit} \quad v(t=0) = v_0 .$$

(3.36) stellt eine verallgemeinerte Langevin-Gleichung dar. Wegen des Gedächtniseffektes ist der Prozeß $v(t)$ ein Nicht-Markov-Prozeß. In dem speziellen Fall einer schnellen abfallenden Korrelationsfunktion können wir näherungsweise $I(t-t') = D\delta(t-t')$ setzen. Wir erhalten dann wieder die gewöhnliche Langevin-Gleichung:

$$m\dot{v}(t) + \frac{D}{2k_B T} v(t) = \xi(t) ,$$

wobei $\frac{D}{2k_B T} = \gamma$ nach der bekannten Nernst-Einstein Relation. Der Prozeß $v(t)$ ist entsprechend wieder markovsch.

Kennen wir die Korrelationsfunktion $I(\tau)$ des Rauschens, so können wir, wie in 3.2 abgeleitet, das dadurch diktierte farbige Rauschen simulieren, aus dem $v(t)$ numerisch gewonnen werden kann. Eine analytische Behandlung ist nur in speziellen Fällen möglich, z.B. für

$$I(\tau) = \frac{D}{2\tau_c} e^{-\frac{|\tau|}{\tau_c}} ,$$

wobei τ_c die Korrelationszeit darstellt. Die Eigenschaft, daß sich $I(\tau)$ für den Limes $\tau_c \rightarrow 0$ durch $D\delta(\tau)$ darstellen läßt, hilft uns zu untersuchen, in wieweit sich die Evolution für den Nicht-Markov-Prozeß $v(t)$ für große τ_c unterscheidet im Vergleich zum Markov-Prozeß für $\tau_c \rightarrow 0$.

Zur analytischen Berechnung der verallgemeinerten Langevin-Gleichung verwenden wir die Methode der Green'schen Funktion. Zunächst setzen wir $v(t)$ und $\xi(t)$ außerhalb des Zeitintervalls der Beobachtung $[0, T_b]$ mathematisch fort:

$$v_{T_b}(t) := \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ v(t) & : t \in [0, T_b] \\ v(T_b) & : t > T_b \end{cases} \quad \text{und} \quad \xi_{T_b}(t) := \begin{cases} \xi(t) & : t \in [0, T_b] \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

Ferner nehmen wir an, daß $v_0 = 0$, so daß $v_{T_b}(t)$ stetig ist. Als nächstes definieren wir

$$\Gamma_{ret}(t) := \Gamma(t) \theta(t) .$$

Mit den obigen Definitionen können wir Gleichung (3.36) erweitern zu

$$m\dot{v}_{T_b}(t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma_{ret}(t-t') v_{T_b}(t') = \xi_{T_b}(t) . \quad (3.37)$$

Wir erkennen, daß (3.37) für $t \in [0, T_b]$ identisch mit (3.36) ist. Sei $G_{ret}(t)$ die zu $v_{T_b}(t)$ gehörige retardierte Green'sche Funktion, dann genügt $G_{ret}(t)$ der Gleichung

$$m\dot{G}_{ret}(t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma_{ret}(t-t') G_{ret}(t') = \delta(t) \quad \text{für } t \geq 0 . \quad (3.38)$$

Für $t < 0$ ist $G_{ret}(t) = 0$. $G_{ret}(t)$ ist an $t = 0$ nicht stetig: $G_{ret}(t \rightarrow 0^+) = 1$. Aus der retardierten Green'schen Funktion folgt die Lösung $v_{T_b}(t)$ durch

$$v_{T_b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_{ret}(t - t') \xi_{T_b}(t'). \quad (3.39)$$

Für $t \in [0, T_b]$ erhalten wir

$$v(t) = \int_0^t dt' G_{ret}(t - t') \xi(t').$$

Der Grund, daß wir statt (3.36) die erweiterte Gleichung (3.37) lösen, ist, daß die Green'sche Funktion von $v_{T_b}(t)$ einfacher zu berechnen ist. Führen wir die Fourier-Transformation von (3.38) aus, so erhalten wir

$$-im\omega G_{ret}(\omega) + 2\Gamma_{ret}(\omega)G_{ret}(\omega) = 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} G_{ret}(\omega) &= \frac{1}{2\Gamma_{ret}(\omega) - im\omega}, \\ \text{wobei } \Gamma_{ret}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \Gamma(t) \theta(t) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} dt \frac{1}{2k_B T} I(t) e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{2k_B T} \frac{D}{2\tau_c} \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{t}{\tau_c}} e^{i\omega t} = \frac{D}{4k_B T} \frac{1}{1 - i\omega\tau_c}. \end{aligned}$$

$G_{ret}(t)$ folgt aus der Rücktransformation von $G_{ret}(\omega)$, die wir mit dem Residuensatz auswerten können. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \text{für } 2Q\tau_c < 1, \text{ wobei } Q &:= \frac{D}{mk_B T} \\ G_{ret}(t) &= \frac{1 + \sqrt{1 - 2Q\tau_c}}{2m\sqrt{1 - 2Q\tau_c}} e^{-\frac{1 - \sqrt{1 - 2Q\tau_c}}{2\tau_c} t} - \frac{1 - \sqrt{1 - 2Q\tau_c}}{2m\sqrt{1 - 2Q\tau_c}} e^{-\frac{1 + \sqrt{1 - 2Q\tau_c}}{2\tau_c} t}; \end{aligned}$$

für $2Q\tau_c \geq 1$

$$G_{ret}(t) = \frac{1}{m} \left\{ -\frac{1}{2\omega_c \tau_c} \sin(\omega_c t) + \cos(\omega_c t) \right\} e^{-\frac{t}{2\tau_c}},$$

$$\text{wobei } \omega_c := \frac{\sqrt{2Q\tau_c - 1}}{2\tau_c}.$$

Aus der Green'schen Funktion können wir die Eigenschaften der verallgemeinerten Brown'schen Bewegung erhalten. Zunächst hat das Brown'sche Teilchen für den Fall einer großen Korrelationszeit des Rauschens mit $2Q\tau_c \geq 1$ ein oszillatorisches Verhalten, wobei ω_c die charakteristische Frequenz darstellt. Dieser Effekt tritt bei kleiner Korrelationszeit und dem markovschen Fall nicht

auf. Zur expliziten Darstellung dieses Unterschieds betrachten wir die Spektraldichte des Prozesses $v(t)$ in den verschiedenen Fällen. Für den markovschen Fall wird die Spektraldichte $S_v^m(\omega)$ nach dem Theorem von Wiener und Khinchin durch die Fourier-Transformation von $\langle v(t)v(t') \rangle$ (3.28) bestimmt:

$$S_v^m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{D}{2m\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}|t|} e^{i\omega t} = \frac{D}{m^2} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{m}\right)^2 + \omega^2}.$$

$S_v^m(\omega)$ hat eine Lorentz-Form, die an $\omega = 0$ zentriert ist und die Breite $\frac{\gamma}{m}$ hat. Für den nichtmarkovschen Fall folgt zunächst aus der Fourier-Transformation von (3.39) die Relation

$$v_{T_b}(\omega) = G_{ret}(\omega) \xi_{T_b}(\omega).$$

Wir erhalten damit die Spektraldichte aus ihrer Definition (3.13):

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= \lim_{T_b \rightarrow \infty} \frac{1}{T_b} \langle |v_{T_b}(\omega)|^2 \rangle \\ &= \lim_{T_b \rightarrow \infty} \frac{1}{T_b} |G_{ret}(\omega)|^2 \langle |\xi_{T_b}(\omega)|^2 \rangle = |G_{ret}(\omega)|^2 S_{\xi}(\omega). \end{aligned}$$

Nach dem Theorem von Wiener und Khinchin und dem Fluktuation-Dissipations-Theorem gilt

$$S_{\xi}(\omega) = I(\omega) = 2k_B T \Gamma(\omega).$$

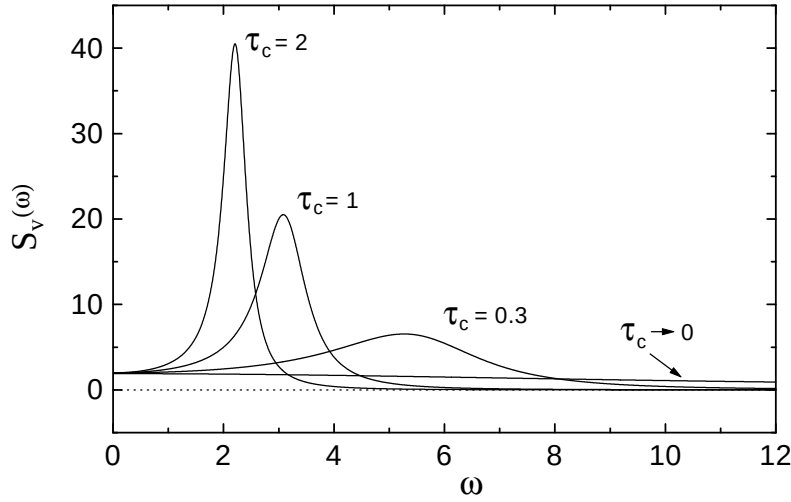
Außerdem ist einfach zu zeigen, daß

$$\Gamma(\omega) = \Gamma_{ret}(\omega) + \Gamma_{ret}^*(\omega) = 2 \operatorname{Re} \Gamma_{ret}(\omega)$$

gilt. Wir erhalten folglich

$$\begin{aligned} S_v(\omega) &= |G_{ret}(\omega)|^2 S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{(2\Gamma_{ret}(\omega) - im\omega)} \frac{1}{(2\Gamma_{ret}^*(\omega) + im\omega)} 2k_B T 2 \operatorname{Re} \Gamma_{ret}(\omega) \\ &= 2k_B T \operatorname{Re} G_{ret}(\omega). \end{aligned}$$

In Abb. 3.11 sind die Spektraldichten für verschiedene τ_c dargestellt, wobei $k_B T = 1$, $m = 0.2$ und $D = 2$ festgelegt sind. Zunächst erkennen wir aus der Abbildung, daß alle Kurven $S_v(\omega)$ an $\omega = 0$ den gleichen Wert besitzen. Dies folgt aus der Tatsache, daß $G_{ret}(\omega = 0)$ von τ_c unabhängig ist. Das Maximum von $S_v(\omega)$ für $\tau_c = 2, 1$ und 0.3 liegt ungefähr bei ω_c . Außerdem erkennen wir die klare Tendenz, daß sich das Maximum von $S_v(\omega)$ für sinkende τ_c nach rechts verschiebt bei breiter werdender Kurve. Was wir in Abb. 3.11 nicht sehen können ist, daß sich das Maximum von $S_v(\omega)$ für sinkende τ_c nicht immer nach rechts verschiebt, sondern für sehr kleine τ_c nach links. Für $\tau_c \rightarrow 0$ liegt das Maximum an $\omega = 0$.

Abbildung 3.11: Spektraldichte $S_v(\omega)$

Die Dauer der Thermalisierung hängt im allgemeinen auch von der Korrelationszeit des Rauschens ab. Da die Green'sche Funktion keine reine Exponentialfunktion ist, ist es wenig sinnvoll, die mittlere Dauer der Thermalisierung zu definieren. Wir können jedoch die Abhängigkeit der Thermalisierung von der Korrelationszeit τ_c anhand der numerischen Simulation erkennen.

Die Lösung $v(t)$ mit $v(t) = \dot{x}(t)$ und $x(t)$ der verallgemeinerten Langevin-Gleichung

$$m\ddot{x}(t) + 2 \int_0^t dt' \Gamma(t-t') \dot{x}(t') = \xi(t)$$

mit $x(t=0) = 0$ und $v(t=0) = 0$

kann aus der numerischen Berechnung mit einem Mehr-Schritt Verfahren, dem Adams-Bashforth-Verfahren mit der Konsistenzordnung 3 [DH 92], erfolgen. Der numerische Rechenfehler mit diesem Verfahren ist in der Größenordnung von $(\Delta t)^2$, eine Ordnung niedriger als der mit dem Euler-Cauchy-Verfahren. Wir legen folgende Parameter fest:

$$m = 0.1 \quad , \quad k_B T = 1 \quad , \quad D = 2 \quad , \quad \text{so daß } Q = \frac{D}{mk_B T} = 20 \quad .$$

Um die Zuverlässigkeit des numerischen Verfahrens zu verifizieren, vergleichen wir die numerische Mittelung von $v^2(t)$ über ein Ensemble von 1000 Ereignissen mit dem analytischen Ergebnis:

$$\langle v^2(t) \rangle = \int_0^t ds \int_0^t ds' G_{ret}(t-s) G_{ret}(t-s') \langle \xi(s) \xi(s') \rangle$$

$${}^{2Q\tau_c \geq 1} \frac{k_B T}{m} - \frac{k_B T}{m} \frac{1}{2Q\tau_c} [Q\tau_c + \sqrt{2Q\tau_c - 1} \sin(2\omega_c t) + (Q\tau_c - 1) \cos(2\omega_c t)] e^{-\frac{t}{\tau_c}}.$$

Für den Fall $\tau_c = 2$ können wir in Abb. 3.12 erkennen, daß das numerische Resultat mit dem analytischen Ergebnis relativ gut übereinstimmt. In Abb. 3.13

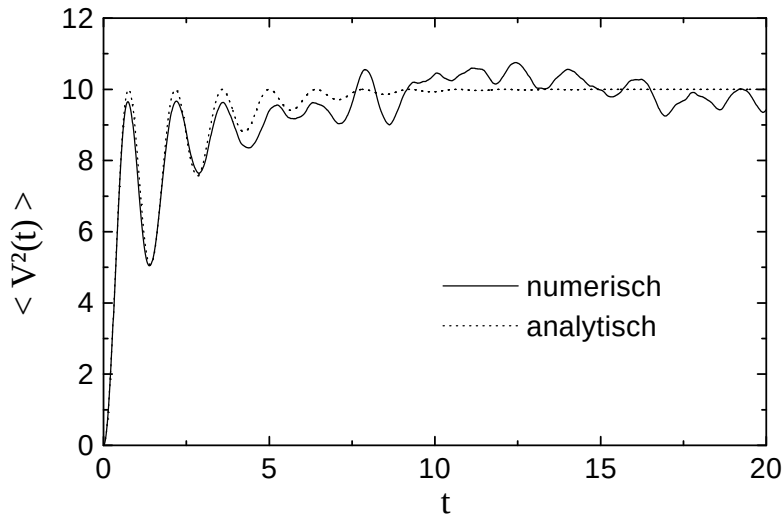


Abbildung 3.12: Vergleich der numerischen Mittelung von $v^2(t)$ nach 1000 Ereignissen (durchgezogene Linie) mit dem analytischen Ergebnis (gepunktete Linie)

und 3.14 sind die Position (X, Y) und die Geschwindigkeit $v(t)$ einer verallgemeinerten Brown'schen Bewegung geplottet. Im Vergleich zu der gewöhnlichen Brown'schen Bewegung sind die Trajektorien glatter. In Abb. 3.15, 3.16 und 3.17 werden die numerischen Resultate der mittleren kinetischen Energie, der Korrelationsfunktion der Geschwindigkeit und des mittleren Verschiebungsquadrates für $\tau_c = 2, 1$ und 0.3 dargestellt. Für $\tau \rightarrow 0$ haben wir in den Abbildungen die analytischen Kurven verwendet, da die numerischen Kurven wegen der kleinen aber dichten Fluktuation um $\frac{1}{2} k_B T$ für große t den Kontrast der Kurven für verschiedene τ_c stören würden. In Abb. 3.15, 3.16 und 3.17 ist der oszillatorische Charakter für große τ_c deutlich zu sehen. Außerdem können wir erkennen, daß für kleine τ_c die Thermalisierung in kürzerer Zeit verläuft.

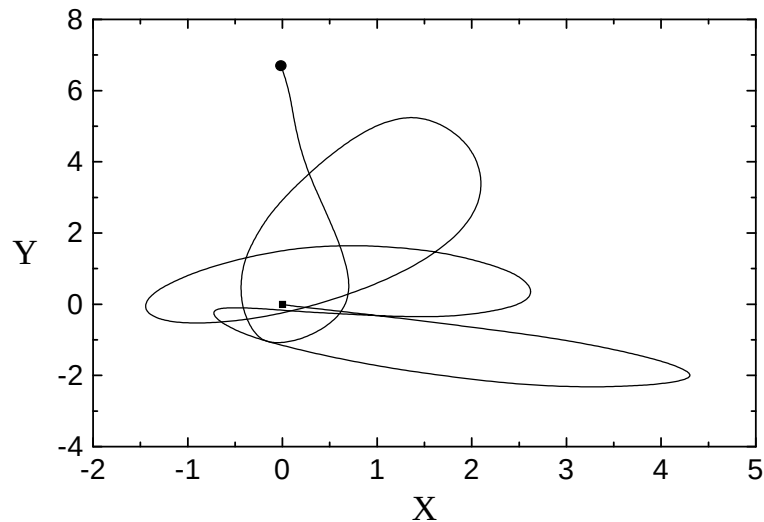


Abbildung 3.13: Die verallgemeinerte Brown'sche Bewegung. Das Brown'sche Teilchen wird durch eine Kugel symbolisiert. Die Bewegung beginnt am Punkt $(0,0)$, der mit dem Kästchen markiert ist.

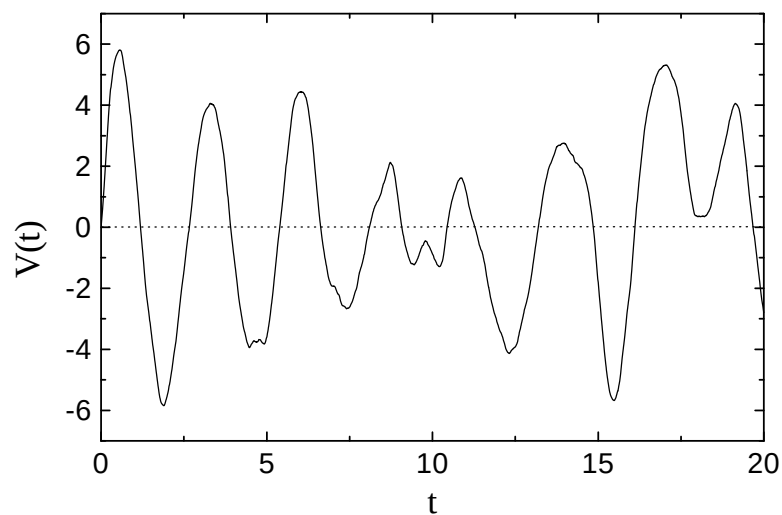


Abbildung 3.14: Geschwindigkeit eines Brown'schen Teilchens

3.5 Die Bewegung eines Oszillators in einer Flüssigkeit

Im letzten Abschnitt haben wir die verallgemeinerte Brown'sche Bewegung behandelt. In diesem Abschnitt werden wir die Bewegung eines Oszillators in

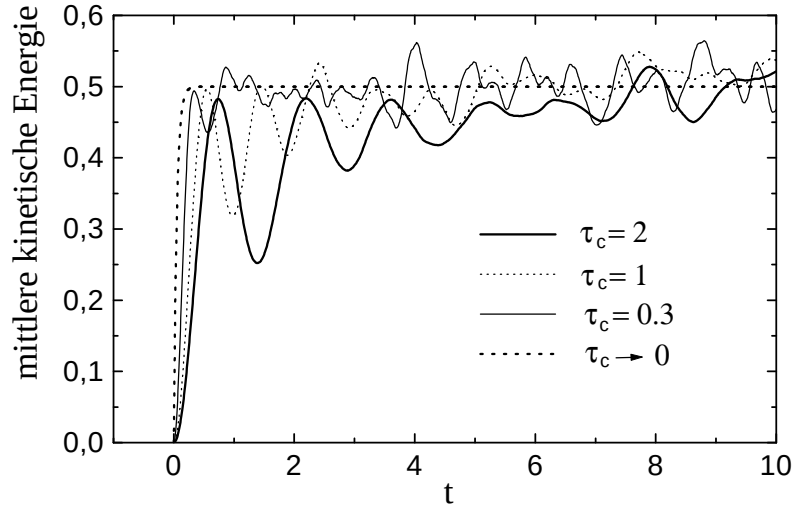


Abbildung 3.15: Die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle$ des Brown'schen Teilchens. Die Kurve für $\tau_c = 2, 1$ und 0.3 erhalten wir durch die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen. Für $\tau_c \rightarrow 0$ ist die analytische Kurve dargestellt.

einer Flüssigkeit betrachten. Der Oszillator erfährt nicht nur die stochastische Kraft aus der Umgebung, sondern auch die innere Kraft $-m\omega_0^2 x$, wobei m die Masse und ω_0 die Eigenfrequenz des Oszillators darstellt. Wir erhalten die folgende Bewegungsgleichung des Oszillators

$$m\ddot{x}(t) + 2 \int_0^t dt' \Gamma(t-t') \dot{x}(t') + m\omega_0^2 x(t) = \xi(t) \quad (3.40)$$

$$\text{mit } x(t=0) = x_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t=0) = v_0 .$$

Eine analytische Behandlung von (3.40) ist im allgemeinen schwierig. Wir analysieren die Bewegung des Oszillators durch die numerische Rechnung. Dazu verwenden wir wieder das Adams-Bashforth-Verfahren. Dabei sind folgende Parameter festgesetzt:

$$x_0 = 0 \quad , \quad v_0 = 0 \quad , \quad m = 0.2 \quad , \quad k_B T = 1 \quad , \quad D = 1 \quad , \quad \omega_0^2 = 10 .$$

Die Korrelationsfunktion des Rauschens wird wie im letzten Abschnitt als $\frac{D}{2\tau_c} e^{-\frac{|t|}{\tau_c}}$ angenommen. In Abb. 3.18 und 3.19 sind die mittlere kinetische Energie und potentielle Energie für $\tau_c = 1, 0.5, 0.1$ und 0 dargestellt, wobei wir für $\tau_c \rightarrow 0$ die analytische Lösung und für die anderen die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen gezeigt haben. Die numerischen Rechnungen zeigen, daß die folgende, zu erwartende, Equipartition

$$\frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

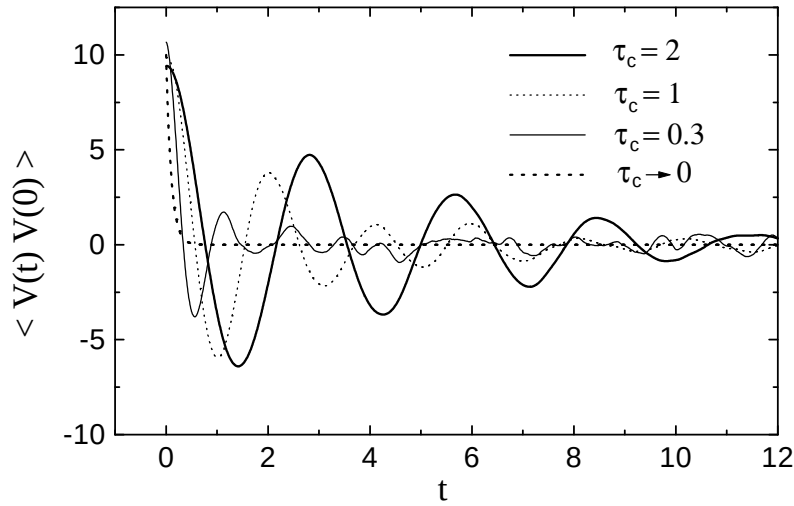


Abbildung 3.16: Die Korrelationsfunktion $\langle v(t)v(0) \rangle$ im thermischen Gleichgewicht. Die Kurve für $\tau_c = 2, 1$ und 0.3 erhalten wir durch die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen. Für $\tau_c \rightarrow 0$ ist die analytische Kurve dargestellt.

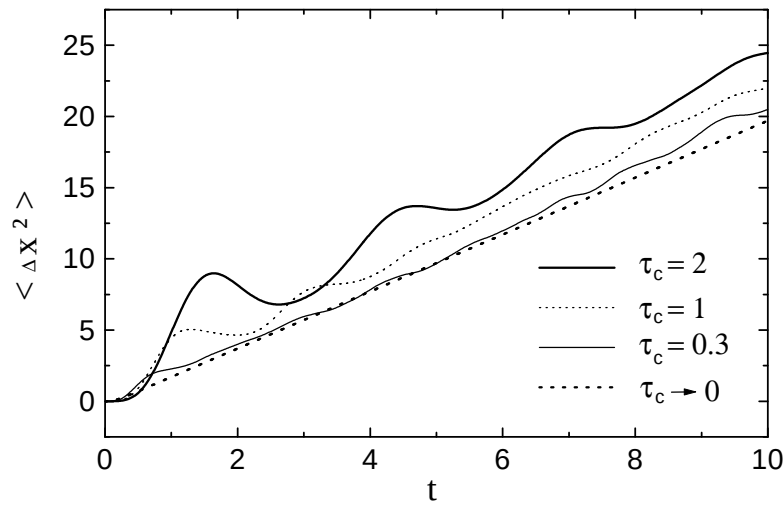


Abbildung 3.17: Das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle \Delta x^2(t) \rangle$. Die Kurve für $\tau_c = 2, 1$ und 0.3 erhalten wir durch die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen. Für $\tau_c \rightarrow 0$ ist die analytische Kurve dargestellt.

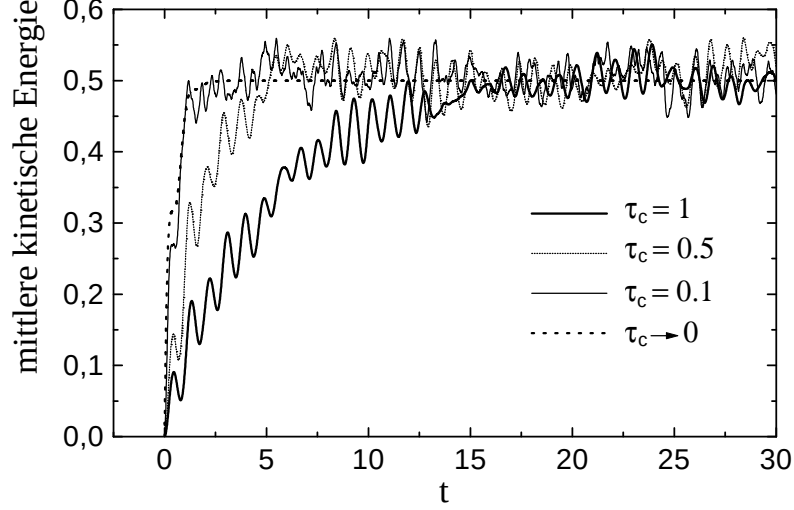


Abbildung 3.18: Die mittlere kinetische Energie $\frac{1}{2} m \langle v^2(t) \rangle$ eines Oszillators. Die Kurve für $\tau_c = 1, 0.5$ und 0.1 erhalten wir durch die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen. Für $\tau_c \rightarrow 0$ ist die analytische Kurve dargestellt.

erfüllt ist. Dies läßt sich auch analytisch beweisen. In Abb. 3.18 und 3.19 erkennen wir, daß der Oszillator schneller equilibriert, wenn die Korrelationszeit τ_c kürzer ist. Die charakteristische Frequenz der Oszillation können wir wieder durch die Berechnung der Spektraldichte erhalten. Analog zu dem letzten Abschnitt ist

$$S_x(\omega) = |G_{ret}(\omega)|^2 S_\xi(\omega),$$

wobei $G_{ret}(t)$ die zu $x_{T_b}(t)$ gehörige Green'sche Funktion ist:

$$m \ddot{G}_{ret}(t) + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \Gamma_{ret}(t-t') \dot{G}_{ret}(t') = \delta(t) \quad \text{für } t \geq 0. \quad (3.41)$$

Durch die Fourier-Transformation von (3.41) erhalten wir

$$G_{ret}(\omega) = \frac{1}{m \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{2\omega}{m} \Gamma_{ret}(\omega) \right)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= |G_{ret}(\omega)|^2 S_\xi(\omega) \\ &= \frac{1}{m \left(\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{2\omega}{m} \Gamma_{ret}(\omega) \right)} \frac{1}{m \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{2\omega}{m} \Gamma_{ret}^*(\omega) \right)} 2k_B T 2 \operatorname{Re} \Gamma_{ret}(\omega) \\ &= \frac{2k_B T}{\omega} \operatorname{Im} G_{ret}(\omega). \end{aligned}$$

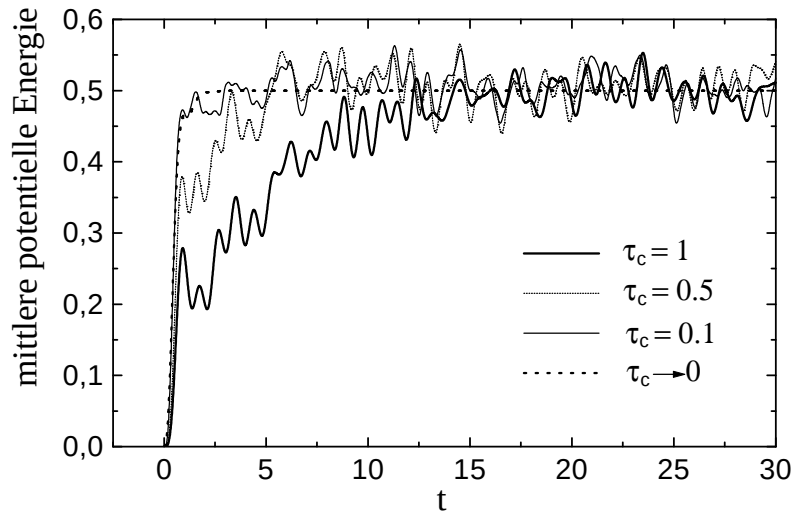


Abbildung 3.19: Die mittlere potentielle Energie $\frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2(t) \rangle$ eines Oszillators. Die Kurve für $\tau_c = 1, 0.5$ und 0.1 erhalten wir durch die numerische Mittelung nach 1000 Realisierungen. Für $\tau_c \rightarrow 0$ ist die analytische Kurve dargestellt.

Die Spektraldichten für $\tau_c = 1, 0.5, 0.1$ und 0 sind in Abb. 3.20 dargestellt. Wir erkennen, daß die charakteristische Frequenz, bei der sich das Maximum

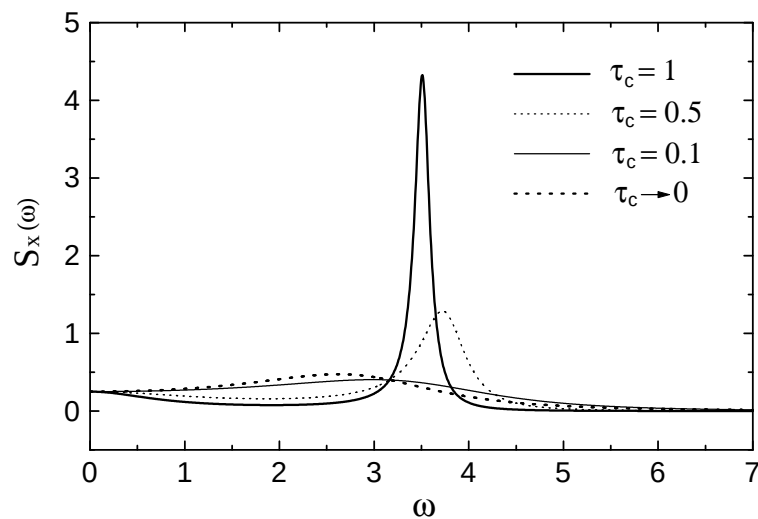


Abbildung 3.20: Die Spektraldichte $S_x(\omega)$

der Spektraldichte befindet, für sinkende τ_c zunächst nach rechts und dann nach links wandert. Die Kurve der Spektraldichte wird für sinkende τ_c breiter und nähert sich der des markovschen Falls.

Die Methode der Green'schen Funktion beschränkt sich auf die linearen Probleme. Für ein nichtlineares Potential, z.B.

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + g^2 x^4,$$

können wir keine analytische Spektraldichte erhalten. Dennoch läßt sie sich numerisch durch die Fourier-Transformation der Korrelationsfunktion berechnen.

Wie schon in der Einleitung erwähnt, eine Untersuchung der Evolution einer DCC-Formation im Rahmen des Langevin-Szenarios wurde von Biro und Greiner [BG 97] durchgeführt. Dort lösten sie eine stochastische Bewegungsgleichung des chiralen Parameters, die eine markovsche Langevin-Gleichung mit weißem Rauschen darstellt. Im nächsten Kapitel werden wir erfahren, daß die Bewegungsgleichung in [BG 97] nur eine markovsche Näherung einer verallgemeinerten Langevin-Gleichung ist. Es stellt sich unmittelbar die Frage, ob der nichtmarkovsche Effekt, der sogenannte Gedächtniseffekt, in der Dynamik einer DCC-Formation eine Rolle spielt. Um dies zu untersuchen, werden wir die in diesem Kapitel entwickelte Verfahren zur Simulation des farbigen Rauschens und zur Lösung verallgemeinerter Langevin-Gleichung auf die Zeitentwicklung einer DCC-Formation anwenden. Die numerischen Ergebnisse repräsentieren wir in Kapile 5.

