# Elektrische und magnetische Eigenschaften heißer partonischer Materie

Electric and magnetic properties of hot partonic matter

Master Thesis

vorgelegt von
Thorsten Steinert

September 2013

Betreuer:

Prof. Dr. Dr. Wolfgang Cassing

Institut für Theoretische Physik I
Fachbereich 07 Mathematik und Informatik,
Physik, Geographie
Justus-Liebig-Universität Giessen



# Inhaltsverzeichnis

T	⊏ını	eitung und Motivation	1
2	The	oretische Einführung	3
	2.1	Quantenchromodynamik	3
	2.2	Transporttheorie	4
		2.2.1 Klassische Transporttheorie	5
		2.2.2 Nicht-Relativistische Quanten-Transporttheorie	7
		2.2.3 Relativistische Quanten-Transporttheorie	14
		2.2.4 Testteilchenmethode	18
	2.3	Dynamical-QuasiParticle-Model	20
3	Part	ton-Hadron-String-Dynamics	27
	3.1	Hadronische Freiheitsgrade	27
	3.2	Partonische Freiheitsgrade	29
	3.3	"Unendliche" partonische Materie	30
	3.4	QCD-Phasenübergang	34
4	Elek	ktrische und magnetische Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas	39
	4.1	Elektrische Leitfähigkeit	39
	4.2	Magnetisches Moment	42
		4.2.1 Drehimpuls	43
		4.2.2 Spin	45
		4.2.3 Vorbereitende Simulationen im externen Magnetfeld	47
	4.3	Endliches chemisches Potential	52
5	711s	ammenfassung und Aushlick	57

#### Abstract

We investigate the response of QCD-matter in the quark-gluon plasma phase to constant electromagnetic fields for temperatures 170 MeV < T < 250 MeV and finite quark-chemical potential  $\mu_q < 100$  MeV. The plasma is simulated using the Parton-Hadron-String-Dynamics transport approach, which is based on the Kadanoff-Baym equations for non-equilibrium Green's functions. The equilibrium properties are fixed within the Dynamical-QuasiParticle-Model. We find the spin degrees to be paramagnetic and the angular momentum degrees to be diamagnetic and a critical magnetic field  $B_c$  for which the magnetic contributions cancel each other. In all terrestrial heavy-ion collisions the quark-gluon plasma thus should behave diamagneticly. We find the electromagnetic properties for finite quark-chemical potential to scale like the quark density, i.e.  $\sim \mu_q^2$ .

## 1 Einleitung und Motivation

In hochenergetischen Schwerionenkollisionen wurden Phänomene gefunden, die die Existenz einer flüssigkeitsartigen Phase nahelegen [1, 2, 3, 4]. Dieser neue Zustand der Materie entsteht, wenn die Protonen und Neutronen in den Kollisionen so stark verdichtet werden, dass sich die Nukleonen gegenseitig überlappen und sich die darin gebundenen Quarks und Gluonen quasifrei bewegen können. Man nennt diesen Zustand in Analogie zur Ionisation von Atomen bei hohen Temperaturen ein Quark-Gluon-Plasma (QGP). Es wird gegenwärtig am Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) am Brookhaven National Laboratory auf Long Island und am Large Hadron Collider (LHC) am CERN in Genf in hochrelativistischen Schwerionenkollisionen untersucht. Da die nötigen Bedingungen für ein QGP im Experiment nur für sehr kurze Zeit hergestellt werden können, kann es nur indirekt untersucht werden. Experimentelle Hinweise sind das vermehrte Auftreten von Kaonen und  $\phi$ -Mesonen nach der Kollision [5, 6], die Unterdrückung von hochenergetischen Jets [7], sowie Anomalien im elliptischen Fluss [8]. Auf theoretischer Seite werden Gitter-QCD Simulationen [9, 10], Transportansätze [11] und hydrodynamische Modelle [12] eingesetzt.

Das QGP kann nicht nur bei sehr hohen Temperaturen, sondern auch bei sehr hoher Baryonendichte erzeugt werden. Es gibt Überlegungen, wonach im Inneren von Neutronensternen unter bestimmten Bedingungen ebenfalls ein QGP vorkommen kann [13]. Während es für seine Entstehung bei hohen Temperaturen viele Hinweise gibt, ist der Übergang bei hoher baryonischer Dichte weitestgehend unerforscht. Diese Lücke soll mit dem neuen Beschleunigerzentrum FAIR an der GSI in Darmstadt geschlossen werden.

Gitter-QCD-Rechnungen zum QGP zeigen thermodynamische Eigenschaften, die sehr nahe am Stefan-Boltzmann-Limes für ein nicht wechselwirkendes, ideales masseloses Gas liegen [14]. Man dachte daher zunächst, dass das QGP aus einem schwach wechselwirkenden Gas aus Quarks und Gluonen besteht. Die experimentellen Daten weisen jedoch auf eine nahezu perfekte Flüssigkeit hin. Das Plasma scheint wesentlich stärker zu wechselwirken als ein vergleichbares System aus hadronischen Teilchen und erst für sehr viel höhere Temperaturen in ein ideales Gas überzugehen. Man bezeichent das stark wechselwirkende QGP auch als strong-QGP (sQGP) [15].

Eine weitere offene Frage ist die Natur des Phasenübergangs zwischen hadronischer und partonischer Materie. Gitter-QCD-Daten sagen für hohe Temperaturen einen Crossover voraus. Das heißt beide Phasen gehen, anders als bei einem Phasenübergang 1. oder 2. Ordnung, schnell aber stetig ineinander über. Leider sind bei endlicher Baryonendichte bisher keine Gitter-QCD-Rechnungen möglich. Man muss in diesen Bereichen andere Methoden, wie Dyson-Schwinger-Gleichungen [16] oder Modelle wie das NJL-Modell [13] anwenden. Diese sagen bei T=0 und hohem chemischen Potential  $\mu_q$  einen Phasenübergang 1. Ordnung voraus. Wenn dies tatsächlich zutrifft, muss es einen kritischen

Endpunkt geben, an dem beide Übergänge ineinander übergehen und der Phasenübergang von 2. Ordnung ist. Der Nachweis des kritischen Endpunkts ist eines der Hauptziele des FAIR-Experiments CBM [17].

In dieser Arbeit wollen wir die Response des QGP auf elektrische und magnetische Felder untersuchen, die zwangsläufig in Schwerionenkollisionen entstehen [18]. Diese Fragestellung ist auch von aktuellem Interesse in der Gitter-QCD [19]. Wir werden dazu Quarks und Gluonen in einer Box mit periodischen Randbedingunen simulieren, auf die ein konstantes elektromagnetisches Feld wirkt. Wir verwenden dazu das Parton-Hadron-String-Dynamics Modell (PHSD). Das Modell wurde ursprünglich zur Untersuchung von Schwerionenkollisionen entwickelt. Es ist jedoch auch in der Lage "unendlich" ausgedehnte hadronische und partonische Materie zu simulieren und wurde schon dazu verwendet Transportkoeffizienten, wie die Viskosität und die elektrische Leitfähigkeit partonischer Materie, zu bestimmen [20].

Das PHSD Modell basiert auf der Methode der Nichtgleichgewichts-Greensfunktionen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich auch stark wechselwirkende Systeme weit abseits des thermodynamischen Gleichgewichts zu simulieren. Sie haben weiterhin den Vorteil, dass sie nicht wie Gitter-QCD-Rechnungen auf verschwindendes Quark-chemisches Potential beschränkt sind und damit einen Zugang zum gesammten QCD-Phasendiagramm liefern, sowie eine dynamische Simulation des Phasenübergangs ermöglichen.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Zunächst beleuchten wir einige Aspekte der Quantenchromodynamik (QCD). Danach geben wir einen kurzen Überblick über klassische Transporttheorien, bevor wir die Methode der Nichtgleichgewichts-Greensfunktionen vorstellen. Dazu werden wir den Schwinger-Keldysh-Formalismus und die Kadanoff-Baym-Gleichungen einführen und anschließend eine vollständig relativistische Transporttheorie vorstellen, mit deren Hilfe wir das QGP simulieren können. Anschließend besprechen wir das Dynamical-QuasiParticle-Model (DQPM), welches den Gleichgewichtszustand unseres Systems beschreibt. Im thermodynamischen Gleichgewicht muss unser Transportmodell dem DQPM entsprechen. Danach gehen wir genauer auf das verwendete Modell, das Parton-Hadron-String-Dynamics Modell (PHSD) ein. Im Abschnitt 3.3 präsentieren wir schließlich erste vorbereitende Simulationen des QGP im thermodynamischen Gleichgewicht. Danach gehen wir kurz auf die Probleme ein, die es zu lösen gilt, bevor Simulationen am QCD-Phasenübergang durchgeführen werden können. Schließlich kommen wir zum Hauptaspekt dieser Arbeit und berechnen die elektrische Leitfähigkeit und das magnetische Moment des QGP. Im finalen Abschnitt werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und weitere Projekte aufgeführt, die an diese Arbeit anknüpfen. Wir werden in der gesamten Arbeit natürliche Einheiten ( $\hbar = c = 1$ ) verwenden.

## 2 Theoretische Einführung

### 2.1 Quantenchromodynamik

Alle fundamentallen Wechselwirkungen außer der Gravitation werden heutzutage als Quantenfeldtheorie (QFT) formuliert. Da wir an dieser Stelle nur einen kurzen Überblick über die QFT der starken Wechselwirkung geben wollen, verweisen wir für eine ausführliche Einführung auf Ref. [22].

Die grundlegende Theorie zur Beschreibung des Quark-Gluon-Plasmas ist die Quantenchromodynamik (QCD). Sie beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks durch den Austausch von Gluonen. Quarks sind Spin-1/2-Teilchen, die durch die Dirac-Gleichung beschrieben werden. Es gibt sechs unterschiedliche Quarkflavor, die sich in Masse und elektrischer Ladung unterscheiden. Anstelle der elektrischen Ladung der Quantenelek-

	up	down	strange	$\operatorname{charm}$	bottom	top
Symbol	u	d	S	c	b	t
Ladung	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{2}{3}e$
Masse	2.3 MeV	$4.8~{ m MeV}$	$95~\mathrm{MeV}$	$1.275~\mathrm{GeV}$	4.18  GeV	$173.07~\mathrm{GeV}$

Tabelle 2.1: Eigenschaften der unterschiedlichen Quarkflavor, Stand 15. Januar 2013 particle data group [22].

trodynamik (QED) tritt in der QCD die Farbladung. Sie wirkt auf alle Partonen gleich stark. Es gibt drei unterschiedliche Ladungszustände, die "rot", "blau" und "grün" genannt werden. Die drei Ladungszustände ergeben in der Summe einen "weißen", also bezüglich der Farbladung ungeladenen, Zustand. Da es drei Ladungszustände gibt, kann die QCD nicht durch eine abelsche Eichfeldtheorie beschrieben werden. Dies hat zur Folge, dass die Gluonen, anders als die Photonen, ebenfalls eine Ladung tragen und untereinander wechselwirken. Gluonen sind masselos und tragen jeweils eine Farbe und eine Antifarbe. Zwar gibt es neun mögliche Kombinationen, aus gruppentheoretischen Gründen ( $[3] \otimes [3] = [8] \oplus [1]$ ) tragen aber nur die Freiheitsgrade des Oktetts bei. Zwei Kombinationen des Oktetts sind farbneutral. Die Gluonen werden durch eine nichtabelsche Yang-Mills-Theorie beschrieben. Die Lagrangedichte der QCD besteht aus der Dirac- und der Yang-Mills-Lagrangedichte sowie einem Wechselwirkungsterm:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi} \left( i \gamma^{\mu} \left( \partial_{\mu} - i g T^a A^a_{\mu} \right) - \hat{m}_0 \right) \Psi - \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Sie ist vollständig kovariant, invariant unter lokalen Phasentransformationen und renormalisierbar. Der gluonische Feldstärketensor ist durch

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.2}$$

gegeben. Die  $f^{abc}$  sind die Strukturkonstanten der SU(3)-Gruppe. Sie verschwinden im Fall einer abelschen Theorie und erzeugen die Wechselwirkung der Gluonen untereinander. Die QCD enthält drei elementare Vertices, einen Quark-Gluon-Vertex, einen 3-Gluon-Vertex und einen 4-Gluon-Vertex.

Die Kopplungskonstanten in Quantenfeldtheorien sind keine Konstanten, sondern hängen von der verwendeten Energieskala ab. Man nennt dieses Phänomen "laufende Kopplung". In der QCD ist die Kopplung auf kleinen Energieskalen sehr stark g>1 und nimmt für größere Energien logarithmisch ab [23, 24]. Daher kann Störungstheorie (pQCD) nur bei sehr hochenergetischen Prozessen angewendet werden. Da das Quark-Gluon-Plasma trotz hoher Temperaturen immer noch stark wechselwirkt, müssen wir es nichtpertubativ beschreiben. Erst für extrem hohe Temperaturen verhalten sich die Quarks asymptotisch frei und störungstheoretische Methoden können angewendet werden.

Bei niedrigen Energien sind die Quarks/Antiquarks in Hadronen gebunden. Es gibt Baryonen, die aus drei Quarks bestehen, und Mesonen, die aus einem Quark-Antiquark-Paar aufgebaut sind. Hadronen sind immer farblos. Aus diesem Grund spielt die Farbladung in der makroskopischen Welt keine Rolle. Theoretisch könnte es auch Hadronen geben, die komplett (Gluebälle) oder teilweise (Hybride) aus Gluonen oder aus mehr als drei Quarks (Tetraquarks, Pentaquarks) aufgebaut sind. Es konnte bisher noch keines dieser exotischen Hadronen überzeugend experimentell nachgewiesen werden.

Anstelle der vollen QCD werden im Niederenergiebereich oft effektive Modelle wie chirale Störungstheorie oder das Nambu-Jona-Lasinio Modell angewendet. Ein anderer Ansatz sind Gitter-QCD-Simulationen. Mit ihnen kann die volle QCD bei endlicher Temperatur berechnet werden. Leider sind die Rechnungen sehr zeitaufwändig und können nur bei sehr geringem chemischen Potential durchgeführt werden. In solchen Gitterrechnungen wurde das Potential für ein Quark-Antiquark-Paar berechnet. Bei kleinen Abständen verhält es sich wie ein Coulombpotential. Bei großen Energien bildet sich ein Farbstring zwischen den Quarks und das Potential steigt linear mit dem Abstand an. Ist genügend Energie in dem String gespeichert, bricht er und es entsteht ein zusätzliches Quark-Antiquark-Paar. Aus diesem Grund können Quarks niemals einzeln vorkommen. Erst wenn die Energiedichte im Medium einen kritischen Wert überschreitet, lösen sich die Hadronen auf und die Quarks können sich über größere Distanzen bewegen. Es bildet sich ein QGP. Dies kann sowohl durch hohe Temperaturen als auch durch hohe Baryonendichten erreicht werden.

## 2.2 Transporttheorie

Das QGP ist ein stark wechselwirkendes Vielteilchensystem aus relativisitischen quantenmechanischen Teilchen. Wir werden zur Beschreibung einen Transportansatz auf Basis der Nichtgleichgewichts-Greensfunktionen verwenden. Transporttheorien finden in vielen unterschiedlichen Bereichen Anwendung. Sie werden in Astronomie und Kosmologie, in der Festkörperphysik und in Schwerionensimulationen verwendet. Sie haben den Vorteil, dass sie im Gegensatz zur Thermodynamik auch stark wechselwirkede Systeme weit ab vom thermodynamischen Gleichgewicht beschreiben können. Zunächst werden wir die grundlegenden Ideen anhand einer klassischen Theorie erläutern. Anschließend stellen wir eine quantenmechanische Theorie vor und verallgemeinern sie auf eine vollständig relativistische Quantentransporttheorie.