Kapitel 4

Die semiklassische Bewegungsgleichung der langwelligen Mode eines selbstwechselwirkenden Systems

In diesem Kapitel werden wir die effektive semiklassische Bewegungsgleichung der langwelligen Mode eines selbstwechselwirkenden Quantenfeldes in thermischem Gleichgewicht mit der Lagrange-Dichte des linearen σ -Modells herleiten. Wir werden sehen, daß die Bewegungsgleichung vom Langevin-Typ ist, und somit einen Dissipations- und einen Rauschterm beinhaltet.

In Abschnitt 4.1 werden wir ein Quantensystem betrachten, das sich in Wechselwirkung mit einem Wärmebad befindet. Mit dem von Feynman entwickelten Formalismus wird der Effekt, der durch das Wärmebad auf das betrachtete System ausgeübt wird, in ein *Influenz-Funktional* zusammengefaßt. Wir werden in Abschnitt 4.2 den klassischen Limes für das Quantensystem des vorherigen Abschnittes betrachten. Die heraus resultierende klassische Bewegungsgleichung ist vom Langevin-Typ. In Abschnitt 4.3 werden wir die semiklassische Bewegungsgleichung der langwelligen Mode für ein selbstwechselwirkendes skalares Quantenfeld herleiten. Schließlich werden wir in Abschnitt 4.4 die Rechnungen von Abschnitt 4.3 für ein $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ Quantenfeld wiederholen und die Bewegungsgleichung der langwelligen Mode des linearen σ -Modells herleiten.

Zu diesem Kapitel empfehlen wir die Literatur [GM 97].

4.1 System in Wechselwirkung mit einem Wärmebad

In diesem Abschnitt werden wir ein System betrachten, das mit einem Wärmebad wechselwirkt. Bevor wir das tun, möchten wir an einige Begriffe der Quantenmechanik erinnern.

4.1.1 Der Zeitentwicklungsoperator und die Zeitentwicklungsamplitude der Wellenfunktion

Die Quantenmechanik besagt: Die Welle-Teilchen-Dualität ist eine allgemeine Eigenschaft der mikroskopischen Objekte. Alle Beobachtungsgrößen werden durch die Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{x}, t)$ bestimmt, die die Amplitude der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des betrachteten Objekts beschreibt. Mit anderen Worten, $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 d^3x$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Objekt zum Zeitpunkt t im Intervall $d\mathbf{x}$ um $\mathbf{x}$ zu finden.

Die Wellenfunktion ist die Lösung der *Schrödinger Gleichung*,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \hat{H} \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

mit dem Hamilton-Operator $\hat{H}$. Wenn wir annehmen, daß der Hamilton-Operator nicht explizit zeitabhängig ist, können wir die Wellenfunktion separieren:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = f(t) \phi(\mathbf{x}).$$

Während $f(t)$ proportional zu $e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$ ist, ist das Lösen von $\phi(\mathbf{x})$ ein typisches Eigenwertproblem:

$$\hat{H} \phi_n(\mathbf{x}) = E_n \phi_n(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Wir erhalten die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \Psi_n(\mathbf{x}, t) &= \phi_n(\mathbf{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} = \Psi_n(\mathbf{x}, t_i) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t_i)} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \phi_n(\mathbf{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_i)} \Psi_n(\mathbf{x}, t_i). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die zweite Zeile von (4.3) erhält man leicht, indem man $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$ bzw. $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t-t_i)}$ in eine Reihe umschreibt und danach (4.2) anwendet.

Eine beliebige Wellenfunktion können wir nun mit den $\Psi_n(\mathbf{x}, t)$ darstellen:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n \Psi_n(\mathbf{x}, t). \quad (4.4)$$

Wir setzen (4.3) in (4.4) ein und erhalten

$$\Psi(\mathbf{x}, t_f) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_f-t_i)} \Psi(\mathbf{x}, t_i), \quad (4.5)$$

so daß wir $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_i)}$ als Zeitentwicklungsoperator bezeichnen können.

Ein alternativer Zugang zur Quantenmechanik ist der von Feynman [FH 65] entwickelte Pfadintegralformalismus. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion können wir nun mit der Hilfe der Pfadintegrale wie folgt formulieren:

$$\Psi(\mathbf{x}_f, t_f) = \int d^3x_i K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) \Psi(\mathbf{x}_i, t_i) \quad (4.6)$$

$$\text{wobei} \quad K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) = \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathcal{D}\mathbf{x}(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)}. \quad (4.7)$$

Das Pfadintegral $\int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_f} \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \dots$ bedeutet eine Summe über alle möglichen Bahnen $\mathbf{x}(t)$ zwischen den Raumzeitpunkten $(\mathbf{x}_i, t_i)$ und $(\mathbf{x}_f, t_f)$, wobei $t_f > t_i$ ist. Wir bezeichnen $K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i)$ als die Zeitentwicklungsamplitude. Die Darstellung (4.7) gilt allerdings nur für speziellen Fall, in dem die Hamiltonfunktion die folgende Form hat [LR 85]:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}).$$

Wir werden die Darstellung (4.7) weiter anwenden. Dabei wird angenommen, daß die Hamiltonfunktion die obige Form besitzt.

Aus der Definition des Pfadintegrals folgt folgende Eigenschaft der Zeitentwicklungsamplitude:

$$K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) = \int d\mathbf{x}_a K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_a, t_a) K(\mathbf{x}_a, t_a; \mathbf{x}_i, t_i) \quad (4.8)$$

mit $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}(t_a)$.

(4.6) und (4.5) sind äquivalent, denn (4.6) genügt der Schrödinger Gleichung (4.1).

4.1.2 Dichtematrix

Die Wellenfunktion ist deswegen wichtig, weil sich alle Beobachtungsgrößen aus ihr ergeben. Wir können den Erwartungswert einer Beobachtungsgröße $\mathbf{A}$ formal wie folgt berechnen:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) := \langle \Psi(\mathbf{x}, t) | \hat{A} | \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle,$$

wobei $\hat{A}$ der entsprechende Operator von $\mathbf{A}$ ist.

In der Praxis kann ein System nicht durch solchen „reinen“ Zustand $\Psi(\mathbf{x}, t)$ beschrieben werden, da die vollständige Information über das System fehlt. Folglich befindet sich das System in „gemischtem“ Zustand, der als *Ensemble* von den möglichen reinen Zuständen, bezeichnet wird.

Seien $\Psi^i(\mathbf{x}, t)$ die reinen orthonormalen Zustände. P^i sei ferner die Wahrscheinlichkeit dafür, das System im Zustand $\Psi^i(\mathbf{x}, t)$ zu finden. Wir erhalten dann den Mittelwert von $\mathbf{A}$ durch die Mittelung der Erwartungswerte in $\Psi^i(\mathbf{x}, t)$ mit dem Gewichten P^i :

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_i P^i \langle \Psi^i | \hat{A} | \Psi^i \rangle . \quad (4.9)$$

Setzen wir die Vollständigkeitsrelation,

$$1 = \sum_n |\Psi^n\rangle \langle \Psi^n| ,$$

in (4.9) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle(t) &= \sum_{i,n} P^i \langle \Psi^i | \Psi^n \rangle \langle \Psi^n | \hat{A} | \Psi^i \rangle \\ &= \sum_{i,n} P^n \langle \Psi^i | \Psi^n \rangle \langle \Psi^n | \hat{A} | \Psi^i \rangle . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die letzte Zeile der obigen Gleichung gilt, da die $|\Psi^i\rangle$ orthonormiert sind.

Der *Dichteoperator* bzgl. der Basis $|\Psi^i\rangle$ ist definiert als

$$\hat{\varrho} := \sum_n P^n |\Psi^n\rangle \langle \Psi^n| . \quad (4.11)$$

Einsetzen dieser Definition in (4.10) liefert

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_i \langle \Psi^i | \hat{\varrho} \hat{A} | \Psi^i \rangle = \text{Sp}(\hat{\varrho} \hat{A}) = \text{Sp}((\hat{\varrho})(\hat{A})) .$$

Wir sehen, daß der Mittelwert einer Beobachtungsgröße $\mathbf{A}$ die Spur des Matrixprodukts der Matrizen $(\hat{\varrho})$ und $(\hat{A})$ ist. Die Matrix $(\hat{\varrho})$ bezeichnen wir als die *Dichtematrix*, durch die ein System vollständig beschrieben wird.

Äquivalent zu dem Dichteoperator $\hat{\varrho}$ definieren wir die Ortsdarstellung der Dichtematrix

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) := \sum_n P^n \Psi^n(\mathbf{x}, t) (\Psi^n(\mathbf{x}', t))^* . \quad (4.12)$$

Bzgl. dieser Definition läßt sich der Mittelwert von $\mathbf{A}$ darstellen als

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int d^3x d^3x' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \hat{A} \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) , \quad (4.13)$$

wobei wir vereinbaren, daß $\hat{A}$ nur an $\mathbf{x}$ wirkt.

Aus (4.12) folgt direkt

$$\varrho(\mathbf{x}', \mathbf{x}; t) = \varrho^*(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) . \quad (4.14)$$

Wir erhalten die Zeitentwicklung der Dichtematrix, indem wir (4.6) in (4.12) einsetzen:

$$\varrho(\mathbf{x}_f, \mathbf{x}'_f, t_f) = \int d^3x_i d^3x'_i K(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) K^*(\mathbf{x}'_f, t_f; \mathbf{x}'_i, t_i) \varrho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i, t_i). \quad (4.15)$$

Die Abweichung des gemischten Zustands zu einem reinen Zustand, die auch ein Maß für die fehlenden Informationen des Systems darstellt, ist gegeben durch eine positive Zahl σ , die man als Funktional von $\hat{\varrho}$ in der Form

$$\sigma[\hat{\varrho}] = -Sp(\hat{\varrho} \ln(\hat{\varrho}))$$

definiert. Als Beispiel betrachten wir das *kanonische Ensemble*, in dem σ maximal wird und die mittlere Energie des Ensembles einen festen Wert besitzt. Unter diesen Gegebenheiten:

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= \delta Sp(\hat{\varrho} \ln(\hat{\varrho})) = 0 \\ \text{und} \quad Sp(\hat{\varrho}) &= 1, \quad Sp(\hat{\varrho} \hat{H}) = E, \end{aligned}$$

ergibt sich der *kanonische Dichteoperator* zu

$$\hat{\varrho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad (4.16)$$

mit der Zustandssumme Z als Normierungsfaktor.

4.1.3 Das Influenz-Funktional

Wir betrachten nun das System $X(x)$, das mit einem Wärmebad $Q(q)$ wechselwirkt. Der Kürze halber bezeichnen wir x und q als die Koordinaten von X und Q . Sie können auch mehrdimensional sein.

Der Erwartungswert einer Beobachtungsgröße $\mathbf{A}$ wird von der Dichtematrix des Gesamtsystems $X+Q$ bestimmt:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int dx dx' dq dq' \delta(x - x') \delta(q - q') \hat{A} \varrho_{X+Q}(x, x'; q, q'; t).$$

Hängt $\hat{A}$ nur von x , der Koordinate des betrachteten Systems, ab, so können wir die Koordinate q ausintegrieren:

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int dx dx' \delta(x - x') \hat{A} \varrho_X(x, x'; t) \quad (4.17)$$

wobei

$$\varrho_X(x, x'; t) := \int dq dq' \delta(q - q') \varrho_{X+Q}(x, x'; q, q'; t). \quad (4.18)$$

ϱ_X bezeichnen wir als die reduzierte Dichtematrix. Wir setzen die Zeitentwicklung von ϱ_{X+Q} anhand (4.15) in (4.18) ein und erhalten

$$\varrho_X(x_f, x'_f; t_f) = \int dq_f dq'_f \delta(q_f - q'_f) \int dx_i dx'_i dq_i dq'_i K(x_f, q_f, t_f; x_i, q_i, t_i) \times \\ K^*(x'_f, q'_f, t_f; x'_i, q'_i, t_i) \varrho_{X+Q}(x_i, q_i; x'_i, q'_i; t_i), \quad (4.19)$$

wobei

$$K(x_f, q_f, t_f; x_i, q_i, t_i) = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x(t) \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q(t) e^{\frac{i}{\hbar} S[x, q]} \\ \text{und } S[x, q] = \int_{t_i}^{t_f} dt \mathcal{L}(\dot{x}, \dot{q}; x, q, t) = S_X[x] + S_Q[q] + S_{int}[x, q].$$

Während $S_{int}[x, q]$ die Wechselwirkung zwischen X und Q beschreibt, bestimmen $S_X[x]$ und $S_Q[q]$ die Bewegungen $x(t)$ und $q(t)$ unabhängig voneinander.

Wir nehmen an, daß zur Anfangszeit $t = t_i$ X nicht mit Q wechselwirkt, d.h.

$$\varrho_{X+Q}(x_i, x'_i; q_i, q'_i; t_i) = \varrho_X(x_i, x'_i; t_i) \cdot \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i).$$

Mit dieser Bedingung erhalten wir aus (4.19) die Zeitentwicklung von ϱ_X :

$$\varrho_X(x_f, x'_f; t_f) = \int dx_i dx'_i \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} (S_X[x] - S_X[x'])} e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x, x']} \varrho_X(x_i, x'_i; t_i), \quad (4.20)$$

wobei

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x, x']} := \int dq_f dq'_f dq_i dq'_i \delta(q_f - q'_f) \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' \cdot \\ e^{\frac{i}{\hbar} (S_Q[q] - S_Q[q'] + S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\ = \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar} (S_Q[q] - S_Q[q'] + S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i). \quad (4.21)$$

$S_{IF}[x, x']$ bezeichnen wir als das Influenz-Funktional, welches den Einfluß des Wärmebads Q auf die Dynamik von x vollständig enthält.

Bevor wir auf die explizite Berechnung des Influenz-Funktionalen eingehen, wollen wir zwei Eigenschaften von $S_{IF}[x, x']$ zeigen, die sehr nützlich für die späteren Rechnungen sind.

$$\text{Eigenschaft 1} \quad S_{IF}[x', x] = -S_{IF}^*[x, x'] \quad (4.22)$$

$$\text{Eigenschaft 2} \quad S_{IF}[x, x'] = 0 \quad \text{für } x(t) = x'(t) \quad (4.23)$$

Eigenschaft 1 folgt direkt aus (4.21) und (4.14). Um die Gültigkeit Eigenschaft 2 zu zeigen, wählen wir zuerst die festen Bahnen $x(t)$ und $x'(t)$ mit $x(t) = x'(t)$, dann können wir eine effektive Wirkung für Q bilden:

$$\tilde{S}_Q[q] = S_Q[q] + S_{int}[x, q].$$

Wir benutzen diese Definition und erhalten aus (4.21), (4.15) und (4.13)

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x,x]} &= \int dq_f dq'_f dq_i dq'_i \delta(q_f - q'_f) \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar} (\tilde{S}_Q[q] - \tilde{S}_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\ &= \int dq_f dq'_f \delta(q_f - q'_f) \varrho_Q(q_f, q'_f; t_f) \\ &= \langle \hat{1} \rangle_Q = 1. \end{aligned}$$

Da $S_{IF}[x, x]$ nicht von $x(t)$ abhängig ist, gilt die obige Gleichung für beliebige $x(t)$. Daraus folgt Eigenschaft 2 bis zu einer Vielfachheit von $2\pi\hbar$, für die wir uns hier nicht interessieren.

4.1.4 Perturbative Auswertung des Influenz-Funktional

Nun wollen wir die Berechnung des Influenz-Funktional diskutieren. Wir schreiben (4.21) nochmal auf:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x,x']} = \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar} (S_Q[q] - S_Q[q'] + S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i).$$

Die obige Gleichung kann man nicht für beliebige Wechselwirkung exakt auswerten. Für einige Spezialfälle können wir jedoch das Influenz-Funktional näherungsweise oder sogar exakt auswerten [FH 65] [FV 63]. Wir betrachten nun den Fall, in dem $S_{int}[x, q]$ die folgende Form hat:

$$S_{int}[x, q] = \int_{t_i}^{t_f} dt f(x) \Xi(q)$$

mit reellen Funktionen $f(x)$ und $\Xi(q)$.

Falls die Systeme X und Q schwach verbunden sind, können wir ein perturbatives Verfahren einführen: Wir entwickeln $e^{\frac{i}{\hbar} S_{int}}$ formal bis zur zweiten Ordnung von $f(x)$

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{int}} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} S_{int} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 S_{int}^2 \quad (4.24)$$

und vergleichen an späterer Stelle mit der entsprechenden formalen Entwicklung für die Influenzwirkung

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} S_{IF} + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 S_{IF}^2.$$

Einsetzen von (4.24) in (4.21) liefert

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x,x']} \approx \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar} (S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \times$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} (S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q']) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 (S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q'])^2 \right\} \\
& =: \mathcal{F}^0 + \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 .
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Indizes von $\mathcal{F}$ notieren hier die Ordnungszahl von $f(x)$.

0-te Ordnung:

Es gilt offenbar

$$\mathcal{F}^0 = \langle \hat{1} \rangle_Q = 1 .$$

1-te Ordnung:

Der erste Term von $\mathcal{F}^1$ sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt f(x) \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' \Xi(q_t) e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i),$$

wobei q_t die Koordinate q zum Zeitpunkt t ist.

Aus der Eigenschaft des Pfadintegrals (4.8) und der Zeitentwicklung der Dichtematrix (4.15) folgt

$$\begin{aligned}
& \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' \Xi(q_t) e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
& = \int dq_f dq_i dq'_i \int dq_t dq'_t K(q_f, t_f; q_t, t) \Xi(q_t) K(q_t, t; q_i, t_i) \times \\
& \quad K^*(q_f, t_f; q'_t, t) K^*(q'_t, t; q'_i, t_i) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
& = \int dq_i dq'_i \int dq_t dq'_t \Xi(q_t) K(q_t, t; q_i, t_i) K^*(q'_t, t; q'_i, t_i) \times \\
& \quad \int dq_f K(q_f, t_f; q_t, t) K^*(q_f, t_f; q'_t, t) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
& = \int dq_i dq'_i \int dq_t dq'_t \delta(q_t - q'_t) \Xi(q_t) K(q_t, t; q_i, t_i) K^*(q'_t, t; q'_i, t_i) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
& = \int dq_t dq'_t \delta(q_t - q'_t) \Xi(q_t) \varrho_Q(q_t, q'_t; t) \\
& = \langle \Xi(q_t) \rangle_Q \equiv \langle \Xi(q(t)) \rangle_Q .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$\langle \Xi(q(t)) \rangle_Q$ stellt den Mittelwert von $\Xi(q)$ zum Zeitpunkt t dar.

Mit der Notation von (4.26) hat $\mathcal{F}^1$ einen einfachen Ausdruck:

$$\mathcal{F}^1[x, x'] = \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \{ f(x) \langle \Xi(q) \rangle_Q - f(x') \langle \Xi(q') \rangle_Q \} . \tag{4.27}$$

Aus (4.26) und (4.14) können wir leicht zeigen, daß es gilt

$$\langle \Xi(q') \rangle_Q = (\langle \Xi(q) \rangle_Q)^* . \tag{4.28}$$

Außerdem gilt offenbar

$$\langle \Xi(q') \rangle_Q = \langle \Xi(q) \rangle_Q =: V(t). \quad (4.29)$$

Wegen der Eigenschaft (4.28) ist $V(t)$ reell und beschreibt eine verallgemeinerte äußere Kraft zu X. Durch das Einsetzen von (4.29) in (4.27) erhalten wir

$$\mathcal{F}^1[x, x'] = \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt V(t) (f(x) - f(x')). \quad (4.30)$$

Kontur-Schreibweise: [LW 87] [CSHY 85]

Wir führen nun eine intelligente Schreibweise ein, die unsere bisherige und folgende Ausführungen transparenter gestalten wird.

Wir definieren folgende Zeitentwicklung: Die Zeit entwickelt sich zuerst vom Anfangszeitpunkt t_i zu dem Endzeitpunkt t_f , wobei $t_f > t_i$ ist, und kehrt zurück zu t_i , wie in Abb.4.1 dargestellt. Wir bezeichnen $\mathcal{C}_1$ als obere Kontur von t_i bis t_f und $\mathcal{C}_2$ als untere Kontur von t_f bis t_i .

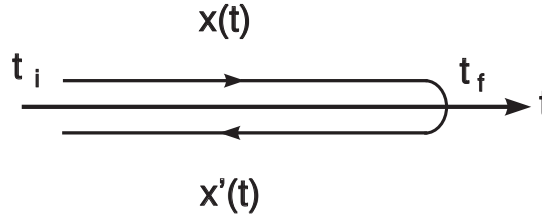


Abbildung 4.1: Zeitkontur

Ferner definieren wir die entsprechenden Koordinaten von X und Q:

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{C}}(t) &= \begin{cases} x(t) & : t \in \mathcal{C}_1 \\ x'(t) & : t \in \mathcal{C}_2 \end{cases} \\ q_{\mathcal{C}}(t) &= \begin{cases} q(t) & : t \in \mathcal{C}_1 \\ q'(t) & : t \in \mathcal{C}_2 \end{cases} . \end{aligned}$$

Bezüglich dieser Kontur-Schreibweise läßt sich $\mathcal{F}^1[x, x']$ in (4.30) einfacher ausdrücken:

$$\mathcal{F}^1[x, x'] = \frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{C}} dt V(t) f(x_{\mathcal{C}}(t)). \quad (4.31)$$

$\int_{\mathcal{C}} dt \dots$ symbolisiert den Integralweg von t_i zu t_f dann zurück zu t_i . Wenn wir $V^+(t)$ bzw. $V^-(t)$ definieren als $V(t)$ für $t \in \mathcal{C}_1$ bzw. $t \in \mathcal{C}_2$, dann folgt aus (4.29), daß $V^+(t) = V^-(t)$ ist.

2-ter Ordnung:

Wir drücken $\mathcal{F}^2[x, x']$ zunächst in der alten Schreibweise aus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^2[x, x'] &= \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \times \\
&\quad (S_{int}[x, q] - S_{int}[x', q'])^2 \\
&= \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_i}^{t_f} dt ds \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \times \\
&\quad \{f(x_t)\Xi(q_t) - f(x'_t)\Xi(q'_t)\} \{f(x_s)\Xi(q_s) - f(x'_s)\Xi(q'_s)\} \\
&= \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_i}^{t_f} dt ds \int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \times \\
&\quad \{f(x_t)f(x_s)\Xi(q_t)\Xi(q_s) - f(x_t)f(x'_s)\Xi(q_t)\Xi(q'_s) \\
&\quad - f(x'_t)f(x_s)\Xi(q'_t)\Xi(q_s) + f(x'_t)f(x'_s)\Xi(q'_t)\Xi(q'_s)\} .
\end{aligned}$$

Für den ersten Term von $\mathcal{F}^2$ geben wir eine explizite Darstellung der Zeitentwicklung anhand der Zeitentwicklungsamplitude an und definieren anschließend eine Notation, die auch die anderen Terme notieren kann.

Für $t > s$ ist

$$\begin{aligned}
&\int dq_f dq_i dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' e^{\frac{i}{\hbar}(S_Q[q] - S_Q[q'])} \Xi(q_t) \Xi(q_s) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
&= \int dq_f dq_i dq'_i \int dq_t dq'_t dq_s dq'_s K(q_f, t_f; q_t, t) \Xi(q_t) K(q_t, t; q_s, s) \Xi(q_s) K(q_s, s; q_i, t_i) \\
&\quad K^*(q_f, t_f; q'_t, t) K^*(q'_t, t; q'_s, s) K^*(q'_s, s; q'_i, t_i) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
&= \int dq_i dq'_i \int dq_t dq'_t dq_s dq'_s \delta(q_t - q'_t) \Xi(q_t) K(q_t, t; q_s, s) \Xi(q_s) K(q_s, s; q_i, t_i) \\
&\quad K^*(q'_t, t; q'_s, s) K^*(q'_s, s; q'_i, t_i) \varrho_Q(q_i, q'_i; t_i) \\
&:= \langle \Xi(q_t) \Xi(q_s) \rangle_Q \equiv \langle \Xi(q(t)) \Xi(q(s)) \rangle_Q .
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$\langle \Xi(q(t)) \Xi(q(s)) \rangle_Q$ stellt die Zweizeitpunktkorrelation dar. Für $t < s$ müssen jedoch t und s in der obigen Gleichung vertauscht werden. Um dies zu verallgemeinern, führen wir einen sogenannten Zeitordnungsoperator $\hat{T}$ ein, der die Reihenfolge von $\Xi(q(t))$ und $\Xi(q(s))$ nach der normalen Zeitvorstellung anordnet. Damit läßt sich der erste Term von $\mathcal{F}^2$ schreiben als

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_i}^{t_f} dt ds f(x(t)) f(x(s)) \langle \hat{T}(\Xi(q(t)) \Xi(q(s))) \rangle_Q .$$

Mit der oben eingeführten Notation stellen wir $\mathcal{F}^2$ wie folgt dar:

$$\mathcal{F}^2[x, x'] = \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_{t_i}^{t_f} dt ds \{f(x(t)) f(x(s)) \langle \hat{T}(\Xi(q(t)) \Xi(q(s))) \rangle_Q$$

$$\begin{aligned}
& -f(x(t))f(x'(s)) < \Xi(q(t))\Xi(q'(s)) >_Q \\
& -f(x'(t))f(x(s)) < \Xi(q'(t))\Xi(q(s)) >_Q \\
& +f(x'(t))f(x'(s)) < \hat{T}(\Xi(q'(t))\Xi(q'(s))) >_Q \} .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Bei dem vierten Term in (4.33) ist der Operator $\hat{T}$ wie bei dem ersten Term der gebraucht. Bei dem zweiten und dritten Term in (4.33) ist ein Gebrauch von $\hat{T}$ nicht mehr nötig, denn q und q' sind in Pfadintegral voneinander unabhängig.

Wir notieren (4.33) in der Kontur-Schreibweise:

$$\mathcal{F}^2[x, x'] = \frac{i}{2\hbar} \int_{\mathcal{C}} dt ds f(x_{\mathcal{C}}(t)) D(t, s) f(x_{\mathcal{C}}(s))$$

mit der Definition

$$\begin{aligned}
D^{++}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} < \hat{T}(\Xi(q(t))\Xi(q(s))) >_Q , \\
D^{+-}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} < \Xi(q'(s))\Xi(q(t)) >_Q , \\
D^{-+}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} < \Xi(q'(t))\Xi(q(s)) >_Q , \\
D^{--}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} < \hat{T}^{ac}(\Xi(q'(t))\Xi(q'(s))) >_Q .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$\hat{T}^{ac}$ ist der Antizeitordnungsoperator. Das „+“ bzw. „−“ Zeichen deutet an, daß die Zeit sich auf der oberen Kontur $\mathcal{C}_1$ bzw. unteren Kontur $\mathcal{C}_2$ befindet. Z.B. ist für $D^{+-}(t, s)$ t auf $\mathcal{C}_1$ und s auf $\mathcal{C}_2$.

Die vier Pfad-Kontur geordneten Korrelationen sind nicht unabhängig voneinander. Wegen der Eigenschaft 1 (4.22) gilt offenbar

$$\mathcal{F}^2[x', x] = (\mathcal{F}^2[x, x'])^* .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
D^{--}(t, s) &= -(D^{++}(t, s))^* , \\
D^{-+}(t, s) &= -(D^{+-}(t, s))^* .
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Als nächst separieren wir $D^{++}(t, s)$ in zwei Terme, ein Term für $t \geq s$ und der andere für $t < s$, d.h.

$$D^{++}(t, s) = \theta(t - s) D^{>}(t, s) + \theta(s - t) D^{<}(t, s) .$$

Es gilt wegen der Symmetrie

$$D^{<}(t, s) = D^{>}(s, t) . \tag{4.36}$$

Ferner gilt für $t \geq s$ mit Hilfe der Darstellung (4.32)

$$D^{-+}(t, s) = D^{>}(t, s) .$$

Analog gilt für $t < s$

$$D^{+-}(t, s) = D^{<}(t, s) .$$

Im Gegensatz zu D^{++} und D^{--} behalten D^{+-} und D^{-+} ihre Formen, egal ob $t \geq s$ oder $t < s$ ist. Denn t und s liegen auf den unterschiedlichen Konturen. Aus der Relation (4.35) ergibt sich

$$D^{<}(t, s) = -(D^{>}(t, s))^* . \quad (4.37)$$

Wir können nun die vier Korrelationen durch $D^{>}$ und $D^{<}$ darstellen:

$$\begin{aligned} D^{++}(t, s) &= \theta(t - s)D^{>}(t, s) + \theta(s - t)D^{<}(t, s) \\ D^{+-}(t, s) &= D^{<}(t, s) \\ D^{-+}(t, s) &= D^{>}(t, s) \\ D^{--}(t, s) &= \theta(t - s)D^{<}(t, s) + \theta(s - t)D^{>}(t, s) \quad , \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei

$$D^{>}(t, s) = \frac{i}{\hbar} < \Xi(q(t))\Xi(q(s)) >_Q \quad \text{für } t \geq s .$$

Aufgrund (4.36) und (4.37) besteht zwischen $D^{<}$ und $D^{>}$ folgende Relation:

$$D^{<}(t, s) = D^{>}(s, t) = -(D^{>}(t, s))^* . \quad (4.39)$$

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse kurz zusammen:

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[x, x']} \approx \mathcal{F}^0[x, x'] + \mathcal{F}^1[x, x'] + \mathcal{F}^2[x, x'] \quad (4.40)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0[x, x'] &= 1 , \\ \mathcal{F}^1[x, x'] &= \frac{i}{\hbar} \int_c dt V(t) f(x_c(t)) , \\ \mathcal{F}^2[x, x'] &= \frac{i}{2\hbar} \int_c dt ds f(x_c(t)) D(t, s) f(x_c(s)) . \end{aligned}$$

Wir können $\mathcal{F}^0 + \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2$ durch eine Exponentialfunktion approximieren:

$$\mathcal{F}^0 + \mathcal{F}^1 + \mathcal{F}^2 \approx e^{\frac{i}{2\hbar} \int_c dt V(t) f(x_c(t))} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} \int_c dt ds f(x_c(t)) \tilde{D}(t, s) f(x_c(s))} \quad (4.41)$$

wobei

$$\tilde{D}(t, s) = D(t, s) - \frac{i}{\hbar} V(t) V(s) .$$

Wir wollen an der Stelle von $\tilde{D}(t, s)$ $D(t, s)$ schreiben. Deswegen müssen wir die Formen von $D(t, s)$ in (4.34) korrigieren und neue $D^>$ und $D^<$ definieren. Aus dem Vergleich der Exponenten von (4.40) und (4.41) folgt

$$S_{IF}[x, x'] \approx \int_C dt V(t) f(x_C(t)) + \int_C dt ds f(x_C(t)) \frac{1}{2} D(t, s) f(x_C(s)) \quad (4.42)$$

wobei

$$\begin{aligned} V(t) &= \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \quad \text{mit} \quad V^+(t) = V^-(t), \\ D^{+-}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} \{ \langle \Xi(q_C(s)) \Xi(q_C(t)) \rangle_Q - \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \langle \Xi(q_C(s)) \rangle_Q \} \\ &=: D^<(t, s), \\ D^{-+}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} \{ \langle \Xi(q_C(t)) \Xi(q_C(s)) \rangle_Q - \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \langle \Xi(q_C(s)) \rangle_Q \} \\ &=: D^>(t, s), \\ D^{++}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} \{ \langle \hat{T}(\Xi(q_C(t)) \Xi(q_C(s))) \rangle_Q - \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \langle \Xi(q_C(s)) \rangle_Q \} \\ &= \theta(t-s) D^>(t, s) + \theta(s-t) D^<(t, s), \\ D^{--}(t, s) &= \frac{i}{\hbar} \{ \langle \hat{T}^{ac}(\Xi(q_C(t)) \Xi(q_C(s))) \rangle_Q - \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \langle \Xi(q_C(s)) \rangle_Q \} \\ &= \theta(t-s) D^<(t, s) + \theta(s-t) D^>(t, s). \end{aligned}$$

Außerdem gilt die Relation (4.39) für die korrigierten Darstellungen von $D(t, s)$.

Wir haben nun eine kompakte Form des Influenz-Funktional S_{IF} (4.42). Um den physikalischen Gehalt zu erläutern, suchen wir den reellen und imaginären Teil von S_{IF} . Aus diesem Zweck definieren wir

$$D_R(t, s) := D^>(t, s) - D^<(t, s) = \frac{i}{\hbar} \langle [\Xi(q_C(t)), \Xi(q_C(s))] \rangle_Q, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} D_I(t, s) &:= \frac{1}{i} (D^>(t, s) + D^<(t, s)) \\ &= \frac{1}{\hbar} \{ \langle \{ \Xi(q_C(t)), \Xi(q_C(s)) \} \rangle_Q - 2 \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q \cdot \langle \Xi(q_C(s)) \rangle_Q \}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aus der Relation (4.39) folgt

$$\begin{aligned} D_R(t, s) &= -D_R(s, t) = (D_R(t, s))^*, \\ D_I(t, s) &= +D_I(s, t) = (D_I(t, s))^*. \end{aligned} \quad (4.45)$$

D_R und D_I sind daher reelle Funktionen. Wir drücken die Korrelationen durch D_R und D_I aus:

$$D^{+-}(t, s) = -\frac{1}{2} (D_R(t, s) - i D_I(t, s))$$

$$\begin{aligned}
D^{-+}(t, s) &= +\frac{1}{2} (D_R(t, s) + iD_I(t, s)) \\
D^{++}(t, s) &= +\frac{1}{2} (D_R(t, s)(\theta(t-s) - \theta(s-t)) + iD_I(t, s)) \\
D^{--}(t, s) &= -\frac{1}{2} (D_R(t, s)(\theta(t-s) - \theta(s-t)) - iD_I(t, s)) . \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Wir setzen die Ausdrücke der $D(t, s)$ von (4.46) in (4.42) ein und erhalten nach Sortieren

$$\begin{aligned}
S_{if}[x, x'] &\approx \int_{t_i}^{t_f} dt V(t) (f(x(t)) - f(x'(t))) \\
&+ \int_{t_i}^{t_f} dt ds (f(x(t)) - f(x'(t))) \frac{1}{2} R(t, s) (f(x(s)) + f(x'(s))) \\
&+ i \int_{t_i}^{t_f} dt ds (f(x(t)) - f(x'(t))) \frac{1}{2} I(t, s) (f(x(s)) - f(x'(s)))
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
V(t) &= \langle \Xi(q_C(t)) \rangle_Q , \\
R(t, s) &= D_R(t, s) \theta(t-s) , \\
I(t, s) &= \frac{1}{2} D_I(t, s) . \quad (4.47)
\end{aligned}$$

(4.47) liefert eine transparentere Form von S_{IF} . Die ersten zwei Terme sind reell, während der letzte rein imaginär ist.

4.2 Der klassische Limes

In dem letzten Abschnitt haben wir herausgefunden, daß die Zeitentwicklung der reduzierten Dichtematrix ϱ_X folgende Form hat :

$$\varrho_X(x_f, x'_f, t_f) = \int dx_i dx'_i \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} (S_X[x] - S_X[x'] + S_{IF}[x, x'])} \varrho_X(x_i, x'_i, t_i). \quad (4.48)$$

Das Kernel der obigen Gleichung ist ein Doppelpfadintegral, das die Summe über alle möglichen Wege $x(t)$ und $x'(t)$ bedeutet. Jedes Paar der Wege $x(t)$ und $x'(t)$ trägt mehr oder weniger zu der Summe bei. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, welche Wege in dem klassischen Limes den Hauptbeitrag zu dem Kernel liefern.

Wir bringen zuerst den Begriff des „Gauß’schen Rauschen“ in Erinnerung.

4.2.1 Das Gauß’sche Rauschen

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $P[f(t)]$ einer gewissen reellen Funktion $f(t)$, die ein Funktional darstellt. $f(t)$ interpretieren wir später als stochasti-

sche Kraft. Für ein Funktional $G[f(t)]$ können wir seinen Erwartungswert wie folgt definieren:

$$\langle G \rangle := \frac{\int \mathcal{D}f(t) G[f(t)] P[f(t)]}{\int \mathcal{D}f(t) P[f(t)]}.$$

Die Funktional-Fourier-Transformierte von $P[f(t)]$ ist eine äquivalente Darstellung zu $P[f(t)]$. Wir bezeichnen es als charakteristisches Funktional [FH 65]:

$$\Phi[k(t)] := \frac{\int \mathcal{D}f(t) e^{i \int dt k(t) f(t)} P[f(t)]}{\int \mathcal{D}f(t) P[f(t)]} = \langle e^{i \int dt k(t) f(t)} \rangle. \quad (4.49)$$

$k(t)$ ist auch reell. Falls das charakteristische Funktional folgende Form hat,

$$\Phi[k(t)] = e^{-\frac{i}{2} \int dt ds k(t) A(t,s) k(s)}, \quad (4.50)$$

wobei $A(t, s)$ reell ist, bezeichnen wir solche Fluktuationen in $f(t)$ als Gauß'sches Rauschen.

$\Phi[k(t)]$ ist ein nützliches Funktional. Aus (4.49) und (4.50) ist leicht zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} \langle f(t) \rangle &= -i \left. \frac{\delta \Phi}{\delta k(t)} \right|_{k=0} = 0, \\ \langle f(t) f(s) \rangle &= - \left. \frac{\delta^2 \Phi}{\delta k(t) \delta k(s)} \right|_{k=0} = A(t, s). \end{aligned}$$

Daher erkennen wir, daß die Fluktuation von $f(t)$ im Mittel Null ist und $A(t, s)$ die Korrelation der Fluktuation darstellt. Wir nennen $A(t, s)$ daher die Korrelationsfunktion der stochastischen Kraft.

4.2.2 Die Bewegungsgleichung im klassischen Limes

Das Kernel in (4.48) ist ein Doppelpfadintegral. Das bezeichnen wir als

$$\tilde{K}(x_f, x'_f, t_f; x_i, x'_i, t_i) := \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} (S_X[x] - S_X[x'] + S_{IF}[x, x'])}.$$

Wenn wir annehmen, daß

$$S_{int}[x, q] = \int_{t_i}^{t_f} dt x \Xi(q),$$

hat das Influenz-Funktional aus den Erkenntnissen des letzten Abschnittes die folgende Form:

$$\begin{aligned} S_{IF}[x, x'] &\approx \int_{t_i}^{t_f} dt V(t) (x(t) - x'(t)) \\ &+ \int_{t_i}^{t_f} dt ds (x(t) - x'(t)) \frac{1}{2} R(t, s) (x(t) + x'(t)) \\ &+ i \int_{t_i}^{t_f} dt ds (x(t) - x'(t)) \frac{1}{2} I(t, s) (x(t) - x'(t)). \end{aligned}$$

Wir definieren ferner die effektive Wirkung als

$$S_{eff}[x, x'] := S_X[x] - S_X[x'] + S_{IF}[x, x'] .$$

Folglich ist das Kernel

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} S_{eff}[x, x']} \\ &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} \text{Re}(S_{eff}[x, x'])} e^{-\frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt ds (x(t) - x'(t)) \frac{I(t, s)}{\hbar} (x(s) - x'(s))} . \end{aligned} \quad (4.51)$$

Der zweite Faktor von $\tilde{K}$ kann als das charakteristische Funktional von einer Fluktuation, die wir $\xi(t)$ nennen, angesehen werden. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} \text{Re}(S_{eff}[x, x'])} < e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t) (x(t) - x'(t))} > \\ &= < \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} \text{Re}(S_{eff}[x, x'])} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t) (x(t) - x'(t))} > \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} < \xi(t) > = 0 , \\ < \xi(t) \xi(s) > = \hbar I(t, s) . \end{aligned}$$

Wir definieren die „ungemittelte“ effektive Wirkung als

$$\tilde{S}_{eff}[x, x'] := \text{Re}(S_{eff}[x, x']) + \int_{t_i}^{t_f} dt \xi(t) (x(t) - x'(t)) .$$

Dann ist das Kernel

$$\tilde{K} = < \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' e^{\frac{i}{\hbar} \tilde{S}_{eff}[x, x']} > . \quad (4.52)$$

Nun stellen wir die Frage, welche Wege im klassischen Limes den Hauptbeitrag zu dem Kernel $\tilde{K}$ liefern.

Aus (4.51) ist klar, daß die Wegpaare mit $x(t) = x'(t)$ den größten Anteil zu $\tilde{K}$ liefern, denn für $x(t) \neq x'(t)$ fallen ihre Anteile exponentiell ab. D.h., in (4.51) führt der zweite Faktor von $\tilde{K}$ zu sogenannter „Dekohärenz“ [GM 97].

Wenn wir vom Dekohärenz-Faktor absehen, dann hat jedes Wegpaar gleichen Beitrag zu $\tilde{K}$, obwohl sie zu unterschiedlichen Phasen führen. Im klassischen Limes sind die Phasen $\frac{1}{\hbar} \text{Re}(S_{eff}[x, x'])$ normalerweise sehr groß. Daher werden die Phasen sich rasch ändern, wenn $x(t)$ oder $x'(t)$ sich nur ein bißchen ändert. Folglich können nur die Wege zu $\tilde{K}$ beitragen, welche in der Nähe von den klassischen Weg liegen, bei dem $\text{Re}(S_{eff}[x, x'])$ minimal wird, während die anderen Wege zu Null interferieren.

Sowie in der klassischen Mechanik erhalten wir die Bewegungsgleichung durch die Minimierungsvorschrift

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[x, x']}{\delta x(t)} \right|_{x(t)=x'(t)} = 0 \quad (4.53)$$

und

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[x, x']}{\delta x'(t)} \right|_{x(t)=x'(t)} = 0. \quad (4.54)$$

Wegen der Eigenschaft 1 (4.22) aus dem letzten Abschnitt ist

$$S_{eff}[x', x] = -(S_{eff}[x, x'])^*.$$

Daraus folgt

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[x, x']}{\delta x'(t)} \right|_{x(t)=x'(t)} = - \left(\left. \frac{\delta S_{eff}[x', x]}{\delta x'(t)} \right)^* \right|_{x(t)=x'(t)} = 0.$$

(4.53) und (4.54) sind deswegen äquivalent.

Wir bilden nun die neuen Koordinaten

$$\bar{x}(t) := \frac{x(t) + x'(t)}{2} \quad \text{und} \quad \Delta(t) := x(t) - x'(t).$$

Bzgl. den neuen Koordinaten ist das Minimierungsprinzip

$$\left. \frac{\delta S_{eff}[\bar{x}, \Delta]}{\delta \Delta(t)} \right|_{\Delta=0} = 0 \quad (4.55)$$

wobei

$$S_{eff}[\bar{x}, \Delta] = Re(S_{eff}[\bar{x}, \Delta]) + i \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt ds \Delta(t) I(t, s) \Delta(s) \quad (4.56)$$

mit

$$\begin{aligned} Re(S_{eff}[\bar{x}, \Delta]) &= S_X \left[\bar{x} + \frac{\Delta}{2} \right] - S_X \left[\bar{x} - \frac{\Delta}{2} \right] + \int_{t_i}^{t_f} dt ds \Delta(t) R(t, s) \bar{x}(s) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{\delta S_X[\bar{x}]}{\delta \bar{x}} + V(t) + \int_{t_i}^{t_f} ds R(t, s) \bar{x}(s) \right) \cdot \Delta(t) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta^3). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Wir setzen (4.56) und (4.57) in (4.55) ein und erhalten die klassische Bewegungsgleichung von $x(t)$:

$$\frac{\delta S_X[x(t)]}{\delta x(t)} + V(t) + \int_{t_i}^t ds R(t, s) x(s) = 0. \quad (4.58)$$

Aus dem Vergleich zwischen (4.51) und (4.52) erkennen wir, daß (4.58) eine gemittelte Bewegungsgleichung ist. Ohne die Mittelung erhalten wir eine effektive Bewegung durch

$$\left. \frac{\delta \tilde{S}_{eff}[\bar{x}, \Delta]}{\delta \Delta(t)} \right|_{\Delta=0} = 0 ,$$

wobei

$$\tilde{S}_{eff}[\bar{x}, \Delta] = Re(S_{eff}[\bar{x}, \Delta]) + \int_{t_i}^{t_f} dt \, \xi(t) \Delta(t) .$$

Wir führen die Funktionalableitung aus und erhalten eine effektive Langevin-Gleichung:

$$\frac{\delta S_X[x(t)]}{\delta x(t)} + V(t) + \int_{t_i}^t ds \, R(t, s) x(s) = -\xi(t) .$$

Die stochastische Kraft $\xi(t)$ wird durch den Gauß'schen Prozeß beschrieben, $V(t)$ ist die gemittelte äußere Kraft und $R(t, s)$ führt zu Dissipation.

4.3 Influenz-Wirkung in der Φ^4 -Theorie

In diesem Abschnitt betrachten wir ein selbstwechselwirkendes skalares Quantenfeld in der Φ^4 -Theorie. Die Fouriertransformierte des Quantenfeldes stellt ein Kollektiv von qasi Teilchen mit gleichem Impuls dar. Ein solches Kollektiv kennzeichnen wir als eine Mode.

Die Besetzungszahl einer Mode mit Impuls $\mathbf{k}$ und Energie $\omega_{\mathbf{k}}$, wobei $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^{*2}}$, ist gegeben durch die Bose-Einstein Verteilung:

$$n(\omega_{\mathbf{k}}) = \left(e^{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{T}} - 1 \right)^{-1} .$$

Falls die dynamische Masse m^* viel kleiner als die Temperatur T ist, wird die Besetzungszahl für die langwelligen Moden, d.h. kleines $|\mathbf{k}|$, sehr groß und nähert sich dem klassischen Gleichverteilungssatz:

$$n(\omega_{\mathbf{k}}) \rightarrow \frac{T}{m^*} \gg 1 , \quad \text{für } |\mathbf{k}| \rightarrow 0 .$$

Folglich ist eine klassische Behandlung der Dynamik der langwelligen Moden in diesem Fall sehr effektiv.

Durch die Separation des Quantenfeldes in dem Fourierraum mit einem Abschneideparameter k_c , der viel kleiner als die Temperatur ist, erhalten wir eine effektive Theorie für die langwelligen Moden. Sie stehen in der Wechselwirkung mit den kurzwelligen Moden, die als voll besetzt angenommen sind und ein Wärmebad darstellen. Die Dynamik der langwelligen Moden ist semiklassisch.

Wir werden die Ergebnisse anwenden, die wir in den letzten beiden Abschnitten erzielt haben, um das Influenz-Funktional zu berechnen und schließlich die semiklassische stochastische Bewegungsgleichung der langwelligen Moden herleiten.

4.3.1 Selbstwechselwirkendes skalares Quantenfeld

Wir betrachten ein skalares Feld $\Phi(x)$, $x = x^\mu = (ct, \vec{r})$, mit der Wirkung

$$S[\Phi] = \int_{x_i}^x d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 - \frac{1}{4!} g^2 \Phi^4 \right]. \quad (4.59)$$

Mit einem Abschneideparameter k_c separieren wir das Feld $\Phi(x)$ in seinem Fourierraum

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = \Phi(\mathbf{k}, t) \theta(k_c - |\mathbf{k}|) + \Phi(\mathbf{k}, t) \theta(|\mathbf{k}| - k_c) := \phi(\mathbf{k}, t) + \varphi(\mathbf{k}, t).$$

$\phi(\mathbf{k}, t)$ bezeichnen wir als die langwelligen Moden und $\varphi(\mathbf{k}, t)$ als die kurzwelligen Moden. Wir transformieren $\Phi(\mathbf{k}, t)$ wieder zurück in den Ortsraum und erhalten

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \phi(x) + \varphi(x), \\ \phi(x) &= \int_{|\mathbf{k}| \leq k_c} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \varphi(x) &= \int_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Wenn wir uns nur für die langwelligen Moden interessieren, können wir die kurzwelligen Moden ausintegrieren und den Sektor der Wechselwirkung zwischen den lang- und kurzwelligen Moden analog der Vorscheinsweise im Abschnitt 4.1 in das Influenz-Funktional zusammenfassen. $\phi(x)$ repräsentiert hierbei das System X und $\varphi(x)$ das Wärmebad Q. Die gesamte Wirkung besteht wieder aus drei Teilen:

$$S[\Phi] = S[\phi, \varphi] = S^{(s)}[\phi] + S_0^{(h)}[\varphi] + S_{int}[\phi, \varphi]. \quad (4.60)$$

Aus (4.59) bestimmen wir die Formen der drei Terme in (4.60). Dabei beachten wir, daß die Mischterme $\phi\varphi$ und $\partial_\mu \phi \partial^\mu \varphi$ keinen Beitrag zu der Wirkung haben. Denn z.B. gilt

$$\begin{aligned} &\int d^3r \phi(x) \varphi(x) \\ &= \int d^3r \int_{|\mathbf{k}_1| \leq k_c} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}_2| > k_c} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}_1, t) \Phi(\mathbf{k}_2, t) e^{i(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}} \\ &= \int_{|\mathbf{k}_1| \leq k_c} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \int_{|\mathbf{k}_2| > k_c} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \Phi(\mathbf{k}_1, t) \Phi(\mathbf{k}_2, t) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Es gilt analog auch $\int d^3r \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \varphi(x) = 0$. Daher haben die Wirkungen in (4.60) die folgenden Formen:

$$S^{(s)}[\phi] = \int_{x_i}^x d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} g^2 \phi^4 \right], \quad (4.62)$$

$$S_0^{(h)}[\varphi] = \int_{x_i}^x d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right], \quad (4.63)$$

$$S_{int}[\phi, \varphi] = \int_{x_i}^x d^4x \, g^2 \left[-\frac{1}{24} \varphi^4 - \frac{1}{6} \phi \varphi^3 - \frac{1}{4} \phi^2 \varphi^2 - \frac{1}{6} \phi^3 \varphi \right]. \quad (4.64)$$

$\mathcal{L}^{(s)}(\phi)$, $\mathcal{L}_0^{(h)}(\varphi)$ und $\mathcal{L}_{int}(\phi, \varphi)$ sind die entsprechenden Lagrange-Dichten. Wir bemerken, daß S_{int} proportional zu g^2 ist.

4.3.2 Das Influenz-Funktional der Φ^4 -Theorie

Wie im Abschnitt 4.1 eingeführt, lautet das Influenz-Funktional in der Kontur-Schreibweise

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[\phi, \phi']} = \int d\varphi d\varphi_i d\varphi'_i \int_{\varphi_i}^{\varphi} \mathcal{D}\varphi \int_{\varphi'_i}^{\varphi} \mathcal{D}\varphi' e^{\frac{i}{\hbar} S_0^{(h)}[\varphi_C]} e^{\frac{i}{\hbar} S_{int}[\phi_C, \varphi_C]} \varrho^{(h)}(\varphi_i, \varphi'_i, t_i), \quad (4.65)$$

wobei

$$\begin{aligned} S_0^{(h)}[\varphi_C] &= \int_C d^4x \, \mathcal{L}_0^{(h)}(\varphi_C) = S_0^{(h)}[\varphi] - S_0^{(h)}[\varphi'], \\ S_{int}[\phi_C, \varphi_C] &= \int_C d^4x \, \mathcal{L}_{int}(\phi_C, \varphi_C) = S_{int}[\phi, \varphi] - S_{int}[\phi', \varphi']. \end{aligned}$$

Unter der Annahme der schwachen Kopplung, d.h., $g^2 \ll 1$, entwickeln wir $e^{\frac{i}{\hbar} S_{int}}$ in (4.65) bis zur zweiten Ordnung von g^2 , d.h., g^4 . Mit der analogen Notation zu Abschnitt 4.1 erhalten wir

$$e^{\frac{i}{\hbar} S_{IF}[\phi, \phi']} \approx 1 + \frac{i}{\hbar} \langle S_{int}[\phi_C, \varphi_C] \rangle_h + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \langle (S_{int}[\phi_C, \varphi_C])^2 \rangle_h. \quad (4.66)$$

Wir approximieren die ersten drei Ordnungsterme wieder durch eine Exponentialfunktion, deren Entwicklung bis zur zweiten Ordnung das gleiche liefert wie in (4.66). Aus dem Vergleich der Exponenten folgt

$$S_{IF}[\phi, \phi'] \approx S_{IF}^1[\phi, \phi'] + S_{IF}^2[\phi, \phi'],$$

wobei

$$\begin{aligned} S_{IF}^1[\phi, \phi'] &= \langle S_{int}[\phi_C, \varphi_C] \rangle_h, \\ S_{IF}^2[\phi, \phi'] &= \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \left\{ \langle (S_{int}[\phi_C, \varphi_C])^2 \rangle_h - \langle S_{int}[\phi_C, \varphi_C] \rangle_h^2 \right\}. \end{aligned}$$

In dem Rest dieses Paragraphs werden wir S_{IF}^1 und S_{IF}^2 berechnen. Dazu bemerken wir zunächst folgende Überlegungen.

A.) Wir nehmen an, daß das System des Wärmebads durch ein kanonisches Ensemble beschrieben wird. Der Dichteoperator vgl. (4.16) ist

$$\hat{\varrho}^{(h)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}^{(h)}} .$$

Da $\mathcal{L}_0^{(h)}(\varphi)$ die Lagrange-Dichte eines freien harmonischen Oszillators darstellt, hat der Hamiltonoperator $\hat{H}^{(h)}$ die Form

$$\hat{H}^{(h)} = \sum_{|\mathbf{k}| > k_c} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) .$$

$\hat{a}_{\mathbf{k}}^+$ bzw. $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ist der Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator mit der Relation

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}_1}, \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+] = \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} .$$

Fassen wir den Vakuum-Beitrag des Dichteoperators und die Zustandssumme zusammen und definieren als $\hat{Z}$, erhalten wir

$$\hat{\varrho}^{(h)} = \frac{1}{\hat{Z}} e^{-\beta \sum_{|\mathbf{k}| > k_c} \hbar \omega_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}})} . \quad (4.67)$$

Mit dem Dichteoperator (4.67) können wir die folgende Erwartungswerte leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \rangle_h &= n_{\mathbf{k}_1} \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} , \\ \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+ \rangle_h &= (1 + n_{\mathbf{k}_1}) \delta_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2} , \\ \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+ \rangle_h &= \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \rangle_h = 0 . \end{aligned} \quad (4.68)$$

Dabei genügt die Teilchenzahl $n_{\mathbf{k}}$ einer Mode der bekannten Bose-Einstein Verteilung:

$$n_{\mathbf{k}} = \left(e^{\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{\beta}} - 1 \right)^{-1} .$$

B.) Der Feldoperator sieht wie folgt aus:

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^+ e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}} t)} \right) . \quad (4.69)$$

C.) Wir definieren den Propagator als

$$D(x_1, x_2) := i \langle \hat{P}(\hat{\varphi}_{\mathcal{C}}(x_1) \hat{\varphi}_{\mathcal{C}}(x_2)) \rangle_h .$$

$\hat{P}$ ist der Zeitordnungsoperator entlang der Kontur. Wie im Abschnitt 4.1 erhalten wir

$$D^{+-}(x_1, x_2) = i \langle \hat{\varphi}_{\mathcal{C}}(x_2) \hat{\varphi}_{\mathcal{C}}(x_1) \rangle_h =: D^<(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}
D^{-+}(x_1, x_2) &= i < \hat{\varphi}_C(x_1) \hat{\varphi}_C(x_2) >_h =: D^>(x_1, x_2) \\
D^{++}(x_1, x_2) &= i < \hat{T}(\hat{\varphi}_C(x_1) \hat{\varphi}_C(x_2)) >_h \\
&= \theta(t_1 - t_2) D^>(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1) D^<(x_1, x_2) \\
D^{--}(x_1, x_2) &= i < \hat{T}^{ac}(\hat{\varphi}_C(x_1) \hat{\varphi}_C(x_2)) >_h \\
&= \theta(t_1 - t_2) D^<(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1) D^>(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Analog zu (4.39) gilt die Relation

$$D^<(x_1, x_2) = D^>(x_2, x_1) = -(D^>(x_1, x_2))^*. \quad (4.70)$$

Wir rechnen $D^>$ aus, indem wir den Feldoperator $\hat{\varphi}(x)$ einsetzen und hier (4.68) anwenden:

$$\begin{aligned}
D^>(x_1, x_2) &= i \sum_{|\mathbf{k}_1| > k_c} \sum_{|\mathbf{k}_2| > k_c} \frac{1}{V} \frac{1}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}_1} \omega_{\mathbf{k}_2}}} \left(< \hat{a}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+ >_h e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \omega_{\mathbf{k}_1} t_1)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \omega_{\mathbf{k}_2} t_2)} \right. \\
&\quad \left. + < \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}_2} >_h e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1 - \omega_{\mathbf{k}_1} t_1)} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2 - \omega_{\mathbf{k}_2} t_2)} \right) \\
&= i \sum_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{1}{V} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left((1 + n_{\mathbf{k}}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} + n_{\mathbf{k}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} \right) \\
&= i \int_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left((1 + n_{\mathbf{k}}) e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} + n_{\mathbf{k}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} \right) \\
&= D^>(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Aus der Relation (4.70) folgt

$$\begin{aligned}
D^<(x_1, x_2) &= -(D^>(x_1, x_2))^* \\
&= i \int_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \left(n_{\mathbf{k}} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} + (1 + n_{\mathbf{k}}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega_{\mathbf{k}}(t_1 - t_2))} \right) \\
&= D^<(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$D^>(x, x) = D^<(x, x) = i \int_{|\mathbf{k}| > k_c} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (2n_{\mathbf{k}} + 1).$$

$D(x, x)$ ist nicht von den Koordinaten abhängig und rein imaginär.

Da $D^>$ und $D^<$ Funktionen von $x_1 - x_2$ sind, definieren wir neue Koordinaten

$$\mathbf{R} := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad \text{und} \quad \tau := t_1 - t_2.$$

Wir beachten, daß $D^>$ und $D^<$ symmetrisch in $\mathbf{R}$ sind:

$$D^>(-\mathbf{R}, \tau) = D^>(\mathbf{R}, \tau) \quad \text{und} \quad D^<(-\mathbf{R}, \tau) = D^<(\mathbf{R}, \tau). \quad (4.71)$$

Fourier-Transformation von $(\mathbf{R}, \tau)$ nach $(\mathbf{k}, \omega)$ ergibt

$$D^>(\mathbf{k}, \omega) = \theta(|\mathbf{k}| - k_c) i\pi \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \{ (1 + n_{\mathbf{k}}) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + n_{\mathbf{k}} \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \} , \quad (4.72)$$

$$D^<(\mathbf{k}, \omega) = \theta(|\mathbf{k}| - k_c) i\pi \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \{ n_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + (1 + n_{\mathbf{k}}) \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \} . \quad (4.73)$$

Dabei beachten wir, daß $D^>$ und $D^<$ symmetrisch in $\mathbf{k}$ sind:

$$D^>(-\mathbf{k}, \omega) = D^>(\mathbf{k}, \omega) \quad \text{und} \quad D^<(-\mathbf{k}, \omega) = D^<(\mathbf{k}, \omega) .$$

Zwischen den Fouriertransformierten von $D^>$ und $D^<$ besteht folgende Relation:

$$D^<(\mathbf{k}, \omega) = D^>(\mathbf{k}, -\omega) .$$

$\mathcal{D}.)$ Die Erwartungswerte von Operatoren, die aus einem Produkt von Feldoperator $\hat{\varphi}(x)$ mit ungerader Anzahl besteht, verschwinden.

$\mathcal{E}.)$ Für eine Dichtematrix der Form

$$\hat{\varrho} = e^{\sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}})} , \quad A_{\mathbf{k}} < 0$$

gilt die Wick-Zerlegung:

$$\langle \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}_2}^+ \cdots \hat{a}_{\mathbf{k}_n}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'_1} \hat{a}_{\mathbf{k}'_2} \cdots \hat{a}_{\mathbf{k}'_n} \rangle_{\varrho} = \prod_{\text{alle Permutationen}} \langle \hat{a}_{\mathbf{k}_i}^+ \hat{a}_{\mathbf{k}'_j} \rangle_{\varrho} .$$

Daraus folgt, daß für eine gerade Anzahl von Feldoperatoren gilt:

$$\langle \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2) \cdots \hat{\varphi}(x_n) \rangle_h = \prod_{\text{alle Permutationen}} \langle \hat{\varphi}(x_i) \hat{\varphi}(x_j) \rangle_h . \quad (4.74)$$

Nun berechnen wir S_{IF}^1 und S_{IF}^2 mit der Hilfe der obigen Überlegungen $\mathcal{A}) - \mathcal{E})$.

1.) S_{IF}^1

$$\begin{aligned} S_{IF}^1[\phi, \phi'] &= \langle S_{int}[\phi_C, \varphi_C] \rangle_h \\ &= -g^2 \int_C d^4x \left\{ \frac{1}{24} \langle \hat{\varphi}_C^4 \rangle_h + \frac{1}{6} \phi_C \langle \hat{\varphi}_C^3 \rangle_h + \frac{1}{4} \phi_C^2 \langle \hat{\varphi}_C^2 \rangle_h + \frac{1}{6} \phi_C^3 \langle \hat{\varphi}_C \rangle_h \right\} \\ &= -g^2 \int_C d^4x \left\{ \frac{1}{24} \langle \hat{\varphi}_C^4 \rangle_h + \frac{1}{4} \phi_C^2 \langle \hat{\varphi}_C^2 \rangle_h \right\} \\ &= -g^2 \int_{x_i}^x d^4x \left\{ \frac{1}{24} (\langle \hat{\varphi}^4 \rangle_h - \langle \hat{\varphi}'^4 \rangle_h) + \frac{1}{4} (\phi^2 \langle \hat{\varphi}^2 \rangle_h - \phi'^2 \langle \hat{\varphi}'^2 \rangle_h) \right\} \end{aligned}$$

Da $\hat{\varphi}$ und $\hat{\varphi}'$ selbe Form haben, gilt

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varphi}^4 \rangle_h &= \langle \hat{\varphi}'^4 \rangle_h , \\ \langle \hat{\varphi}^2 \rangle_h &= \langle \hat{\varphi}'^2 \rangle_h = -iD^>(x, x) . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$S_{IF}^1[\phi, \phi'] = \int_{x_i}^x d^4x \frac{g^2}{4} iD^>(x, x) (\phi^2(x) - \phi'^2(x)). \quad (4.75)$$

$iD^>(x, x)$ ist reell, da $D^>(x, x)$ rein imaginär ist. Das S_{IF}^1 entsprechende Feynman-Diagramm ist: („tadpole“-Graph)



2.) S_{IF}^2

$$S_{IF}^2[\phi, \phi'] = \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \left\{ < (S_{int}[\phi_C, \hat{\phi}_C])^2 >_h - < S_{int}[\phi_C, \hat{\phi}_C] >_h^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} & < (S_{int}[\phi_C, \hat{\phi}_C])^2 >_h \\ &= g^4 \int_C d^4x d^4\bar{x} \left\langle \hat{P} \left(\left[\frac{1}{24} \hat{\phi}_C^4(x) + \frac{1}{6} \phi_C(x) \hat{\phi}_C^3(x) + \frac{1}{4} \phi_C^2(x) \hat{\phi}_C^2(x) + \frac{1}{6} \phi_C^3(x) \hat{\phi}_C(x) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[\frac{1}{24} \hat{\phi}_C^4(\bar{x}) + \frac{1}{6} \phi_C(\bar{x}) \hat{\phi}_C^3(\bar{x}) + \frac{1}{4} \phi_C^2(\bar{x}) \hat{\phi}_C^2(\bar{x}) + \frac{1}{6} \phi_C^3(\bar{x}) \hat{\phi}_C(\bar{x}) \right] \right) \right\rangle_h \\ &= g^4 \int_C d^4x d^4\bar{x} \left\{ \frac{1}{24^2} < \hat{P}(\hat{\phi}_C^4(x) \hat{\phi}_C^4(\bar{x})) >_h \right. \\ &\quad + \frac{1}{96} < \hat{P}(\hat{\phi}_C^4(x) \hat{\phi}_C^2(\bar{x})) >_h \phi_C^2(\bar{x}) + \frac{1}{96} \phi_C^2(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C^2(x) \hat{\phi}_C^4(\bar{x})) >_h \\ &\quad + \frac{1}{36} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C^3(x) \hat{\phi}_C^3(\bar{x})) >_h \phi_C(\bar{x}) \\ &\quad + \frac{1}{36} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C^3(x) \hat{\phi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) + \frac{1}{36} \phi_C^3(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C(x) \hat{\phi}_C^3(\bar{x})) >_h \phi_C(\bar{x}) \\ &\quad + \frac{1}{16} \phi_C^2(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C^2(x) \hat{\phi}_C^2(\bar{x})) >_h \phi_C^2(\bar{x}) \\ &\quad \left. + \frac{1}{36} \phi_C^3(x) < \hat{P}(\hat{\phi}_C(x) \hat{\phi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) \right\} \end{aligned}$$

Bei dem letzten Rechenschritt haben wir die Aussage in $\mathcal{D}$) benutzt. Wir überzeugen uns leicht, daß das Integral über $< \hat{P}(\hat{\phi}_C^4(x) \hat{\phi}_C^4(\bar{x})) >_h$ Null ist, indem wir das Integral in der normalen Schreibweise darstellen und die gleiche Relationen zwischen den vier Termen wie bei dem Propagator berücksichtigen. Außerdem ist es auch leicht zu sehen, daß gilt

$$\begin{aligned} \int_C d^4x d^4\bar{x} < \hat{P}(\hat{A}(x) \hat{B}(\bar{x})) >_h &= \int_C d^4x d^4\bar{x} < \hat{P}(\hat{B}(\bar{x}) \hat{A}(x)) >_h \\ &= \int_C d^4x d^4\bar{x} < \hat{P}(\hat{B}(x) \hat{A}(\bar{x})) >_h. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
& < (S_{int}[\phi_C, \varphi_C])^2 >_h \\
& = g^4 \int_C d^4 x d^4 \bar{x} \left\{ \frac{1}{48} < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^4(x) \hat{\varphi}_C^2(\bar{x})) >_h \phi_C^2(\bar{x}) \right. \\
& \quad + \frac{1}{36} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^3(x) \hat{\varphi}_C^3(\bar{x})) >_h \phi_C(\bar{x}) \\
& \quad + \frac{1}{18} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^3(x) \hat{\varphi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) \\
& \quad + \frac{1}{16} \phi_C^2(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^2(x) \hat{\varphi}_C^2(\bar{x})) >_h \phi_C^2(\bar{x}) \\
& \quad \left. + \frac{1}{36} \phi_C^3(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C(x) \hat{\varphi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) \right\} . \quad (4.76)
\end{aligned}$$

Wir setzen (4.76) und (4.75) in S_{IF}^2 ein und teilen sie in die einzelnen Beiträge auf:

$$S_{IF}^2 =: S_{IF}^{2a} + S_{IF}^{2b_1} + S_{IF}^{2b_2} + S_{IF}^{2b_3} + S_{IF}^{2b_4}$$

mit

$$\begin{aligned}
S_{IF}^{2a}[\phi, \phi'] &= \frac{g^4}{96\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^4(x) \hat{\varphi}_C^2(\bar{x})) >_h \phi_C^2(\bar{x}) \\
S_{IF}^{2b_1}[\phi, \phi'] &= \frac{g^4}{72\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^3(x) \hat{\varphi}_C^3(\bar{x})) >_h \phi_C(\bar{x}) \\
S_{IF}^{2b_2}[\phi, \phi'] &= \frac{g^4}{36\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} \phi_C(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^3(x) \hat{\varphi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) \\
S_{IF}^{2b_3}[\phi, \phi'] &= \frac{g^4}{32\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} \phi_C^2(x) \left\{ < \hat{P}(\hat{\varphi}_C^2(x) \hat{\varphi}_C^2(\bar{x})) >_h \right. \\
& \quad \left. - < \hat{\varphi}_C^2(x) >_h < \hat{\varphi}_C^2(\bar{x}) >_h \right\} \phi_C^2(\bar{x}) \\
S_{IF}^{2b_4}[\phi, \phi'] &= \frac{g^4}{72\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} \phi_C^3(x) < \hat{P}(\hat{\varphi}_C(x) \hat{\varphi}_C(\bar{x})) >_h \phi_C^3(\bar{x}) .
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die einzelnen Beiträge nacheinander.