#### 2.2.1 Klassische Transporttheorie

Die entscheidende Größe in klassischen Transporttheorien ist die Einteilchen-Verteilungsfunktion oder Einteilchen-Phasenraumdichte  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Sie steht für die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt t am Ort  $\mathbf{r}$  ein Teilchen mit dem Impuls  $\mathbf{p}$  zu finden. Sie ist auf die Teilchenzahl des Systems normiert:

$$N = \int d^3r \int d^3p \ f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \tag{2.3}$$

Die Aufgabe der Transporttheorie ist es die zeitliche Entwicklung der Phasenraumdichte zu berechnen. Die Zeitentwicklung wird durch die Mastergleichung [25] vorgegeben:

$$\frac{df(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{dt} = \int d^3p' \left( P_{p' \to p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}', t) - P_{p \to p'} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right). \tag{2.4}$$

Die P's stehen für die Wahrscheinlichkeit, dass die Phasenraumverteilung in einen anderen Impulszustand übergeht. Die linke Seite der Mastergleichung besteht aus dem totalen zeitlichen Differential der Phasenraumverteilung:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \ \nabla_{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \ \nabla_{\mathbf{p}}\right) f\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t\right). \tag{2.5}$$

Da wir klassische Teilchen beschreiben, können wir die hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \qquad \dot{\mathbf{p}} = -\nabla_{\mathbf{r}}U(\mathbf{r})$$
 (2.6)

verwenden. Vernachlässigen wir die Übergänge in andere Zustände (rechte Seite von (2.4)), erhalten wir die Vlasov-Gleichung. Zusammen mit einem selbstkonsistent berechneten Potential  $U(\mathbf{r})$  kann sie auf Systeme mit langreichweitigen Wechselwirkungen angewendet werden,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \, \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{p}}\right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \qquad U(\mathbf{r}) = \int d^3 p d^3 r' \, V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}', \mathbf{p}, t). \tag{2.7}$$

Die Transportgleichung (2.7) beschreibt die zeitliche Änderung der Phasenraumverteilung aufgrund der Bewegung der Teilchen im mittleren Einteilchen-Potential  $U(\mathbf{r})$ . Als nächstes betrachten wir den rechten Teil der Mastergleichung (2.4). Die Übergänge werden durch Stöße der Teilchen untereinander hervorgerufen. Wir beschränken uns

dabei auf dünne Systeme, sodass wir nur 2-Teilchenkollisionen berücksichtigen müssen. Weiter betrachten wir der Einfachheit halber nur elastische Stöße. Es gibt dann zwei mögliche Prozesse. Das Teilchen kann entweder in den Zustand  $\mathbf{p}$  hinein oder aus ihm hinaus gestreut werden. Wir bezeichnen mit  $I_{Coll}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  die Wahrscheinlichkeit für die Stoßprozesse pro Zeitschritt. Die Transportgleichung mit Stößen lautet dann:

$$\frac{df}{dt} = I_{Coll}. (2.8)$$

 $I_{Coll}$  ist zum einen proportional zur Wahrscheinlichkeit, dass sich am Ort  ${\bf r}$  zwei Teilchen befinden, und zum anderen proportional zur Wahrscheinlichkeit, dass diese beiden Teilchen einen Stoß durchführen. Der Kollisionsterm ist in der betrachteten Ordnung durch

$$I_{Coll}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = g \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \int d\Omega \, \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \, v_{12} \left( f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_3, t) \, f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_4, t) - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, t) \, f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2, t) \right)$$

$$(2.9)$$

gegeben. Dabei entspricht der erste Term Stoßprozessen der Art  $3+4\to 1+2$  und der zweite Term Stößen der Art  $1+2\to 3+4$ . Sie werden als "Gain"- und "Loss"-Term bezeichnet.  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Stöße,  $v_{12}$  die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen und g der Entartungsgrad der Teilchen. In allen Stößen muss die Energie-Impuls-Erhaltung erfüllt sein. Die Kombination der Vlasov-Gleichung 2.7 mit diesem Stoßterm wird als Boltzmann-Ühling-Uhlenbeck-Gleichung (BUU-Gleichung) bezeichnet. Man kann diese Gleichung leicht auf quantenmechanische Teilchen erweitern. Dazu muss man im Kollisionsterm Fermi-Blockingfaktoren  $(1-f(\mathbf{r},\mathbf{p},t))$  für Fermionen bzw. Bose-Enhancementfaktoren  $(1+f(\mathbf{r},\mathbf{p},t))$  für Bosonen für die Endzustände der Kollisionen einfügen. Diese semiklassische Gleichung wird als Vlasov-Ühling-Uhlenbeck-Gleichung (VUU-Gleichung) bezeichnet.

Mit Hilfe der Transportgleichungen kann man, ausgehend von einer bekannten Eingangsverteilung, die zeitliche Entwicklung der Phasenraumdichte berechnen. Eine sehr intuitive Lösung der Transportgleichung ist die Testteilchenmethode. Hierzu wird die Phasenraumdichte durch die Distribution

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N \cdot n} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))$$
(2.10)

approximiert. Jedes Summenglied steht für ein simuliertes Testteilchen. Die Distribution ist eine Lösung der Transportgleichung, wenn die Testteilchen die klassischen Bewegungsgleichungen (2.6) erfüllen. Um den Stoßterm zu berücksichtigen, führen die Teilchen, sobald sie einen Minimalabstand unterschritten haben, einen Stoß aus. Die Kinematik nach dem Stoß wird durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  vorgegeben. Der Minimalabstand hängt vom totalen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  ab und ist durch  $R_{min} = \sqrt{\sigma/\pi}$  gegeben. Die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes ist damit automatisch proportional zur Wahrscheinlichkeit zwei Teilchen mit passendem Ort und Impuls zu finden. Mit dieser

Methode können die Transportgleichungen sehr einfach gelöst werden.

Die Erwartungswerte von Observablen werden durch Integrale über die Verteilungsfunktion berechnet. Die Verteilung der Teilchen im Orts- oder Impulsraum ist durch

$$f(\mathbf{r},t) = \int d^3p \ f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$$

$$f(\mathbf{p},t) = \int d^3r \ f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$$
(2.11)

gegeben. Den Erwartungswert einer allgemeinen Einteilchen-Observablen erhält man aus

$$\langle A(t) \rangle = \int d^3p d^3r \ A(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t).$$
 (2.12)

Setzen wir die Phasenraumdichte in der Testteilchendarstellung ein, so berechnen sich die Erwartungswerte über die Formel:

$$\langle A(t) \rangle = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N \cdot n} A(\mathbf{r}_i(t), \mathbf{p}_i(t), t).$$
 (2.13)

Man muss also lediglich die gewünschte Observable für jedes Testteilchen ausrechnen und aufaddieren, anstatt ein kompliziertes Mehrfachintegral zu lösen.

Damit beenden wir die kurze Einführung in klassische Transportmodelle und gehen zu einer quantenmechanischen Beschreibung über. Unser Ziel besteht in einer Testteilchenmethode für relativistische quantenmechanische Teilchen bzw. Felder.

### 2.2.2 Nicht-Relativistische Quanten-Transporttheorie

Nachdem wir uns im vorherigen Abschnitt mit einer klassischen Theorie beschäftigt haben, wollen wir nun zu einer quantenmechanischen Theorie übergehen. Zuvor wiederholen wir kurz einige grundlegende Prinzipien im Umgang mit quantenmechanischen Systemen.

Die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Zustands ist durch den Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}(t,t')$  gegeben:

$$\hat{U}(t,t') = \hat{T}_c \left( e^{-i \int_{t'}^t d\bar{t} \ \hat{H}(\bar{t})} \right). \tag{2.14}$$

Mit ihm kann man einen Zustand von einem Anfangszeitpunkt zu einem beliebigen späteren Zeitpunkt entwickeln:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t')|\psi(t')\rangle.$$
 (2.15)

Wendet man den Operator erneut an, erhält man den Zustand zu einer noch späteren Zeit. Der Zeitentwicklungsoperator erfüllt die Relation  $\hat{U}(t,t') = \hat{U}(t,\bar{t})\hat{U}(\bar{t},t')$ .

Diese Darstellung der Quantenmechanik wird "Schrödingerbild" genannt. Die zeitliche

Information wird von den Zuständen getragen, die Operatoren sind zeitunabhängig. Eine alternative Formulierung ist das "Heisenbergbild". Hier wird die Zeitabhängigkeit auf die Operatoren transformiert, während die Zustände zeitlich konstant bleiben. Die Operatoren im "Heisenbergbild" haben die Form

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^{\dagger}(t, t_0) \hat{A}_S \hat{U}(t, t_0), \tag{2.16}$$

wobei  $\hat{A}_S$  für den entsprechenden Operator im "Schrödingerbild" steht. Wie man leicht an der Berechnung des Erwartungswertes des Operators  $\hat{A}$  sehen kann, sind beide Darstellungen äquivalent:

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A}_{S} | \psi(t) \rangle$$

$$= \langle \psi(t_{0}) | \hat{U}^{\dagger}(t, t_{0}) \hat{A}_{S} \hat{U}(t, t_{0}) | \psi(t_{0}) \rangle$$

$$= \langle \psi(t_{0}) | \hat{A}_{H}(t) | \psi(t_{0}) \rangle.$$
(2.17)

Die Bewegungsgleichung für einen beliebigen Operator im Heisenbergbild lautet:

$$i\dot{\hat{A}}_H = \left[\hat{A}_H, \hat{H}\right]. \tag{2.18}$$

Bei der Behandlung quantenmechanischer Vielteilchensysteme ist es üblich in der Teilchenzahldarstellung zu arbeiten. In dieser Darstellung werden anstelle der aus der Schrödingergleichung bekannten Wellenfunktionen abstrakte Zustände konstanter Teilchenzahl verwendet. Der Erzeugungsopertor  $a_k^{\dagger}$  fügt ein Teilchen in das System ein, der Vernichtungsoperator  $a_k$  entfernt es wieder aus dem System. Falls dies nicht möglich ist, verschwindet der Zustand. Von besonderem Interesse ist der Operator  $a_k^{\dagger}a_k$ . Er überprüft, wie oft der Zustand mit dem Impuls k im System besetzt ist. Ein n-Teilchenoperator in der Teilchenzahldarstellung hat die Form

$$\tilde{A} = \frac{1}{n!} \sum \left\langle \hat{A} \right\rangle_{1 \cdots n n' \cdots 1'} a_1^{\dagger} \cdots a_n^{\dagger} a_{n'} \cdots a_{1'}, \qquad (2.19)$$

wobei die Summe über alle möglichen Zustände des Systems läuft.  $\left\langle \hat{A} \right\rangle_{1\cdots nn'\cdots 1'}$  ist das Matrixelement des Operators  $\hat{A}$  bezüglich der Endzustände  $1\cdots n$  und der Anfangszustände  $n'\cdots 1'$ . Operatoren in der Teilchenzahldarstellung haben eine sehr anschauliche Interpretation. Mittels der Vernichter wird überprüft, wie oft ein möglicher Anfangszustand im System vorkommt, während die Erzeuger überprüfen, wie oft ein Endzustand vom System eingenomen werden kann. Anschließend werden die Erwartungswerte der möglichen Zustände aufsummiert. Auf diese Art können sehr einfach Prozesse mit wechselnder Teilchenzahl beschrieben werden. Operatoren, die denselben Anfangs- und Endzustand haben, werden als diagonal bezeichnet. Beispiele sind der Teilchenzahloperator oder der Operator der kinetischen Energie.

Anstelle der üblichen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren werden wir die Feldoperatoren  $\Psi^{\dagger}(\mathbf{r},t)$  und  $\Psi(\mathbf{r},t)$  verwenden, die am Ort  $\mathbf{r}$  zum Zeitpunkt t ein Teilchen in das System einfügen bzw. entfernen. Bei der Berechnung von Erwartungswerten wird

die Summation über alle Zustände durch ein Integral über die Ortskoordinate ersetzt. Die Feldoperatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen:

$$\Psi(\mathbf{r},t)\Psi(\mathbf{r}',t) \pm \Psi(\mathbf{r}',t)\Psi(\mathbf{r},t) = 0, \tag{2.20}$$

$$\Psi^{\dagger}(\mathbf{r},t)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}',t) \pm \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}',t)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r},t) = 0, \tag{2.21}$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t) \pm \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t)\Psi(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{2.22}$$

Auf diese Weise ist automatisch die korrekte Quantenstatistik für Fermionen (+) und Bosonen (-) erfüllt. Weiter folgt daraus automatisch das Pauliprinzip  $\Psi^2 = \Psi^{\dagger \ 2} = 0$  für Fermionen, das besagt, dass ein Zustand von maximal einem Fermion besetzt sein kann.

Im klassischen System haben wir Gleichungen zur Bestimmung der zeitlichen Entwicklung der Einteilchen-Phasenraumdichte  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  bestimmt. Im Fall der quantenmechanischen Beschreibung sind die entscheidenden Größen die Nichtgleichgewichts-Greensfunktionen. Die 1-Teilchen-Greensfunktion ist der zeitgeordnete Erwartungswert des Operators  $\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t')$ :

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{i} \left\langle \hat{T}_c(\Psi(\mathbf{r}, t)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t')) \right\rangle. \tag{2.23}$$

 $\hat{T}_c$  ist der Zeitordnungsoperator, der die Operatoren bezüglich ihres Zeitarguments anordnet:

$$\hat{T}_c(A(t)B(t')) = \Theta(t - t')A(t)B(t') \mp \Theta(t' - t)B(t')A(t). \tag{2.24}$$

Für t > t' beschreibt die Funktion den Erwartungswert der Propagation eines Teilchens, das zum Zeitpunkt t' am Ort  $\mathbf{r}'$  in das System gebracht und zum Zeitpunkt t am Ort  $\mathbf{r}$  wieder entfernt wird. Im Fall t' > t wird die umgekehrte Propagation eines Antiteilchens beschrieben. Für gleiche Zeiten entspricht die Greensfunktion der Verteilungsfunktion  $iG(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ . Betrachtet man noch gleiche Orte, erhält man die Teilchendichte  $n(\mathbf{r}, t)$ .

Analog zu den 1-Teilchen-Greensfunktionen gibt es noch höhere Greensfunktionen. Die n-Teilchen-Greensfunktion ist durch

$$G_n(1\cdots n, 1'\cdots n') = \left(\frac{1}{i}\right)^n \left\langle \hat{T}_c(\Psi(1)\cdots\Psi(n)\Psi^{\dagger}(n')\cdots\Psi^{\dagger}(1')) \right\rangle$$
 (2.25)

definiert, mit der Notation  $1 = (\mathbf{r}_1, t_1)$ . Sie beschreibt die Propagation aller dieser Teilchen inklusive aller Wechselwirkungen. Wir beschränken uns zunächst auf die zeitliche Entwicklung der 1-Teilchen-Greensfunktionen. Da es sich bei ihnen um Operatoren handelt, müssen wir im Heisenbergbild arbeiten.

Wir widmen uns zunächst noch einmal genauer der Berechnung der Erwartungswerte. In der statistischen Physik wird ein System über eine Dichtematrix  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i> <\psi_i|$  beschrieben. Dabei steht  $p_i$  für die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand  $|\psi_i>$  befindet. Der Erwartungswert eines Operators für ein solches System ist die Spur des Operators über die Dichtematrix. Wir betrachten nun ein System, welches ab dem Zeitpunkt  $t_0=0$  durch eine externe Quelle gestört wird. Für t<0 ist das

System im thermodynamischen Gleichgewicht und alle Erwartungswerte sind zeitlich konstant. In diesem Fall ist die Dichtematrix für ein großkanonisches Ensemble durch  $\hat{\rho}_0 = \exp(-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N}))/\text{Tr}\{\cdots\}$  gegeben. Die Spur sorgt für die korrekte Normierung. Man kann diesen Operator durch einen Zeitentwicklungsoperator mit komplexem Zeitargument ausdrücken  $\hat{\rho}_0 = \exp(-\beta(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})) = \exp(\beta\mu\hat{N})\hat{U}(-i\beta, 0)$ .

Schalten wir nun die Störung ein, können wir das System nicht mehr durch den einfachen Gleichgewichtsansatz beschreiben. Betrachten wir die Situation aber im Heisenbergbild, bleibt die Dichtematrix zeitlich konstant und die Störung wirkt nur auf den Operator. Der zeitabhängige Erwartungswert des Operators ist dann durch

$$A(t) = \langle \hat{A}(t) \rangle = \text{Tr}\{\rho_0 \hat{A}(t)\} = \frac{\text{Tr}\{\exp(\beta \mu \hat{N})\hat{U}(-i\beta, 0)\hat{U}(0, t)\hat{A}\hat{U}(t, 0)\}}{\text{Tr}\{\exp(\beta \mu \hat{N})\hat{U}(-i\beta, 0)\}}$$
(2.26)

gegeben. Man kann diesen Ausdruck so interpretieren, dass der Operator auf einer speziellen Zeitkontur liegt, die chronologisch von  $t_0 = 0$  bis  $\infty$ , dann antichronologisch von  $\infty$  zurück bis  $t_0 = 0$  entlang der reellen Zeitachse verläuft und anschliesend in die komplexe Zeitebene übergeht. Man nennt diese Kontur die **Keldysh-Kontur** [26] (siehe Abbildung 2.1). Wenn wir nun z als eine Zeit auf der Kontur definieren, können wir den zeitabhängigen Erwartungswert als Pfadintegral entlang der Kontur umschreiben:

$$A(z) = \frac{\operatorname{Tr}\{\exp(\beta\mu\hat{N})\hat{T}_c\left(e^{-i\int_{\gamma}d\bar{z}\ \hat{H}(\bar{z})}\hat{A}(z)\right)\}}{\operatorname{Tr}\{\exp(\beta\mu\hat{N})\hat{T}_c\left(e^{-i\int_{\gamma}d\bar{z}\ \hat{H}(\bar{z})}\right)\}}.$$
(2.27)

Dabei ist zu beachten, dass  $\hat{A}(z)$  nicht zeitabhängig ist, sondern nur den Zeitpunkt festlegt, zu dem der Erwartungswert gebildet wird. Für den Fall, dass z auf dem imaginären Pfad liegt, liefert der reelle Pfad keinen Beitrag und der Erwartungswert entspricht dem zeitunabhängigen thermischen Erwartungswert. Eine gute Einführung in den Keldysh-Formalismus findet sich in Ref. [28].

Die Einführung der Keldysh-Kontur hat bedeutende Konsequenzen für die Greensfunktionen. Da der antichronologische Ast der Kontur zeitlich immer später als der chronologische Ast liegt, erhalten wir, abhängig von den Positionen der Zeitargumente auf der Kontur, vier unterschiedliche Greensfunktionen. Liegen beide Zeiten auf demselben Ast, muss man die Zeitordnung explizit durchführen. Da auf dem antichronologischen Ast der Weg von  $\infty$  bis 0 verläuft, müssen die Argumente hier antichronologisch geordnet werden. Liegen die Zeiten auf unterschiedlichen Ästen entfällt der Zeitordnungsoperator:

$$iG^{c}(x,y) = iG^{++}(x,y) = \left\langle \hat{T}_{c} \left( \Psi(x) \Psi^{\dagger}(y) \right) \right\rangle$$
 (2.28)

$$iG^{>}(x,y) = iG^{-+}(x,y) = \langle \Psi(x)\Psi^{\dagger}(y)\rangle$$
 (2.29)

$$iG^{<}(x,y) = iG^{+-}(x,y) = \mp \langle \Psi^{\dagger}(y)\Psi(x) \rangle$$
 (2.30)

$$iG^{a}(x,y) = iG^{--}(x,y) = \left\langle \hat{T}_{a} \left( \Psi(x) \Psi^{\dagger}(y) \right) \right\rangle. \tag{2.31}$$

Von besonderem Interesse sind die beiden Korrelationsfunktionen mit Zeitargumenten auf unterschiedlichen Ästen  $G^{\lessgtr}$ . Sie beschreiben explizit die Propagation von Teilchen,

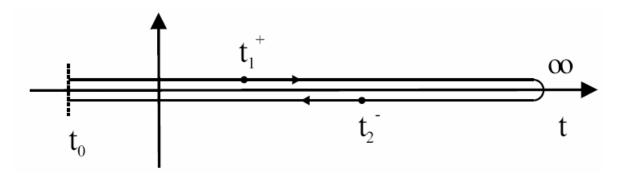


Abbildung 2.1: Die Zeitkontur des Keldysh-Formalismus. Die Zeit  $t_1$  liegt auf dem chronologischen (+), die Zeit  $t_2$  auf dem antichronologischem (-) Ast. Die Abbildung wurde aus Ref. [27] entnommen.

bzw. Antiteilchen sowie deren Eigenschaften. Da wir in diesem Abschnitt noch an den grundlegenden Konzepten und nicht an der Anwendung interesiert sind, verzichten wir im folgenden auf eine Unterscheidung der vier Funktionen und verwenden stattdessen die allgemeine Definition:

$$G(x,y) = \frac{1}{i} \left\langle T^P \left( \Psi(x) \Psi^{\dagger}(y) \right) \right\rangle = \Theta^P(x_0 - y_0) G^{>}(x,y) + \Theta^P(y_0 - x_0) G^{<}(x,y). \quad (2.32)$$

Sie unterscheidet sich von der ursprünglichen Definition, da die Stufenfunktion  $\Theta^P$  auch die Position der Zeiten auf der Keldysh-Kontur berücksichtigt.

Betrachten wir nun ein System mit einem externen Potential  $V(\mathbf{r})$  und einer 2-Teilchen-Wechselwirkung  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Der Hamiltonoperator für ein solches System in Teilchenzahldarstellung lautet (nicht-relativistisch):

$$\hat{H}(t) = \int d\mathbf{r} \ \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\nabla_{\mathbf{r}}^{2}}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \ \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t) W(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}', t) \Psi(\mathbf{r}, t).$$
(2.33)

Wir berechnen nun die Zeitentwicklung des Vernichtungsoperators  $\Psi$  für diesen Hamiltonoperator. Unter Ausnutzung der Kommutatorrelationen (2.20)-(2.22) erhalten wir:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m} + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r},t) + \int d\mathbf{r}_2 \ W(\mathbf{r},\mathbf{r}_2)\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}_2,t)\Psi(\mathbf{r}_2,t)\Psi(\mathbf{r},t). \quad (2.34)$$

Um eine Bewegungsgleichung für die Greensfunktionen zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichung von links mit dem Erzeugungsopertor  $\Psi^{\dagger}(\mathbf{r}',t')$ , wenden den Zeitordnungsoperator  $\hat{T}_c$  an und mitteln die Gleichung über eine beliebige, aber zeitlich konstante

Dichtematrix. Zusätzlich nutzen wir noch die Relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T}_{c} \left( \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \Theta(t - t') \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \mp \Theta(t' - t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \Psi(\mathbf{r}, t) \right)$$

$$= \delta(t - t')_{C} \left( \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \right) \pm \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \Psi(\mathbf{r}, t) + \hat{T}_{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \right)$$

$$= \delta_{C}(t - t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \hat{T}_{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^{\dagger}(\mathbf{r}', t') \right)$$
(2.35)

und erhalten die Bewegungsgleichung:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{\nabla}_{\mathbf{r}}^{2}}{2m} - V(\mathbf{r})\right)G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta_{C}(t - t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 
+ \int d\mathbf{r}_{2} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2})G_{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2}, t, t_{2}; \mathbf{r}', \mathbf{r}_{2}, t', t_{2}).$$
(2.36)

Im Wechselwirkungsintegral taucht die höhere Greensfunktion  $G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, t, t_2; \mathbf{r}', \mathbf{r}_2, t', t_2)$  auf, die der zeitgeordnete Erwartungswert von vier Feldoperatoren ist. Die zeitliche Delta-Distribution ist auf der Keldysh-Kontur defniert. Sie verschwindet wenn die Zeiten auf unterschiedlichen Ästen liegen. Liegen beide Zeiten auf dem antichronologischen Ast, muss die Delta-Distribution zusätzlich mit einem Faktor -1 multipliziert werden, damit die Relation  $\int_C f(x) \delta_C(x - x_0) = f(x_0)$  erfüllt ist.

Um Gleichung (2.36) lösen zu können, müssen wir eine Bewegungsgleichung für die höhere Greensfunktion aufstellen. In dieser würde jedoch zwangsläufig wieder eine noch höhere Greensfunktion vorkommen [29], sodass man ein unendlich großes Gleichungssystem erhält. Um dennoch Rechnungen durchführen zu können, führen wir die Selbstenergie  $\Sigma(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')$  ein:

$$\int d\mathbf{r}_2 W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, t, t_2; \mathbf{r}', \mathbf{r}_2, t', t_2) = \int d\mathbf{r}_2 dt_2 \Sigma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_2, t_2) G(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t'). \quad (2.37)$$

Die Effekte der 2-Teilchenwechselwirkung (in beliebiger Ordnung) werden so auf die Selbstenergie  $\Sigma$  übertragen. Ersetzen wir die höhere Greensfunktion durch die Selbstenergie nach (2.37), so erhalten wir die Bewegungsgleichung für die Greensfunktion, die **Kadanoff-Baym-Gleichung** [30]:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}}^{2}}{2m} - V(\mathbf{r})\right)G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta(t - t')C\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 
+ \int d\mathbf{r}_{2}dt_{2} \ \Sigma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{2}, t_{2})G(\mathbf{r}_{2}, t_{2}; \mathbf{r}', t').$$
(2.38)

Wiederholen wir die gesamte Herleitung für den Erzeugungsoperator  $\Psi^{\dagger}$ , erhalten wir die adjungierte Kadanoff-Baym-Gleichung:

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\nabla_{\mathbf{r}'}^2}{2m} - V(\mathbf{r}')\right) G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \delta(t - t')_C \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') 
+ \int d\mathbf{r}_2 dt_2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_2, t_2) \Sigma(\mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}', t').$$
(2.39)

Die Schwierigkeit besteht nun in der Bestimmung der Selbstenergie. Sobald wir jedoch für ein physikalisches System die "passende" Selbstenergie (in geeigneter Ordnung) gefunden habe, können wir mit den beiden Kadanoff-Baym-Gleichungen die Zeitentwicklung der Greensfunktionen berechnen.

Eine alternative Strategie besteht in der Approximation der höheren Greensfunktion durch Produkte von 1-Teilchen-Greensfunktionen. Wir beenden die Diskussion nichtrelativistischer Vielteilchensysteme indem wir einige gängige Approximationen für die höhere Greensfunktion vorstellen. Zu diesem Zweck führen wir die Notation  $1 = (\mathbf{r}_1, t_1)$  und  $d1 = d^3r_1dt_1$  ein.

Die Greensfunktion  $G_2(1,2;1',2')$  beschreibt zwei Teilchen, die zum Zeitpunkt  $t_1$  und  $t_2$  am Ort  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  ins System eingefügt werden und zum Zeitpunkt  $t'_1$  und  $t'_2$  am Ort  $\mathbf{r}'_1$  und  $\mathbf{r}'_2$  wieder aus dem System entfernt werden, sowie alle möglichen Prozesse, die zwischen diesen beiden Teilchen stattfinden können. Die einfachste mögliche Näherung ist die **Hartree-Näherung**. Sie geht davon aus, dass sich die beiden Teilchen völlig unabhängig voneinander bewegen. Die 2-Teilchen-Greensfunktion  $G_2$  wird durch das Produkt von 1-Teilchen-Greensfunktionen angenähert:

$$G_2(1,2;1',2')_H = G(1;1') G(2;2').$$
 (2.40)

In dieser Näherung erhält man für die Selbstenergie ein räumlich und zeitlich lokales Potential  $U_H(\mathbf{r},t)$ :

$$\Sigma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = U_H(\mathbf{r}, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') = \int d\mathbf{r}_2 \ W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)G(\mathbf{r}_2, t; \mathbf{r}_2, t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t').$$
(2.41)

Die Greensfunktion für gleiche Zeiten und Orte entspricht der Teilchendichte. Das Potential ist ein Mean-Field-Potential, das durch die Wechselwirkung aller anderen Teilchen im System am Ort  ${\bf r}$  zur Zeit t erzeugt wird. Da in diesem Potential immer die aktuelle Teilchendichte zum Zeitpunkt t eingeht, muss sie ständig selbstkonsistent berechnet werden.

Für ein Ensemble von quantenmechanischen Teilchen ist die Hartree-Näherung nicht ausreichend, da sie mögliche Austauschprozesse der Teilchen vernachlässigt und so die Quantenstatistik verletzt. Eine Verbesserung ist die **Hartree-Fock-Approximation**. Hierbei wird die Hartree-Näherung zusätzlich um einen Austauschterm erweitert,

$$G(1,2;1',2')_{HF} = G(1;1') G(2;2') \mp G(1;2') G(2;1'),$$
 (2.42)

sodass  $G_2$  die korrekte Austauschsymmetrie erhält. Das so erzeugte Potential besteht zum einen aus dem lokalen Hartree-Anteil und zum anderen aus einem räumlich nichtlokalen Potential, welches den Austausch-Term enthält:

$$\int d\mathbf{r}_{2} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2}) G_{2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2}, t, t_{2}; \mathbf{r}', \mathbf{r}_{2}, t', t_{2}) = U_{H}(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t)$$

$$\mp \int d\mathbf{r}_{2} W(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{2}) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_{2}, t) G(\mathbf{r}_{2}, t; \mathbf{r}', t').$$
(2.43)

Im Hartree-Fock-Ansatz werden die 2-Teilchen-Greensfunktionen durch einfache 1-Teilchen-Greensfunktionen dargestellt. Die Wechselwirkung der Teilchen findet nur über die selbstkonsistenten Potentiale statt. Die höhere Greensfunktion beschreibt jedoch alle möglichen Wechselwirkungen zwischen den Teilchen, also auch Kollisionen, die bisher vernachlässigt wurden. Die einfachste Behandlung der Stöße erfolgt in der **ersten Born'schen Näherung**. Hierbei beschränkt man sich auf Einfachkollisionen und ignoriert Mehrfachstreuungen. Die Greensfunktion beschreibt dann zum einen zwei Teilchen, die ungestört propagiern, sowie zwei Teilchen, die zu einem bestimmten Raumzeitpunkt propagieren, dort einen Stoß durchführen und anschließend weiterpropagieren. Die Kollision erfolgt durch die 2-Teilchenwechselwirkung  $W(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Der Kollisionsanteil der 2-Teilchen-Greensfunktion ist durch

$$G(1,2;1',2')_{C} = i \int d\bar{\mathbf{r}}_{1} d\bar{\mathbf{r}}_{2} d\bar{t}_{1} W(\bar{\mathbf{r}}_{1},\bar{\mathbf{r}}_{2}) [G(1,\bar{1})G(\bar{1},3)G(2,\bar{2})G(\bar{2},4)$$

$$\mp G(2,\bar{1})G(\bar{1},3)G(1,\bar{2})G(\bar{2},4)]|_{\bar{t}_{1}=\bar{t}_{2}}$$
(2.44)

gegeben. Die genäherte 2-Teilchen-Greensfunktion in der Born-Näherung ergibt sich aus der Kombination der Kollisions-Greensfunktion und der Hartree-Fock-Greensfunktion.

$$G(1,2;1',2')_{Born} = G(1,2;1',2')_{HF+C} = G(1,2;1',2')_{HF} + G(1,2;1',2')_{C}$$
(2.45)

Durch die Einführung von Stößen erhalten die Teilchen eine endliche Breite  $\Gamma$ . Daher können wir auch Systeme mit endlicher Lebensdauer  $\tau \sim \Gamma^{-1}$  beschreiben. Die Näherung ist natürlich nur auf Systeme anwendbar, in denen approximativ nur Einfachkollisionen vorkommen. Dies ist für schwache Wechselwirkungen oder für Systeme mit sehr geringer Dichte erfüllt.

Aus den vorgestellten Näherungen lassen sich leicht äquivalente Selbstenergien konstruieren. In diese gehen nur noch 1-Teilchen-Greensfunktionen ein. Damit sind die Kadanoff-Baym-Gleichungen (2.38) und (2.39) in sich geschlossen und können exakt gelöst werden. Probleme ergeben sich jedoch bei der Behandlung von stark wechselwirkenden Systemen, da in diesen verstärkt Mehrfachkollisionen stattfinden. Die Approximation (2.45) lässt sich verbessern, indem man in der 2-Teilchen-Greensfunktion Mehrfachstöße berücksichtigt, d.h. die Wechselwirkung resummiert. Dies wird jedoch mit höherer Kollisionsordnung zunehmend aufwändiger. Wir werden stattdessen mit dem Dynamical-QuasiParticle-Model (DQPM) [27, 31, 32] eine Modell vorstellen, mit dem wir die resummierten Selbstenergien für das starkwechselwirkde QGP annähern können.

### 2.2.3 Relativistische Quanten-Transporttheorie

Bei der Behandlung von sehr heißen Systemen können wir nicht mehr von nichtrelativistischen Teilchen sprechen. Wir werden in diesem Abschnitt ausgehend von den relativistischen Kadanoff-Baym-Gleichungen eine relativistische Transportgleichung im Phasenraum herleiten. Dabei orientieren wir uns stark an Ref. [27].

Anders als im vorherigen Abschnitt werden wir jetzt wieder die unterschiedlichen Greensfunktionen auf der Keldysh-Kontur unterscheiden. Prinzipiell kann jede Funktion auf der

Keldysh-Kontur entsprechend

$$K(x,y) = \delta_C(x_0 - y_0)K^{\delta}(x) + \Theta(x_0 - y_0)K^{\delta}(x,y) + \Theta(y_0 - x_0)K^{\delta}(x,y)$$
 (2.46)

zerlegt werden [28]. Zusätzlich zu den Greensfunktionen müssen wir auch die Selbstenergien auf der Keldysh-Kontur definieren. Sie sind mit den Greensfunktionen über die Dyson-Schwinger-Gleichung

$$G^{-1}(x,y) = G_0^{-1}(x,y) - \Sigma(x,y)$$
(2.47)

verbunden, wobei  $G_0$  die freie ungestörte Greensfunktion ist. Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn sich die Selbstenergien ähnlich den Greensfunktionen nach (2.46) zerlegen lassen.