2I.) S_{IF}^{2a}

Nach der Aussage in $\mathcal{E}$) (4.74) und der Definition des Propagators erhalten wir

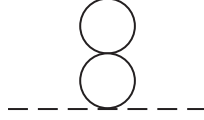
$$< \hat{P}(\hat{\varphi}_C^4(x) \hat{\varphi}_C^2(\bar{x})) >_h = (-i)^3 \left(3D^2(x, x)D(\bar{x}, \bar{x}) + 12D(x, x)D^2(x, \bar{x}) \right) .$$

Offensichtlich ist $\int_C d^4 x d^4 \bar{x} D^2(x, x)D(\bar{x}, \bar{x})\phi_C^2(\bar{x}) = 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
S_{IF}^{2a}[\phi, \phi'] &= -\frac{g^4}{8\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} D(x, x)D^2(x, \bar{x})\phi_C^2(\bar{x}) \\
&= -\frac{g^4}{8\hbar} \int_C d^4 x d^4 \bar{x} D^>(x, x) \left\{ (D^>(x, \bar{x}))^2 \theta(t - \bar{t}) \phi^2(\bar{x}) + (D^<(x, \bar{x}))^2 \theta(\bar{t} - t) \phi^2(\bar{x}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(D^<(x, \bar{x}))^2 \phi'^2(\bar{x}) - (D^>(x, \bar{x}))^2 \phi^2(\bar{x}) \\
& + (D^<(x, \bar{x}))^2 \theta(t - \bar{t}) \phi'^2(\bar{x}) + (D^>(x, \bar{x}))^2 \theta(\bar{t} - t) \phi'^2(\bar{x}) \} \\
& = -\frac{g^4}{8\hbar} \int d^4x d^4\bar{x} D^>(x, x) \left[(D^<(x, \bar{x}))^2 - (D^>(x, \bar{x}))^2 \right] \theta(\bar{t} - t) \left(\phi^2(\bar{x}) - \phi'^2(\bar{x}) \right) \\
& = \int d^4\bar{x} \left\{ -\frac{g^4}{8\hbar} \int d^3r \int d\bar{t} D^>(x, x) \left[(D^<(x, \bar{x}))^2 - (D^>(x, \bar{x}))^2 \right] \right\} \left(\phi^2(\bar{x}) - \phi'^2(\bar{x}) \right).
\end{aligned}$$

Wegen der Relation (4.70) gilt $(D^<(x, \bar{x}))^2 = \left[(D^>(x, \bar{x}))^2 \right]^*$. Folglich ist $(D^<(x, \bar{x}))^2 - (D^>(x, \bar{x}))^2$ rein imaginär. Da $D^>(x, x)$ auch rein imaginär ist, ist S_{IF}^{2a} reell. Das S_{IF}^{2a} entsprechende Feynman-Diagramm ist



Wir bemerken, daß S_{IF}^{2a} ähnliche Struktur wie S_{IF}^1 hat. Sie führen gemeinsam zu einer dynamischen Massenverschiebung, die wir als $\Delta m(x)$ bezeichnen:

$$\begin{aligned}
S_{IF}^1[\phi, \phi'] + S_{IF}^{2a}[\phi, \phi'] &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \Delta m^2(x) \right) \left(\phi^2(x) - \phi'^2(x) \right) \\
\text{mit} \\
\Delta m^2(x) &:= -\frac{ig^2}{2} D^>(x, x) - \frac{g^4}{4\hbar} \int d^3\bar{r} \int d\bar{t} D^>(\bar{x}, \bar{x}) \left[(D^>(\bar{x}, x))^2 - (D^<(\bar{x}, x))^2 \right].
\end{aligned} \tag{4.77}$$

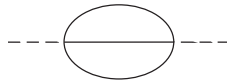
2II.) $S_{IF}^{2b_1}$

$$\langle \hat{P} \left(\hat{\phi}_C^3(x) \hat{\phi}_C^3(\bar{x}) \right) \rangle_h = (-i)^3 \left(9D(x, x)D(x, \bar{x})D(\bar{x}, \bar{x}) + 6D^3(x, \bar{x}) \right)$$

Aus dem selben Grund wie in (4.61) verschwindet das Integral $\int_C d^4x d^4\bar{x} \phi_C(x) D(x, \bar{x}) \phi_C(\bar{x})$. Daraus folgt

$$S_{if}^{2b_1}[\phi, \phi'] = \int_C d^4x d^4\bar{x} \phi_C(x) \frac{1}{2} \left(-\frac{g^4}{6\hbar} D^3(x, \bar{x}) \right) \phi_C(\bar{x}).$$

Das $S_{IF}^{2b_1}$ entsprechende Feynman-Diagramm ist: („sunset“-Graph)



$S_{IF}^{2b_1}$ hat die ähnliche Form wie die des zweiten Terms in (4.42). Wir können $S_{IF}^{2b_1}$ auf die Form in (4.47) bringen, wenn $-\frac{g^4}{6\hbar} D^3(x, \bar{x})$ die gleiche Relation wie

$D(t, s)$ in (4.39) hat. Aufgrund (4.70) ist die Voraussetzung in der Tat erfüllt. Folglich ist

$$S_{if}^{2b_1}[\phi, \phi'] = \int d^4x d^4\bar{x} (\phi(x) - \phi'(x)) \frac{1}{2} R_{b_1}(\phi(\bar{x}) + \phi'(\bar{x})) \\ + i \int d^4x d^4\bar{x} (\phi(x) - \phi'(x)) \frac{1}{2} I_{b_1}(\phi(\bar{x}) - \phi'(\bar{x})),$$

wobei

$$R_{b_1}(x, \bar{x}) = -\frac{g^4}{6\hbar} \left[(D^>(x, \bar{x}))^3 - (D^<(x, \bar{x}))^3 \right] \theta(t - \bar{t}), \\ I_{b_1}(x, \bar{x}) = -\frac{g^4}{12i\hbar} \left[(D^>(x, \bar{x}))^3 + (D^<(x, \bar{x}))^3 \right].$$

2III.) $S_{IF}^{2b_2}$

$$< \hat{P} \left(\hat{\phi}_C^3(x) \hat{\phi}_C(\bar{x}) \right) >_h = (-i)^2 (3D(x, x)D(x, \bar{x}))$$

Ebenso wie in 2II verschwindet auch das Integral $\int_C d^4x d^4\bar{x} \phi_C(x) D(x, \bar{x}) \phi_C^3(\bar{x})$. Folglich ist $S_{IF}^{2b_2}[\phi, \phi'] = 0$.

2IV.) $S_{IF}^{2b_3}$

$$< \hat{P} \left(\hat{\phi}_C^2(x) \hat{\phi}_C^2(\bar{x}) \right) >_h - < \hat{\phi}_C^2(x) >_h < \hat{\phi}_C^2(\bar{x}) >_h = (-i)^2 2D^2(x, \bar{x})$$

Daraus ergibt

$$S_{IF}^{2b_3}[\phi, \phi'] = \int_C d^4x d^4\bar{x} \phi_C^2(x) \frac{1}{2} \left(-\frac{ig^4}{8\hbar} D^2(x, \bar{x}) \right) \phi_C^2(\bar{x}).$$

Das $S_{IF}^{2b_3}$ entsprechende Feynman-Diagramm ist: („fish“-Graph)



$-\frac{ig^4}{8\hbar} D^2(x, \bar{x})$ erfüllt die Relation (4.39). Folglich ist

$$S_{IF}^{2b_3}[\phi, \phi'] = \int d^4x d^4\bar{x} (\phi^2(x) - \phi'^2(x)) \frac{1}{2} R_{b_3}(\phi^2(\bar{x}) + \phi'^2(\bar{x})) \\ + i \int d^4x d^4\bar{x} (\phi^2(x) - \phi'^2(x)) \frac{1}{2} I_{b_3}(\phi^2(\bar{x}) - \phi'^2(\bar{x})),$$

wobei

$$R_{b_3}(x, \bar{x}) = -\frac{ig^4}{8\hbar} \left[(D^>(x, \bar{x}))^2 - (D^<(x, \bar{x}))^2 \right] \theta(t - \bar{t}), \\ I_{b_3}(x, \bar{x}) = -\frac{g^4}{16\hbar} \left[(D^>(x, \bar{x}))^2 + (D^<(x, \bar{x}))^2 \right].$$

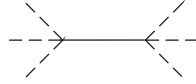
2V.) $S_{IF}^{2b_4}$

$$< \hat{P}(\hat{\phi}_C(x)\hat{\phi}_C(\bar{x})) >_h = (-i)D(x, \bar{x})$$

Daraus ergibt

$$S_{IF}^{2b_4}[\phi, \phi'] = \int d^4x d^4\bar{x} \phi_C^3(x) \frac{1}{2} \left(\frac{g^4}{36\hbar} D(x, \bar{x}) \right) \phi_C^3(\bar{x}).$$

Das $S_{IF}^{2b_4}$ entsprechende Feynman-Diagramm ist:



$\frac{g^4}{36\hbar} D(x, \bar{x})$ erfüllt die Relation (4.39). Folglich ist

$$\begin{aligned} S_{IF}^{2b_4}[\phi, \phi'] &= \int d^4x d^4\bar{x} (\phi^3(x) - \phi'^3(x)) \frac{1}{2} R_{b_4}(\phi^3(\bar{x}) + \phi'^3(\bar{x})) \\ &\quad + i \int d^4x d^4\bar{x} (\phi^3(x) - \phi'^3(x)) \frac{1}{2} I_{b_4}(\phi^3(\bar{x}) - \phi'^3(\bar{x})), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} R_{b_4}(x, \bar{x}) &= \frac{g^4}{36\hbar} [(D^>(x, \bar{x})) - (D^<(x, \bar{x}))] \theta(t - \bar{t}), \\ I_{b_4}(x, \bar{x}) &= \frac{g^4}{72i\hbar} [(D^>(x, \bar{x})) + (D^<(x, \bar{x}))]. \end{aligned}$$

Wir fassen das Influenz-Funktional zusammen:

$$S_{IF} \approx S_{IF}^1 + S_{IF}^{2a} + S_{IF}^{2b_1} + S_{IF}^{2b_3} + S_{IF}^{2b_4}$$

Dabei sind S_{IF}^1 und S_{IF}^{2a} reell und führen zu einer Masseverschiebung. Hingegen sind die anderen komplex. Wie wir später zeigen werden, führen die Realteile zu einer Dissipation, während die Imaginärteile gemäss der vorherigen Interpretation ein Gauß'sches Rauschen andeuten.

4.3.3 Der klassische Limes in der Φ^4 -Theorie

Ebenso wie im Abschnitt 4.2 definieren wir die effektive Wirkung:

$$\begin{aligned} S_{eff}[\phi, \phi'] &= S^{(s)}[\phi] - S^{(s)}[\phi'] + S_{IF}[\phi, \phi'] \\ &\approx S^{(s)}[\phi] - S^{(s)}[\phi'] + S_{IF}^1[\phi, \phi'] + S_{IF}^2[\phi, \phi'] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{eff}[\phi, \phi'] &= Re(S_{eff}[\phi, \phi']) + \int d^4x \xi_{b_1}(x) (\phi(x) - \phi'(x)) \\ &\quad + \int d^4x \xi_{b_3}(x) (\phi^2(x) - \phi'^2(x)) + \int d^4x \xi_{b_4}(x) (\phi^3(x) - \phi'^3(x)), \end{aligned}$$

wobei

$$< \xi_{b_i}(x) \xi_{b_i}(\bar{x}) > = \hbar I_{b_i}(x, \bar{x}).$$

Wir führen die neuen Felder ein

$$\bar{\phi} := \frac{\phi + \phi'}{2} \quad \text{und} \quad \phi_{\Delta} := \phi - \phi'.$$

Durch das Minimierungsprinzip bzgl. der neuen Felder,

$$\left. \frac{\delta \tilde{S}_{eff}[\bar{\phi}, \phi_{\Delta}]}{\delta \phi_{\Delta}} \right|_{\phi_{\Delta}=0} = 0,$$

erhalten wir die semiklassische Bewegungsgleichung für $\phi(x)$ unter Einfluß des thermischen Ensemble kurzweiliger Moden

$$\begin{aligned} & \square \phi(x) + (\tilde{m}^2 + \Delta m^2) \phi(x) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi^3(x) - \int d^4 \bar{x} R_{b_1}(x, \bar{x}) \phi(\bar{x}) \\ & - 2\phi(x) \int d^4 \bar{x} R_{b_3}(x, \bar{x}) \phi^2(\bar{x}) - 3\phi^2(x) \int d^4 \bar{x} R_{b_4}(x, \bar{x}) \phi^3(\bar{x}) \\ & = \xi_{b_1}(x) + 2\phi(x)\xi_{b_3}(x) + 3\phi^2(x)\xi_{b_4}(x). \end{aligned}$$

$\tilde{m}^2$ und $\tilde{g}^2$ notieren die entsprechenden Werte nach der üblichen Vakuums-Renormierung.

Durch die folgende Substitution

$$\begin{aligned} R_1 &= -R_{b_1} & , & & R_2 &= -2R_{b_3} & , & & R_3 &= -3R_{b_4} , \\ I_1 &= -\hbar I_{b_1} & , & & I_2 &= -4\hbar I_{b_3} & , & & I_3 &= -9\hbar I_{b_4} , \\ \xi_1 &= -\xi_{b_1} & , & & \xi_2 &= -2\xi_{b_3} & , & & \xi_3 &= -3\xi_{b_4} , \end{aligned}$$

können wir die Bewegungsgleichung noch formaler schreiben:

$$\begin{aligned} & \square \phi(x) + m^{*2} \phi(x) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi^3(x) + \sum_{N=1}^3 (\phi(x))^{N-1} \int d^4 \bar{x} R_N(x, \bar{x}) (\phi(\bar{x}))^N \\ & = \sum_{N=1}^3 \xi_N(x) (\phi(x))^{N-1}, \end{aligned} \tag{4.78}$$

wobei

$$\begin{aligned} m^{*2} &:= \tilde{m}^2 + \Delta m^2(x), \\ < \xi_N(x) > = 0 \quad , \quad < \xi_N(x) \xi_N(\bar{x}) > = I_N(x, \bar{x}). \end{aligned}$$

Als nächste werden wir die semiklassische Bewegungsgleichung für einzelne langwellige Mode $\phi(\mathbf{k}, t)$ herleiten. Bevor wir (4.78) Fourier transformieren, rechnen wir zuerst die Fouriertransformierten der Dissipationskernels R_N und der Korrelationsfunktionen I_N aus.

Die R_N und I_N haben folgende Gestalt:

$$R_1(x, \bar{x}) = \frac{g^4}{6} \left((D^>(x, \bar{x}))^3 - (D^<(x, \bar{x}))^3 \right) \theta(t - \bar{t}) := \mathcal{M}_1(x, \bar{x}) \theta(t - \bar{t})$$

$$\begin{aligned}
R_2(x, \bar{x}) &= \frac{ig^4}{4} \left((D^>(x, \bar{x}))^2 - (D^<(x, \bar{x}))^2 \right) \theta(t - \bar{t}) := \mathcal{M}_2(x, \bar{x}) \theta(t - \bar{t}) \\
R_3(x, \bar{x}) &= -\frac{g^4}{12} (D^>(x, \bar{x}) - D^<(x, \bar{x})) \theta(t - \bar{t}) := \mathcal{M}_3(x, \bar{x}) \theta(t - \bar{t}) \quad (4.79) \\
&\text{und} \\
I_1(x, \bar{x}) &= \frac{ig^4}{12} \left((D^>(x, \bar{x}))^3 + (D^<(x, \bar{x}))^3 \right) \\
I_2(x, \bar{x}) &= -\frac{g^4}{4} \left((D^>(x, \bar{x}))^2 + (D^<(x, \bar{x}))^2 \right) \\
I_3(x, \bar{x}) &= -\frac{ig^4}{8} (D^>(x, \bar{x}) + D^<(x, \bar{x})) . \quad (4.80)
\end{aligned}$$

Die $\theta(t - \bar{t})$ in (4.79) zeigt die Kausalität: Das Feld $(\phi(\bar{x}))^N$ in (4.78) aus der Vergangenheit hat Einfluß auf die Gegenwart.

R_N und I_N sind Funktionen von $x - \bar{x}$, da $D^>$ und $D^<$ nur von $x - \bar{x}$ abhängen. Wir definieren deswegen die neuen Koordinaten

$$\mathbf{R} := \mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \tau := t - \bar{t}.$$

Aus der Relation zwischen $D^>$ und $D^<$ (4.70) und ihrer Symmetrieeigenschaft (4.71) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_N(\mathbf{R}, \tau) &= \mathcal{M}_N(-\mathbf{R}, \tau) = -\mathcal{M}_N(\mathbf{R}, -\tau) = (\mathcal{M}_N(\mathbf{R}, \tau))^* , \\
I_N(\mathbf{R}, \tau) &= I_N(-\mathbf{R}, \tau) = I_N(\mathbf{R}, -\tau) = (I_N(\mathbf{R}, \tau))^* .
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}_N$ und I_N sind daher reell. $\mathcal{M}_N$ ist eine gerade Funktion in $\mathbf{R}$ und ungerade Funktion in τ , während I_N eine gerade Funktion in $\mathbf{R}$ als auch in τ ist. Folglich sind die $\mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \omega)$ rein imaginär, gerade in $\mathbf{k}$ und ungerade in ω . Dagegen ist $I_N(\mathbf{k}, \omega)$ reell, gerade in $\mathbf{k}$ und in ω .

Mit der expliziten Form von $D^>(\mathbf{k}, \omega)$ und $D^<(\mathbf{k}, \omega)$ in (4.72) und (4.73) erhalten wir die Fouriertransformierte von $\mathcal{M}_N$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega) &= -i \frac{\pi}{24} g^4 \int_{k_c} \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \theta(|\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2| - k_c) \times \\
&\quad \{ [(1+n_1)(1+n_2)(1+n_3) - n_1 n_2 n_3] \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\
&\quad + [(1+n_1)n_2(1+n_3) - n_1(1+n_2)n_3] \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \\
&\quad + [n_1(1+n_2)(1+n_3) - (1+n_1)n_2 n_3] \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\
&\quad + [n_1 n_2(1+n_3) - (1+n_1)(1+n_2)n_3] \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \\
&\quad + [(1+n_1)(1+n_2)n_3 - n_1 n_2(1+n_3)] \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \\
&\quad + [(1+n_1)n_2 n_3 - n_1(1+n_2)(1+n_3)] \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\
&\quad + [n_1(1+n_2)n_3 - (1+n_1)n_2(1+n_3)] \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \\
&\quad + [n_1 n_2 n_3 - (1+n_1)(1+n_2)(1+n_3)] \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \} , \quad (4.81)
\end{aligned}$$

wobei $\omega_1 = \omega_{\mathbf{q}_1}$, $\omega_2 = \omega_{\mathbf{q}_2}$, $\omega_3 = \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1-\mathbf{q}_2}$, $n_i = n(\omega_i) = \frac{1}{e^{\omega_i/T} - 1}$ und $\omega_{\mathbf{q}}$ folgende formale Darstellung hat:

$$\omega_{\mathbf{q}} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_p^2},$$

m_p ist hier identisch mit der dynamischen Masse m^* ;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2(\mathbf{k}, \omega) = & -i \frac{\pi}{8} g^4 \int_{k_c} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \theta(|\mathbf{k} - \mathbf{q}| - k_c) \times \\ & \{ [(1 + n_1)(1 + n_2) - n_1 n_2] \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) \\ & + [n_1(1 + n_2) - (1 + n_1)n_2] \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2) \\ & + [(1 + n_1)n_2 - n_1(1 + n_2)] \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2) \\ & + [n_1 n_2 - (1 + n_1)(1 + n_2)] \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2) \}, \end{aligned}$$

wobei $\omega_1 = \omega_{\mathbf{q}}$, $\omega_2 = \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$ und $n_i = n(\omega_i)$;

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_3(\mathbf{k}, \omega) = & -i \frac{\pi}{12} g^4 \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \theta(|\mathbf{k}| - k_c) \{ [(1 + n(\omega_{\mathbf{k}})) - n(\omega_{\mathbf{k}})] \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \\ & + [n(\omega_{\mathbf{k}}) - (1 + n(\omega_{\mathbf{k}}))] \delta(\omega + \omega_{\mathbf{k}}) \}. \end{aligned}$$

Wir fassen die Terme in den geschweiften Klammern der obigen Gleichungen jeweils in zwei Terme zusammen, so daß die einzelnen Terme nach ihrem Vorzeichen sortiert sind. Folglich ist

$$i\mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \omega) = C_{\mathcal{M}_N} (T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega) - T_N^g(\mathbf{k}, \omega)) ,$$

wobei $C_{\mathcal{M}_N}$, $T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega)$ und $T_N^g(\mathbf{k}, \omega)$ alle positiv sind. Wir bezeichnen T_N^ℓ als den „loss“ Term und T_N^g als den „gain“ Term. Aus der Relation $1 + n_i = n_i e^{\frac{\omega_i}{T}}$ und der Energieerhaltung, die die δ -Funktion andeutet, folgt

$$\frac{T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega)}{T_N^g(\mathbf{k}, \omega)} = e^{\frac{\omega}{T}} .$$

Daher haben $i\mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \omega)$ und ω gleiches Vorzeichen.

Analog erhalten wir die Fouriertransformierte von $I_N(\mathbf{R}, \tau)$

$$I_N(\mathbf{k}, \omega) = C_{I_N} (T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega) + T_N^g(\mathbf{k}, \omega)) ,$$

wobei C_{I_N} positiv ist. Wir beachten, daß die Verhältnisse zwischen $\frac{1}{i}C_{\mathcal{M}_N}$ und C_{I_N} gleich wie die zwischen den Koeffizienten der $R_N(x, \bar{x})$ und $I_N(x, \bar{x})$ in (4.79) und (4.80), z.B. ist

$$\frac{\frac{1}{i}C_{\mathcal{M}_1}}{C_{I_1}} = \frac{\frac{g^4}{6}}{\frac{ig^4}{12}} = \frac{2}{i} .$$

Folglich ist $C_{\mathcal{M}_1}/C_{I_1} = 2$.

Wir transformieren die Bewegungsgleichung (4.78) von dem $\mathbf{r}$ -Raum in den $\mathbf{k}$ -Raum. Dabei soll der Einfachheit halber nur der $N = 1$ Beitrag betrachtet werden.

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(\mathbf{k}, t) + \mathbf{k}^2 \phi(\mathbf{k}, t) + m^{*2} \phi(\mathbf{k}, t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \int^{k_c} \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \theta(k_c - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) \times \\ & \quad \phi(\mathbf{k}_1, t) \phi(\mathbf{k}_2, t) \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, t) + \int_0^\infty d\tau \phi(\mathbf{k}, t - \tau) \mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \tau) + \dots \\ & = \xi_1(\mathbf{k}, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.82)$$

mit

$$< \xi_N(\mathbf{k}, t) \xi_N(\mathbf{k}', t') > = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') I_N(\mathbf{k}, t - t')$$

oder

$$< \xi_N(\mathbf{k}, t) \xi_N(-\mathbf{k}, t') > = V I_N(\mathbf{k}, t - t').$$

Wir bemerken, daß $|\mathbf{k}| \leq k_c$ ist.

Um die Dissipation noch mehr zu verdeutlichen, definieren wir die Dissipationskernels $\Gamma_N(\mathbf{k}, \tau)$ durch

$$\frac{d \Gamma_N(\mathbf{k}, \tau)}{d\tau} := \frac{1}{2} \mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \tau). \quad (4.83)$$

Für die Fouriertransformierten $\Gamma_N(\mathbf{k}, \omega)$ gilt

$$\Gamma_N(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i \mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \omega)}{2\omega} \quad \text{für } \omega \neq 0 \quad (4.84)$$

Wir setzen (4.83) in dem Dissipationsterm in (4.82) ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty d\tau \phi(\mathbf{k}, t - \tau) \mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \tau) = \int_0^\infty d\tau \phi(\mathbf{k}, t - \tau) 2 \frac{d \Gamma_1(\mathbf{k}, \tau)}{d\tau} \\ & = 2 [\phi(\mathbf{k}, -\infty) \Gamma_1(\mathbf{k}, \tau \rightarrow \infty) - \phi(\mathbf{k}, t) \Gamma_1(\mathbf{k}, \tau = 0)] + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma_1(\mathbf{k}, t - t') \dot{\phi}(\mathbf{k}, t'). \end{aligned}$$

Für vernünftige Funktion ist $\Gamma_1(\mathbf{k}, \tau \rightarrow \infty) = 0$. Wir schreiben die Bewegungsgleichung (4.82) in die Darstellung um, die die Dissipationskernels enthält:

$$\begin{aligned} & \ddot{\phi}(\mathbf{k}, t) + [\mathbf{k}^2 + m^{*2} - \Gamma_1(\mathbf{k}, 0)] \phi(\mathbf{k}, t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \int^{k_c} \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \theta(k_c - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) \times \\ & \quad \phi(\mathbf{k}_1, t) \phi(\mathbf{k}_2, t) \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, t) + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma_1(\mathbf{k}, t - t') \dot{\phi}(\mathbf{k}, t') + \dots \\ & = \xi_1(\mathbf{k}, t) + \dots \end{aligned} \quad (4.85)$$

mit

$$< \xi_N(\mathbf{k}, t) \xi_N(-\mathbf{k}, t') > = V I_N(\mathbf{k}, t - t').$$

Diese Gleichung stellt eine typische Langevin-Gleichung mit einem Dissipationskern und einer stochastischen Kraft dar. Zwischen den Dissipationskern $\Gamma_N(\mathbf{k}, \tau)$ und den Korrelationsfunktionen $I_N(\mathbf{k}, \tau)$ bestehen folgende Relation:

$$I_N(\mathbf{k}, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \mathcal{K}_N(\tau - \tau') \Gamma_N(\mathbf{k}, \tau'). \quad (4.86)$$

(4.86) stellt das allgemeine Fluktuation-Dissipations-Theorem dar. Durch die Fourier-Transformation der (4.86) erhalten wir

$$\mathcal{K}_N(\omega) = \frac{I_N(\mathbf{k}, \omega)}{\Gamma_N(\mathbf{k}, \omega)} = 2\omega \frac{I_N(\mathbf{k}, \omega)}{i\mathcal{M}_N(\mathbf{k}, \omega)} = 2\omega \frac{C_{I_N}}{C_{\mathcal{M}_N}} \frac{T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega) + T_N^g(\mathbf{k}, \omega)}{T_N^\ell(\mathbf{k}, \omega) - T_N^g(\mathbf{k}, \omega)}.$$

Für $\omega \ll T$ ist

$$\mathcal{K}_N(\omega) = 2\omega \frac{C_{I_N}}{C_{\mathcal{M}_N}} \frac{e^{\frac{\omega}{T}} + 1}{e^{\frac{\omega}{T}} - 1} \rightarrow 4T \frac{C_{I_N}}{C_{\mathcal{M}_N}}.$$

Z.B. ist für $N=1$ $\mathcal{K}_1(\omega) \rightarrow 2T$.

Die Zeitentwicklung von $\phi(\mathbf{k}, t)$ können wir als eine Mischung der gedämpften Oszillationen aller Frequenzen ansehen. Im Hinblick auf (4.85) erkennen wir, daß Oszillationen mit den Frequenzen, die in der Nähe der Eigenfrequenz $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^{*2}}$ liegen, den Hauptbeitrag zu $\phi(\mathbf{k}, t)$ liefern. Da die dynamische Masse m^* im Limes der hohen Temperatur proportional zu gT [GM 97] ist, ist sie für eine schwache Wechselwirkung, d.h. $g \ll 1$, sehr kleiner als die Temperatur. Folglich wird die Eigenfrequenz auch viel kleiner als die Temperatur, wenn der Abschneideparameter k_c viel kleiner als die Temperatur T ist. In diesem Fall ist das Fluktuation-Dissipations-Theorem näherungsweise

$$I_1(\mathbf{k}, \tau) = 2T \Gamma_1(\mathbf{k}, \tau). \quad (4.87)$$

Wir betrachten nun die Korrelationsfunktion des Rausches. Falls die Korrelationszeit klein gegen die Zeitskala für $\phi(\mathbf{k}, t)$ ist, nähert die Korrelationsfunktion bzgl. dieser Zeitskala eine δ -Funktion. Diese Art von Rauschen haben wir als weißes Rauschen bezeichnet. Aus (4.87) folgt, daß das Dissipationskern auch eine δ -Funktion ist. Deswegen hängt der Wert $\phi(\mathbf{k}, t)$ nur von dem Wert des letzten Zeitschrittes ab. Solcher Prozeß ist nach den Erkenntnissen in Kapitel 3 ein Markov-Prozeß.

Wir erhalten den geeigneten Markov-Limes [GM 97], indem wir die Näherung

$$\phi(\mathbf{k}, t - \tau) \approx \phi(\mathbf{k}, t) \cos(\omega_{\mathbf{k}}\tau) - \dot{\phi}(\mathbf{k}, t) \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin(\omega_{\mathbf{k}}\tau) \quad (4.88)$$

in (4.82) einsetzen und das Integral approximativ auswerten:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(\mathbf{k}, t) + \left[\mathbf{k}^2 + m^{*2} + P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega} \right] \phi(\mathbf{k}, t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \int^{k_c} \frac{d^3 k_1 d^3 k_2}{(2\pi)^6} \times \\ \theta(k_c - |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2|) \phi(\mathbf{k}_1, t) \phi(\mathbf{k}_2, t) \phi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, t) + \Gamma_1(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \dot{\phi}(\mathbf{k}, t) + \dots \\ = \xi_1(\mathbf{k}, t) + \dots \end{aligned}$$

Wir sehen, daß dann

$$\Gamma_1(\mathbf{k}, \tau) = \Gamma_1(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \delta(\tau)$$

und

$$< \xi_1(\mathbf{k}, t) \xi_1(-\mathbf{k}, t') > = V I_1(\mathbf{k}, t - t') = 2TV \Gamma_1(\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}) \delta(t - t')$$

den Prozeß in der Markov-Näherung approximativ beschreibt.

Im Falle $k_c \rightarrow 0$ erhalten wir speziell die Bewegungsgleichung der Null-Mode:

$$\ddot{\phi}_0(t) + \left(m^{*2} - \Gamma(t=0) \right) \phi_0(t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi_0^3(t) + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma(t-t') \dot{\phi}_0(t') = \xi(t)$$

mit $< \xi(t) \xi(t') > = 2TV \Gamma(t-t').$ (4.89)

Dabei ist nur der N=1 Beitrag berücksichtigt und $\Gamma(t) := \Gamma_1(\mathbf{k}=0, t)$.