Wir interessieren uns hauptsächlich für die Korrelationsfunktionen  $G^{\lessgtr}$ . In den nichtrelativistischen Kadanoff-Baym-Gleichungen (2.38) und (2.39) steht auf der linken Seite der nichtrelativistische Hamiltonoperator. In den relativisitschen Gleichungen muss
man stattdessen die entsprechenden relativistischen Feldgleichungen verwenden. Wir
präsentieren die weitere Herleitung am Beispiel der Klein-Gordon-Felder. Die DeltaDistribution in den Kadanoff-Baym-Gleichungen kann vernachlässigt werden, da die beiden Zeiten auf unterschiedlichen Ästen der Keldysh-Kontur liegen und somit nie gleich
sind.

Auf den linken Seiten der Kadanoff-Baym-Gleichungen steht eine Faltung von zwei auf der Kontur definierten Funktionen  $c(t,t') = \int a(t,\bar{t})b(\bar{t},t')d\bar{t}$ . Das Ergebniss muss ebenfalls auf der Kontur definert sein. Eine solche Faltung lässt sich nach [28] entsprechend

$$c^{>}(t,t') = a^{>}(t,t')b^{\delta}(t') + a^{\delta}(t)b^{>}(t,t') - \int_{0}^{t'} d\bar{t} \ a^{>}(t,\bar{t})[b^{>}(\bar{t},t') - b^{<}(\bar{t},t')] + \int_{0}^{t} d\bar{t} \ [a^{>}(t,\bar{t}) - a^{<}(t,\bar{t})]b^{>}(\bar{t},t')$$

$$(2.48)$$

umschreiben. In den Selbstenergien steht der  $\delta$ -Anteil für lokale Potentiale wie z.B. dem Hartree-Potential. Der  $\delta$ -Anteil der Greensfunktion ist nicht definiert. Die relativistischen Kadanoff-Baym-Gleichungen ergeben sich damit nach [27] in d-räumlichen Dimensionen zu

$$- \left[ \partial_{\mu}^{x} \partial_{x}^{\mu} + m^{2} \right] G^{\lessgtr}(x,y) = \Sigma^{\delta}(x) G^{\lessgtr}(x,y)$$

$$+ \int_{t_{0}}^{x_{0}} dz_{0} \int d^{d}z \left[ \Sigma^{\gt}(x,z) - \Sigma^{\lt}(x,z) \right] G^{\lessgtr}(z,y)$$

$$- \int_{t_{0}}^{y_{0}} dz_{0} \int d^{d}z \; \Sigma^{\lessgtr}(x,z) \left[ G^{\gt}(x,z) - G^{\lt}(x,z) \right],$$

$$- \left[ \partial_{\mu}^{y} \partial_{y}^{\mu} + m^{2} \right] G^{\lessgtr}(x,y) = \Sigma^{\delta}(x) G^{\lessgtr}(x,y)$$

$$+ \int_{t_{0}}^{x_{0}} dz_{0} \int d^{d}z \; \left[ G^{\gt}(x,z) - G^{\lt}(x,z) \right] \Sigma^{\lessgtr}(z,y)$$

$$- \int_{t_{0}}^{y_{0}} dz_{0} \int d^{d}z \; G^{\lessgtr}(x,z) \left[ \Sigma^{\gt}(x,z) - \Sigma^{\lt}(x,z) \right].$$

$$(2.49)$$

Zusätzlich zu den bisherigen Greensfunktionen  $G^{\lessgtr}$  definieren wir noch die retardierten und avancierten Greensfunktionen. In ihnen sind keine statistischen, sondern nur noch spektrale Informationen enthalten:

$$G^{R}(x,y) = \Theta(x_{0} - y_{0}) \left[ G^{>}(x,y) - G^{<}(x,y) \right]$$

$$= \Theta(x_{0} - y_{0}) \left\langle \left[ \phi(x), \phi(y) \right]_{-} \right\rangle$$

$$= G^{c}(x,y) - G^{<}(x,y) = G^{>}(x,y) - G^{a}(x,y),$$

$$G^{A}(x,y) = -\Theta(y_{0} - x_{0}) \left[ G^{>}(x,y) - G^{<}(x,y) \right]$$

$$= -\Theta(y_{0} - x_{0}) \left\langle \left[ \phi(x), \phi(y) \right]_{-} \right\rangle$$

$$= G^{c}(x,y) - G^{>}(x,y) = G^{<}(x,y) - G^{a}(x,y).$$
(2.50)

Ihre Zeitentwicklung ist ebenfalls durch Kadanoff-Baym-Gleichungen gegeben. Im Gegensatz zu den Korrelationsfunktionen sind die retardierten und avancierten Gleichungen nur von retardierten und avancierten Größen abhängig:

$$- \left[ \partial_{\mu}^{x} \partial_{x}^{\mu} + m^{2} + \Sigma^{\delta}(x) \right] G^{R}(x, y) = \delta^{(d+1)}(x - y) + \int d^{d+1}z \ \Sigma^{R}(x, z) G^{R}(z, y)$$

$$- \left[ \partial_{\mu}^{x} \partial_{x}^{\mu} + m^{2} + \Sigma^{\delta}(x) \right] G^{A}(x, y) = \delta^{(d+1)}(x - y) + \int d^{d+1}z \ \Sigma^{A}(x, z) G^{A}(z, y).$$
(2.51)

Mit Hilfe dieser Greenfunktionen können wir den Kollisionsanteil der Kadanoff-Baym-Gleichungen (2.49) umschreiben. Wenn wir zusätzlich den Anfangszeitpunkt auf  $-\infty$  setzen, erhalten wir ein Faltungsintegral, dass über den gesamten Minkowski-Raum in D=d+1 Dimensionen verläuft. Die Gleichung (2.38) erhält dann die Form:

$$\begin{split} \left[\partial_{\mu}^{x}\partial_{x}^{\mu}+m^{2}+\Sigma^{\delta}(x)\right]G^{\lessgtr}(x,y)=&I_{1}^{\lessgtr}(x,y)\\ =&-\int_{-\infty}^{\infty}d^{D}z\ \Sigma^{R}(x,z)G^{\lessgtr}(z,y)+\Sigma^{\lessgtr}(x,z)G^{A}(z,y). \end{split} \tag{2.52}$$

Bisher haben wir alle Gleichungen im doppelten Ortsraum formuliert. Für praktische Rechnungen ist es anschaulicher im Phasenraum mit Orts- und Impulskoordinate zu arbeiten. Wir ersetzen dazu die beiden Orte durch eine Relativ- und eine Schwerpunktskoordinate. Die Schwerpunktskoordinate beschreibt den Ort und die Zeit, die Relativkoordinate wird mittels Fouriertransformation auf 4-Impulskoordinaten transformiert. Die Fourier-transformierte Relativzeit führt dann zur Energie. Der Übergang zwischen den beiden Darstellungen erfolgt durch eine Wignertransformation:

$$\bar{F}(p,x) = \int_{-\infty}^{\infty} d^D \Delta x \ e^{i\Delta x_{\mu} p^{\mu}} \ F(x_1 = x + \Delta x/2, x_2 = x - \Delta x/2). \tag{2.53}$$

Die daraus entstandenen Greensfunktionen  $\bar{G}^{\leq}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t, E)$  haben eine ähnliche Interpretation wie die klassische Phasenraumdichte  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , nur dass zusätzlich noch die Energie E als weiterer Freiheitsgrad enthalten ist. Im Fall von klassischen Teilchen ist die Energie durch die Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$  (bei freien Teilchen) festgelegt.

Im Folgenden werden wir die Wigner-transformierten Größen mit einem Balken kennzeichnen.

Neben der einfach zu transformierenden linken Seite von (2.52) müssen wir auch den Kollisionsanteil transformieren. Dieser ist durch ein Faltungsintegral gegeben:

$$H(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d^D z \ F(x_1, z) G(z, x_2).$$
 (2.54)

Die Wignertransformation einer Faltung erhält man aus der Formel

$$\bar{H}(p,x) = \int_{-\infty}^{\infty} d^D \Delta x \ e^{i\Delta x_{\mu}p^{\mu}} \ H(x_1, x_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^D \Delta x \ e^{i\Delta x_{\mu}p^{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} d^D z F(x_1, z) G(z, x_2)$$

$$= e^{\frac{i}{2}(\partial_p^{\mu} \partial_{\mu}^{x'} - \partial_x^{\mu} \partial_p^{p'})} \left[ \bar{F}(p, x) \bar{G}(p', x') \right] |_{x'=x, p'=p} .$$
(2.55)

Wir gehen davon aus, dass sich die Größen nur langsam ändern und entwicklen die Exponentialfunktion bis zur ersten Ordnung. Damit erhalten wir die Wignertransformation in erster Gradientenordnung:

$$\bar{H}(p,x) \approx \bar{F}(p,x)\bar{G}(p,x) + \frac{i}{2}\left\{\bar{F}(p,x),\bar{G}(p,x)\right\} + \mathcal{O}(\partial_x^2). \tag{2.56}$$

Die geschweiften Klammern stehen für die relativistisch generalisierten Poisson-Klammern:

$$\{\bar{F}(p,x),\bar{G}(p,x)\} = \partial_{\mu}^{p}\bar{F}(p,x)\partial_{x}^{\mu}\bar{G}(p,x) - \partial_{x}^{\mu}\bar{F}(p,x)\partial_{\mu}^{p}\bar{G}(p,x). \tag{2.57}$$

Das weitere Vorgehen besteht nun darin, die Kadanoff-Baym-Gleichungen zu transformieren und auf diese Weise Transportgleichungen für die Wigner-transformierten Greensfunktionen  $\bar{G}^{\lessgtr}$  zu finden. Zunächst widmen wir uns aber noch einmal den retardierten und avancierten Greensfunktionen. Die Transformation hat die wichtige Konsequenz, dass die retardierten und avancierten Größen im Phasenraum komplex konjugiert zueinander sind. Wir drücken sie daher durch rein reelle Größen aus. Der Imaginärteil der Greensfunktion ist proportional zur Spektraldichte  $\bar{A}$ , der Imaginärteil der Selbstenergie proportional zur Breite  $\bar{\Gamma}$  der Teilchen:

$$\bar{G}^{R/A} = \operatorname{Re}\bar{G}^R \mp i\bar{A}/2$$

$$\bar{\Sigma}^{R/A} = \operatorname{Re}\bar{\Sigma}^R \mp i\bar{\Gamma}/2.$$
(2.58)

Folgen wir weiter der Argumentation aus [27] erhalten wir für die Spektralfunktion das wichtige Ergebnis (in erster Gradientenordnung),

$$\bar{A} = \frac{\bar{\Gamma}}{[p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \bar{\Sigma}^\delta - \text{Re}\bar{\Sigma}^R]^2 + \bar{\Gamma}^2/4} = \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{M}^2 + \bar{\Gamma}^2/4},$$
 (2.59)

mit der Massenfunktion  $\bar{M}(p,x) = p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 - \Sigma^{\delta}(x) - \operatorname{Re}\bar{\Sigma}^R(p,x)$ . Die Spektralfunktion zeigt zumindest in erster Gradientenordnung die Form einer relativistischen Breit-Wigner-Funktion.

Für die Korrelationsfunktionen erhalten wir nach der Transformation eine generalisierte Transportgleichung,

$$2p^{\mu}\partial_{\mu}^{x}i\bar{G}^{\lessgtr} - \{\bar{\Sigma}^{\delta} + \operatorname{Re}\bar{\Sigma}^{R}, i\bar{G}^{\lessgtr}\} - \{i\bar{\Sigma}^{\lessgtr}, \operatorname{Re}\bar{G}^{R}\} = i\bar{\Sigma}^{<}i\bar{G}^{>} - i\bar{\Sigma}^{>}i\bar{G}^{<}$$

$$\{\bar{M}, iG^{\lessgtr}\} - \{i\bar{\Sigma}^{\lessgtr}, \operatorname{Re}\bar{G}^{R}\} = i\bar{\Sigma}^{<}i\bar{G}^{>} - i\bar{\Sigma}^{>}i\bar{G}^{<},$$

$$(2.60)$$

sowie eine generalisierte Massenschalengleichung:

$$\left[p^{2} - m^{2} - \bar{\Sigma}^{\delta} - \operatorname{Re}\bar{\Sigma}^{R}\right] iG^{\lessgtr} = i\bar{\Sigma}^{\lessgtr} \operatorname{Re}\bar{G}^{R} + \frac{1}{4} \left\{ i\bar{\Sigma}^{>}, i\bar{G}^{<} \right\} - \frac{1}{4} \left\{ i\bar{\Sigma}^{<}, i\bar{G}^{>} \right\}. \tag{2.61}$$

Als weitere Konsequenz der Transformation sind die beiden Funktionen  $\bar{G}^{\lessgtr}$  im Phasenraum rein imaginär. Wir werden daher von nun an immer mit den rein reellen Größen  $i\bar{G}^{\lessgtr}$  arbeiten. Gleiches gilt für die Selbstenergien  $\bar{\Sigma}^{\lessgtr}$ .

Die generalisierte Transportgleichung ist von der Struktur her der klassischen Boltzmann-Gleichung sehr ähnlich (siehe Abschnitt 2.2.1). Die Poissonklammer zwischen Massenfunktion und Greensfunktion repräsentiert die freie Teilchenbewegung in lokalen Potentialen. Der rechte Teil der Gleichung entspricht dem Kollisionsanteil. Er beschreibt Streuungen in den Phasenraumzustand hinein oder hinaus und hat die typische "gain" und "loss" Struktur, die wir auch aus der Boltzmann-Gleichung kennen (2.9). Problematisch ist hingegen der  $\{i\bar{\Sigma}^{\lessgtr}, \mathrm{Re}\bar{G}^R\}$  Term. Er beschreibt die Off-Shell-Dynamik des Systems und verschwindet bei der Behandlung von On-Shell-Teilchen. Da er nicht direkt die Greensfunktion  $\bar{G}^{\lessgtr}$  enthält, verhindert er eine Lösung über die Testteilchenmethode. Als weiteres Problem sind die beiden Gleichungen (2.60) und (2.61) nicht äquivalent. Wir wissen nicht, welche der beiden Gleichungen die höhere Priorität hat. Bevor wir eine Lösung mit der Testteilchenmethode angehen können, müssen wir zuvor diese beiden Probleme lösen.

#### 2.2.4 Testteilchenmethode

Um die Diskrepanz zwischen den Gleichungen (2.60) und (2.61) aufzulösen, folgen wir der Argumentation von Botermans und Malfliet [33]. Dazu führen wir zunächst Verteilungsfunktionen für die Selbstenergien  $\bar{\Sigma}^{\lessgtr}$  und Greensfunktionen  $\bar{G}^{\lessgtr}$  bezüglich der Spektralfunktion und der Breite ein:

$$i\bar{G}^{<}(p,x) = \bar{N}(p,x)\bar{A}(p,x), \qquad i\bar{G}^{>}(p,x) = [1 + \bar{N}(p,x)]\bar{A}(p,x), i\bar{\Sigma}^{<}(p,x) = \bar{N}^{\Sigma}(p,x)\bar{\Gamma}(p,x), \qquad i\bar{\Sigma}^{>}(p,x) = [1 + \bar{N}^{\Sigma}(p,x)]\bar{\Gamma}(p,x).$$
(2.62)

Im thermodynamischen Gleichgewicht müssen die Verteilungsfunktionen  $\bar{N}$  und  $\bar{N}^{\Sigma}$  identisch sein, damit der Kollisionsterm in (2.60) verschwindet. Außerhalb des Gleichgewichts können die Funktionen jedoch voneinander abweichen. Wir ersetzen die Verteilungsfunktion in der Selbstenergie durch die Verteilungsfunktion der Greensfunktion und einen Korrekturterm  $i\bar{\Sigma}^{<} = [\bar{N} + \bar{X}]\bar{\Gamma}$ . Dieser Term ist proportional zum Kollisionsanteil der generalisierten Transportgleichung (2.60):

$$\bar{X}\bar{\Gamma} \sim i\bar{\Sigma}^{<}i\bar{G}^{>} - i\bar{\Sigma}^{>}i\bar{G}^{<} = \left\{\bar{M}, iG^{\lessgtr}\right\} - \left\{i\bar{\Sigma}^{\lessgtr}, Re\bar{G}^{R}\right\}. \tag{2.63}$$

Der Korrekturterm ist also bereits von erster Gradientenordnung. Wenn nun die Selbstenergie in einer Poissonklammer vorkommt, ist der Korrekturterm automatisch von zweiter Ordnung. Da wir die Transportgleichungen aber nur in erster Ordnung betrachten, können wir für eine konsistente Theorie den Korrekturterm vernachlässigen. Damit sind die Verteilungsfunktionen auch außerhalb des Gleichgewichts identisch. Wir können nun die Selbstenergie im Off-Shell-Term durch die Greensfunktion ausdrücken:

$$i\bar{\Sigma}^{\lessgtr} = i\bar{G}^{\lessgtr} \frac{\bar{\Gamma}}{\bar{A}}.$$
 (2.64)

Somit taucht in (2.60) in allen Termen die Greensfunktion  $\bar{G}^{\lessgtr}$  auf, was eine Lösung über die Testteilchenmethode ermöglicht. Zusätzlich entfernt diese Ersetzung auch die Unterschiede zwischen den beiden Transportgleichungen (2.60) und (2.61), sodass wir nun eine eindeutige, in erster Gradientenordnung konsistente Transportgleichung erhalten:

$$\frac{1}{2}\bar{A}\bar{\Gamma}\left[\left\{\bar{M},iG^{<}\right\}-\frac{1}{\bar{\Gamma}}\left\{\bar{\Gamma},\bar{M}\ i\bar{G}^{<}\right\}\right]=i\bar{\Sigma}^{<}i\bar{G}^{>}-i\bar{\Sigma}^{>}i\bar{G}^{<}.\tag{2.65}$$

Es ist zunächst noch nicht klar, inwieweit diese Gleichung dieselben Lösungen wie die ursprünglichen Kadanoff-Baym-Gleichungen (2.49) liefert. In Ref. [27] wurde ein Vergleich der beiden Gleichungen in der  $\phi^4$ -Theorie durchgeführt. Die Selbstenergien wurden selbstkonsitent durch funktionale Ableitungen der effektiven Wirkung in 3-Loop-Ordnung bestimmt. Es wurde eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse gefunden, die nur im Fall sehr kleiner Impulse leicht voneinander abweichen.

Wir haben nun eine Gleichung, welche die volle Kadanoff-Baym-Dynamik reproduziert und eine Lösung über die Testteilchenmethode erlaubt. Im Gegensatz zur klassischen oder On-Shell-Testteilchenmethode müssen wir bei der Behandlung von Off-Shell-Teilchen auch den Energie-Freiheitsgrad propagieren. Dazu erweitern wir die Testteilchendistribution um eine Delta-Distribution für die Energie:

$$F_{XP} = iG^{<}(X, P) \sim \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{i}(t))\delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i}(t))\delta(P_{0} - \epsilon_{i}(t)).$$
 (2.66)

Die Bewegungsgleichungen der Testteilchen lauten nach Ref. [27]:

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \frac{1}{1 - C_{(i)}} \frac{1}{2\epsilon_i} \left[ 2\mathbf{P}_i + \nabla_{P_i} \operatorname{Re}\Sigma_{(i)}^{ret} + \frac{\epsilon_i^2 - \mathbf{P}_i^2 - M_0^2 - \operatorname{Re}\Sigma_{(i)}^{ret}}{\Gamma_{(i)}} \nabla_{P_i} \Gamma_{(i)} \right], \quad (2.67)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = -\frac{1}{1 - C_{(i)}} \frac{1}{2\epsilon_i} \left[ \nabla_{X_i} \operatorname{Re} \Sigma_{(i)}^{ret} + \frac{\epsilon_i^2 - \mathbf{P}_i^2 - M_0^2 - \operatorname{Re} \Sigma_{(i)}^{ret}}{\Gamma_{(i)}} \nabla_{X_i} \Gamma_{(i)} \right], \tag{2.68}$$

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{1}{1 - C_{(i)}} \frac{1}{2\epsilon_i} \left[ \frac{\partial \text{Re}\Sigma_{(i)}^{ret}}{\partial t} + \frac{\epsilon_i^2 - \mathbf{P}_i^2 - M_0^2 - \text{Re}\Sigma_{(i)}^{ret}}{\Gamma_{(i)}} \frac{\partial \Gamma_{(i)}}{\partial t} \right]. \tag{2.69}$$

Der Vorfaktor  $1/(1-C_{(i)})$  hat die Bedeutung eines "Gammafaktors" und transformiert die Zeit in die Eigenzeit des wechselwirkenden Teilchens. Er wird wichtig bei der Abschätzung von Zeitskalen. Wenn wir die Ableitungen bezüglich der Eigenzeit betrachten, muss man auf den Vorfaktor verzichten:

$$C_{(i)} = \frac{1}{2\epsilon_i} \left[ \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \operatorname{Re} \Sigma_{(i)}^{ret} + \frac{\epsilon_i^2 - \mathbf{P}_i^2 - M_0^2 - \operatorname{Re} \Sigma_{(i)}^{ret}}{\Gamma_{(i)}} \frac{\partial}{\partial \epsilon_i} \Gamma_{(i)} \right] \equiv 0.$$
 (2.70)

Für den Fall, dass die Breite  $\Gamma_{(i)}$  nicht vom Impuls abhängt, wählen wir anstelle der Energie  $E_i$  das Massenquadrat  $M_i^2$  als zusätzlichen Freiheitsgrad. Die Energie ergibt sich dann aus der normalen Energie-Impuls-Beziehung:

$$E^{2} = P_{0}^{2} = \mathbf{P}^{2} + M^{2} + \operatorname{Re}\Sigma_{XPM^{2}}^{ret}.$$
 (2.71)

Die Bewegungsgleichung für das Massenquadrat mit  $\Delta M_i^2 = M_i^2 - M_0^2$ lautet

$$\frac{d\Delta M_i^2}{dt} = \frac{\Delta M_i^2}{\Gamma_{(i)}} \frac{d\Gamma_{(i)}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \log \left(\frac{\Delta M_i^2}{\Gamma_{(i)}}\right) = 0. \tag{2.72}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen sind wir nun auch in der Lage wechselwirkende relativistische Teilchen mit endlicher Lebensdauer zu beschreiben. Damit wir die Gleichungen auf das Quark-Gluon-Plasma anwenden können, benötigen wir abschließend noch belastbare Näherungen für die Selbstenergien  $\bar{\Sigma}^{\lessgtr}$  für Quarks und Gluonen.

### 2.3 Dynamical-QuasiParticle-Model

Mit Hilfe der Kadanoff-Baym-Gleichungen haben wir eine generalisierte Transportgleichung für die Korrelationsfunktionen  $G^\lessgtr(x,p)$  bestimmt und anschließend eine Lösung mittels der Testteilchenmethode angegeben. Was uns nun noch fehlt ist eine sinnvolle Näherung für die komplexen Selbstenergien  $\Sigma^\lessgtr(x,p)$ . Zu diesem Zweck stellen wir das Dynamical-QuasiParticle-Model (DQPM) vor. Es reproduziert die Thermodynamik des QGP im Gleichgewicht und ermöglicht es gute Näherungen für die Selbstenergien zu finden.

Der große Vorteil der Quasiteilchenmodelle liegt in der Entropie S des Systems. Es lässt sich zeigen, dass sich die 2-Loop-Beiträge zur Entropie gegenseitig in S aufheben. Die gesamte Thermodynamik lässt sich also schon durch 1-Loop-Beiträge ausreichend gut beschreiben. Für die QCD ist dies approximativ erfüllt, für die QED und die skalare  $\phi^4$ -Theorie wurde es exakt bewiesen [34, 35]. Die Entropiedichte s für ein System aus Quarks und Gluonen ist in Quasiteilchen-Näherung durch

$$s^{dqp} = -d_g \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3p}{(2\pi)} \frac{\partial n_B}{\partial T} \left( \operatorname{Im} \log(-\Delta^{-1}) + \operatorname{Im}\Pi \operatorname{Re}\Delta \right)$$

$$-d_q \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3p}{(2\pi)} \frac{\partial n_F((\omega - \mu_q)/T)}{\partial T} \left( \operatorname{Im} \log(-S_q^{-1}) + \operatorname{Im}\Sigma_q \operatorname{Re}S_q \right)$$

$$-d_{\bar{q}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^3p}{(2\pi)} \frac{\partial n_F((\omega + \mu_q)/T)}{\partial T} \left( \operatorname{Im} \log(-S_{\bar{q}}^{-1}) + \operatorname{Im}\Sigma_{\bar{q}} \operatorname{Re}S_{\bar{q}} \right)$$

$$(2.73)$$

gegeben [32].  $n_B$  und  $n_F$  stehen für die Bose- und Fermiverteilungen,  $\Delta = (P^2 - \Pi)^{-1}$  und  $S_{q,\bar{q}} = (P^2 - \Sigma_{q,\bar{q}})^{-1}$  für die vollen skalaren Propagatoren für Gluonen und Quarks. Die Entropiedichte kann in zwei Teile zerlegt werden,

$$s^{DQPM} = s^{(0)} + \Delta s$$

$$s^{(0)} = \frac{1}{T} \int d^3k \left( -T \log(1 - e^{-\omega_k/T}) + \omega_k n(\omega_k) \right)$$

$$\Delta s = \int d^4k \frac{dn}{dT} \left( \arctan \lambda - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right)$$
(2.74)

mit  $\lambda = \mathrm{Im}\Delta/\mathrm{Re}\Delta$  bzw.  $\lambda = \mathrm{Im}S/\mathrm{Re}S$ . Der erste Anteil  $s^{(0)}$  ist die Entropiedichte eines idealen Gases mit einer festen Energie-Impuls-Relation. Der zweite Anteil  $\Delta s$  entsteht durch die endliche Breite der Quasiteilchen und spiegelt den Einfluss der Wechselwirkung wieder.

Im DQPM wird die explizite Lorentzstruktur der Selbstenergien  $\Pi$  und  $\Sigma$  zunächst vernachlässigt und nur die skalaren Beiträge verwendet. Die Selbstenergien für Quarks und Antiquarks werden als gleich angenommen (bei Quark-chemischem Potential  $\mu_q = 0$ ). Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Spektralfunktion die Form einer Breit-Wigner-Funktion (2.59) hat. Anstatt die Selbstenergien explizit auszurechnen, nähern wir die Spektralfunktion durch eine Breit-Wigner-Verteilung <sup>1</sup>

$$\rho(\omega) = \frac{\Gamma}{E} \left( \frac{1}{(\omega - E)^2 + \Gamma^2} - \frac{1}{(\omega + E)^2 + \Gamma^2} \right), \tag{2.75}$$

mit  $E^2={\bf p}^2+M^2-\Gamma^2$ . Die Selbstenergien ergeben sich dann aus den jeweiligen Massen und Breiten der Quasiteilchen  $\Pi=M_g^2-2i\Gamma_g\omega,~\Sigma=m_{q,\bar{q}}^2-2i\Gamma_{q,\bar{q}}\omega$ .

Die Massen und Breiten der Quarks und Gluonen ergeben sich nach Ref. [20, 31, 32] zu

$$M_g^2(T) = \frac{g^2}{6} \left( \left( N_c + \frac{1}{2} N_f \right) T^2 + \frac{N_c}{2} \sum_q \frac{\mu_q^2}{\pi^2} \right)$$
 (2.76)

$$m_{q,\bar{q}}^2(T) = \frac{N_c^2 - 1}{8N_c} g^2 \left( T^2 + \frac{\mu_q^2}{\pi^2} \right)$$
 (2.77)

$$\Gamma_g(T) = N_c \frac{g^2 T}{8\pi} \ln\left(1 + \frac{2c}{g^2}\right) \cdot S_c \tag{2.78}$$

$$\Gamma_{q,\bar{q}}(T) = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g^2 T}{8\pi} \ln\left(1 + \frac{2c}{q^2}\right) \cdot S_c$$
(2.79)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Man beachte, dass der Parameter Γ [GeV] nicht mit dem Imaginärteil der Selbstenergie  $\Gamma_{(i)}$  [GeV<sup>2</sup>] in (2.67)-(2.69) zu verwechseln ist. Es besteht jedoch die Beziehung  $\Gamma_{(i)} = 2\epsilon_{(i)}\Gamma$ .

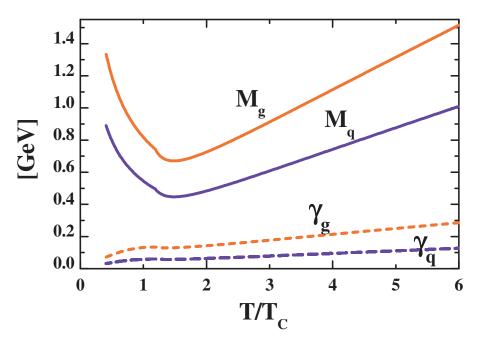


Abbildung 2.2: Massen und Breiten der Quarks (violett) und Gluonen (orange). Die Abbildung wurde aus Ref. [36] entnommen.

mit der laufenden Kopplung

$$g^{2}(T/T_{c}) = \frac{48\pi^{2}}{(11N_{c} - 2N_{f})\ln\left(\lambda^{2}((T - T_{s})/T_{c})^{2}\right)}, \quad T > \Lambda \cdot T_{c}$$

$$g^{2}(T/T_{c}) = \frac{48\pi^{2}}{(11N_{c} - 2N_{f})\ln\left(\lambda^{2}((\Lambda \cdot T_{c} - T_{s})/T_{c})^{2}\right)} \left(\frac{\Lambda \cdot T_{c}}{T}\right)^{3.1}, \quad T < \Lambda \cdot T_{c}.$$
(2.80)

Bei endlichem Quark-chemischem Potential  $\mu_q$  muss noch zusätzlich die Temperatur in der laufenden Kopplung durch die effektive Temperatur  $T^* = \sqrt{T^2 + \mu_q^2/\pi^2}$ ,  $g^2(T/T_c) \rightarrow g^2(T^*/T_c)$  ersetzt werden.

Das Modell kommt mit nur vier Parametern aus, die an Gitter-QCD-Resultate gefittet wurden. Man erhält  $\lambda=2.42,\,T_s=0.56\,T_c,\,c=14.4$  und  $S_c=0.33$ . Im ursprünglichen DQPM gehen die Breiten der Teilchen gegen null, wenn die Temperatur gegen die kritische Temperatur  $T_c$  läuft. Durch die Modifikation der laufenden Kopplung für kleine Temperaturen  $T<\Lambda\cdot T_c$  in Gleichung (2.81) reproduziert das Modell auch die Thermodynamik unterhalb des Phasenübergangs und das Verhältnis von Scherviskosität zu Entropiedichte  $\eta/s$  [20]. Dazu setzen wir  $\Lambda=1.19$ . In Abbildung 2.2 sind die Massen und Breiten gegen die Temperatur  $T/T_c$  aufgetragen. Der Knick bei  $T/T_c=1.19$  entsteht durch die Anpassung der laufenden Kopplung für niedrigere Temperaturen. Bei verschwindendem Quark-chemischem Potential  $\mu_q$  sind die Massen und die Breiten proportional zueinander und es gelten die Relationen  $M_q=\frac{2}{3}M_g$  und  $\Gamma_q=\frac{4}{9}\Gamma_g$ .

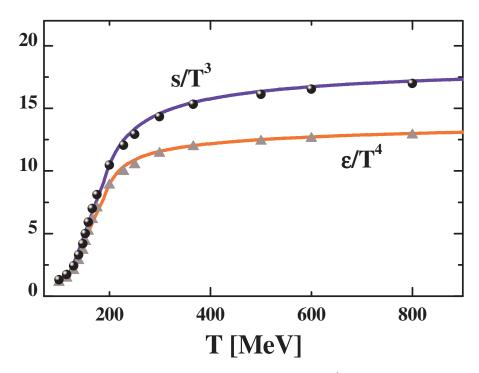


Abbildung 2.3: Vergleich der effektiven Energiedichte  $\epsilon/T^4$  und Entropiedichte  $s/T^3$  aus DQPM-Rechnungen mit Gitter-QCD-Resultaten aus Ref. [9] (Kugeln und Dreiecke). Die Abbildung wurde aus Ref. [36] entnommen.