Der Markov-Limes von (4.89) ist

$$\ddot{\phi}_0(t) + \left(m^{*2} + P \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)}{\omega_{\mathbf{k}} - \omega} \right) \phi_0(t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi_0^3(t) + \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \dot{\phi}_0(t) = \xi(t)$$

mit $< \xi(t) \xi(t') > = 2TV \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \delta(t-t').$ (4.90)

4.3.4 Dissipationskernel, dynamische Massenverschiebung

Bei der Berechnung der Dissipationskernels $\Gamma_N(\mathbf{k}, \omega)$ konzentrieren wir uns auf den N=1 Beitrag unter dem Limes $k_c \rightarrow 0$. Wegen (4.84) ist die explizite Berechnung von $\Gamma_1(0, \omega)$ auf die Auswertung von $i\mathcal{M}_1(0, \omega)$ zurückzuführen. Wir wissen ferner aus dem letzten Paragraph, daß

$$i\mathcal{M}_1(0, \omega) = C_{\mathcal{M}_1} \left(e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) T_1^g(0, \omega).$$

Daher brauchen wir nur $T_1^g(0, \omega)$ zu berechnen. Die Auswertung der kinematischen Grenzen ist mühselig und wird im Anhang detailliert ausgeführt. Wir erhalten:

1.) Für $\omega \rightarrow 0$ ist $T_1^g(\mathbf{k}=0, \omega=0) = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\mathbf{k}=0, \omega=0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} C_{\mathcal{M}_1} T_1^g(\mathbf{k}=0, \omega) \frac{e^{\frac{\omega}{T}} - 1}{2\omega} \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} C_{\mathcal{M}_1} T_1^g(\mathbf{k}=0, \omega) \frac{\frac{\omega}{T} + \mathcal{O}(\omega^2)}{2\omega} = 0. \end{aligned}$$

2.) Die Null-Mode wechselwirkt mit dem Wärmebad durch den Austausch der Quasiteilchen. Der „gain“ Term $T_1^g(0, \omega)$ bzw. der „loss“ Term $T_1^\ell(0, \omega)$ stellt die Produktionsrate bzw. die Zerfallsrate der Null-Mode mit der Energie ω dar. Daher ist $i\mathcal{M}_1(0, \omega)$ propotional zu der Nettoverlustrate der Null-Mode.

Wir definieren den reduzierten Dissipationskernel $\bar{\Gamma}$ durch

$$\Gamma_1(0, \omega) = \frac{g^4 T}{192 \pi^3} \bar{\Gamma} \left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T} \right).$$

$\bar{\Gamma} \left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T} \right)$ stellt das Verhältnis zwischen der Nettoverlustsrate und der Energie der Null-Mode dar. In Abb.4.2 sind $\bar{\Gamma} \left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T} \right)$ für $\frac{m_p}{T} = 0.1$ und $\frac{m_p}{T} = 1$ dargestellt. Die durchgezogenen Linien zeigen den Verlauf von $\bar{\Gamma} \left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T} \right)$, während die gestrichelten und gepunkteten Linien zwei Anteile von $\bar{\Gamma}$ zeigen: γ_1 entspricht dem Nettoverlust der Null-Mode durch den Prozeß, in dem drei kurzwellige Moden in eine langwellige Mode zerfallen und dem entsprechenden Umkehrprozeß. γ_2 entspricht dem Nettoverlust der Null-Mode durch den Prozeß, in dem zwei kurzwellige Moden in eine langwellige Mode und eine kurzwellige gestreut werden, und dem entsprechenden Umkehrprozeß.

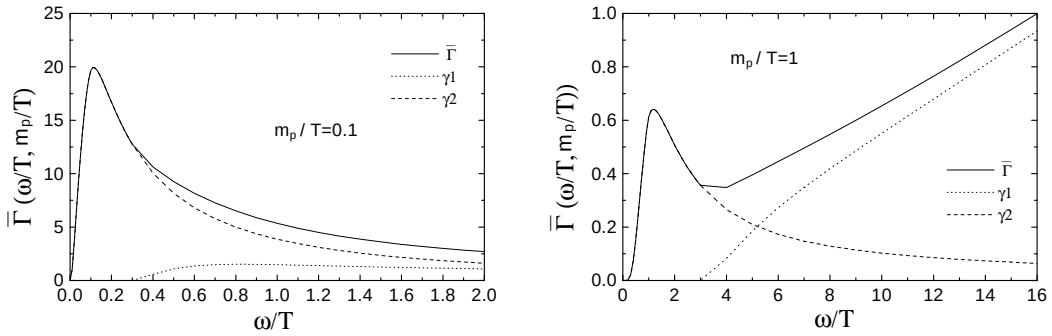


Abbildung 4.2: Das reduzierte Dissipationskernel.

Wegen Energieerhaltung verschwindet γ_1 in beiden Fällen für $\omega < 3m_p$. Bei $\frac{m_p}{T} = 0.1$ ist γ_1 klein und bleibt fast konstant, während γ_1 bei $\frac{m_p}{T} = 1$ eine dominante Größe für große ω/T ist. Da die dynamische Masse für eine schwache Wechselwirkung viel kleiner als die Temperatur ist, hat der reduzierte Dissipationskernel einen ähnlichen Verlauf wie bei $\frac{m_p}{T} = 0.1$. Wir werden ferner bei der Untersuchung des disorientierten chiralen Kondensats den γ_1 -Beitrag von $\bar{\Gamma}$ subtrahieren und nur den Streuprozeß berücksichtigen.

3.) $\Gamma_1(0, \omega = m_p)$ kann analytisch gerechnet werden. Das Ergebnis ist

$$\Gamma_1(0, \omega = m_p) = \frac{g^4 T^2}{128 \pi^3 m_p} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{m_p}{T}} \right),$$

wobei f_{sp} die Spence-Funktion ist, $f_{sp}(x) = - \int_1^x dt \frac{\ln t}{t-1}$.

Die Massenverschiebung Δm^2 ist gegeben durch (4.77). Bei einer Betrachtung

tung des g^2 -Beitrag für $k_c \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta m^2 &\approx -\frac{ig^2}{2}D^>(x, x) = \frac{g^2}{2} \int_{|\mathbf{k}|=0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} (2n_{\mathbf{k}} + 1) \approx \frac{g^2}{2} \int_{|\mathbf{k}|=0} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \\ &\approx \frac{g^2}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k}{e^{\frac{k}{T}} - 1} = \frac{g^2}{24} T^2,\end{aligned}$$

wobei der Vakuum-Beitrag subtrahiert worden ist.

4.4 Die Φ^4 -Theorie für den $\mathcal{O}(\mathcal{N})$ -Fall

In diesem Abschnitt werden wir auf der Basis der Erkenntnisse des vorherigen Abschnittes die semiklassische Bewegungsgleichung für die langwelligen Moden eines selbstwechselwirkenden Vektorfeldes herleiten. Das heißt, wir betrachten ein Vektorfeld $\Phi(x) = (\Phi_i(x))_{i=1}^N$ mit der Wirkung

$$S[\Phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi^a - \frac{1}{2} m_0^2 \Phi_a \Phi^a - \frac{g^2}{4!} (\Phi_a \Phi^a)^2 \right]. \quad (4.91)$$

Ebenso wie im letzten Abschnitt separieren wir das Feld in die langwelligen und kurzwelligen Moden im Impulsraum und transformieren sie zurück in den Ortsraum:

$$\Phi(x) = \phi(x) + \varphi(x).$$

Um die semiklassische Bewegungsgleichung für eine Komponente einer langwelligen Mode ϕ_i zu erhalten, suchen wir das Influenz-Funktional $S_{IF}[\phi_i, \phi'_i]$. Dafür fassen wir alle Terme in (4.91), die ϕ_i und φ_i enthalten, in der Wirkung $S[\phi_i]$ zusammen, die wiederum in drei Terme separiert wird:

$$S[\phi_i] = S^{(s)}[\phi_i] + S_0^{(h)}[\varphi_i] + S_{int}[\phi_i, \varphi_i].$$

$S^{(s)}[\phi_i]$ und $S_0^{(h)}[\varphi_i]$ hängen nur von ϕ_i bzw. φ_i ab und haben die gleiche Form wie die für ein skalares Feld (4.62) und (4.63), während $S_{int}[\phi_i, \varphi_i]$ wegen dem Quadrat die gemischten Terme enthalten muß. Wir separieren S_{int} in zwei Teile

$$S_{int}[\phi_i, \varphi_i] = S_{int}^0[\phi_i, \varphi_i] + S'_{int}[\phi_i, \varphi_i].$$

S_{int}^0 hat die gleiche Form wie für ein skalares Feld (4.64), und S'_{int} hat die Struktur

$$S'_{int}[\phi_i, \varphi_i] = \int d^4x \left[-\frac{g^2}{4!} 2(\phi_i + \varphi_i)^2 \sum_{j \neq i} (\phi_j + \varphi_j)^2 \right].$$

Analog zum letzten Abschnitt bilden wir das Influenz-Funktional

$$S_{IF}[\phi_i, \phi'_i] \approx S_{IF}^1[\phi_i, \phi'_i] + S_{IF}^2[\phi_i, \phi'_i],$$

wobei

$$S_{IF}^1[\phi_i, \phi'_i] = \langle S_{int}[\phi_{iC}, \hat{\phi}_{iC}] \rangle_h,$$

$$S_{IF}^2[\phi_i, \phi'_i] = \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} \left\{ \langle (S_{int}[\phi_{iC}, \hat{\phi}_{iC}])^2 \rangle_h - \langle S_{int}[\phi_{iC}, \hat{\phi}_{iC}] \rangle_h^2 \right\}.$$

Die Berechnungen von S_{IF}^1 und S_{IF}^2 erfolgen nun analog zu frühen. Die Ergebnisse für S_{IF}^1 und $S_{IF}^{2b_1}$ (Der Beitrag von $S_{IF}^{2b_1}$ entspricht dem „sunset“ Graph.) lauten:

$$S_{IF}^1[\phi_i, \phi'_i] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \Delta m_i^2 \right) \left((\phi_i(x))^2 - (\phi'_i(x))^2 \right)$$

mit

$$\Delta m_i^2 = (-2) \left[\left(i \frac{g^2}{4} \right) \frac{2+N}{3} D^>(x, x) - \frac{g^2}{12} \sum_{j \neq i} \phi_j^2 \right] = \frac{2+N}{3} \frac{g^2}{24} T^2 + \frac{g^2}{6} \sum_{j \neq i} \phi_j^2$$

und

$$S_{IF}^{2b_1} = \frac{N+2}{3} \left(S_{IF}^{2b_1} \text{ im Abschnitt 4.3} \right).$$

Daraus folgt die semiklassische Bewegungsgleichung der Null-Mode im Limes $k_c \rightarrow 0$:

$$\ddot{\phi}_{i0}(t) + \left(m_i^{*2} - \Gamma(t=0) \right) \phi_{i0}(t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi_{i0}^3(t) + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma(t-t') \dot{\phi}_{i0}(t') = \xi_i(t)$$

$$\text{mit} \quad m_i^{*2} = \tilde{m}_0^2 + \Delta m_i^2$$

$$\text{und} \quad \langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = V I(t-t') = 2VT \Gamma(t-t'), \quad (4.92)$$

$$\text{wobei} \quad \Gamma(\omega) = \frac{N+2}{3} \frac{i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}=0, \omega)}{2\omega}.$$

Im Markov-Limes ergibt sich

$$\ddot{\phi}_{i0}(t) + \left(m_i^{*2} - P \dots \right) \phi_{i0}(t) + \frac{\tilde{g}^2}{6} \phi_{i0}^3(t) + \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \dot{\phi}_{i0}(t) = \xi_i(t)$$

$$\text{mit} \quad \langle \xi_i(t) \xi_i(t') \rangle = V I(t-t') = 2VT \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \delta(t-t'), \quad (4.93)$$

$$\text{wobei} \quad \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) = \frac{N+2}{3} \frac{\tilde{g}^4 T^2}{128 \omega_{\mathbf{k}=0} \pi^3} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}=0}}{T}} \right).$$

Als weiteres Beispiel für unsere spätere Anwendung betrachten wir zum Abschluß kurz das lineare σ -Modell. In diesem Modell ist die Lagrange-Dichte gegeben zu

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_a \partial^\mu \Phi^a - \frac{\lambda}{4} \left(\Phi_a \Phi^a - f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{\lambda} \right)^2 + f_\pi m_\pi^2 \Phi_0.$$

Im Vergleich zu (4.91) ist nun $N = 4$, $m_0^2 = \lambda \left(-f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{\lambda} \right)$, $g^2 = 6\lambda$. Diese Konstanten setzen wir in (4.92) und (4.93) ein und lassen $\Gamma(t=0)$ außer Betracht. Dadurch erhalten wir die semiklassischen Bewegungsgleichungen der Null-Mode im Limes $k_c \rightarrow 0$ für das raumgemittelte σ und π Feld:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_i(t) + m_{eff}^2 \phi_i(t) + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma(t-t') \dot{\phi}_i(t') &= \xi_i(t) + f_\pi m_\pi^2 \sigma_0 \\ \text{mit} \quad m_{eff}^2 &= \lambda \left(\Phi_a \Phi^a + \frac{1}{2} T^2 - f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{\lambda} \right) \\ \text{und} \quad < \xi_i(t) \xi_j(t') > &= 2 \frac{T}{V} \Gamma(t-t') \delta_{ij}, \\ \text{wobei} \quad \Gamma(\omega) &= \frac{i \mathcal{M}_1(\mathbf{k}=0, \omega)}{\omega}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

σ_0 ist der Einheitsvektor in der σ Richtung.

Analog ist für den Markov-Limes

$$\ddot{\phi}_i(t) + m_{eff}^2 \phi_i(t) + \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \dot{\phi}_i(t) = \xi_i(t) + f_\pi m_\pi^2 \sigma_0 \tag{4.95}$$

$$\text{mit} \quad < \xi_i(t) \xi_j(t') > = 2 \frac{T}{V} \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) \delta(t-t') \delta_{ij},$$

$$\text{wobei} \quad \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}) = \frac{9\lambda^2 T^2}{16\pi^3 \omega_{\mathbf{k}=0}} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}=0}}{T}} \right).$$

Die Gleichungen (4.94) und (4.95) werden wir im folgenden Kapitel lösen.

Kapitel 5

Numerische Resultate im Langevin-Szenario

Das Phänomen der disorientierten chiralen Kondensate (DCC) in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen ist ein möglicher Kandidat für die Verifizierung des chiralen Phasenübergangs. Wenn wir annehmen, daß der chirale Phasenübergang, wie in Kapitel 1 vorgestellt, in einer hochenergetischen Schwerionenkollision stattfinden sollte, dann besteht die Möglichkeit, daß ein DCC, also eine Raum-Zeit-Konfiguration mit einer willkürlichen Ausrichtung des chiralen Ordnungsparameters $\langle \Phi \rangle = (\langle \sigma \rangle, \langle \pi \rangle)$, in der Kollision produziert wird. Man kann ein DCC als eine Blase des heißen Vakuums bezeichnen, die mit der sinkenden Temperatur in das QCD-Vakuum $(f_\pi, \mathbf{0})$ (ausgedrückt im linearen σ -Modell) zerfallen wird. Der DCC-Zerfall führt zu einer Pion-Produktion, bei der ein anormales Verhältnis zwischen der Anzahl der neutralen Pionen und der Anzahl der gesamten Pionen gebildet wird. Für eine ideale DCC-Formation ist die Verteilung dieses Verhältnisses f in der Form von $P(f) = 1/(2\sqrt{f})$. Sie unterscheidet sich grundsätzlich von einer Binomialverteilung, die man aufgrund der Isospinsymmetrie erwartet. Deswegen könnte die Verteilung $P(f)$ ein direktes Signal für die Existenz einer DCC-Formation sein. Zur Zeit gibt es zwei Experimente zur Untersuchung der DCC-Formation. Aus der Datenanalyse mit verschiedenen Methoden kann man das Signal bisher leider nicht identifizieren. Die theoretischen Modelle zur Untersuchung der DCC-Formation, die in letzten zehn Jahren entwickelt worden sind, richten sich in der ersten Linie auf das quantitative Verständnis der DCC-Produktion. Außerdem kann man die quantitativen Größen, z.B. die Domänengröße und die Stärke der Pionen, durch Modellrechnungen abschätzen.

Im Rahmen dieser Arbeit konzentrieren wir uns mit Hilfe des Langevin-Szenarios auf die Zeitentwicklung einer DCC-Formation und die Statistik in der Pionen-Anzahl. Das Langevin-Szenario basiert, wie schon in Kapitel 2 vorgestellt, auf dem linearen σ -Modell. Die gesamten Moden des chiralen Feldes

$\Phi = (\sigma, \pi)$ werden mittels eines „cutoff“ k_c separiert. Es wird im Langevin-Szenario angenommen, daß sich alle kurzwelligen Moden ($k > k_c$) während ihren Zeitentwicklungen stets im lokalen thermischen Gleichgewicht befinden. Diese Annahme ist in einer realen Schwerionenkollision nicht realisierbar. Sowohl die langwelligen Moden ($k \leq k_c$) als auch die kurzwelligen Moden können sich während einer schnellen Expansion nach der Kollision nicht im lokalen thermischen Gleichgewicht befinden. Da nach der Arbeit von Rajagopal und Wilczek die Fluktuation einer kurzwelligen Mode viel kleiner als die einer langwelligen Mode ist, erscheint unsere Annahme als sinnvoll. Unter dieser Annahme bilden die kurzwelligen Moden ein Wärmebad und wechselwirken mit den langwelligen Moden, die nach den früheren Arbeiten wesentlich zum Signal der DCC-Formation beitragen sollen.

Betrachten wir die langwelligen Moden von Φ als klassische Felder, so können wir mittels des Formalismus des Influenz-Funktional die klassischen Bewegungsgleichungen der langwelligen Moden näherungsweise erhalten. Die Herleitung hierzu wurden in Kapitel 4 detailliert durchgeführt. Wir erhielten langevinartige stochastische Bewegungsgleichungen der langwelligen Moden.

Darüberhinaus betrachten wir nur die Bewegung der Null-Mode

$$\phi_0(t) = (\sigma_0, \pi_0) = \frac{1}{V} \int d^3x \Phi(\mathbf{x}, t).$$

Da die Null-Mode gegen eine etwaige Instabilität am stärksten anwächst, ist sie dominant in der Dynamik einer DCC-Formation. Folglich bezeichnen wir die Null-Mode des chiralen Feldes als den Ordnungsparameter und setzen den „cutoff“ k_c als Null an, so daß die anderen Moden mit $k > 0$ gemeinsam ein Wärmebad bilden. Die klassische Bewegungsgleichung der Null-Mode lautet in diesem Fall:

$$\ddot{\phi}_0(t) + \frac{D}{t} \dot{\phi}_0(t) + 2 \int_{-\infty}^t dt' \Gamma(t-t') \dot{\phi}_0(t') + m_{eff}^2 \phi_0(t) = \xi(t) + f_\pi m_\pi^2 \hat{\sigma}$$

mit
$$m_{eff}^2 = \lambda \left(\phi_0^2 + \frac{1}{2} T^2 - f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{\lambda} \right), \quad (5.1)$$

wobei $\hat{\sigma}$ den Einheitsvektor $(1, \mathbf{0})$ darstellt. Mit der Annahme der Bjorken-Scaling-Expansion in D-Dimension erhalten wir einen Dämpfungsterm $\frac{D}{t} \dot{\phi}_0(t)$ in der obigen Bewegungsgleichung [R 97] [BG 97]. t stellt die Eigenzeit dar. Die Korrelationsfunktion des farbigen Rauschens $\xi_i(t)$ ist mit dem Dissipationskern $\Gamma(s-s')$ über die semiklassische Fluktuation-Dissipations-Relation verknüpft:

$$\langle \xi_i(s) \xi_j(s') \rangle = 2 \frac{T}{V} \Gamma(s-s') \delta_{ij}, \quad (5.2)$$

wobei V das Volumen und T die Temperatur des Wärmebades sind. Die Übergangstemperatur des chiralen Phasenübergangs wird wie folgt definiert:

$$T_c := \sqrt{2(f_\pi^2 - m_\pi^2/\lambda)},$$

so daß

$$m_{eff}^2 = \lambda \left(\phi_0^2 + \frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} T_c^2 \right)$$

erst negativ sein kann, wenn die Temperatur unter T_c ist. Folglich tritt die spontane Brechung der chiralen Symmetrie für $T < T_c$ auf. Für $T \geq T_c$ ist m_{eff}^2 stets positiv. Das System befindet sich in der symmetrischen Phase. Mit den Standardparametern ergibt sich $T_c = 123.85$ MeV.

Im Markov-Limes reduziert sich die Gleichung (5.1) durch die markovsche Näherung (4.88) auf folgende einfachere Gleichung:

$$\ddot{\phi}_0(t) + \left(\frac{D}{t} + \gamma(t) \right) \dot{\phi}_0(t) + m_{eff}^2 \phi_0(t) = \xi(t) + f_\pi m_\pi^2 \hat{\sigma}, \quad (5.3)$$

$$\text{mit} \quad \langle \xi_i(s) \xi_j(s') \rangle = 2 \frac{T}{V} \gamma(T(t)) \delta(s - s') \delta_{ij}. \quad (5.4)$$

$\gamma(T(t))$ stellt hierbei einen temperatur-(zeit)abhängigen Reibungskoeffizienten dar, und $\xi(t)$ ist in diesem Fall weiß. In der früheren Untersuchung der DCC-Formation von Biro und Greiner mit dem Langevin-Szenario [BG 97] ist der Reibungskoeffizient als konstant, $\gamma(T(t)) = \gamma(T_c)$, angesetzt. Wir werden (5.3) mit dem temperaturabhängigen Reibungskoeffizienten lösen.

Im folgenden werden wir zunächst erläutern, mit welcher Methode wir die Bewegungsgleichungen (5.1) und (5.3) lösen. Dann werden wir die numerischen Resultate mit ausgewählten Anfangsparametern darstellen, wobei wir als Beobachtungsgrößen die Zeitentwicklung einer signifikanten DCC-Formation, die Verteilung der Anzahl der aus dem DCC emittierten Pionen und die Verteilung des Verhältnisses zwischen der Anzahl der neutralen Pionen und der Anzahl der gesamten Pionen betrachten werden. Aus Vergleich der Ergebnissen, die mit und ohne markovscher Näherung erhalten werden, können wir feststellen, daß der sogenannte Gedächtniseffekt in der Dynamik einer DCC-Formation eine Rolle spielt. Schließlich diskutieren wir die Abhängigkeit der Ergebnisse von den Anfangsparametrisierungen.

5.1 Lösungsmethode

In Kapitel 3 haben wir ein Verfahren zur Lösung der verallgemeinerten Langevin-Gleichung entwickelt. Darin simulieren wir zunächst das farbige Rauschen über einem Zeitintervall $[t_a, t_b]$. Dann lösen wir die Langevin-Gleichung in diesem Zeitintervall durch ein Mehrschrittverfahren, das Adams-Bashforth-Verfahren. Das farbige Rauschen simulieren wir mit der in Kapitel 3 entwickelten Methode:

$$\xi(t) = \int_{T_a}^{T_b} dt' G(t - t') \tilde{\xi}_w(t'), \quad \text{für } t \in [t_a, t_b] \subset [T_a, T_b].$$

In diesem Ausdruck ist $G(\tau)$ die Fouriertransformierte von $\sqrt{S(\omega)}$, wobei $S(\omega)$ die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion des farbigen Rauschens darstellt. $\tilde{\xi}_w(t)$ beschreibt ein auf eins normiertes weißes Rauschen. Das Zeitintervall $[T_a, T_b]$ wird so gewählt, daß das farbige Rauschen $\xi(t)$ für $t \in [t_a, t_b]$ stationär ist.

Im Fall der Zeitentwicklung einer DCC-Formation sind die Temperatur und das Volumen des Wärmebades zeitabhängig. Aufgrund der D-dimensionalen Expansion ändern sie sich mit der Zeit gemäß

$$T(t) = T_0 \left(\frac{t_0}{t} \right)^{D/3} \quad \text{und} \quad V(t) = V_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^D, \quad (5.5)$$

wobei T_0 die Anfangstemperatur und V_0 das Anfangsvolumen zur Zeit $t = t_0$ darstellt. Folglich ist die Korrelationsfunktion des Rauschens nach (5.2) und (5.4) auch zeitabhängig. Um das farbige Rauschen zu simulieren, braucht man $G_{ij}(\tau)$ zu allen Zeitpunkten t .

Aus (5.2) erhält man die Fouriertransformierte der Korrelationsfunktion des farbigen Rauschens

$$S_{ij}(\omega) = \frac{2T}{V} \Gamma(\omega) \delta_{ij},$$

wobei $\Gamma(\omega) = \frac{3\lambda^2 T}{8\pi^3} \bar{\Gamma}\left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T}\right).$

$\bar{\Gamma}(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T})$ ist der in Kapitel 3 definierte reduzierte Dissipationskernel. Hier berücksichtigen wir nur seinen γ_2 -Beitrag aus den thermischen Streuprozessen. Der reduzierte Dissipationskernel hängt von $\frac{m_p}{T}$ ab, wobei $m_p = \langle m_{eff} \rangle$ die dynamische Masse der Null-Mode im thermischen Gleichgewicht darstellt. m_p hängt von der Temperatur T ab. Da $\frac{m_p}{T}$ zeitabhängig ist, ändert sich der reduzierte Dissipationskernel auch mit der Zeit. Zur Simulation des farbigen Rauschens über einem Zeitintervall $[t_a, t_b]$ müßte zunächst der reduzierte Dissipationskernel zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_a, t_b]$ berechnet werden. Dann erhält man durch eine Fouriertransformation von $\Gamma(\omega)$ und $\sqrt{S_{ij}(\omega)}$ den Dissipationskernel $\Gamma(\tau)$ und $G_{ij}(\tau)$ zu jedem Zeitpunkt im Intervall $[t_a, t_b]$. Um Rechenzeit zu sparen, berechnen wir nur einige reduzierte Dissipationskernel mit großem Zeitabstand. Die Funktion $\Gamma(\tau)$ und $G_{ij}(\tau)$ zu anderen Zeitpunkten t lassen sich durch die berechneten $\Gamma(\tau)$ und $G_{ij}(\tau)$ interpolieren. Somit erhält man das farbige Rauschen $\xi_i(t)$ und den Dissipationskernel $\Gamma(\tau, t)$ für das Zeitintervall $[t_a, t_b]$.

Gegenüber dem farbigen Rauschen ist ein weißes Rauschen in (5.3) einfacher zu simulieren. Man braucht nur den Reibungskoeffizienten

$$\gamma(t) = \Gamma(\omega_{\mathbf{k}=0}(t)) = \frac{9\lambda^2 T^2(t)}{16\pi^3 \omega_{\mathbf{k}=0}(t)} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{\omega_{\mathbf{k}=0}(t)}{T(t)}} \right) \quad (5.6)$$

zu berechnen, wobei $f_{sp}(x)$ die Spence-Funktion darstellt. Hier gilt $\omega_{\mathbf{k}=0} = m_p$. Die differentiellen Gleichungen (5.1) und (5.3) lösen wir durch das Adams-Bashforth-Verfahren.

Bisher haben wir die Rechenmethode für die Generierung der Zeitentwicklung einer DCC-Formation erläutert. Es fehlt allerdings noch Gestalt der dynamisch generierten Plasmonmasse $m_p(t)$. Diese berechnen wir im nächsten Abschnitt.

5.2 Der Ordnungsparameter und die effektive Pion- und Sigma-Masse im thermischen Gleichgewicht

Setzt man $D = 0$ in (5.1) und (5.3) ein und hält man die Temperatur und das Volumen konstant, so erhält man die Bewegungsgleichungen der Null-Mode im thermischen Gleichgewicht. Durch diese Gleichungen läßt sich das Ensemble-Mittel des Ordnungsparameters $\langle \phi_0 \rangle$ und der effektiven Pion- und Sigma-Masse berechnen, deren Quadrate wir definieren als

$$\mu_\pi^2 := m_{eff}^2 = \lambda \left(\phi_0^2 + \frac{1}{2} T^2 - f_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{\lambda} \right)$$

und $\mu_\sigma^2 := \mu_\pi^2 + 2\lambda \phi_0^2,$

was analog zu den Definitionen der effektiven Massen der Quasiteilchen in der Hartree-Approximation des linearen σ -Modells ist. In Abb. 5.1 ist das Ensemble-Mittel der Sigma-Komponente $\langle \sigma_0 \rangle$ als Funktion der Temperatur für verschiedene Volumen dargestellt. Die Rechnung wurde mittels (5.3) mit $D = 0$ durchgeführt, wobei zunächst m_p festgelegt ist. Hier betrachten wir zwei Fälle mit $m_p = 140 \text{ MeV} \equiv m_\pi$ und $m_p = 0 \text{ MeV}$. Das Ensemble-Mittel der Pion-Komponente ist verschwindend klein. $(\langle \sigma_0 \rangle, \mathbf{0})$ stellt die Stelle dar, um die das chirale Feld ϕ_0 im thermischen Gleichgewicht bei einer Temperatur und einem Volumen zentrieren wird. Im Fall des chiralen Limes zeigt das Modell einen Phasenübergang 2-ter Ordnung. Die effektive pion-Masse bleibt bis $T < T_c$ exakt 0, in Übereinstimmung mit dem Goldstone-Theorem. Für $m_p \neq 0$ zeigt der Phasenübergang ein „crossover“-Verhalten.

Abb. 5.2 zeigt die Ergebnisse für $\langle \mu_\sigma \rangle$ und $\langle \mu_\pi \rangle$ aus derselber Rechnung mit $m_p = 140 \text{ MeV} \equiv m_\pi$. In Abb. 5.2 spiegelt sich die Vorstellung wider, daß das Pion- und das Sigma-Meson eine große Massendifferenz bei niedriger Temperatur und die gleiche Masse bei hoher Temperatur haben. Das ist die Konsequenz, daß sich das System bei niedriger Temperatur und bei hoher Temperatur in verschiedenen Phasen, der spontan gebrochenen Phase

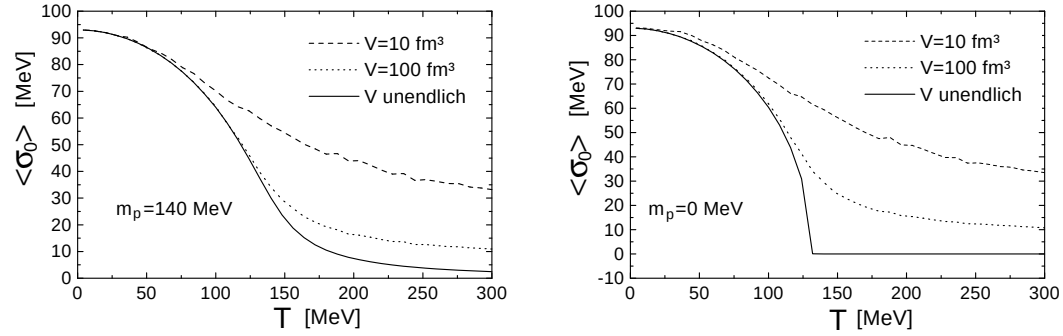


Abbildung 5.1: Das Ensemble-Mittel der Sigma-Komponente des Ordnungsparameters $\langle \sigma_0 \rangle$ in Abhängigkeit der Temperatur bei verschiedenen Volumina. m_p wird zunächst festgelegt. Hier werden zwei Fälle mit $m_p = 140 \text{ MeV} \equiv m_\pi$ und der exakte chirale Grenzfall $m_p = 0 \text{ MeV}$ betrachtet.

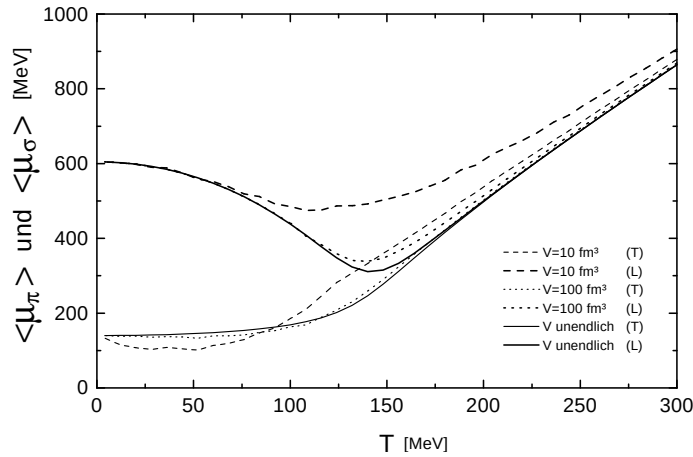


Abbildung 5.2: Das Ensemble-Mittel der effektiven Pion- und Sigma-Masse in Abhängigkeit der Temperatur bei verschiedenen Volumina, wobei $m_p = 140 \text{ MeV} \equiv m_\pi$ zunächst in der Bewegungsgleichung festgesetzt ist.

und der symmetrischen Phase, befindet. Die Spaltung der effektiven Pion- und Sigma-Masse in Abb. 5.2 deutet den „crossover“-Phasenübergang an.

5.3 Der reduzierte Dissipationskernel und der Reibungskoeffizient

Um die Gleichung (5.1) zu lösen, muß man zunächst einige reduzierte Dissipationskernel mit großem Zeit-(Temperatur)abstand berechnen, mit denen wir durch Interpolation den Dissipationskernel zu jedem Zeitpunkt und das far-

bige Rauschen erhalten werden. Bei der Lösung der markovschen Gleichung (5.3) braucht man zunächst nur den zeitabhängigen Reibungskoeffizienten zu berechnen.