Die Thermodynamik des DQPM ist mit der Entropiedichte (2.73) vollständig beschrieben. Aus dem großkanonischen Potential

$$\Omega/V = \epsilon - Ts - \mu n = -P \tag{2.82}$$

ergibt sich die Entropiedichte s als Ableitung des Drucks P nach der Temperatur T. Integriert man die Quasiteilchenentropie über T erhält man daraus den Druck:

$$s = \frac{\partial P}{\partial T} \iff P = \int_0^T dT \ s(T).$$
 (2.83)

Die Energie (für verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ ) ergibt sich direkt aus dem thermodynamischen Potential:

$$\epsilon = Ts - P = Ts - \int_0^T dT \ s(T). \tag{2.84}$$

Abbildung 2.3 zeigt die Entropie und Energiedichte aus Gitter-QCD-Rechnungen und aus dem DQPM. Das Modell kann die Gitter-QCD-Resultate mit nur geringen Abweichungen reproduzieren.

Eine weitere wichtige Größe ist die Spuranomalie  $W = \epsilon - 3P$ . Sie entspricht der Spur des Energie-Impuls-Tensors und verschwindet für ein wechselwirkungsfreies masseloses System. In wechselwirkenden Systemen ist es ein Mass für die Stärke der Wechselwirkung,

weshalb es auch als "Wechselwirkungsmass" bezeichnet wird. In Gitter-QCD-Rechnungen (siehe Abbildung 2.4) hat sich gezeigt, dass das Wechselwirkungsmass  $\tilde{W} = \frac{\epsilon - 3P}{T^4}$  etwas oberhalb von  $T_c$  maximal wird und für große Temperaturen langsam verschwindet. Dies weist auf ein stark wechselwirkendes System für mittlere Temperaturen und ein fast freies System für sehr hohe Temperaturen hin. Mit den Massen und den Breiten für die Quarks und Gluonen haben wir mit (2.75) die Spektralfunktionen für das QGP im thermodynamischen Gleichgewicht gefunden. Die Verteilungsfunktionen  $n_F$  und  $n_B$  im Gleichgewicht sind mit Fermi- und Boseverteilungen ebenfalls bekannt. Damit haben wir nun Zugriff auf die Gleichgewichts-Greensfunktionen  $i\bar{G}_{g,q,DQPM}=\rho_{g,q}\cdot n_{B/F}$  und können erste Rechnungen im thermodynamischen Gleichgewicht durchführen. Observable werden wie im klassischen Fall durch Integration der Observablen über die Verteilungsfunktion berechnet. Allerdings muss nun statt über die Verteilungsfunktion über die Greensfunktion, also noch zusätzlich über die Spektraldichte, integriert werden. Wenn die Enerige nicht über eine Dispersionsrelation festgelegt ist und die Spektralfunktion keine Delta-Distribution ist, muss noch zusätzlich über die Energie integriert werden. Aufgrund der großen Breiten trägt nicht nur der zeitartige Anteil  $P^2 > 0$ , sondern auch der raumartige Anteil  $P^2 < 0$  der Spektralfunktion zu den Erwartungswerten bei. Wir werden daher diese beiden Anteile explizit unterscheiden. Wir führen nun die Notation

$$\tilde{T}r_{g}^{\pm} \cdots = d_{g} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{3}p}{(2\pi)} 2\omega \rho_{g}(\omega)\Theta(\omega)n_{B}(\omega/T)\Theta(\pm P^{2})\cdots$$

$$\tilde{T}r_{q}^{\pm} \cdots = d_{q} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{3}p}{(2\pi)} 2\omega \rho_{q}(\omega)\Theta(\omega)n_{F}((\omega - \mu_{q})/T)\Theta(\pm P^{2})\cdots$$

$$\tilde{T}r_{\bar{q}}^{\pm} \cdots = d_{\bar{q}} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{d^{3}p}{(2\pi)} 2\omega \rho_{\bar{q}}(\omega)\Theta(\omega)n_{F}((\omega + \mu_{q})/T)\Theta(\pm P^{2})\cdots$$
(2.85)

ein. Die Theta-Funktion  $\Theta(\pm P^2)$  sorgt für die Unterscheidung in zeitartige und raumartige Bereiche.  $\tilde{T}r^+$  beschreibt zeitartige,  $\tilde{T}r^-$  raumartige Größen. Da der Ortsraum im Gleichgewicht homogen besetzt ist, würde die Integration über den Ort lediglich einen Volumenfaktor erzeugen und kann hier vernachlässigt werden. Die Erwartungswerte sind daher als Dichten zu interpretieren. Die Teilchen- und Energiedichten für die einzelnen Teilchensorten erhält man aus:

$$n_x^{\pm} = \tilde{\mathrm{T}} r_x^{\pm}(1), \qquad \epsilon_x^{\pm} = \tilde{\mathrm{T}} r_x^{\pm}(\omega), \qquad \text{mit } x = g, q, \bar{q}.$$
 (2.86)

Die Gesamtenergiedichte ergibt sich als Summe über alle sechs Energiedichten. Sie muss nicht mit der aus der Entropie berechneten Energiedichte übereinstimmen, da die Verteilungsfunktionen für wechselwirkende Systeme nicht exakt durch Fermi- und Boseverteilungen geben sind. Die Approximation wird mit steigender Temperatur besser, da, wie im Wechselwirkungsmass angedeutet, das System für große Temperaturen schwächer wechselwirkt als am Phasenübergang.

Während die zeitartigen Größen eine klare Interpretation als Quasiteilchendichte und Energiedichte dieser Quasiteilchen haben und im Transportmodell einfach behandelt werden können, sind die raumartigen Größen nicht so einfach zu berücksichtigen. Die

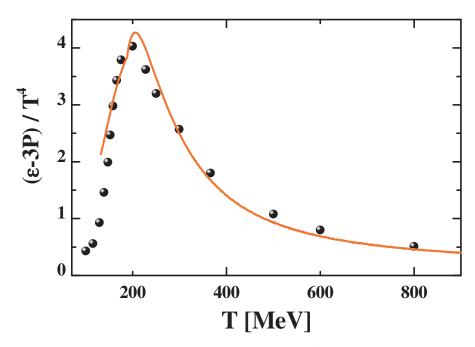


Abbildung 2.4: Vergleich des Wechselwirkungsmasses  $\tilde{W} = \frac{\epsilon - 3P}{T^4}$  aus DQPM-Rechnungen mit Gitter-QCD-Resultaten aus Ref. [9]. Die Abbildung wurde aus Ref. [36] entnommen.

"raumartige Dichte" steht für die Dichte der Quasiteilchen, die sich auch "außerhalb des Lichtkegels bewegen". Diese "Teilchen" können nicht propagiert werden, ohne die Kausalität zu verletzen. Sie können aber als "Austauschteilchen" in t- und u-Kanal-Stößen interpretiert werden. Die raumartige Energie gehört ebenfalls zu diesen "Teilchen". Um sie zu berücksichtigen und vor allem um die korrekten Energien zu reproduzieren, betrachten wir die raumartige Energie als potentielle Energiedichte.

Mit Hilfe der potentiellen Energiedichte können wir zudem den Plasmaparameter  $\Gamma_x$  bestimmen, der als Verhältnis zwischen potentieller und kinetischer Energie definiert ist. Ist  $\Gamma_x \leq 1$ , ist das System in der Gasphase, ist  $\Gamma_x > 2$ , befindet sich das System in der flüssigen Phase. Für Quarks und Gluonen steigt  $\Gamma_x$  nach dem Phasenübergang schnell an, bevor er anschließend langsam mit der Temperatur abfällt. Dabei bleibt bis zu Temperaturen von 10  $T_c$  der Plasmafaktor größer als 2  $\Gamma_x > 2$ , im Fall der Gluonen sogar  $\Gamma_g > 4$ ,

$$\Gamma_x = \frac{V_x}{E_{kin,x}} = \frac{\tilde{T}r_x^-(\omega)}{\tilde{T}r_x^+(\omega - \sqrt{p^2})}.$$
 (2.87)

Zusätzlich zur potentiellen Energiedichte benötigt man noch die Mean-Field-Potentiale. Sie sind als die Änderung der potentiellen Energiedichte bei Änderung der Teilchendichte definiert. Sie müssen in inelastischen Prozessen berücksichtigt werden, um die Energieerhaltung zu gewährleisten:

$$U_x(\rho_p) = \frac{\partial V_x}{\partial n_x}. (2.88)$$

Vergleicht man die so berechneten Mean-Field-Potentiale von Quarks und Gluonen, fällt auf, dass das gluonische Feld etwa doppelt so groß ist, wie das für die Quarks  $U_g \approx 2U_{q,\bar{q}}$ . Das bedeutet, dass die potentielle Energiedichte annähernd invariant unter den Prozessen  $q + \bar{q} \rightarrow g$  und  $g \rightarrow q + \bar{q}$  ist. Abbildung 2.5 zeigt das skalare (Lorentz-invariante) Mean-Field als Funktion der skalaren (Lorentz-invarianten) Dichte. Mit den Mean-Field-Potentialen beenden wir die Diskussion des DQPM. Es liefert eine gute Approximation für den Gleichgewichtszustand des QGP und legt die komplexen Selbstenergien für die Partonen im Gleichgewicht fest. Für eine vollständige Beschreibung benötigen wir noch passende Ausdrücke außerhalb des Gleichgewichts. Wir werden dazu die Massen und Breiten als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$  parametrisieren, die eine monotone Funktion der Temperatur T ist. Die Nichtgleichgewichtseigenschaften bestimmen wir sodann aus der lokalen Energiedichte  $\epsilon$ . Gemeinsam mit den Gleichungen für die Testteilchenpropagation und den Selbstenergien haben wir nun alle nötigen Informationen um mit den QGP-Simulationen zu beginnen.

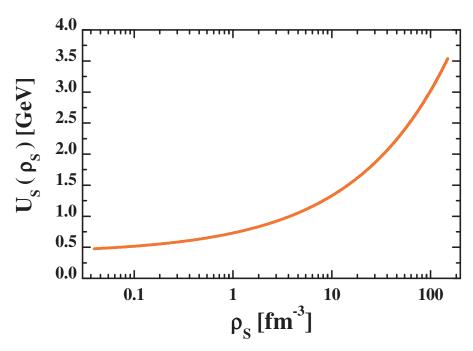


Abbildung 2.5: Skalares Mean-Field-Potential als Funktion der skalaren Dichte. Die Abbildung wurde aus Ref. [36] entnommen.

## 3 Parton-Hadron-String-Dynamics

In diesem Abschnitt stellen wir das Parton-Hadron-String-Dynamics (PHSD) Modell vor. Es ist ein Transportmodell, dass auf den Transportgleichungen für die Testteilchen (2.67-2.69) und den DQPM Massen und Breiten (2.76-2.79) beruht. Es ist eine Erweiterung des Hadron-String-Dynamics (HSD) Transportmodells [37, 38] um partonische Freiheitsgrade. Liegt die lokale Energiedichte  $\epsilon$  über der kritischen Energiedichte  $\epsilon_c$ , lösen sich die Hadronen auf und es werden Partonen weiterpropagiert. Wir verwenden  $T_c = 158$  MeV als kritische Temperatur, was einer kritischen Energiedichte von  $\epsilon(T_c) = 495 \text{ MeV/fm}^3$  entspricht (in Übereinstimmung mit den Gitter-QCD-Rechnungen [9] in Abbildung 2.3 und 2.4). Während die Massen und Breiten der hadronischen Teilchen relativ gut bekannt sind, benötigen wir belastbare Näherungen für die Quarks und Gluonen. Dazu verwenden wir das DQPM. Anstelle von nackten Quarks und Gluonen propagieren wir im PHSD Modell vollständig "gedresste" Partonen. Das Modell liefert die Möglichkeit den QCD-Phasenübergang zu simulieren und die dynamischen Eigenschaften des QGP zu untersuchen.

### 3.1 Hadronische Freiheitsgrade

Von allen Hadronen sind in der Natur nur die Protonen stabil. Alle anderen zerfallen entweder unter der starken, der schwachen oder der elektromagnetischen Wechselwirkung. Da wir aber hadronische und partonische Materie auf Zeitskalen von Schwerionenkollisionen  $\leq 1000$  fm/c betrachten, können wir die Effekte der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung vernachlässigen. An Mesonen sind explizit die pseudoskalaren und die Vektormesonen sowie das  $a_1$ -Meson, der axiale Partner des  $\rho$ -Mesons, enthalten. Im baryonischen Sektor sind das  $1/2^+$ -Oktett, das  $3/2^+$ -Dekuplett sowie die N(1440) und N(1535) Baryonen integriert. In Tabelle 3.1 ist eine Liste mit den Eigenschaften der verwendeten Mesonen, in Tabelle 3.2 mit den Eigenschaften der verwendeten Baryonen aufgeführt. Von den Mesonen sind die Pionen, das Eta und die pseudoskalaren Kaonen stabil. An Baryonen sind das Proton, das Neutron, sowie die Hyperonen  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ ,  $\Xi$  und  $\Omega$  stabil unter der starken Wechselwirkung. Alle anderen Hadronen können auf den betrachteten Zeitskalen zerfallen.

Niederenergetische Reaktionen werden über Resonanzstreuung behandelt. Dabei bilden die Hadronen eine Resonanz, die anschließend wieder zerfällt. Hochenergetische Streuung wird über das Lund-String-Modell [39] beschrieben. Dabei stoßen zwei Quarks in den Hadronen miteinander. Es bildet sich zwischen ihnen durch die starke Wechselwirkung der Gluonen ein "String", der an unterschiedlichen Stellen aufbricht und weitere Hadronen produziert. Da die neu erzeugten Hadronen erst nach der eigentlichen Kollisi-

on durch den Stringbruch entstehen, werden sie bis zum Zeitpunkt ihrer Produktion als normale Teilchen ohne Wechselwirkung behandelt.

	Masse	el. Ladung	Spin	Quarkzusammensetzung
$\pi^{+/-}$	138 MeV	±1	0	$u ar{d}/d ar{u}$
$\pi^0$	138 MeV	0	0	${ m d}ar{ m d}/{ m u}ar{ m u}$
$\eta$	550 MeV	0	0	$\mathrm{d} ar{\mathrm{d}}/\mathrm{u} ar{\mathrm{u}}$
$K^{+/-}$	498 MeV	±1	0	$u\bar{s}/s\bar{u}$
$K^0/\bar{K}^0$	498 MeV	0	0	${ m d}ar{ m s}/{ m s}ar{ m d}$
$\eta'$	958 MeV	0	0	$\mathrm{d} ar{\mathrm{d}}/\mathrm{u} ar{\mathrm{u}}$
$\rho^{+/-}$	770 MeV	±1	1	$u ar{\mathrm{d}} / \mathrm{d} ar{\mathrm{u}}$
$\rho^0$	770 MeV	0	1	$\mathrm{d} ar{\mathrm{d}}/\mathrm{u} ar{\mathrm{u}}$
$K^{*+/-}$	892 MeV	±1	1	$u\bar{s}/s\bar{u}$
$K^{*0}/\bar{K}^{*0}$	892 MeV	0	1	${ m d}ar{ m s}/{ m s}ar{ m u}$
ω	782 MeV	0	1	$\mathrm{d} \mathrm{\bar{d}}/\mathrm{u} \mathrm{\bar{u}}$
$\phi$	1020 MeV	0	1	${ m sar{s}}$
$a_1$	1260 MeV	0	0	${ m d}ar{ m d}/{ m u}ar{ m u}$

Tabelle 3.1: Eigenschaften der Mesonen im PHSD.

	Masse	el. Ladung	Spin	Quarkzusammensetzung
p	938 MeV	+1	1/2	uud
n	938 MeV	0	1/2	udd
Λ	1115 MeV	0	1/2	uds
$\Sigma^{+/0/-}$	1189 MeV	+1/0/-1	1/2	$\mathrm{uus}/\mathrm{uds}/\mathrm{dds}$
Ξ0/-	1315 MeV	0/-1	1/2	$\mathrm{uss}/\mathrm{dss}$
$\Delta^{++/+/0/-}$	1232 MeV	+2/+1/0/-1	3/2	$\mathrm{uuu/uud/udd/ddd}$
∑*+/0/-	$1385~\mathrm{MeV}$	+1/0/-1	3/2	$\mathrm{uss/uds/dds}$
Ξ*0/-	1530 MeV	0/-1	3/2	$\mathrm{uss}/\mathrm{dss}$
Ω	$1672~\mathrm{MeV}$	-1	3/2	SSS
N(1440)	1440 MeV	+1/0	1/2	$\mathrm{uud}/\mathrm{udd}$
N(1535)	1535 MeV	+1/0	1/2	$\mathrm{uud}/\mathrm{udd}$

Tabelle 3.2: Eigenschaften der Baryonen im PHSD.

## 3.2 Partonische Freiheitsgrade

Im partonischen Sektor enthält das Modell Quarks und Gluonen. Die Gluonen entsprechen den zeitartigen Austauschteilchen im s-Kanal-Prozess  $q + \bar{q} \to g* \to q + \bar{q}$ . Wir berücksichtigen im Quarksektor nur die drei leichten Quarks u,d,s. Die Energiedichten, bei denen wir arbeiten, sind nicht ausreichend um Charm-, Bottom- oder Top-Quarks zu erzeugen, weshalb sie hier vernachlässigt werden. Da das strange Quark schwerer als die up und down Quarks sind, erhöhen wir ihre Massen in den Rechnungen um 50 MeV bezüglich der DQPM-Quark-Masse.

Wir betrachten explizit die elastischen Reaktionen  $q+q \to q+q$ ,  $\bar{q}+\bar{q} \to \bar{q}+\bar{q}$ ,  $q+\bar{q} \to q+\bar{q}$ ,  $g+g \to g+g$ ,  $q+g \to q+g$  und  $\bar{q}+g \to \bar{q}+g$ , sowie die inelastischen Reaktionen  $q+\bar{q} \leftrightarrow g$  und  $g \leftrightarrow g+g$ . In die DQPM-Breiten gehen zusätzlich die Bremsstrahlungsprozesse  $q \leftrightarrow q+g$  und  $\bar{q} \leftrightarrow \bar{q}+g$  ein.

Für die elastischen Reaktionen und die Gluonfusion gibt es keine Beschränkungen. Sie können immer stattfinden. Der Gluonenzerfall kann stattfinden, wenn die Energie der Gluonen ausreichend groß ist. Für die Quark-Antiquark-Fusion in ein Gluon ist es allerdings notwendig, dass das Paar elektrisch und flavor neutral ist. Falls das Paar noch zusätzlich farbneutral ist, kann die Fusion nur in einem Drittel aller Fälle stattfinden, da nur zwei der drei möglichen farblosen Gluonen in der QCD existieren.

In normalen elastischen Reaktionen sind die Massen Erhaltungsgrößen und die Energieerhaltung ist an die Impulserhaltung gekoppelt. Dies ändert sich jedoch, wenn wir Off-Shell-Teilchen betrachten. In diesem Fall können sich die Massen in der Kollision verändern und wir müssen zusätzlich explizit die Energieerhaltung erfüllen. Die neuen Massen werden per Monte-Carlo bezüglich der Spektralfunktion der Partonen (2.59) gewählt. Die Wirkungsquerschnitte wurden aus DQPM-Rechnungen bestimmt und als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$  in GeV/fm<sup>3</sup> parametrisiert [40]:

$$\sigma_{el}(\epsilon) = C \cdot \left(10.11 \ e^{-\epsilon/0.78} + 141.56 \ e^{-\epsilon/0.2} + 2.25 \ e^{-\epsilon/3.73} + 0.41\right) [mB]. \tag{3.1}$$

Der Korrekturfaktor C hängt von den an der Streuung beteiligten Teilchen ab. Er ist 3/4 für Gluon-Gluon-Streung und 4/9 für Gluon-Quark-Streuung. Im Fall von Quark-Quark-Streuung ist er eine Funktion der globalen Temperatur T in MeV:

$$C(T) = 4.35 e^{-T/56.37} + 0.28.$$
 (3.2)

Der Wirkungsquerschnitt für die Fusion in ein Gluon ist in beiden Fälle ein resonanter Breit-Wigner-Wirkungsquerschnitt. Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Gluons wird durch seine Breite bestimmt. Die Zerfallswahrscheinlichkeit in einem Zeitintervall [t,t+dt] ist durch  $W=\exp(-\frac{dt}{\gamma}\Gamma)$  gegeben, wobei  $\gamma$  der relativistische Gamma-Faktor des Gluons ist. Alle Streuungen und Zerfälle werden als s-Wellen-Prozesse behandelt. Für die Reaktionen werden jeweils die Massen, die Breiten und die Wirkungsquerschnitte benötigt. Diese wurden im DQPM für den Gleichgewichtszustand berechnet und als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$  parametrisiert. Auf diese Weise erhält man automatisch den korrekten Gleichgewichtszustand und damit die korrekte Thermodynamik. Auch außerhalb des Gleichgewichts nehmen wir die Reaktionen als Funktion der lokalen Energiedichte  $\epsilon$  an. Um diese zu bestimmen wird der Ortsraum in einzelne Zellen aufgeteilt

und die Energie aller Teilchen in einer Zelle aufsummiert. Die potentielle Energiedichte ergibt sich als Funktion der modifizierten partonischen Dichte  $n_* = 2n_g + n_q + n_{\bar{q}}$  in fm<sup>-3</sup>:

 $V(n_*) = 1.3 \left( 0.2 \ n_*^{0.66} + \frac{6}{71} \ n_*^{1.42} \right) \left[ \frac{GeV}{fm^3} \right]. \tag{3.3}$ 

Das Mean-Field-Potential für Quarks ist die Ableitung der potentiellen Energiedichte nach der Quarkdichte  $U=\frac{\partial V}{\partial n_q}=\frac{\partial V}{\partial n_*}$ , das Mean-Field für Gluonen ist das doppelte Quark-Mean-Field  $U_g=2U_q$ . Die Dichte  $n_*$  hat den Vorteil, dass sie invariant unter den Prozessen  $q+\bar{q}\leftrightarrow g$  ist.

## 3.3 "Unendliche" partonische Materie

In diesem Abschnitt stellen wir die Besonderheiten vor, die es zu beachten gilt, wenn wir partonische Materie simulieren. Wir betrachten das System in einer Box mit periodischen Randbedingungen. Auf diese Weise können wir, bei einer ausreichend großen Box, die Eigenschaften eines "unendlich ausgedehnten" QGP bestimmen. Um Effekte durch das endliche Volumen zu vermeiden, muss die Box so groß gewählt werden, dass eine weitere Vergrößerung keine oder nur geringe Auswirkungen auf die berechneten Erwartungswerte hat. Andererseits sollte die Box nicht zu groß gewählt werden, um die Rechenzeit nicht unnötig zu vergrößern. Wir werden in dieser Arbeit eine Box mit einem Volumen von  $V = 729 \text{ fm}^3$  verwenden. Sollte ein Teilchen aus dieser Box herauslaufen, wird es an der gegenüberliegenden Seite mit dem gleichen Impuls wieder eingefügt. Eine andere wichtige Größe ist die Zeitschrittweite dt, mit der die Testteilchen propagiert werden. Sie muss möglichst klein gewählt werden, sodass man Kontinuumsphysik extrahiert und keine unerwünschten Effekte aufgrund von Diskretisierungsfehlern erhält. Andererseits sollte sie aus CPU-Zeitgründen möglichst groß gewählt werden. Eine gute Observable um die richtige Schrittweite für ein System zu finden, ist die Stoßrate. Sie ist als die Anzahl der Stöße pro Zeitschritt geteilt durch die Zeitschrittweite definiert:

$$I_{Coll} = \frac{\# \text{St\"oße}}{dt}.$$
 (3.4)

Sie ist für große Schrittweiten klein und steigt für kleiner werdende Schrittweiten an, bis sie ab einem bestimmten Wert ihren konstanten Kontinuumswert annimmt. Die optimale Zeitschrittweite sollte so gewählt werden, dass sie gerade noch den Kontinuumswert reproduziert. Als weitere Einschränkung muss die Schrittweite so klein gewählt werden, dass jedes Teilchen pro Zeitschritt maximal einen Stoß ausführt. Andernfalls kann die Kausalität verletzt werden. Wir werden eine Schrittweite von  $dt=0.2~{\rm fm/c}$  verwenden. Das entspricht einem  $1/9~{\rm der}$  Zeit, die ein Teilchen mit Lichtgeschwindigkeit (c=1) benötigt, um ein Proton zu durchqueren.

Eine andere Besonderheit in den Boxrechnungen ist die Form, die die Transportgleichungen (2.67-2.69) annehmen. Die retardierten Selbstenergien und Breiten hängen weder vom Impuls noch von der Zeit ab. Sie sind lediglich eine Funktion der lokalen Energiedichte. Darüber hinaus bekommen sie eine Ortsabhängigkeit, die dazu führt, dass die

Teilchen beschleunigt werden, wenn sie in ein dünneres Medium übergehen. In den Boxrechnungen ist die Dichte jedoch annähernd konstant. Daher sind Änderungen in der lokalen Energiedichte vernachlässigbar klein und können ignoriert werden. Das führt auf die folgenden vereinfachten Gleichungen für die Testteilchenpropagation:

$$\mathbf{X}_{i}(t+dt) = \mathbf{X}_{i}(t) + \mathbf{P}_{i}(t)/\epsilon_{i}(t)dt$$

$$\mathbf{P}_{i}(t+dt) = \mathbf{P}_{i}(t)$$

$$\epsilon_{i}(t+dt) = \epsilon_{i}(t).$$
(3.5)

Wir lösen sie durch das simple Euler-Verfahren. Die Energie und der Impuls, und damit auch die Masse, bleiben während der Propagation erhalten. Lediglich die Ortskoordinate verändert sich. Die Gleichungen entsprechen den Bewegungsgleichungen eines relativistischen Teilchens mit verschwindender Breite. Sie gelten jedoch nur, solange die Teilchen im Ortsraum möglichst homogen verteilt sind. Wir müssen daher darauf achten, den Ortsraum bei der Initialisierung des Anfangszustandes gleichmässig zu besetzten. Um die Schwankungen in der lokalen Energiedichte möglichst gering zu halten, werden wir nicht nur eine einzelne Box simulieren, sondern mehrere. Die lokalen Energiedichten und die potentiellen Energiedichten werden über alle Simulationen gemittelt. Ansonsten werden sie aber unabhängig voneinander durchgeführt. Diese Methode wird Die Erwartungswerte ergeben sich dann wie im klassischen Fall (siehe Gleichung (2.13)) als Mittelwert über alle Teilchen in allen Boxen. parallel Ensemble genannt. Da wir an den Gleichgewichtseigenschaften des System interessiert sind, propagieren wir es solange,

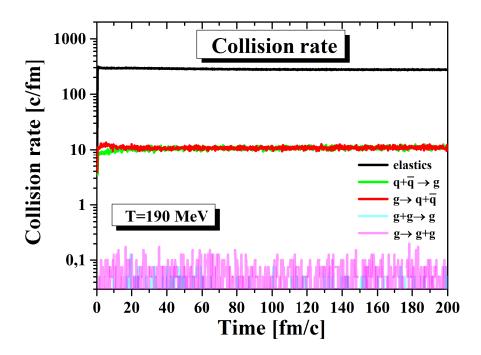


Abbildung 3.1: Stoßraten für T=190 MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Anschließend propagieren wir es weiter in der Zeit und bestimmen den statistischen Erwartungswert aus dem zeitlichen Mittelwert des Systems. Diese sind nach der Ergodenhypothese gleich. Als Fehler des Erwartungswertes verwenden wir die Standartabweichung der zeitlichen Mittelung.

Abschließend benötigen wir noch eine Vorschrift, um den 4-Impulsraum zu initialisieren. Theoretisch können wir die Teilchen darin beliebig verteilen. Wenn wir das System lange genug propagieren, wird es nach einiger Zeit zwangsläufig seinen Gleichgewichtszustand einnehmen. Geschickter ist es hingegen, das System direkt oder möglichst nahe am Gleichgewichtszustand zu initialisieren. Da wir diesen jedoch nicht kennen, werden wir den DQPM-Gleichgewichtszustand verwenden. Dieser stimmt zwar nicht mit dem exakten überein, ist aber eine sehr gute Approximation:

$$f_{DQPM}(\omega, \mathbf{p}) = n_{F/B}(\frac{\omega \mp \mu_q}{T}) \cdot \rho(\omega, \mathbf{p}, T).$$
 (3.6)

Für die Teilchendichten verwenden wir ebenfalls die DQPM-Resultate. Da wir die Teilchen bezüglich der DQPM-Impulsverteilung initialisieren, reproduzieren wir automatisch die DQPM-Energiedichte, die eine gute Approximation der Gitter-QCD-Resultate ist. Zunächst überprüfen wir, wie lange das System benötigt, um in den Gleichgewichtszustand überzugehen. Dazu betrachten wir die Häufigkeit der unterschiedlichen Prozesse. Im Gleichgewicht müssen sich die Reaktionen  $g \leftrightarrow g + g$  und  $g \leftrightarrow q + \bar{q}$  gegenseitig ausgleichen und die Häufigkeit der elastischen Kollisionen muss zeitlich konstant sein. In Abbildung 3.1 sind die Stoßraten für die einzelnen Reaktionen in einer Box mit der

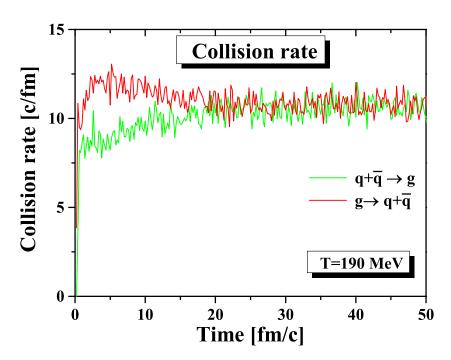


Abbildung 3.2: Stoßraten für die Prozesse  $g \to q + \bar{q}$  und  $q + \bar{q} \to g$  für T = 190 MeV und verschwindes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

Temperatur T=190 MeV und verschwindendem Quark-chemischen Potential  $\mu_q$  abgebildet. Die Reaktionen  $g\leftrightarrow q+\bar{q}$  sind im Vergleich mit den elastischen Kollisionen um jeweils 96% unterdrückt. Die Prozesse  $g\leftrightarrow g+g$  sind noch einmal um einen weiteren Faktor 100 unterdrückt. Wir werden sie daher vernachlässigen. Das hat den Vorteil, dass die modifizierte Dichte  $n_*=2n_g+n_q+n_{\bar{q}}$  und damit die potentielle Energiedichte (3.3) invariant in allen Reaktion sind.

In Abbildung 3.2 sind die Kollisionsraten für die Prozesse  $g \leftrightarrow q + \bar{q}$  ohne die rein gluonische Prozesse abgebildet. Die Reaktionen benötigen etwa 20 fm/c um ins Gleichgewicht überzugehen. Abbildung 3.3 zeigt die zeitliche Entwicklung der einzelnen Quarkflavor und der Gluonen. Quarks und Antiquarks kommen für verschwindendes Quarkchemisches Potential  $\mu_q$  exakt gleich oft vor. Die größten Veränderungen finden in den ersten 20 fm/c statt. Die weiteren Änderungen sind vergleichsweise gering. Die strange Quarks werden wegen der höheren Masse von 50 MeV gegenüber den up und down Quarks leicht unterdrückt. Dieser Effekt wird für größere Temperaturen und damit größere effektive Massen immer schwächer.

Da der Gleichgewichtszustand sehr schnell erreicht wird und nur geringe Abweichungen vom DQPM-Grundzustand aufweist, werden wir die elektromagnetischen Felder für  $t \geq 0$  berücksichtigen und nicht erst abwarten, bis das System vollständig äquilibriert ist.

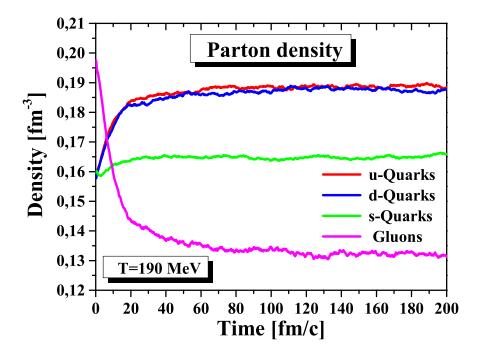


Abbildung 3.3: Zeitliche Entwicklung der Dichten für die unterschiedlichen Quarkflavor und Gluonen für T=190 MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

### 3.4 QCD-Phasenübergang

Nachdem wir erste Simulationen in der partonischen Phase durchgeführt haben, werden wir sie nun mit der hadronischen Phase kombinieren um QCD-Materie am Phasenübergang zu beschreiben. Die entscheidende Größe für den Phasenübergang ist die lokale Energiedichte. Liegt sie über der kritischen Energiedichte  $\epsilon(T_c) = \epsilon_c = 0.495 \text{ GeV/fm}^3$ , lösen sich die Hadronen in ihre Konstituentenquarks auf, liegt die Energiedichte unter diesem Wert, formen sich aus den Quarks wieder Hadronen. Eine besondere Rolle nehmen dabei die Vektormesonen ein. Die leichten pseudoskalaren Mesonen, allen voran das Pion mit einer Masse von nur 138 MeV, sind zu leicht um in zwei "gedresste" Quarks zu zerfallen. Daher müssen zunächst zwei von ihnen ein schwereres Vektormeson formen. Das Vektormeson hat dann genügend Masse, um in seine Konstituentenquarks zu zerfallen. Auf der anderen Seite haben die neu entstandenen Mesonen durch die partonischen Mean-Field-Potentiale soviel Energie zur Verfügung, dass sie fast ausschließlich in die schweren Vektormesonen hadronisieren, die dann wieder in die leichten pseudoskalaren Teilchen zerfallen. Gleiches gilt auch für die Baryonen.