In Kapitel 4 und in Anhang haben wir schon gezeigt, wie der reduzierte Dissipationskernel $\bar{\Gamma}(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T})$ berechnet wird. Die Rechenergebnisse für $m_p/T = 1$ und $m_p/T = 0.1$ wurden bereits in Abb. 4.2 dargestellt. Abb. 5.3 zeigt die Rechenergebnisse des reduzierten Dissipationskernels (nur γ_2 -Beitrag) und seine Fouriertransformierte für $T = 120$ MeV. Die dynamische Masse m_p läßt sich in Abb. 5.2 für $V \rightarrow \infty$ ablesen. Für $T = 120$ MeV ist $m_p = 194$ MeV.

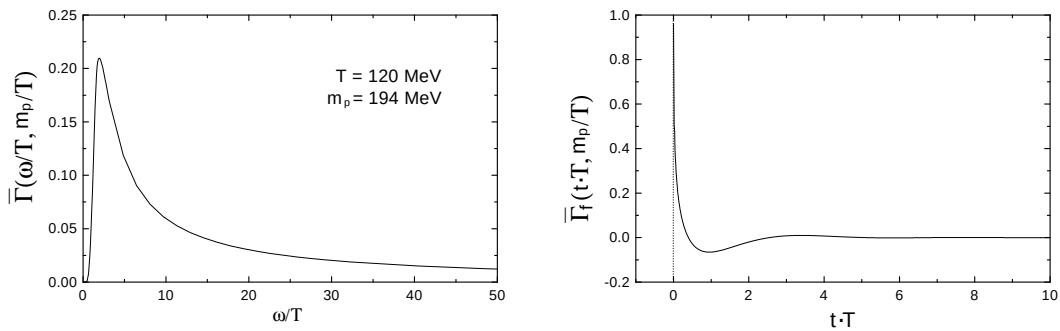


Abbildung 5.3: Der reduzierte Dissipationskernel und seine Fouriertransformierte für $T = 120$ MeV.

Der Reibungskoeffizient $\gamma(t)$ läßt sich über (5.6) und (5.5) berechnen. Die Temperaturabhängigkeit des Reibungskoeffizienten $\gamma(T)$ kann man allein aus (5.6) erhalten. In beiden Fällen muß $m_p(T)$ aus Abb. 5.2 für die entsprechende Temperatur T abgelesen werden. In Abb. 5.4 sind der Verlauf von $\gamma(T)$ und der von $\gamma(t)$ für $t_0 = 7$ fm und $T_0 = 400$ MeV dargestellt. Aus Abb. 5.4 erkennt

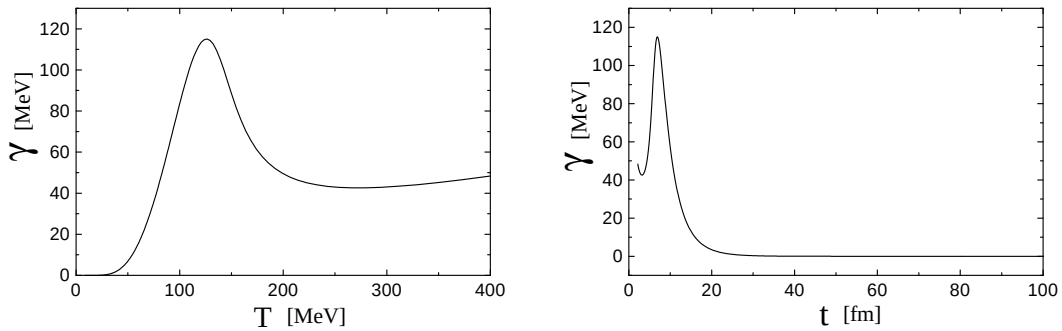


Abbildung 5.4: Der Reibungskoeffizient γ in Abhängigkeit von der Temperatur T und von der Zeit t .

man, daß an der Übergangstemperatur $\gamma(T_c)$ und $\gamma(t = t_c)$ ihren maximalen Wert besitzen.

5.4 Anfangsparameter und Anfangsbedingungen

Bei der Berechnung der Zeitentwicklung einer DCC-Formation setzen wir zunächst die folgenden Anfangsparameter fest:

Anfangstemperatur	$T_0 = T_c$
Anfangsvolumen	$V_0 = 100 \text{ fm}^3$
Anfangseigenzeit	$t_0 = 7 \text{ fm}$
Expansionsdimension	$D = 3$.

Die Anfangsparameter sind anhand den Parametrisierungen von [GM 94] und [MCL 98] gewählt.

Ein Ensemble der Anfangsbedingungen $\phi(t = t_0)$ und $\dot{\phi}(t = t_0)$ erhalten wir durch Vorheizen bei der Anfangstemperatur T_0 . Die Gleichungen (5.1) und (5.3) werden also ohne Expansion ($D = 0$) mit konstanter Anfangstemperatur und konstantem Anfangsvolumen für hinreichend lange Zeit propagiert. In Abb. 5.5 und 5.6 sind die Verteilungen der Anfangskonfigurationen $\sigma_0(t = t_0)$, $\dot{\sigma}_0(t = t_0)$, $\pi_0^1(t = t_0)$ und $\dot{\pi}_0^1(t = t_0)$ dargestellt. Das Vorheizen wurde sowohl

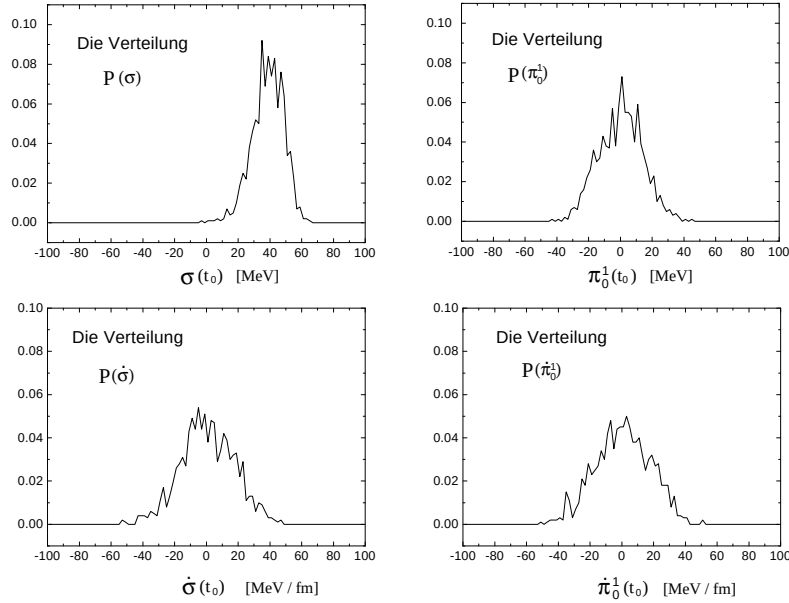


Abbildung 5.5: Verteilungen der Anfangskonfigurationen $\sigma_0(t = t_0)$, $\dot{\sigma}_0(t = t_0)$, $\pi_0^1(t = t_0)$ und $\dot{\pi}_0^1(t = t_0)$ bei $T = T_c$, ermittelt mit Hilfe von Gleichung (5.1).

mittels (5.1) als auch mittels der markovschen Gleichung (5.3) durchgeführt. Die Verteilungen der Anfangsbedingungen für π_0^2 und π_0^3 sind der für π_0^1 ähnlich. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Anfangskonfigurationen in Abb. 5.5

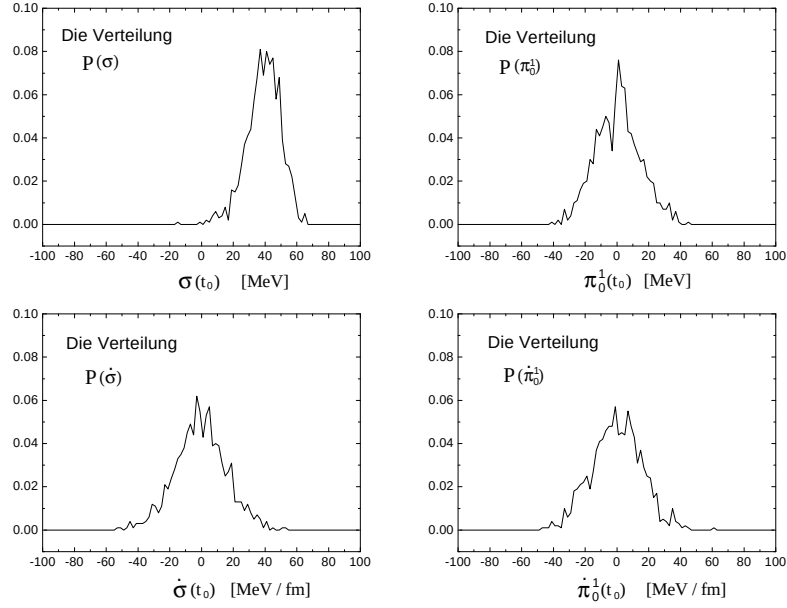


Abbildung 5.6: Verteilungen der Anfangskonfigurationen, ermittelt mit Hilfe der markovschen Gleichung (5.3).

und 5.6 identisch sind. $\sigma_0(t_0)$ ist zentriert um ungefähr 40 MeV, und $P(\sigma_0)$ hat eine schmale Breite, während $\pi_0^1(t_0)$ mit größerer Breite von $P(\pi_0^1)$ um Null zentriert ist. $P(\dot{\sigma}_0)$ und $P(\dot{\pi}_0^1)$ sind fast identisch. Beide Verteilungen sind breiter als $P(\sigma_0)$ und $P(\pi_0^1)$. Die Breite aller Verteilungen ist umgekehrt proportional zu $\sqrt{V_0}$ [MCL 98]. Wenn das Anfangsvolumen kleiner wird, wird die Anfangsfluktuation stärker. (Dies folgt aus (5.2) und (5.4).) Folglich werden die Verteilungen der Anfangskonfiguration breiter.

5.5 Numerische Resultate

Wir simulieren mit den im letzten Abschnitt angegebenen Anfangsparametern zunächst das Rauschen und ermitteln die Anfangsbedingungen. Dann lösen wir die Bewegungsgleichung (5.1) und die korrespondierende markovsche Gleichung (5.3) durch das Adams-Bashforth-Verfahren, so daß wir eine Zeitentwicklung der Null-Mode des chiralen Feldes, $\phi_0(t) = (\sigma_0(t), \pi_0(t))$, erhalten. Daraus können wir die Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse und der im kohärenten Kondensat effektiv enthaltenen Pion-Anzahl bestimmen, die gegeben sind zu:

$$\mu_\pi(t) := \text{sign}(\mu_\pi^2) \sqrt{|\mu_\pi^2|}, \quad n_\pi(t) := \frac{1}{2} V(t) m_\pi \left(\pi_0^2(t) + \frac{\dot{\pi}_0^2(t)}{m_\pi^2} \right).$$

Da μ_π^2 identisch mit m_{eff}^2 ist, deutet eine negative μ_π^2 die Instabilität für die Null-Mode und ein folgendes Anwachsen des chiralen Feldes der Null-Mode an. Die Zeitentwicklung der oben definierten effektiven Masse μ_π kann analog zu μ_π^2 zeigen, in welchen Zeitintervallen die Null-Mode instabil sein wird. Der Ausdruck von n_π ist einfach zu verstehen, da die Energiedichte der Null-Mode $1/2 (m_\pi^2 \pi_0^2(t) + \dot{\pi}_0^2(t))$ beträgt.

Da π_0^2 im Limes eines großen Volumens proportional zu $1/V$ ist [BG 97], wird $n_\pi(t)$ für spätere Zeiten näherungsweise konstant bleiben. Wir spezifizieren die resultierende Pion-Anzahl durch eine Mittelung von $n_\pi(t)$ über einem späteren Zeitintervall. Ferner bezeichnen wir eine signifikante DCC-Formation von einem Ensemble dadurch, daß die resultierte Pion-Anzahl am größten ist.

In Abb. 5.7 ist die Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse, der Pion-Anzahl und der Feldkonfiguration für eine signifikante DCC-Formation dargestellt, die aus einem Ensemble von 1000 DCC-Formationen ausgesucht worden ist. Die Resultate mit und ohne markovscher Näherung sind parallel aufgetragen, so daß ein direkter Vergleich möglich ist.

In Abb. 5.7 erkennen wir zunächst für eine spätere Zeit einige gemeinsame Eigenschaften: Die effektive Pion-Masse relaxiert zum Vakuumwert 140 MeV, die definierte zeitabhängige Pion-Anzahl bleibt näherungsweise konstant, und die Feldkonfiguration oszilliert mit immer schwächerer Amplitude um die Vakuum-Konfiguration $(f_\pi, \mathbf{0})$. Außerdem erkennen wir in Abb. 5.7, daß die effektive Pion-Masse im markovschen Fall (mit markovscher Näherung) am Anfang über einem Zeitintervall von ungefähr 2 fm negativ ist. Dagegen bleibt die effektive Pion-Masse im normalen Fall (ohne markovsche Näherung) stets positiv. Man würde erwarten, daß im markovschen Fall mehr Pionen produziert werden als im normalen Fall, da aus unserer qualitativen Vorstellung der DCC-Formation eine negative effektive Pion-Masse zum Anwachsen des Pion-Feldes führt. Es ist aber deutlich zu erkennen, daß diese Vermutung nicht erfüllt wird. Die Pion-Anzahl zu einem späteren Zeitpunkt liegt im normalen Fall bei ungefähr 9, während sie im markovschen Fall bei knapp 7 liegt. Man sieht jedoch im markovschen Fall einen abrupten Anstieg von n_π am Anfang. Das bedeutet, daß die Instabilität der Null-Mode doch zum Anwachsen des Pion-Feldes führt. Nur dieser große Wert von „ n_π “ ist nicht erhalten. Anhand der Zeitentwicklungen der Feldkonfiguration kann man erkennen, daß das Feld im markovschen Fall schneller gedämpft wird als im normalen Fall.

Da diese signifikante DCC-Formation nur ein statistisches Ereignis darstellt, können wir aus dem obigen Vergleich nicht schließen, daß der „Gedächtniseffekt“ in der Dissipation hier wichtig ist. Wir müssen den (Ensemble-)gemittelten Wert von n_π betrachten und herausfinden, ob es bei $\langle n_\pi \rangle$ einen großen Unterschied zwischen den beiden Fällen gibt.

In Abb. 5.8 sind die über dem Ensemble der 1000 DCC-Formationen gemittelten Zeitentwicklungen der effektiven Pion-Masse $\langle \mu_\pi \rangle$ und der Pion-

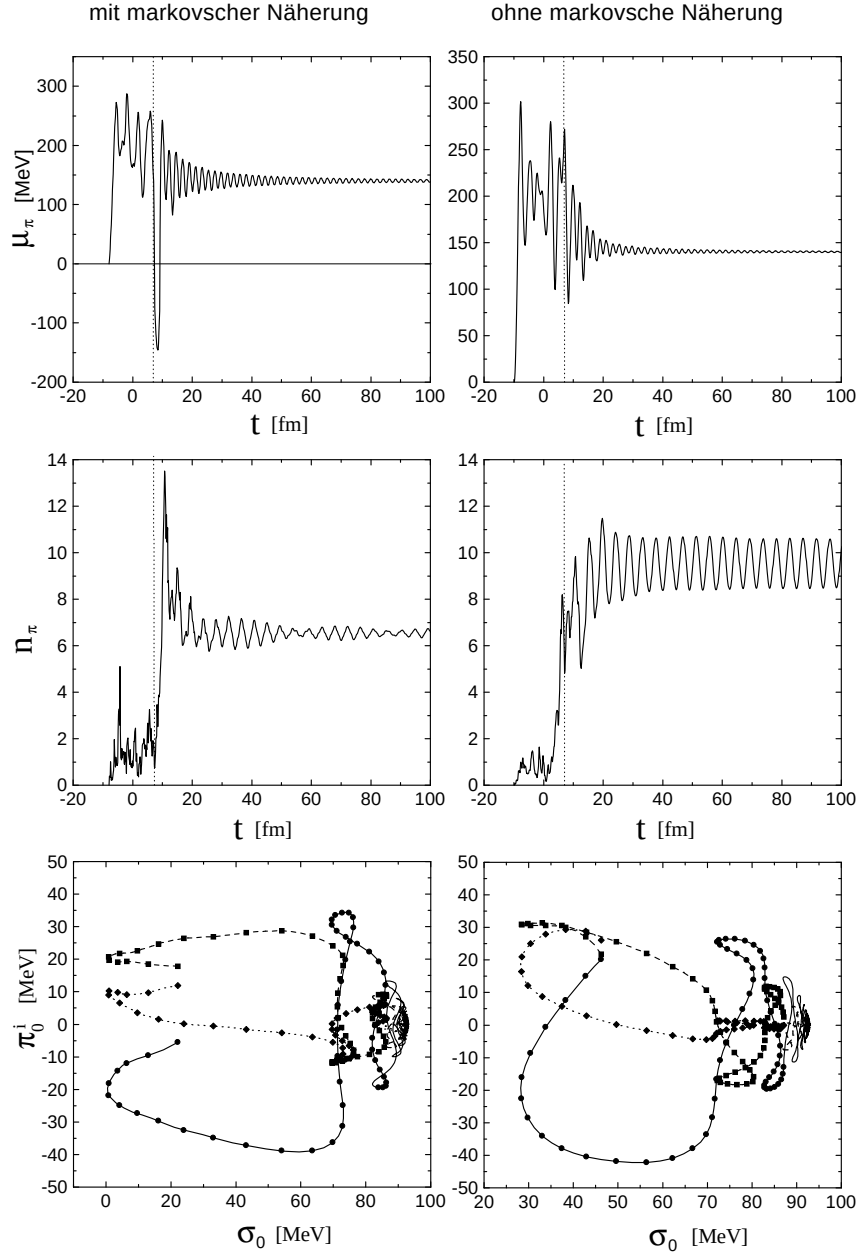


Abbildung 5.7: Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse $\mu_\pi(t)$, der Pion-Anzahl $n_\pi(t)$ und der Feldkonfiguration $(\sigma_0(t), \pi_0(t))$ bei der signifikanten DCC-Formation eines Ensembles von 1000 DCC-Formationen. Die senkrecht zu der Zeitachse stehende gepunktete Linie markiert die Anfangseigenzeit $t = t_0 = 7$ fm. Vor t_0 entwickelt sich das Feld im thermischen Gleichgewicht bei fester Temperatur (Vorheizen). Bei der Feldkonfiguration sind jeweils drei Kurven $(\sigma_0(t), \pi_0^i(t))$, $i = 1, 2, 3$, dargestellt. Diese Kurven starten zur Anfangseigenzeit $t = t_0$. Das Zeitintervall zwischen den Symbolen auf den Kurven beträgt $\Delta t = 0.21$ fm.

Anzahl $\langle n_\pi \rangle$ dargestellt. Die Verläufe der gemittelten effektiven Pion-Masse

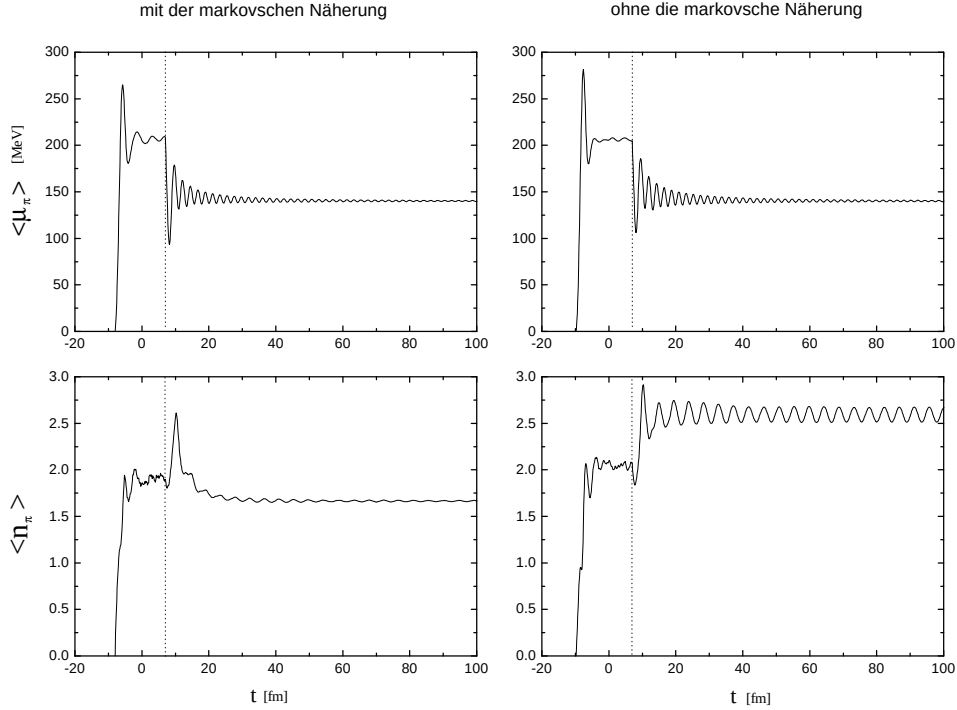


Abbildung 5.8: Zeitentwicklung der gemittelten effektiven Pion-Masse $\langle \mu_\pi \rangle(t)$ und der gemittelten Pion-Anzahl $\langle n_\pi \rangle(t)$ über dem Ensemble der 1000 DCC-Formationen.

sind in beiden Fällen fast identisch. Die Zeitentwicklungen von $\langle n_\pi \rangle$ sind hingegen in beiden Fällen sehr unterschiedlich. Nach dem Vorheizen steigt die gemittelte Pion-Anzahl zunächst in beiden Fällen. Dann bleibt sie im normalen Fall nahezu konstant bei 2.6, während sie im markovschen Fall auf 1.67 sinkt. Das bedeutet, daß der „Gedächtniseffekt“ in der Dynamik einer DCC-Formation eine gewisse Rolle spielen wird. Dieser Effekt führt zu einer Verringerung der Dämpfung von dem Wärmebad.

Trotz des „Gedächtniseffekts“ erhalten wir eine relativ kleine Pion-Anzahl aus der signifikanten DCC-Formation. Dies ist durchaus verständlich, da wegen der expliziten Brechung der chiralen Symmetrie die Anfangsfeldkonfiguration um $(\sigma_f, \mathbf{0})$ zentriert sein muß. In unserem Fall beträgt σ_f ungefähr 40 MeV. Deswegen ist es für die meisten DCC-Formationen unmöglich, eine Instabilität über längere Zeit durchzuhalten. Folglich produzieren die meisten DCC-Formationen sehr wenige Pionen. Die Wahrscheinlichkeit für eine DCC-Formation mit größer Pion-Anzahl ist sehr klein.

Die Verteilung der Pion-Anzahl ist in Abb. 5.9 für beide Fälle gezeigt. Sie

wird mit einer Poisson-Verteilung

$$P(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}$$

verglichen, wobei wir den Mittelwert $\bar{n} = 1.67$ für den markovschen Fall und $\bar{n} = 2.6$ für den normalen Fall eingesetzt haben. Wir wollen herausfinden, ob

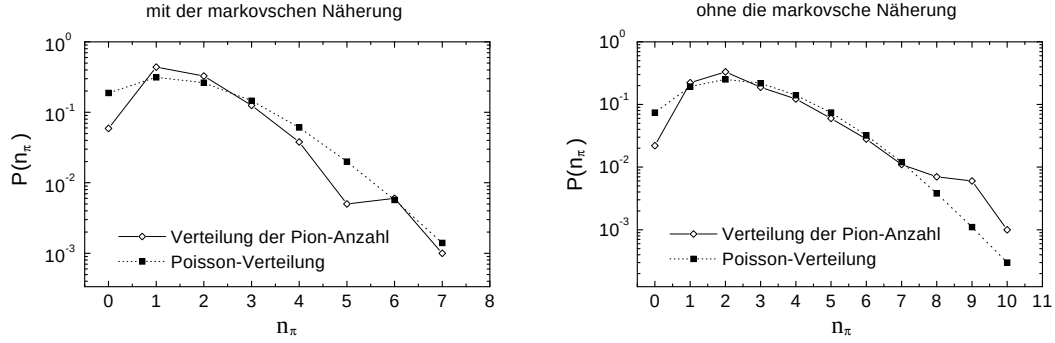


Abbildung 5.9: Verteilung der Pion-Anzahl im markovschen und normalen Fall

die Verteilung der Pion-Anzahl einer Poisson-Verteilung entspricht. Man sieht, daß die Verteilung der Pion-Anzahl im markovschen Fall mit der Poisson-Verteilung recht gut übereinstimmt, jedoch im normalen Fall bei größeren n_π von der Poisson-Verteilung leicht abweicht.

In Abb. 5.10 ist die Verteilung des Verhältnisses $f = n_{\pi_0}/(n_{\pi_0} + n_{\pi_\pm})$ für beide Fälle dargestellt, wobei die Anzahl der neutralen Pionen mit $n_{\pi_0}^1$ bezeichnet wird. Die Verteilung $p(f)$ weicht deutlich von der des idealen Falls,

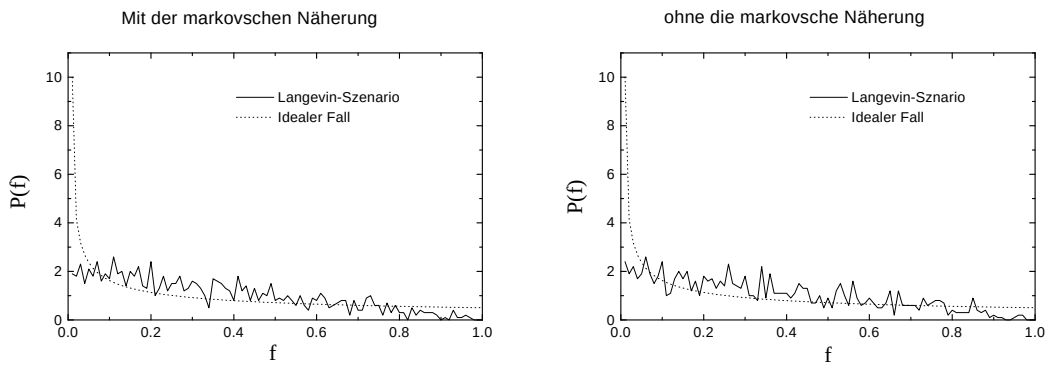


Abbildung 5.10: Verteilung von $f = n_{\pi_0}/(n_{\pi_0} + n_{\pi_\pm})$

$p(f) = 1/(2\sqrt{f})$ (2.6), ab und fluktuiert um die Linie $p(f) = 2 - 2f$. Sie unterscheidet sich jedoch von der Binomialverteilung. Wenn wir annehmen, daß die Verteilungen von $n_{\pi_0}^i$, $i=1,2,3$, proportional zu $\exp(-n_{\pi_0}^i / \langle n_{\pi_0}^i \rangle)$

und voneinander unabhängig sind [R 97], können wir durch eine Monte Carlo Simulation zeigen, daß die Verteilung $p(f)$ genau durch die Funktion $2 - 2f$ dargestellt wird. Das heißt, die Felder π_0^i scheinen wegen ihrer kleinen Amplitude unkorreliert vorzuliegen.

5.6 Variation der Anfangsparameter und der Expansionsdynamik

Im letzten Abschnitt haben wir die numerischen Lösungen der Bewegungsgleichungen (5.1) und (5.3) mit in Abschnitt 5.4 festgesetzten Anfangsparametern gezeigt. Man erkennt, daß der Gedächtniseffekt in der Dynamik einer DCC-Formation eine gewisse Rolle spielt. Wir erhielten aber eine kleine mittlere Pion-Anzahl ($2 \sim 3$). Die Pion-Anzahl der signifikanten DCC-Formation aus einem Ensemble von 1000 DCC-Formationen ist nur $8 \sim 10$. Wenn die Anfangsparameter so wie in Abschnitt 5.4 gewählt würden, würde die Pion-Produktion aus dem DCC-Zerfall keinen erhofften dominanten Effekt darstellen. Folglich würde das Signal einer DCC-Formation experimentell nicht identifiziert werden können. D.h. aber auch, daß von Müller und Gavin vorgeschlagenem sogenannten „annealing“-Szenario mit thermischen Anfangsbedingungen nicht zu signifikanter DCC-Domäne führen kann.

In diesem Abschnitt werden wir diskutieren, wie sich die numerischen Resultate ändern, wenn sich die Anfangsparameter und die Expansionsdimension ändern. Wir betrachten nur die Zeitentwicklung der Null-Mode des chiralen Feldes bezüglich der markovschen Bewegungsgleichung (5.3).

Zunächst nehmen wir an, daß beim Vorheizen m_π gleich Null ist. Ansonsten bleiben die anderen in Abschnitt 5.4 angegebenen Parameter unverändert. In diesem Fall berücksichtigen wir keine explizite Brechung der chiralen Symmetrie. Folglich ist die Anfangsfeldkonfiguration um $(0, \mathbf{0})$ zentriert. Wir erwarten, daß in diesem Fall mehr Pionen emittiert werden.

In Abb. 5.11 bis Abb. 5.17 sind alle Beobachtungsgrößen, die im letzten Abschnitt betrachtet wurden, für das Langevin-Szenario, das quench Szenario und ihre modifizierten Szenarien ($m_\pi = 0$ beim Vorheizen) dargestellt. Das quench Szenario wird hier wie folgt simuliert: Die Bestimmung der Anfangsbedingungen ist dieselbe wie beim Langevin-Szenario, und bei der anschließenden Zeitentwicklung der Null-Mode wird die Temperatur zu Null angesetzt. (Der Reibungskoeffizient ist auch Null.) Die Rechnungen werden jeweils für ein Ensemble von 1000 DCC-Formationen durchgeführt, aus dem die signifikante DCC-Formation ausgesucht wird.

Die Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse der signifikanten DCC-Formation und der gemittelten sind in Abb. 5.11 und 5.12 für vier Szenarien dargestellt.

Man erkennt aus den Abbildungen, daß die effektive Pion-Masse im quench

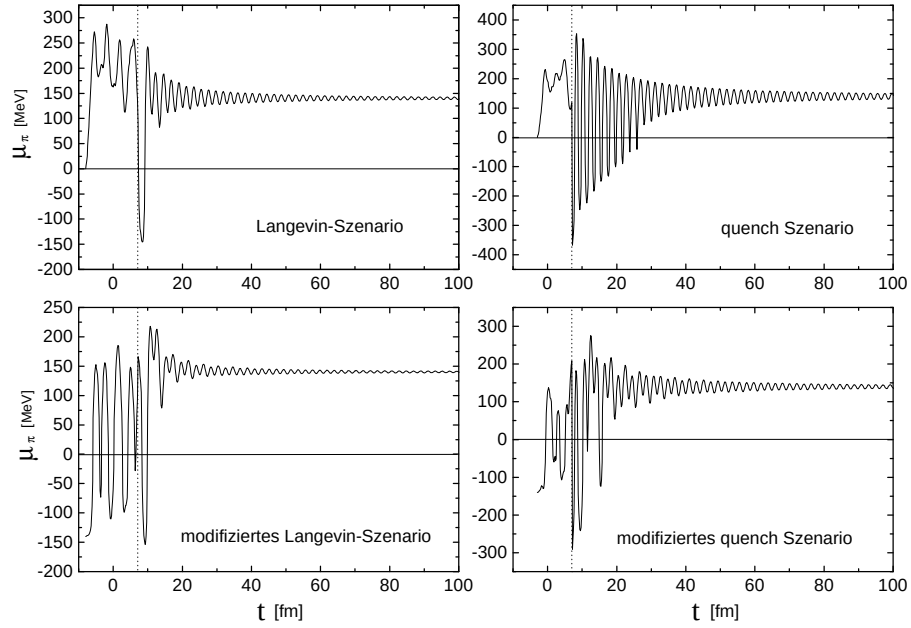


Abbildung 5.11: Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse der signifikanten DCC-Formation für das Langevin-Szenario, das quench Szenario und ihre modifizierten Szenarien.

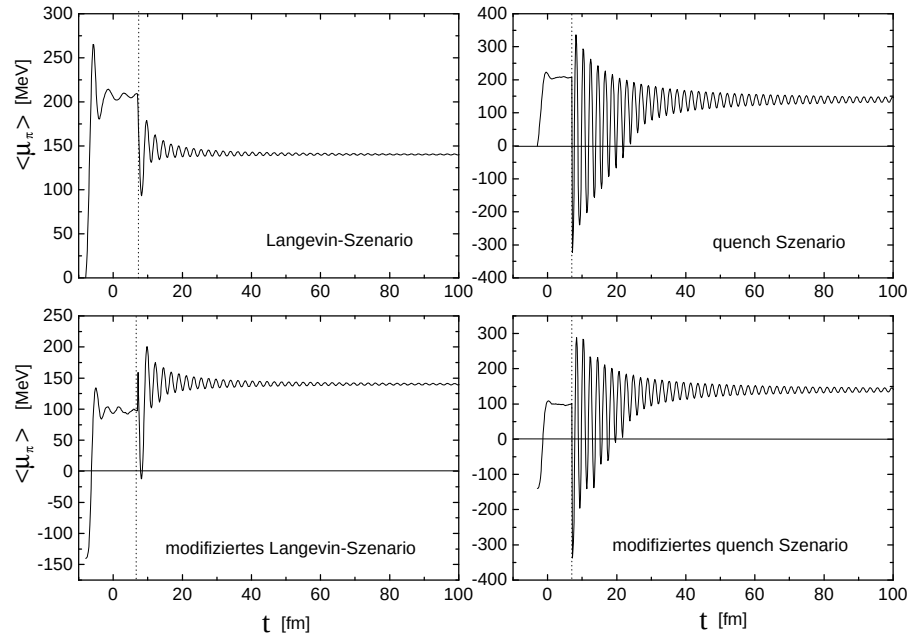


Abbildung 5.12: Zeitentwicklung der gemittelten effektiven Pion-Masse über einem Ensemble von 1000 DCC-Formationen.

Szenario über mehreren Zeitintervallen negativ ist. Dies bedeutet, daß unter der drastischen Annahme im quench Szenario mehr Instabilität der Null-Mode hergestellt wird. Im Ensemblemittel fällt die effektive Pion-Masse im modifizierten Langevin-Szenario in den negativen Bereich. Das zeigt, daß die so modifizierten Anfangsbedingungen zu mehr Instabilität der Null-Mode führen sollten.

In Abb. 5.13 und 5.14 sind die Zeitentwicklung der Pion-Anzahl sowohl für die signifikante DCC-Formation als auch für den Ensemblemittel dargestellt.

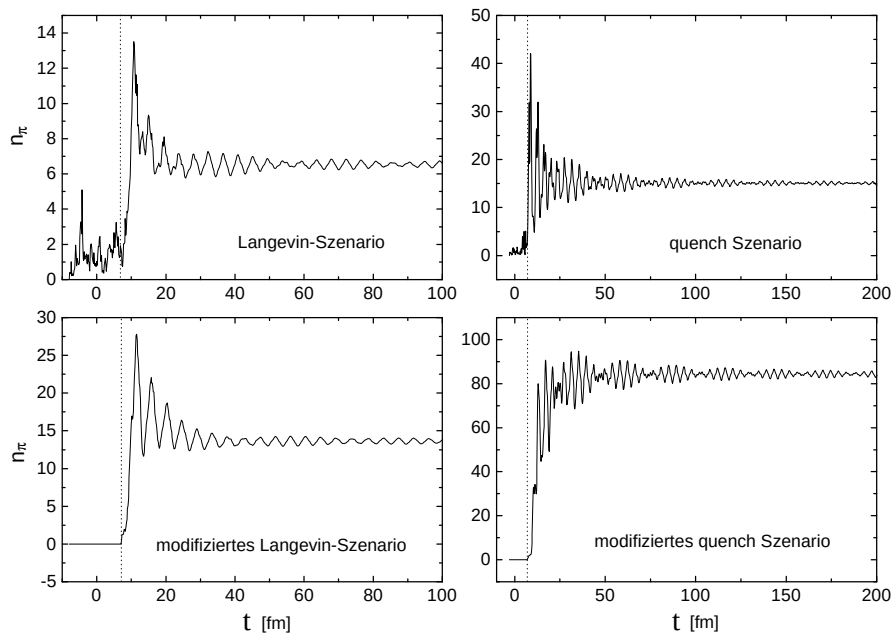


Abbildung 5.13: Zeitentwicklung der Pion-Anzahl der signifikanten DCC-Formation für vier Szenarien.

Es ist sowohl bei der signifikanten DCC-Formation als auch bei der Ensemblemittelung deutlich zu erkennen, daß das quench Szenario mehr Pionen liefert als das Langevin-Szenario und das modifizierte Szenario mehr Pionen liefert als das ursprüngliche Szenario.

Die Zeitentwicklung der Feldkonfiguration zeigt die Abb. 5.15. Man sieht, daß die Pion-Felder im quench Szenario deutlich wachsen als im Langevin-Szenario. Dies bestätigt wieder die Vorstellung: Je größer die Instabilität der langwelligen Moden wird, desto stärker wachsen die Pion-Felder der langwelligen Moden an, und desto mehr Pionen werden emittiert.

Die Verteilungen der Pion-Anzahl der vier Szenarien sind in Abb. 5.16 sowohl logarithmisch als auch normal dargestellt. Im Vergleich dazu sind die entsprechenden Poisson-Verteilungen aufgetragen. Während die beiden Verteilun-

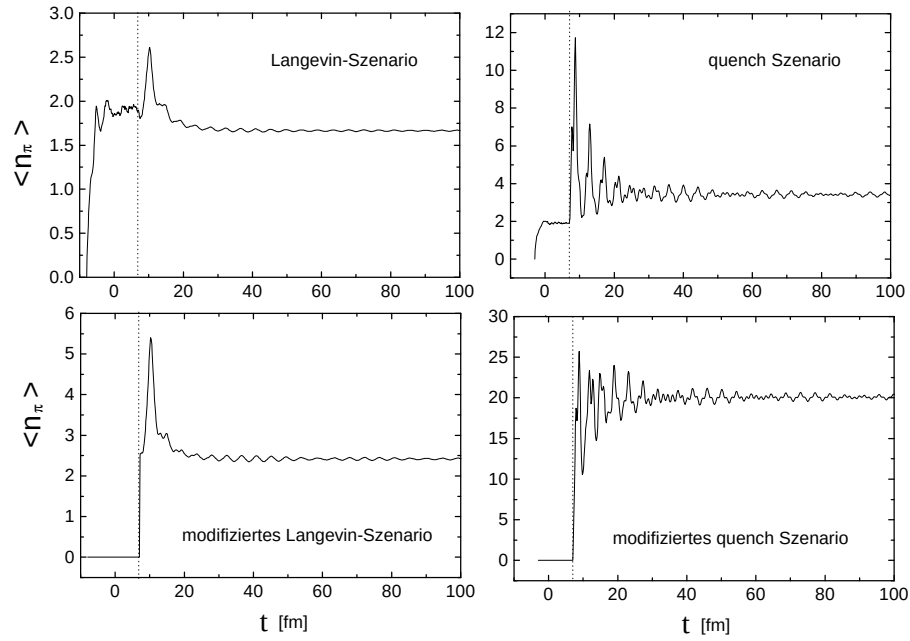
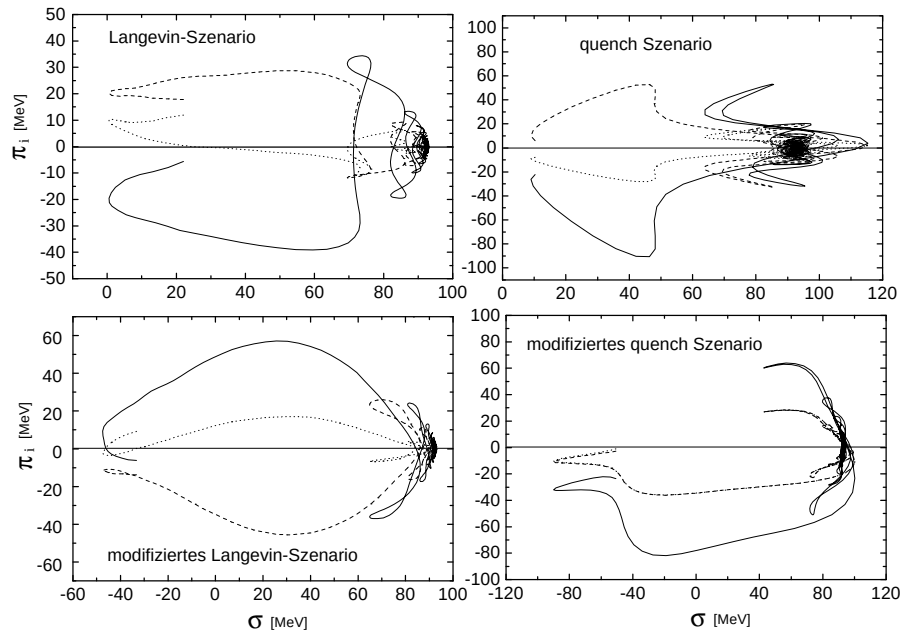


Abbildung 5.14: Zeitentwicklung der gemittelten Pion-Anzahl.

Abbildung 5.15: Zeitentwicklung der Feldkonfiguration $(\sigma_0(t), \pi_0(t))$.

gen im Langevin- und seinen modifizierten Szenario recht gut übereinstimmen, weichen die Verteilungen der Pion-Anzahl im quench und seinen modifizierten

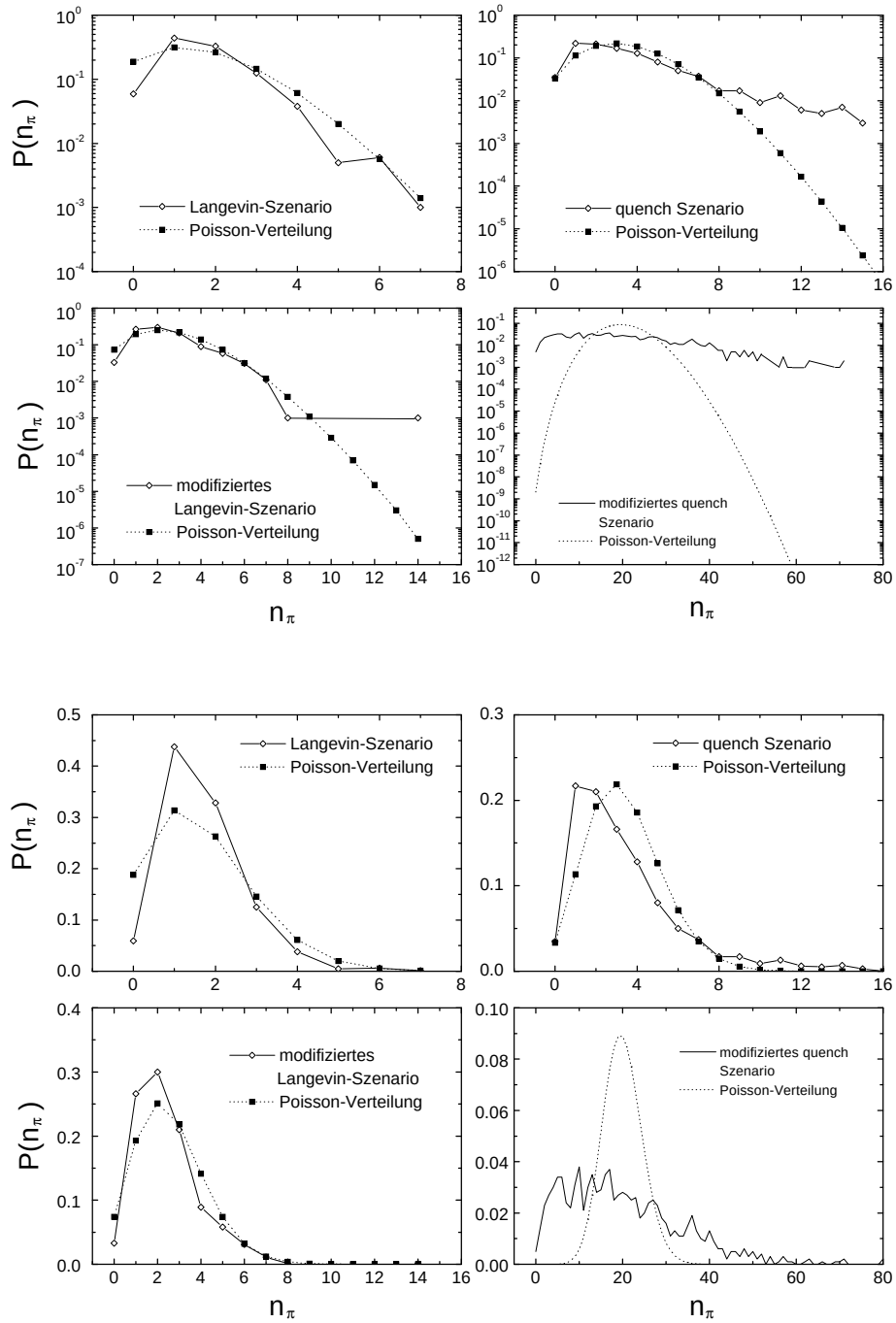


Abbildung 5.16: Verteilung der Pion-Anzahl. Im Vergleich dazu werden die entsprechenden Poisson-Verteilungen aufgetragen. Die Verteilungen sind sowohl logarithmisch (oben) als auch in normaler Form (unten) dargestellt.

Szenario stark von den entsprechenden Poisson-Verteilungen ab.

In Abb. 5.17 sind die Verteilungen von f , dem Verhältnis der Anzahl der neutralen Pionen mit der Anzahl der gesamten Pionen, dargestellt. Die gepunkteten Linien zeigen die Verteilungen im idealen Fall, d.h. $p(f) = 1/(2\sqrt{f})$. In

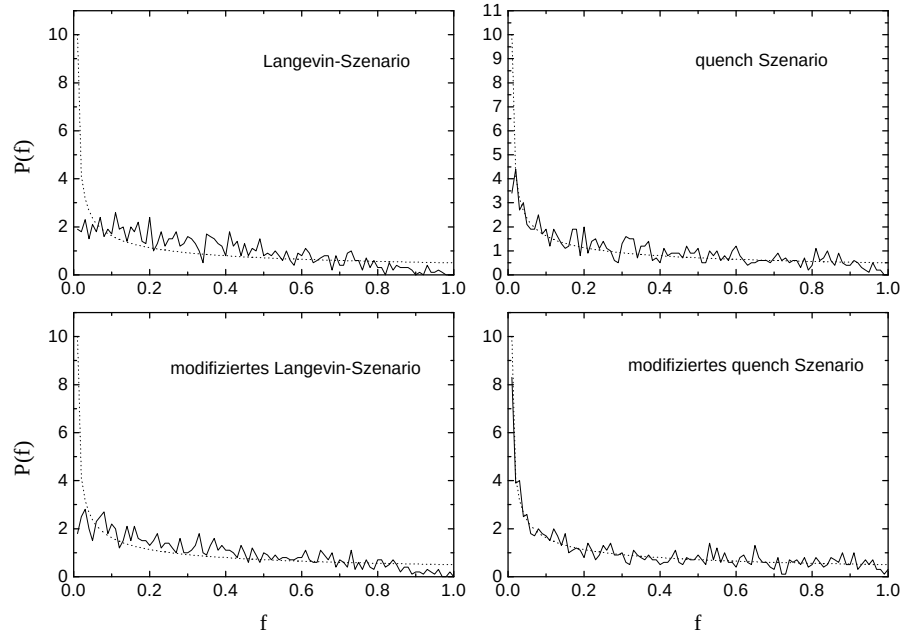


Abbildung 5.17: Verteilung $P(f)$ für vier Szenarien. Die gepunkteten Linien stellen die Verteilungen des idealen Falls dar.

der Reihenfolge Langevin-Szenario, modifiziertes Langevin-Szenario, quench Szenario und modifiziertes quench Szenario erkennt man eine klare Tendenz, daß die Verteilung $P(f)$ mit der des idealen Falls übereinstimmt. Im modifizierten quench Szenario erhält man wirklich kohärente Pion-Felder, während in den anderen Szenarien die Oszillationen der Pion-Felder noch mehr oder weniger unabhängig scheinen.

Zum mehr quantitativen Verständnis der Dynamik einer DCC-Formation im Langevin-Szenario betrachten wir die Pion-Anzahl, wenn wir die Anfangsparameter und die Expansionsdimension variieren. In folgenden Tabellen sind die Pion-Anzahl einer signifikanten DCC-Formation und die gemittelten Pion-Anzahl über einem Ensemble von 2000 DCC-Formationen für verschiedene Anfangsparametrisierungen aufgetragen. Die Rechnungen sind mittels (5.3) ohne Modifikation beim Vorheizen durchgeführt. Die Anfangstemperatur T_0 ist vorgegeben. Die Anfangseigenzeit und das Anfangsvolumen werden mittels (5.5) durch $V(T_c)$ und $t(T_c)$ ermittelt.

1.) $D = 3$ und $T_0 = T_c$

$V(T_c) \setminus t(T_c)$	3 fm	5 fm	7 fm	10 fm
10 fm^3	33.2/2.9	13.6/1.8	6.5/1.5	7.2/1.4
25 fm^3	62.8/3.7	13.4/2.0	7.0/1.6	5.3/1.4
100 fm^3	30.0/3.8	13.6/2.1	6.7/1.6	6.4/1.4
200 fm^3	25.0/3.7	11.1/2.0	7.4/1.7	5.5/1.4

2.) $D = 3$ und $T_0 = 200$ MeV

$V(T_c) \setminus t(T_c)$	3 fm	5 fm	7 fm	10 fm
10 fm^3	58.0/2.6	9.2/1.7	7.9/1.5	6.6/1.3
25 fm^3	62.2/4.0	15.1/1.9	11.0/1.6	6.0/1.4
100 fm^3	67.0/5.4	11.0/2.1	6.2/1.6	5.7/1.4
200 fm^3	78.4/5.5	11.4/2.1	6.5/1.6	5.9/1.4

3.) $D = 3$ und $T_0 = 300$ MeV

$V(T_c) \setminus t(T_c)$	3 fm	5 fm	7 fm	10 fm
10 fm^3	25.9/2.6	13.3/1.7	10.7/1.5	5.9/1.4
25 fm^3	41.2/3.6	14.1/1.9	8.1/1.5	5.7/1.4
100 fm^3	38.1/5.0	16.0/2.0	7.2/1.6	6.2/1.4
200 fm^3	62.2/5.4	10.9/2.1	7.3/1.6	6.8/1.4

4.) $D = 1$ und $T_0 = 400$ MeV

$V_0 \setminus t_0$	0.3 fm	0.6 fm	1.0 fm
25 fm^3	2.9/0.8	3.2/0.9	3.9/1.1
100 fm^3	3.3/0.8	3.5/0.9	4.0/1.1
200 fm^3	2.9/0.8	3.9/0.9	4.3/1.0

Aus den obigen Tabellen erkennen wir, daß für $D=3$ Expansion sowohl die Pion-Anzahl der signifikanten DCC-Formation als auch die gemittelte Pion-Anzahl größer werden, wenn die Eigenzeit $t(T_c)$ kleiner wird. Die Eigenzeit $t(T_c)$ (oder die Anfangseigenzeit t_0) bestimmt die Stärke der Expansion. Eine schnelle Expansion entspricht in der Philosophie dem quench Szenario eines sehr schnellen Kühlens. Außerdem führt die Variation der Anfangstemperatur zu keiner großen Änderungen der Ergebnisse. Das bedeutet, wenn die Eigenzeit bei der Übergangstemperatur festgelegt ist, hängt die Zeitentwicklung der DCC-Formation kaum davon ab, von welcher Anfangstemperatur in der Simulation ausgegangen worden ist. Der Grund dafür ist, daß der Reibungskoeffizient $\gamma(T)$ bei hoher Temperatur groß ist, so daß sich das chirale Feld der Null-Mode näherungsweise im thermischen Gleichgewicht entwickelt. Bei

der $D=1$ Expansion erhalten wir eine verschwindend kleine Pion-Anzahl. Dies stimmt mit der Berechnung von Randrup [R 97] überein. $D=1$ Expansion führt zu keiner ausreichenden Instabilität der Null-Mode, um Pionen mit größerer Anzahl zu produzieren.

Wenn wir jede Spalte der obigen Tabellen betrachten, erkennen wir, daß die gemittelte Pion-Anzahl zu einem festen $t(T_c)$ nahezu unabhängig von $V(T_c)$ ist. Dies kann man qualitativ wie folgt verstehen: Für keines $V(T_c)$ ist die Fluktuation der Anfangskonfiguration stark. Folglich zentriert die Verteilungen der Anfangskonfiguration mit einer großen Breite um $(\sigma \neq 0, \mathbf{0})$. Es gibt für kleines $V(T_c)$ mehr Wahrscheinlichkeit als für großes $V(T_c)$ dafür, eine Anfangskonfiguration um $(\sigma = 0, \mathbf{0})$ zu finden. Solche Anfangskonfiguration führt allerdings zu einer großen Pion-Anzahl. Deswegen ist die mittlere Pion-Anzahl nahezu unabhängig von $V(T_c)$. Die Situation ist anders, wenn wir das modifizierte Langevin-Szenario betrachten. Da die Anfangskonfiguration in diesem Fall um $(\sigma = 0, \mathbf{0})$ zentriert, erwarten wir eine steigende mittlere Pion-Anzahl mit wachsenden Volumen. In Abb. 5.18 ist die volumenabhängige mittlere Pion-Anzahl für das modifizierte Langevin-Szenario dargestellt, wobei wir $T_0 = T_c$, $t_0 = 5$ fm und $D = 3$ angesetzt haben. Abb. 5.18 spiegelt unsere Vorstellung wider.

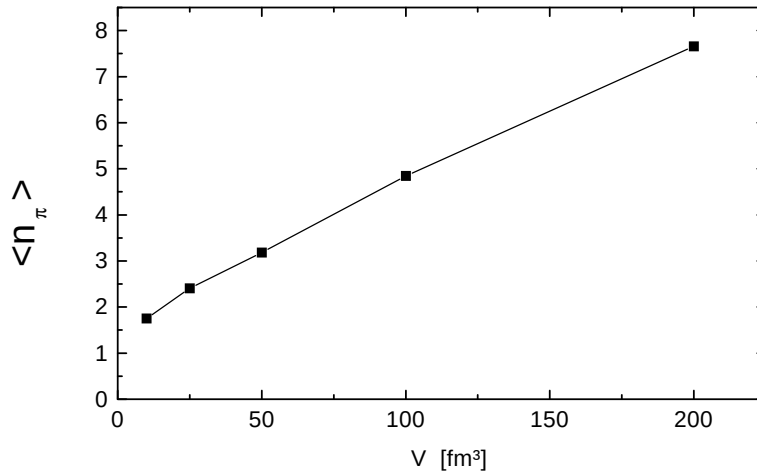


Abbildung 5.18: Volumenabhängigkeit der mittleren Pion-Anzahl im modifizierte Langevin-Szenario. Die Anfangsparameter sind wie folgt gewählt: $T_0 = T_c$, $t_0 = 5$ fm und $D = 3$.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit (Kapitel 1 und Kapitel 2) haben wir gezeigt, daß das Phänomen der DCC-Formation in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen ein Signal des chiralen Phasenübergang sein könnte. Ein DCC ist ein temporäres heißes Vakuum. Mit der Expansion des ganzen Systems zerfällt das DCC in das QCD-Vakuum. Dabei werden Pionen emittiert. Die Verteilung des Verhältnisses zwischen der Anzahl der neutralen Pionen und der Anzahl der gesamten Pionen hat für eine ideale DCC-Formation eine eigenartige Gestalt, die sich grundsätzlich von einer Binomialverteilung unterscheidet. Durch die experimentelle Identifizierung dieser Verteilung kann man die Existenz einer DCC-Formation verifizieren. Experimente in ultrarelativistischen Schwerionenkollisionen und in Hadron-Hadron-Kollisionen zur Untersuchung der DCC-Formation sind zwar durchgeführt, aber die Datenanalyse auf „event by event“ Basis zeigt bisher keine Anzeichen der Existenz einer DCC-Formation.

Die theoretische Untersuchung einer DCC-Formation mit dem linearen σ -Modell sind vielseitig durchgeführt worden. Alle DCC-Szenarien, die wir in Kapitel 2 vorgestellt haben, beinhalten die Instabilität der langwelligen Moden am Anfang einer dynamischen Entwicklung. Es zeigt sich qualitativ, daß je größer die Instabilität ist, desto stärker wachsen die langwelligen Moden an. Dieses Anwachsen führt zu einer möglichen großen DCC-Domäne, welche eine große Anzahl von Pionen zu einem späteren Zeitpunkt emittieren wird. Die Größe einer DCC-Domäne wird durch die Korrelationslänge des Pion-Feldes charakterisiert. Die Korrelationslänge beträgt in verschiedenen Szenarien $2 \sim 7$ fm.

In dieser Arbeit haben wir uns auf die Zeitentwicklung einer signifikanten DCC-Formation, die Verteilung der Gesamtzahl der Pionen und die Verteilung des Verhältnisses zwischen der Anzahl der neutralen Pionen und der Anzahl der gesamten Pionen aus dem DCC-Zerfall konzentriert. Das Langevin-Szenario erlaubt uns, die statistischen Größen zu berechnen. Da aus der qualitativen Vorstellung die langwelligen Moden des chiralen Feldes wesentlich zum Signal der

DCC-Formation beitragen, haben wir im Langevin-Szenario angenommen, daß die kurzwelligen Moden bei der Zeitentwicklung während der Expansion des Systems stets im lokalen thermischen Gleichgewicht stehen und ein Wärmebad bilden. Die langwelligen Moden wechselwirken mit dem Wärmebad.

Mittels einem von Feynman entwickelten Formalismus haben wir im dritten Teil dieser Arbeit, Kapitel 4, die semiklassische Bewegungsgleichung für die langwelligen Moden formal hergeleitet. Die Bewegungsgleichung ist stochastisch und vom Langevin-Typ.

Die Langevin-Gleichung ist eine stochastische Differentialgleichung. Sie beinhaltet unter anderem einen Rauschterm, der die stochastische Kraft aus der Umgebung darstellt, und einen Dissipationsterm, der zu einer Dämpfung des betrachteten Teilchen führt. Im zweiten Teil dieser Arbeit (Kapitel 3) wurden die Langevin-Gleichung und ihre verallgemeinerte Form anhand der Beispiele der Brown'schen Bewegung und der Bewegung eines Oszillators in einer Flüssigkeit betrachtet. Wir haben dabei ein eigenständiges Verfahren zur Simulation des farbigen Rauschens und zur Lösung der Langevin-Gleichung entwickelt. Der sogenannte Gedächtniseffekt in nichtmarkovschen Prozessen wurde diskutiert. Es ist bei unseren Simulationen deutlich zu erkennen, daß der Gedächtniseffekt zu einer Verringerung der Dämpfung führt, wenn man diese Dämpfung mit der des markovschen Falls vergleicht.

Im letzten Teil dieser Arbeit ist das in Kapitel 3 entwickelte Verfahren auf die Lösung der in Kapitel 4 hergeleiteten langevinartigen Bewegungsgleichung der Null-Mode und der korrespondierenden markovschen Gleichung angewandt. Als Anfangsparameter haben wir $T_0 = T_c = 123 \text{ MeV}$, $V_0 = 100 \text{ fm}^3$, $t_0 = 7 \text{ fm}$ und $D = 3$ angesetzt. Wir berechneten die Lösungen für ein Ensemble von 1000 DCC-Formationen, aus dem die signifikante DCC-Formation mit größter Pion-Anzahl ausgesucht wurde. Dabei haben wir die Zeitentwicklung der effektiven Pion-Masse, der Pion-Anzahl und der Feldkonfiguration sowohl für die signifikante DCC-Formation als auch für das Ensemble-Mittel berechnet. Aus dem Vergleich des markovschen und nichtmarkovschen Falls erkennen wir, daß die gemittelte Pion-Anzahl im nichtmarkovschen Fall etwas größer als die im markovschen Fall ist. Das bedeutet aber auch, daß der Gedächtniseffekt in der Dynamik einer DCC-Formation nur eine unwesentliche Rolle spielt.

Die mittlere Pion-Anzahl in der oben erläuterten Rechnung ist sehr klein ($2 \sim 3$). Bei der signifikanten DCC-Formation ist die Pion-Anzahl nur ungefähr 10. Eine derart kleine Anzahl aus einem Domänenzerfall resultierender langwelliger Pionen kann aber experimentell im Hintergrund der thermischen Pionen nicht sondiert werden. Wenn die angegebenen Anfangsparameter die reale Schwerionenkollision beschreiben würden, könnte das Signal der Existenz einer DCC-Formation experimentell nicht identifiziert werden.

Wir modifizierten das Langevin-Szenario weiterhin, indem wir beim Vorheizen den Term, der die explizite Brechung der chiralen Symmetrie modelliert,

weggelassen haben. Durch diese Modifizierung zentrieren die Verteilungen der Anfangskonfiguration um $(\sigma = 0, \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0})$, so daß eine größere Instabilität der Null-Mode hergestellt ist. Im modifizierten Langevin-Szenario erhielten wir mehr Pionen (maximale Anzahl ungefähr 15). Wir haben auch das sogenannte quench Szenario betrachtet. Die Pion-Anzahl ist in der gleichen Größenordnung wie die im modifizierten Langevin-Szenario. Im modifizierten quench Szenario ist die Pion-Anzahl der signifikanten DCC-Formation sehr groß (ungefähr 80). Die Verteilung der gesamten Pion-Anzahl für das quench Szenario weicht deutlich von einer Poisson-Verteilung ab. Falls eine signifikante DCC-Produktion doch auftreten kann, dann ist die Verteilung der gesamten Pion-Anzahl nicht durch eine Poisson-Verteilung beschrieben. Unter Veränderung der Anfangsparameter stellten wir fest, daß große DCC-Domänen nur unter sehr schneller Expansion produziert werden können.

Wir haben im Langevin-Szenario nur die Bewegungsgleichung der Null-Mode betrachtet. Die anderen Moden bilden das Wärmebad. Unser Formalismus erlaubt explizite Berücksichtigung mehrerer langwelligen Moden. Außerdem wurden die Reibungskoeffizienten von π_0^i und von σ in unseren Berechnungen als gleich angenommen. Die Arbeit von Rischke [R 98] zeigt jedoch, daß der Reibungskoeffizient in radialer Richtung von σ aufgrund des Zerfallsprozesses $\sigma \rightarrow \pi\pi$ deutlich höher als den von π_0^i ist. In dieser Hinsicht läßt sich das Langevin-Szenario verallgemeinern, indem wir die Bewegungsgleichungen mehrerer Moden lösen und die verschiedenen Reibungskoeffizienten von π_0^i und von σ berücksichtigen.

Anhang A

Zur Berechnung des Kernels $\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$

Aus den Erkenntnissen von Kapitel 3, Abschnitt 3, hat $\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$ folgende Form

$$i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega) = C_{\mathcal{M}_1} \left(e^{\frac{\omega}{T}} - 1 \right) T_1^g(\mathbf{k}, \omega)$$

wobei

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}| \leq k_c \quad , \quad C_{\mathcal{M}_1} &= \frac{\pi}{24} \frac{1}{(2\pi)^6} g^4 \quad \text{und} \\ T_1^g(\mathbf{k}, \omega) &= \int_{k_c} d^3 q_1 d^3 q_2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \theta(|\mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2| - k_c) \times \\ &\quad \begin{aligned} 1.) \quad &\{ n_1 n_2 n_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ 2.) \quad &+ (1 + n_1) n_2 n_3 \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ 3.) \quad &+ n_1 (1 + n_2) n_3 \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \\ 4.) \quad &+ n_1 n_2 (1 + n_3) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \\ 5.) \quad &+ (1 + n_1) (1 + n_2) n_3 \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3) \\ 6.) \quad &+ (1 + n_1) n_2 (1 + n_3) \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3) \\ 7.) \quad &+ n_1 (1 + n_2) (1 + n_3) \delta(\omega - \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ 8.) \quad &+ (1 + n_1) (1 + n_2) (1 + n_3) \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \} \end{aligned} \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_3 &:= \mathbf{k} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 \, , \\ \omega_i &= \omega_{\mathbf{q}_i} = \sqrt{\mathbf{q}_i^2 + m_p^2} \, , \quad i = 1, 2, 3 \, , \\ n_i &= n(\omega_i) = \frac{1}{e^{\omega_i/T} - 1} \, , \quad i = 1, 2, 3 \, . \end{aligned}$$

Der „gain“ Term $T_1^g(\mathbf{k}, \omega)$ ist identifiziert mit der Produktionsrate der langwelligeren Moden, die Impuls $\mathbf{k}$ und Energie ω besitzen, aus dem Zerfall der kurzwelligen Moden.

Das Integral wie (A.1) mit $k_c = 0$ wurde bereits von Wang und Heinz [WH 96] bei der Untersuchung des 2-loop resummierten Propagator in der Φ^4 Theorie ausgewertet. An dieser Stelle geben wir nun eine eigenständige Auswertung des Integrals an. Wir werden auch bemerken, daß die Berechnung in [WH 96] an einigen Stellen nicht korrekt sind.

Aus Symmetriegründen sind der 2., 3. und 4. Term sowie der 5., 6. und 7. Term in (A.1) identisch. Wegen der Eigenschaft, daß $\mathcal{M}_1(\mathbf{k}, \omega)$ eine ungerade Funktion bzgl. ω ist, werden wir $T_1^g(\mathbf{k}, \omega)$ nur für positives ω auswerten. Daher entfällt der 8. Term. Die Gleichung (A.1) reduziert sich auf

$$T_1^g(\mathbf{k}, \omega) = \int_{k_c} d^3 q_1 d^3 q_2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \theta(|\mathbf{q}_3| - k_c) \times \\ \{n_1 n_2 n_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ + 3(1 + n_1) n_2 n_3 \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ + 3(1 + n_1)(1 + n_2) n_3 \delta(\omega + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3)\}. \quad (\text{A.2})$$

Wäre

$$\omega_1 + \omega_2 > \omega_3 \quad \text{für alle } \mathbf{q}_1 \text{ und } \mathbf{q}_2, \quad (\text{A.3})$$

so würde der letzte Term von (A.2) wegfallen. Wang und Heinz haben dies in ihrer Publikation angenommen. Wir weisen aber darauf hin, daß die Aussage (A.3) nur für den Fall $k_c = 0$ gilt, denn in diesem Fall ist $\mathbf{k} = 0$, und es folgt direkt

$$\omega_3^2 = q_3^2 + m_p^2 = (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + m_p^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 + m_p^2 \\ = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 - m_p^2 < \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 = (\omega_1 + \omega_2)^2.$$

Für den Fall $k_c \neq 0$ geben wir ein Gegenbeispiel an, das zum Widerspruch von (A.3) führt: Für $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$ und ein $\mathbf{k}$, das antiparallel zu $\mathbf{q}_1$ steht, gilt $q_3 = 2q_1 + k$. Es folgt

$$\omega_3^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2 = (2q_1 + k)^2 + m_p^2 - 4(q_1^2 + m_p^2) = k^2 + 4kq_1 - 3m_p^2.$$

Wir sehen, daß die obige Gleichung größer als Null wird, wenn zu gegebenem $|\mathbf{k}| \neq 0$ q_1 hinreichend groß ist. Dann ist $\omega_1 + \omega_2 < \omega_3$.

Da die explizite Berechnung für $k_c \neq 0$ sich als zu komplex erweist, beschränken wir uns auf den Fall $k_c = 0$, so daß wir nur $T_1^g(\mathbf{k}=0, \omega)$ berechnen.

Wir führen nun die Rechnung für den ersten Term von (A.2) aus; diesen definieren wir als

$$g_1(\omega) := \int d^3 q_1 d^3 q_2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} n_1 n_2 n_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3). \quad (\text{A.4})$$

Das obige Integral werden wir auf ein eindimensionales Integral reduzieren, so daß das Integral numerisch einfach zu berechnen ist.

Im Kugelkoordinatensystem ist

$$\int d^3 q_1 d^3 q_2 \cdots = \int_0^\infty dq_1 q_1^2 \int_0^\pi d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\infty dq_2 q_2^2 \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \cdots$$

wobei θ_1 der Winkel zwischen einer ausgezeichneten Richtung und $\mathbf{q}_1$, θ_2 der Winkel zwischen $\mathbf{q}_1$ und $\mathbf{q}_2$ ist.

Da ω_1 und ω_2 nur von q_1 bzw. q_2 abhängen und ω_3 wegen der Definition von $\mathbf{q}_3$ von q_1 , q_2 und $\cos\theta_2$ abhängt, können wir die Integrale über φ_1 , φ_2 und θ_1 ausführen:

$$g_1(\omega) = 8\pi^2 \int_0^\infty dq_1 dq_2 \int_{-1}^1 dt q_1^2 q_2^2 \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} n_1 n_2 n_3 \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3), \quad (\text{A.5})$$

wobei $t = \cos\theta_2$.

Die δ Funktion in (A.5) zeigt uns, daß ω mindestens $3m_p$ sein muß, ansonsten sind die Beiträge zum Integral Null. Das Problem besteht nur darin, die kinematische geforderte Energieerhaltung auszuwerten. Die q_1 , q_2 und t , die dazu führen, daß die entsprechenden Integranden von (A.5) nicht gleich Null sind, gegügen dem Energiesatz

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \quad (\text{A.6})$$

Durch das Einsetzen von $q_3 = |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|$ in (A.6) eliminieren wir ω_3 :

$$\omega_3 = \omega - \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)^2 + m_p^2} = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 q_2 t + m_p^2}. \quad (\text{A.7})$$

Unsere Strategie zur Integration in (A.5) ist die folgende: Wir lösen (A.7) für ein vorgegebenes ω nach q_1 , q_2 und t und summieren die den Lösungen entsprechenden Integranden von (A.5). Dafür halten wir zuerst $\mathbf{q}_1$ fest und lösen (A.7) nach q_2 und t . Da $\omega - \omega_1$ mindestens $2m_p$ sein muß, ist (A.7) nur für $\mathbf{q}_1$ lösbar, die

$$q_1 \leq q_1^u := \sqrt{(\omega - 2m_p)^2 - m_p^2} = \sqrt{(\omega - m_p)(\omega - 3m_p)}$$

erfüllen. Durch Quadrieren von (A.7) erhalten wir

$$(\omega - \omega_1)^2 - 2(\omega - \omega_1)\sqrt{q_2^2 + m_p^2} = q_1^2 + 2q_1 q_2 t.$$

Da $\mathbf{q}_1$ so gewählt ist, daß $\omega - \omega_1$ positiv sein soll, dürfen wir die obige Gleichung durch $2(\omega - \omega_1)$ teilen. Daraus folgt

$$\frac{(\omega - \omega_1)^2 - q_1^2}{2(\omega - \omega_1)} - \frac{q_1}{\omega - \omega_1} t q_2 = \sqrt{q_2^2 + m_p^2}. \quad (\text{A.8})$$

Statt (A.7) lösen wir (A.8). Aber wir müssen nachher überprüfen, ob die Lösungen von (A.8) auch (A.7) genügen. Dies ist der Fall, wenn $(\omega - \omega_1)^2 > \omega_2^2$.

Wenn wir definieren

$$F(q_2, t) := \frac{(\omega - \omega_1)^2 - q_1^2}{2(\omega - \omega_1)} - \frac{q_1}{\omega - \omega_1} t q_2 ,$$

dann sind die Lösungen q_2 für jedes t die Schnittpunkten der Kurven $F(q_2, t)$ und $\omega_2(q_2)$.

Wir beachten folgende Punkte. Erstens ist $F(0, t)$ eine Konstante, da wir $\mathbf{q}_1$ festgelegt haben. Zweitens ist die partielle Ableitung von $F(q_2, t)$ bzgl. q_2 ,

$$\frac{\partial F(q_2, t)}{\partial q_2} = -\frac{q_1}{\omega - \omega_1} t ,$$

eine Funktion von t aber nicht mehr von q_2 . Folglich ist $F(q_2, t)$ für ein festes t eine Gerade, und die Kurven $F(q_2, t)$ für alle t bilden ein Bündel, das eine Quelle an $q_2 = 0$ hat. Die äußeren Hüllen entsprechen $F(q_2, \pm 1)$. Als drittes erkennen wir, daß $\frac{d\omega_2(q_2)}{dq_2}$ mit anwachsendem q_2 von Null bis gegen eins läuft.

Wir diskutieren die Lösungen in drei Fällen, die sich nach der Lage von $F(0, t)$ unterscheiden:

I.) $F(0, t) \geq \omega_2(0) = m_p$

In diesem Fall ist $\omega - \omega_1 > q_1$ und deswegen der Betrag von $\frac{\partial F(q_2, t)}{\partial q_2}$ kleiner als eins. Daraus folgt, daß jede Kurve $F(q_2, t)$ für ein $t \in [-1, 1]$ die Kurve $\omega_2(q_2)$ schneidet und zwar **nur einmal**. In Abb. A.1 sind $\omega_2(q_2)$ und $F(q_2, t)$ für $t = -1, 0, 1$ skizziert. Die Abb. A.1 zeigt uns, daß (A.8) für jedes t aus dem

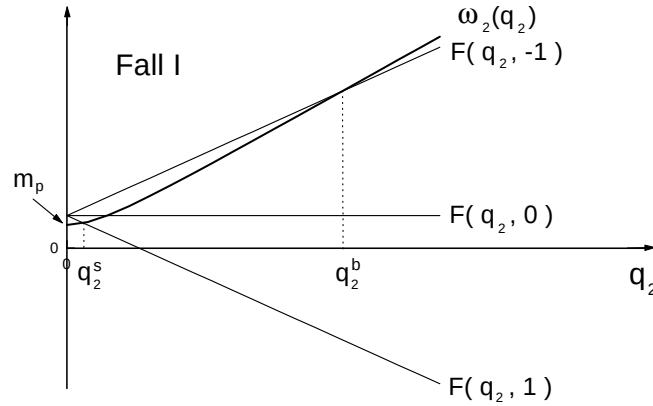


Abbildung A.1: die Lösungen im Fall I

Intervall $[-1, 1]$ genau eine Lösung q_2 hat. Die Lösungen liegen kontinuierlich in dem Intervall $[q_2^s, q_2^b]$, wobei q_2^s und q_2^b die Lösungen von (A.8) für $t = 1$ bzw.

$t = -1$ sind. Wir können q_2^s und q_2^b erhalten, indem wir die durch weiteres Quadrieren von (A.8) erhaltene lineare Gleichung 2.Ordnung lösen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} q_2^s &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} - q_1 \right) \quad , \\ q_2^b &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right) \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$A(\omega, q_1) := \frac{(\omega - \omega_1)^2 \left[(\omega - \omega_1)^2 - q_1^2 - 4m_p^2 \right]}{(\omega - \omega_1)^2 - q_1^2} \quad .$$

Aus der Skizze und der daraus notwendigen Existenz der zwei Lösungen ist ersichtlich, daß $A(\omega, q_1)$ positiv ist und $q_2^s \geq 0$ sein muß. Folglich gelten neben $q_1 < \omega - \omega_1$ noch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} q_1^2 &< (\omega - \omega_1)^2 - 4m_p^2 \\ \text{und} \quad A(\omega, q_1) &< (\omega - \omega_1)^2 . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= q_2^2 + m_p^2 \leq (q_2^b)^2 + m_p^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right)^2 + m_p^2 = \frac{1}{4} \left(A(\omega, q_1) + q_1^2 + 2\sqrt{A(\omega, q_1)} q_1 \right) + m_p^2 \\ &< \frac{1}{4} \left((\omega - \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2 - 4m_p^2 + 2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_1) \right) + m_p^2 = (\omega - \omega_1)^2 , \end{aligned}$$

so daß die eben erhaltenen Lösungspaare (q_2, t) (A.7) genügen.

Nun kommen wir zurück zur Bestimmung der Grenzen von q_1 mit Hilfe der Ungleichung $F(0, t) \geq m_p$, die den Fall I kennzeichnet. Genauso wie bei der Bestimmung der q_2^s und q_2^b quadrieren wir die Ungleichung, dann lösen wir die gewöhnliche lineare Ungleichung 2.Ordnung. Das dadurch erhaltene Ergebnis ist $q_1 \in [0, q_1^*]$ mit

$$q_1^* := \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - m_p)^2 - 4m_p^2} .$$

Es ist leicht zu zeigen, daß $q_1^* \leq q_1^u$ ist.

Wir setzen die Grenzen in (A.5) ein und erhalten

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 \left\{ \int_0^{q_1^*} dq_1 \int_{q_2^s}^{q_2^b} dq_2 \int_{-1}^1 dt \cdots + \cdots \right\} . \quad (\text{A.9})$$

II.) $0 < F(0, t) < m_p$

In diesem Fall gilt immer noch $\omega - \omega_1 > q_1$. Der Betrag von $\frac{\partial F(q_2, t)}{\partial q_2}$ ist kleiner als eins. Das bedeutet, daß die Kurve $F(q_2, t)$ für ein festes t die Kurve $\omega_2(q_2)$

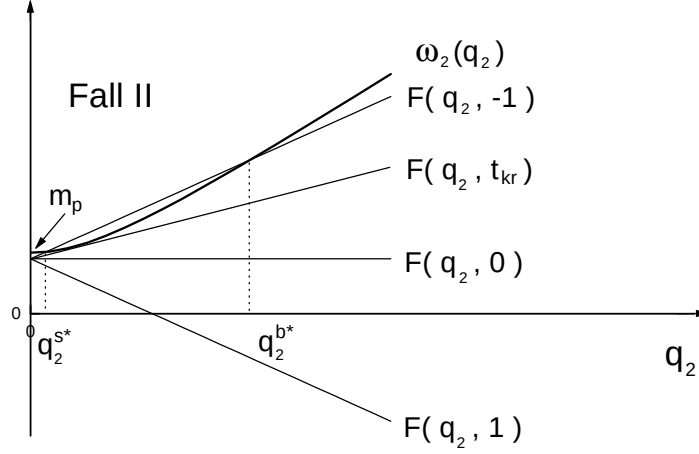


Abbildung A.2: die Lösungen im Fall II

zweimal schneiden kann, sofern die beiden Kurven sich überhaupt schneiden. Dies ist in Abb. A.2 dargestellt. Das Tangieren der Kurven $F(q_2, t)$ und $\omega_2(q_2)$ stellt den Grenzfall dar. Diese Kurve kennzeichnen wir mit $F(q_2, t_{kr})$. Wir erhalten q_2^{s*} und q_2^{b*} analog wie im Fall I (nur mit $t = -1$):

$$q_2^{s*} = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right) \quad ,$$

$$q_2^{b*} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right) \quad .$$

Wang und Heinz [WH 96] haben bei ihrer Berechnung q_2^* als Null gesetzt, was aus der Skizze offensichtlich positiv sein muß.

Es ist aber noch fraglich, ob sich die Kurven $F(q_2, -1)$ und $\omega(q_2)$ schneiden. Um das zu sichern, müssen wir fordern, daß $A(\omega, q_1)$ nicht negativ sein soll. Daraus folgt die Ungleichung

$$(\omega - \omega_1)^2 - q_1^2 - 4m_p^2 \geq 0 \quad ,$$

die gemeinsam mit der Ungleichung $0 < F(0, t) < m_p$ zur Bestimmung der Grenzen von q_1 führt. Das Ergebnis ist $q_1 \in [q_1^*, q_1^{kr}]$ mit

$$q_1^{kr} = \frac{1}{2\omega} \sqrt{(\omega^2 - m_p^2)(\omega^2 - 9m_p^2)} \quad .$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß für $\omega \geq 3m_p$ $q_1^* \leq q_1^{kr} \leq q_1^u$ ist. Ebenso wie im Fall I können wir beweisen, daß die Lösungen (q_2, t) der Gleichung (A.7)

genügen. Wir fügen das Teilintegral für den Fall II in (A.9) ein und erhalten

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 \left\{ \int_0^{q_1^*} dq_1 \int_{q_2^s}^{q_2^b} dq_2 \int_{-1}^1 dt + \int_{q_1^*}^{q_1^{kr}} dq_1 \int_{q_2^{s*}}^{q_2^{b*}} dq_2 \int_{-1}^{t_{kr}} dt \cdots + \cdots \right\}.$$

III.) $F(0, t) \leq 0$

Im Gegensatz zu den ersten beiden Fällen ist hier $\omega - \omega_1 \leq q_1$. Das führt dazu, daß die maximale Steigung der $F(q_2, t)$ größer als eins ist. Daraus folgt, daß sich die Kurven $F(q_2, t)$ und $\omega_2(q_2)$ nur einmal schneiden, wenn überhaupt.

Die AbbA.3 zeigt uns, daß $q_2 \in [q_2^{s**}, \infty]$ ist, wobei

$$q_2^{s**} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right).$$

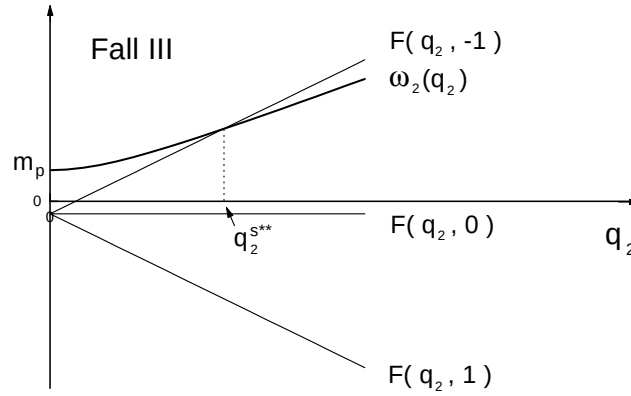


Abbildung A.3: die Lösungen im Fall III

Aus

$$A(\omega, q_1) \geq (\omega - \omega_1)^2 \quad \text{und} \quad q_1 \geq \omega - \omega_1$$

folgt

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= q_2^2 + m_p^2 \geq (q_2^{s**})^2 + m_p^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{A(\omega, q_1)} + q_1 \right)^2 + m_p^2 = \frac{1}{4} \left(A(\omega, q_1) + q_1^2 + 2\sqrt{A(\omega, q_1)} q_1 \right) + m_p^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left((\omega - \omega_1)^2 + (\omega - \omega_1)^2 + 2(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_1) \right) + m_p^2 > (\omega - \omega_1)^2. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß die im Fall III erhaltenen (q_2, t) keine Lösungen von (A.7) sind.

Schließlich reduziert sich das Integral (A.5) auf

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 \left\{ \int_0^{q_1^*} dq_1 \int_{q_2^s}^{q_2^b} dq_2 \int_{-1}^1 dt + \int_{q_1^*}^{q_1^{kr}} dq_1 \int_{q_2^{s*}}^{q_2^{b*}} dq_2 \int_{-1}^{t_{kr}} dt \right. \\ \left. q_1^2 q_2^2 \frac{n_1 n_2 n_3}{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \right\} . \quad (\text{A.10})$$

Die obige Gleichung scheint auf den ersten Blick nicht übereinstimmend mit den vorherigen Diskussionen zu sein, in denen wir festgestellt haben, daß unter dem Energiesatz jedes q_2 nur ein t abbildet. Jedoch ist die Darstellung (A.10) sicher richtig, da wegen der δ Funktion nach der Integration über t nur ein Term übrigbleiben wird, der genau der Lösungsgruppe (q_1, q_2, t) von (A.7) entspricht.

Anhand der Relation, wie aus (A.7) folgt,

$$dt = \frac{\omega_3}{q_1 q_2} d\omega_3$$

substituieren wir dt durch $d\omega_3$ und integrieren in (A.10) zuerst über ω_3 . Es folgt

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 \left\{ \left(\int_0^{q_1^*} dq_1 \int_{q_2^s}^{q_2^b} dq_2 + \int_{q_1^*}^{q_1^{kr}} dq_1 \int_{q_2^{s*}}^{q_2^{b*}} dq_2 \right) \frac{q_1}{\omega_1} n_1 \frac{q_2}{\omega_2} n_2 n(\omega - \omega_1 - \omega_2) \right\} .$$

Durch weitere Substitutionen,

$$d\omega_1 = \frac{q_1}{\omega_1} dq_1 \quad \text{und} \quad d\omega_2 = \frac{q_2}{\omega_2} dq_2 \quad ,$$

erhalten wir

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 \left\{ \int_{m_p}^{\omega_1^*} d\omega_1 \int_{\omega_2^s}^{\omega_2^b} d\omega_2 + \int_{\omega_1^*}^{\omega_1^{kr}} d\omega_1 \int_{\omega_2^{s*}}^{\omega_2^{b*}} d\omega_2 n_1 n_2 n(\omega - \omega_1 - \omega_2) \right\} .$$

Ferner definieren wir

$$U_i := e^{-\frac{\omega_i}{T}} \quad \text{für } i=1,2.$$

Daraus folgen die Relationen

$$d\omega_i = -T \frac{1}{U_i} dU_i \quad \text{für } i=1,2,$$

$$n_1 = \frac{U_1}{1 - U_1} \quad ,$$

$$\text{und} \quad n_2 n(\omega - \omega_1 - \omega_2) = U_2 \left(\frac{1}{U_2 - \frac{U_\omega}{U_1}} - \frac{1}{U_2 - 1} \right) \frac{U_\omega}{U_1 - U_\omega}$$

mit

$$U_\omega := e^{-\frac{\omega}{T}} .$$

Wir substituieren $d\omega_i$, n_i durch dU_i , U_i und erhalten

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 T^2 \left\{ \int_{U_{mp}}^{U_1^*} dU_1 \int_{U_2^s}^{U_2^b} dU_2 + \int_{U_1^*}^{U_1^{kr}} dU_1 \int_{U_2^{s*}}^{U_2^{b*}} dU_2 \right. \\ \left. \frac{1}{1-U_1} \frac{U_\omega}{U_1-U_\omega} \left(\frac{1}{U_2 - \frac{U_\omega}{U_1}} - \frac{1}{U_2-1} \right) \right\}.$$

Nach der Integration über U_2 erreichen wir das Endergebnis

$$g_1(\omega) = \theta(\omega - 3m_p) 8\pi^2 T^2 U_\omega \times \\ \left\{ \int_{U_{mp}}^{U_1^*} dU_1 \frac{1}{1-U_1} \frac{1}{U_1-U_\omega} \ln \left[\frac{(1-U_2^s)(U_1 U_2^b - U_\omega)}{(1-U_2^b)(U_1 U_2^s - U_\omega)} \right] \right. \\ \left. + \int_{U_1^*}^{U_1^{kr}} dU_1 \frac{1}{1-U_1} \frac{1}{U_1-U_\omega} \ln \left[\frac{(1-U_2^{s*})(U_1 U_2^{b*} - U_\omega)}{(1-U_2^{b*})(U_1 U_2^{s*} - U_\omega)} \right] \right\}.$$

Aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung, d.h.,

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{k} \equiv 0 \quad , \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega ,$$

stellt $g_1(\omega)$ die Produktionsrate für den Vorgang dar, in dem ein langwellige Mode aus dem Zerfall von drei kurzwelligen Moden produziert wird.

Die Berechnung des zweiten Terms von $T_1^g(0, \omega)$, der als $g_2(\omega)$ bezeichnet ist, wird ebenso wie bei $g_1(\omega)$ ausgeführt. Aus der Energieerhaltung $\omega_2 + \omega_3 = \omega + \omega_1$ stellt $g_2(\omega)$ die Produktionsrate des Vorgangs dar, in dem zwei kurzwellige Moden in eine langwellige Mode und eine kurzwellige Mode gestreut werden.

Wir geben nun das Ergebnis von $i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}=0, \omega)$ an. Um die Formel übersichtlicher machen, führen wir drei Definitionen ein:

$$U(s) := \exp \left(-\frac{\sqrt{s^2 + m_p^2}}{T} \right) , \\ G_1(U; s_1, s_2) := \frac{1}{1-U} \frac{1}{U-U_\omega} \ln \left[\frac{(1-U(s_1))(U U(s_2) - U_\omega)}{(1-U(s_2))(U U(s_1) - U_\omega)} \right] \\ \text{und} \quad G_2(U; s_1, s_2) := \frac{1}{1-U} \frac{1}{1-U U_\omega} \ln \left[\frac{(1-U(s_1))(U(s_2) - U U_\omega)}{(1-U(s_2))(U(s_1) - U U_\omega)} \right] , \\ \text{wobei} \quad U = U(q_1) .$$

Folglich ist

$$i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}=0, \omega) = \frac{g^4 T^2}{192\pi^3} (1-U_\omega) \times \\ \left\{ \theta(\omega - 3m_p) \left[\int_{U(0)}^{U(q_1^*)} dU \, G_1(U; q_2^s, q_2^b) + \int_{U(q_1^*)}^{U(q_1^{kr})} dU \, G_1(U; q_2^{s*}, q_2^{b*}) \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \theta(m_p - \omega) \int_0^{U(q_1^{kr})} dU \, G_2(U; q_2^t, q_2^c) \\
& + 3 \theta(\omega - m_p) \int_0^{U(0)} dU \, G_2(U; q_2^{t*}, q_2^{c*}) \Big\} . \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Während q_1^* , q_1^{kr} , q_2^s , q_2^b , q_2^{s*} und q_2^{b*} schon bekannt sind, haben q_2^t , q_2^c , q_2^{t*} und q_2^{c*} die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
q_2^t &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{B(\omega, q_1)} + q_1 \right) , & q_2^c &= \frac{1}{2} \left(-\sqrt{B(\omega, q_1)} + q_1 \right) , \\
q_2^{t*} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{B(\omega, q_1)} + q_1 \right) , & q_2^{c*} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{B(\omega, q_1)} - q_1 \right) ,
\end{aligned}$$

wobei

$$B(\omega, q_1) = \frac{(\omega + \omega_1)^2 \left((\omega + \omega_1)^2 - q_1^2 - 4m_p^2 \right)}{(\omega + \omega_1)^2 - q_1^2}$$

und

$$q_1 = \sqrt{(T \ln U)^2 - m_p^2} , \quad \omega_1 = -T \ln U .$$

q_2^c war in der Publikation von Wang und Heinz [WH 96] Null, was auch falsch ist.

Den Dissipationskernel $\Gamma_1(\mathbf{k}=0, \omega)$ erhalten wir durch

$$\Gamma_1(\mathbf{k}=0, \omega) = \frac{i\mathcal{M}_1(\mathbf{k}=0, \omega)}{2\omega} =: \frac{g^4 T}{192\pi^3} \bar{\Gamma} \left(\frac{\omega}{T}, \frac{m_p}{T} \right) .$$

Der dabei definierte reduzierte Dissipationskernel $\bar{\Gamma}$ kann numerisch ausgewertet werden. Er hängt nur von $\frac{\omega}{T}$ und $\frac{m_p}{T}$ ab.

Für $\omega \rightarrow 0^+$ erhalten wir

$$T_1^g(0, \omega \rightarrow 0^+) \propto \int_0^{U(q_1^{kr})} dU \, G_2(U; q_2^t, q_2^c) .$$

Da

$$q_1^{kr} = \frac{1}{2\omega} \sqrt{(\omega^2 - m_p^2)(\omega^2 - 9m_p^2)} \rightarrow \infty \quad \text{für } \omega \rightarrow 0^+$$

und folglich $U(q_1^{kr}) \rightarrow 0$, gilt $T_1^g(0, \omega \rightarrow 0^+) \rightarrow 0$.

Zum Schluß berechnen wir $i\mathcal{M}_1(0, \omega)$ für $\omega = m_p$:

$$i\mathcal{M}_1(0, m_p) = \frac{g^4 T^2}{64\pi^3} (1 - U(0)) \int_0^{U(0)} dU \, G_2(U; q_2^{t*}, q_2^{c*}) .$$

Dabei ist es leicht zu zeigen, daß $q_2^{t*} = q_1$ und $q_2^{c*} = 0$. Es folgt somit

$$i\mathcal{M}_1(0, m_p) = \frac{g^4 T^2}{64\pi^3} \int_0^{U(0)} dU \, \frac{1 - U(0)}{(1 - U)(1 - UU(0))} \ln \left[\frac{U(0)(1 - U)^2}{U(1 - U(0))^2} \right] .$$

Durch weitere Substitution $y := \frac{1}{1-U}$ vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$i\mathcal{M}_1(0, m_p) = \frac{g^4 T^2}{64\pi^3} \int_1^{y_0} dy \, \frac{1}{y + y_0 - 1} \ln \frac{y_0(y_0 - 1)}{y(y - 1)} \tag{A.12}$$

mit $y_0 := \frac{1}{1-U(0)}$. Wir können zeigen, daß das Integral in (A.12) die *Spence Funktion* darstellt, die wir definieren als

$$f_{sp}(x) := - \int_1^x dy \frac{\ln y}{y-1}.$$

Dafür wenden wir den folgenden Trick an:

$$\begin{aligned} & \int_1^{y_0} dy \frac{1}{y+y_0-1} \ln \frac{y_0(y_0-1)}{y(y-1)} = \int_1^{y_0} dy \frac{1}{y+y_0-1} \int_y^{y_0} dy' \frac{1}{y' - \frac{y_0 y}{y+y_0-1}} \\ &= \int_1^{y_0} dy \int_y^{y_0} dy' \frac{1}{y(y'-y_0) + y'(y_0-1)} = \int_1^{y_0} dy' \frac{1}{y'-y_0} \int_1^{y'} dy \frac{1}{y + \frac{y'(y_0-1)}{y'-y_0}} \\ &= \int_1^{y_0} dy' \frac{1}{y'-y_0} \ln \frac{y'}{y_0} \stackrel{\tilde{y} := \frac{y'}{y_0}}{=} - \int_1^{\frac{1}{y_0}} d\tilde{y} \frac{\ln \tilde{y}}{\tilde{y}-1} = f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{m_p}{T}} \right). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1(0, m_p) &= \frac{g^4 T^2}{64\pi^3} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{m_p}{T}} \right) \quad \text{und} \\ \Gamma_1(0, m_p) &= \frac{i\mathcal{M}_1(0, m_p)}{2m_p} = \frac{g^4 T^2}{128\pi^3 m_p} f_{sp} \left(1 - e^{-\frac{m_p}{T}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$\Gamma_1(0, m_p)$ ist verknüpft mit der Plasma-on-shell Dämpfungsrate $\gamma(0, m_p)$ [HS 84] [P 92] [J 95] [WH 96] durch

$$\Gamma_1(0, m_p) = 2\gamma(0, m_p).$$

Literaturverzeichnis

- [W 96] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, II, (Cambridge, 1996).
- [BKT 93] J.D. Bjorken, K.L. Kowalski, and C.C. Taylor, *Baked Alaska*, Proceedings of Les Rencontres de Physique de la Vallée D'Aoste, La Thuile, SLAC-PUB-6109 (1993); K.L. Kowalski and C.C. Taylor, *Disoriented Chiral Condensate: A White Paper for the Full Acceptance Detector*, CWRUTH-92-6 (1992) hep-ph/9211282.
- [LFH 80] C.M.G. Lattes, Y. Fujimoto, and S. Hasegawa, *Phys. Rept.* **65** (1980) 151.
- [N 97] T.K. Nayak (for the WA98 Collaboration), VECC-NEX-97005, 1997.
- [BB 96] T.C. Brooks et al. (Minimax Collaboration), hep-ph/9609375, J.D. Bjorken et al., hep-ph/9610379.
- [HSTW 96] Zheng Huang, Ina Sarcevic, Robert Thews, Xin-Nian Wang, *Phys. Rev.* **D54** (1996).
- [GML 60] M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16** (1960) 705.
- [R 97] J. Randrup, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1188.
- [RW 93] K. Rajagopal and F. Wilczek, *Nucl. Phys.* **B404** (1993) 577; K. Rajagopal, in *Quark-Gluon Plasma 2*, edited by R. Hwa (World Scientific, Singapore, 1995).
- [GGP 94] S. Gavin, A. Gocksch, and R.D. Pisarski, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994) 2143.
- [B 83] J.D. Bjorken, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 140.
- [AHW 95] M. Asakawa, Zheng Huang, and Xin-Nian Wang, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3126.

- [BK 94] J.P. Blaizot and A. Krzywicki, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 442.
- [CKMP 95] F. Cooper, Y. Kluger, E. Mottola, and J.P. Paz, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 2377.
- [LDC 96] M.A. Lampert, J.F. Dawson, and F. Cooper, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 2213.
- [GM 94] S. Gavin and B. Müller, *Phys. Lett.* **B329** (1994) 486-492.
- [R 97] J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A616** (1997) 531-554.
- [MCL 98] D. Molnár, L.P. Csernai, and Z. Lázár, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 114018.
- [BG 97] T.S. Biró and C. Greiner, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 3138-3141.
- [GM 97] C. Greiner and B. Müller, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1026.
- [FH 65] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Inc. (1965).
- [R 87] G. Röpke, *Statistische Mechanik für das Nichtgleichgewicht* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1987).
- [D 83] W. Dieterich, *Stochastische Prozesse in der Physik kondensierter Materie* (Vorlesungsskript), Universität Konstanz.
- [HEER] C.V. Heer, *Statistical Mechanics, Kinetic Theory, and Stochastic Processes* (Academic Press).
- [P 92] W.H. Press, et al.,: *Numerical recipes in C: the art of scientific computing* (Cambridge University Press, 1992-2nd edition).
- [HL 84] W. Horsthemke and R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*, Springer-Verlag (1984).
- [VK 81] N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland, (1981).
- [DH 92] Deuffhard, Hohmann, *Numerische Mathematik I* (1992); Deuffhard, Bornemann, *Numerische Mathematik II* (1994).
- [FV 63] R.P. Feynman and F. Vernon, *Ann. Phys. (N.Y.)* **24**, 118 (1963).
- [LR 85] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (1985).

- [LW 87] N.P. Landsman and Ch.G. van Weert, *Phys. Rep.* **145** (1987) 141.
- [CSHY 85] K. Chon, Z. Su, B. Hao, and L. Yu, *Phys. Rep.* **118** (1985) 1.
- [WH 96] En-Ke Wang and U. Heinz, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 899.
- [HS 84] A. Hosoya and M. Sakagami *Phys. Rev.* **D29** (1984) 2228.
- [P 92] R. Parwani, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 4695.
- [J 95] Sangyong Jeon, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 3592.
- [R 98] D. H. Rischke, nucl-th/9806045.

Danksagung

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut und sein Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Bei Dr. Carsten Greiner bedanke ich mich für die interessante Themenstellung sowie seine intensive Betreuung und ständige Diskussionsbereitschaft. Auch für das Korrekturlesen dieser Arbeit gilt ihm mein Dank.

Ich möchte meinem Freund, Frank D. Steffen, danken für seine zuverlässige Korrektur bezüglich der deutschen Grammatik und für seine Formulierungsvorschläge.

Bei Dr. Stefan Leupold bedanke ich mich für seine Diskussionsbereitschaft und viele Hinweise.

Ich danke Alexander Hombach und Klaus Schertler für ihre Hilfe bei meinem Lernen des LaTeX-Programms.

Klaus Schertler, Jochen Geiss und Frank Hoffmann sei für den guten Computerservice am Institut gedankt.

Ich danke den Mitgliedern des Institutes für die stets gute Stimmung.

Bei dem Akademischen Auslandsamt der Justus Liebig Universität Gießen bedanke ich mich für die finanzielle Unterstützung meines Aufbaustudiums.

Abschließend gilt mein Dank meinen Eltern für ihre Unterstützung während meines Studiums.

徐喆

März 1999, Gießen