Die Hadronen werden wie die Partonen durch die vereinfachten Transportgleichungen (3.5) für die Testteilchen propagiert. Wir benutzen für die Impulsverteilung der Hadronen im Gleichgewicht ebenfalls Fermi- und Boseverteilungen. Diese Näherung ist für Hadronen noch besser als für Partonen, da die hadronischen Teilchen schwächer wechselwirken. Da die Hadronen in der Regel vergleichsweise geringe Breiten haben, verwenden wir die Quasiteilchen-Näherung und ersetzen die Spektralfunktionen durch Delta-Distribution. Die Zustandsgleichung entspricht damit der eines nichtwechselwirkenden Gases massiver Teilchen.

Vergleichen wir die Energiedichte des hadronsichen Systems mit der DQPM-Energiedichte, fällt auf, dass die hadronische Energiedichte bis weit über die kritische Temperatur  $T_c$  unterhalb der partonischen liegt. Dies hat zur Folge, dass das System auch noch oberhalb der kritischen Energiedichte  $\epsilon_c$  in der hadronsichen Phase verbleibt. In der Transportsimulation wird dieses Verhalten reproduziert, da den Hadronen die Energie fehlt, um neben den Quarkmassen noch die Mean-Field-Potentiale zu generieren. Die Hadronen können nicht mehr in Quarks zerfallen, während die Rückreaktion problemlos stattfinden kann. Dadurch geht das System unweigerlich in die hadronische Phase über. Die fehlende hadronische Energie ist die Wechselwirkungsenergie, die wir in der Zustandsgleichung bisher vernachlässigt haben. In der partonischen Phase haben wir sie als die raumartigen Anteile der Energiedichte berücksichtigt. Wir führen die Wechselwirkungsenergie der Hadronen ebenso wie die Wechselwirkungsenergie der Partonen als eine potentielle Energiedichte ein. Diese bestimmen wir, in dem wir die gesamte hadronische Energiedichte an Gitter-QCD-Resultate knapp unter- und oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  anfitten. Die dazu verwendeten Daten stammen aus Ref. [9].

Abbildung 3.4 zeigt die hadronische, die Gitter-QCD-Energiedichte sowie das gefittete Potential und die daraus resultierende hadronische Gesamtenergiedichte. Für die potentielle Energiedichte verwenden wir die Funktion

$$V_{had}(T) = 619.729 \cdot (T - 0.129)^{7/3} \cdot e^{-208.17 \cdot (T - 0.129)^2} \left[ \frac{GeV}{fm^3} \right], \tag{3.7}$$

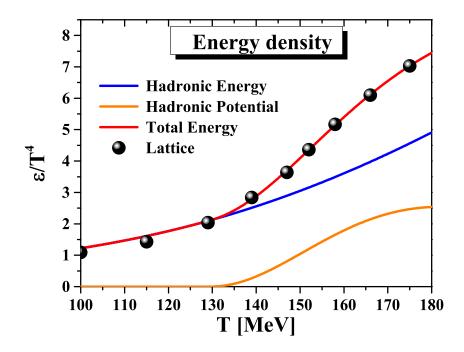


Abbildung 3.4: Hadronische Energiedichte (blau), Fit der hadronischen potentiellen Energiedichte (orange), totale hadronische Energiedichte (rot) und Gitter-QCD Resultate für die totale Energiedichte (Kreise) aus Ref. [9] mit jeweils  $1/T^4$  skaliert um dimensionslose Größen zu erhalten.

für die Temperatur T in MeV. Die totale hadronische Energiedichte inklusive potentieller Energie kann die Gitter-QCD-Daten sehr gut reproduzieren. Das gefittete Potential parametrisieren wir anschließend wieder als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$ . Die niedrigsten Datenpunkte liegen bei einer Temperatur von T=100 MeV. Die Wechselwirkungsenergie wird erst ab einer Temperatur von T=130 MeV relevant. Bis dahin lässt sich die Energiedichte allein mit der kinetischen Energie reproduzieren. Über die potentielle Energie führen wir auch automatisch ein hadronisches Mean-Field-Potential ein, dass dem partonischem entgegenwirkt und dafür sorgt, dass die Hadronen die nötige Energie haben, um in Quarks zerfallen zu können.

In der partonischen Phase hat sich gezeigt, dass die Gluonen etwa das doppelte Mean-Field-Potential der Quarks tragen. Wir können es daher für die partonische Dynamik weitestgehend vernachlässigen. Dasselbe gilt in der hadronischen Phase nicht. Um die Mean-Field-Potentiale zu bestimmen, müssten wir eine selbstkonsistente Berechnung mit allen 23 im PHSD vorkommenden Hadronen durchführen. Wir werden daher an dieser Stelle nur die prinzipielle Machbarkeit demonstrieren, indem wir ein vereinfachtes Modell für die hadronische Phase vorstellen, anstatt die volle HSD-Dynamik zu verwenden. Zunächst vernachlässigen wir alle Baryonen und beschränken uns auf den mesonischen Sektor. Diese Näherung ist noch vertretbar, solange man sich auf verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$  beschränkt. Die zweite Vereinfachung besteht darin, alle Vektormesonen zu vernachlässigen, die nur in drei oder mehr stabile Mesonen zerfal-

len und den anderen Mesonen alle Zerfälle, außer denen in zwei stabile Mesonen, zu verbieten. Weiter ordnen wir allen instabilen Mesonen das doppelte hadronische Mean-Field-Potential wie den stabilen Mesonen zu. Auf diese Weise erhält man eine Dynamik, die stark der partonischen ähnelt. Wir können nun ebenfalls die Mean-Field-Potentiale in der rein hadronischen Dynamik vernachlässigen.

Als nächstes müssen wir die potentiellen Energiedichten in der gemischten Phase festlegen. Bisher hatten wir die Potentiale nur für ein rein hadronisches oder rein partonisches System bestimmt. Wir führen dazu die Skalierungsfaktoren  $x_H$  und  $x_P$  ein, die beschreiben, wie sich die potentiellen Energiedichten in der gemischten Phase gegenüber der reinen Phase verhalten. Die totale Energiedichte ergibt sich damit aus

$$E_{tot} = E_{kin,P} + E_{kin,H} + x_H V_H(E_{tot}) + x_P V_P(E_{tot}), \tag{3.8}$$

wobei die Potentiale denen in einer reinen Phase entsprechen. Die Abweichungen werden allein durch die Skalierungsfaktoren  $x_H$  und  $x_P$  beschrieben. Sie müssen die Randbedingungen

$$\lim_{E_{kin,P}\to 0} x_H = 1, \qquad \lim_{E_{kin,H}\to 0} x_H = 0,$$

$$\lim_{E_{kin,P}\to 0} x_P = 0, \qquad \lim_{E_{kin,H}\to 0} x_P = 1,$$
(3.9)

erfüllen, um die reinen Phasen reproduzieren zu können und sie müssen die Gesamtenergie unter Übergängen zwischen den beiden Phasen invariant lassen. Da die Potentiale von der Gesamtenergie abhängen, muss die Gleichung (3.8) zudem iterativ gelösen werden. Zunächst müssen wir aber erstmal die Skalierungsfaktoren festlegen. Dazu parametrisieren wir das Potential linear in der Dichte mit einem temperaturabhängigen Vorfaktor, der dem Mean-Field-Potential entspricht,  $V_{P,H} = U_{P,H}(T) \cdot \rho_{0 P,H}$ . Die Skalierungsfaktoren sind dann durch das Verhältnis zwischen der aktuellen lokalen Dichte und der Dichte im Gleichgewicht gegeben  $x_{P,H} = \rho_{P,H}/\rho_{0 P,H}$ . In den Dichten müssen Gluonen und instabile Mesonen doppelt gezählt werden. Man erhält nun für die Gesamtenergie:

$$E_{tot} = E_{kin,P} + E_{kin,H} + \rho_H U_H(T) + \rho_P U_P(T). \tag{3.10}$$

Da die Potentiale nicht mehr von der lokalen Energiedichte  $\epsilon$ , sondern von der globalen Temperatur T abhängen, verlieren wir einen Teil der Dynamik und zwingen die potentielle Energie in den Gleichgewichtszustand. Dafür müssen wir die Energie nicht mehr iterativ bestimmen. Sie ist damit automatisch invariant unter allen Hadronisierungsund Zerfallsprozessen.

Abbildung 3.5 zeigt die Gesamtenergie und wie sie sich aus den einzelnen Beiträgen zusammensetzt, aus der Simulation des vereinfachten Modells. Als Anfangszustand wurde eine komplett partonische Box mit einer Temperatur von  $T=T_c=158$  MeV und verschwindendem Quark-chemischen Potential  $\mu_q$  verwendet. Zu Beginn finden sehr viele Hadronisierungsprozesse statt. Allein im ersten Zeitschritt wird 20% der Energie in die hadronische Phase transferiert. Nach etwa 20 fm/c verändert sich die Energiezusammensetzung nur noch langsam. Es finden aber noch immer etwas mehr Hadronisierungen als

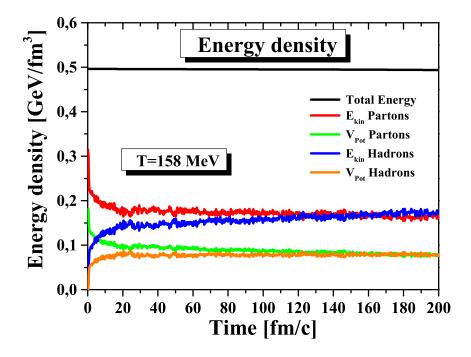


Abbildung 3.5: Zeitlicher Verlauf der einzelnen Energiebeiträge und der Gesamtenergie für die kritische Temperatur  $T = T_c = 158$  MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

Zerfälle statt, da immer noch Energie von der partonischen in die hadronische Phase übergeht. Das liegt daran, dass durch die fehlende Mean-Field-Dynamik die hadronische Phase immer noch leicht bevorzugt wird. Die Anteile der kinetischen Energien und der potentiellen Energien sind in beiden Phasen nach etwa 120 fm/c gleich groß und der Energieübertrag verlangsamt sich. Das liegt daran, dass sich die Anzahl der Hadronisierungen und Zerfälle nach 120 fm/c nur noch langsam verändern, wie in Abbildung 3.6 zu sehen ist. Die meisten Prozesse finden jedoch in den ersten 40 fm/c statt. Dabei überwiegen leicht die Hadronisierungen. Später gleicht es sich etwas aus, allerdings fluktuiert die Anzahl der Hadronisierungen stärker als die der Zerfälle. Sobald die Mean-Field-Potentiale für die volle HSD-Dynamik bekannt sind, sollte das Modell auch am Phasenübergang stabile Simulationen mit der vollen Dynamik erlauben. Auf diese Weise können Transportkoeffizienten auch nahe an der Phasengrenze bestimmt werden, was mit den bisherigen Modellen noch nicht möglich ist.

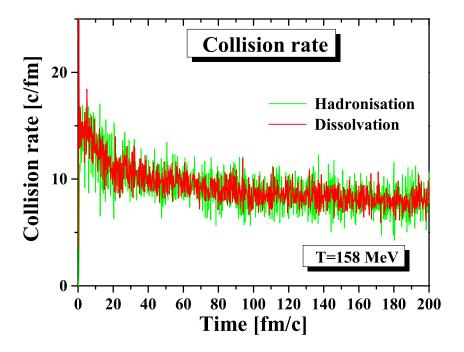


Abbildung 3.6: Stoßraten für die Hadronisierung und den Hadron<br/>enzerfall für die kritische Temperatur  $T=T_c=158$  MeV und verschwinde<br/>ndes Quarkchemisches Potential  $\mu_q$ .

## 4 Elektrische und magnetische Eigenschaften des Quark-Gluon-Plasmas

Nachdem wir bisher nur ungestörte Simulationen durchgeführt haben, werden wir nun die Wirkung der elektromagnetischen Felder untersuchen. Dazu lassen wir ein konstantes elektrisches Feld in z-Richtung beziehungsweise ein konstantes magnetisches Feld in y-Richtung auf die gesamte Box wirken. Zunächst beschränken wir uns auf verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

### 4.1 Elektrische Leitfähigkeit

Um das elektrische Feld zu integrieren, müssen wir nur den zusätzlichen Term

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = qe\mathbf{E} \tag{4.1}$$

in die Testteilchenpropagation einfügen. q ist die Ladung des Teilchens und e die Elementarladung. Das Feld wirkt nur auf die Quarks und nicht auf die Gluonen. Es sorgt dafür, dass die unterschiedlich geladenen Quarks entgegengesetzt beschleunigt werden. Sie werden dann durch Kollisionen untereinander wieder abgebremst, sodass sich nach einiger Zeit ein konstanter Strom einstellt. Die entsprechende Observable ist die elektrische Flussdichte:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{V} \sum q_i e \frac{\mathbf{p}_i}{m_i}.$$
 (4.2)

Für nicht zu große Felder ist sie proportional zum elektrischen Feld **E**. Die Proportionalitätskonstante ist die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_0$ :

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}.\tag{4.3}$$

In der Transportsimulation können wir die Flussdichte einfach ausrechnen und so die Leitfähigkeit bestimmen. Dazu darf das elektrische Feld aber nicht zu stark sein, da andernfalls die Teilchen nicht mehr durch Stöße abgebremst werden können und der Fluss mit der Zeit divergiert. Zusätzlich muss das System dicht genug sein, damit überhaupt genügend Stöße stattfinden können. Es muss auch darauf geachtet werden, dass durch das Feld die Energie in der Box nicht zu stark erhöht wird und sich die Temperatur T nur geringfügig verändert. Wir werden daher nur Felder verwenden, die die Energie

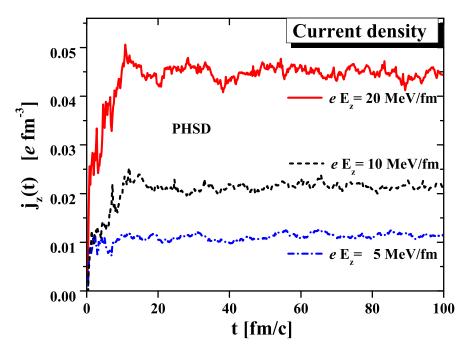


Abbildung 4.1: Zeitlicher Verlauf der elektrischen Flussdichte für unterschiedliche konstante elektrische Felder für  $T=190~{\rm MeV}$ . Die Abbildung wurde aus Ref. [41] entnommen.

um maximal 1% erhöhren. In Ref. [41] wurde diese Methode bereits verwendet um die elektrische Leitfähigkeit des QGP bei verschwindendem Quark-chemischem Potential  $\mu_q$  zu berechnen. Dabei zeigte sich, dass die geforderten Bedingungen in der partonischen Phase erfüllt sind. Abbildung 4.1 zeigt die elektrische Flussdichte  $j_z$  aus dieser Arbeit. Sie hat nach etwa 10 fm/c ihren Gleichgewichtszustand erreicht und bleibt dann die weitere Rechnung über, bis auf statistische Fluktuationen, stabil. Man kann an Abbildung 4.1 schon die Proportionalität des Flusses zum elektrische Feld erahnen. Dies bestätigte sich in Ref. [41] für Feldstärken bis zu eE = 50 MeV/fm (siehe Abbildung 4.2). Obwohl die geforderten Bedingungen in der partonischen Phase erfüllt sind, gilt dies nicht für die hadronische Phase. Hier ist das System so dünn, dass die Teilchen nicht genügend abgebremst werden können und der Fluss divergiert, sodass man auf diese Weise nicht die Leitfähigkeit bestimmen kann. Wir benötigen daher eine andere Methode.

Dazu verwenden wir das Drude-Modell. Es wurde ursprünglich entwickelt um die Leitfähigkeit von Metallen zu erklären, scheitert aber daran, dass es davon ausgeht, dass alle Elekronen zum Ladungstransport beitragen und dass die Quantenstatistik vernachlässigt wird. Damit ist es allerdings ideal auf das QGP anwendbar, da hier tatsächlich alle (geladenen) Teilchen beitragen. Weiter ist die Temperatur so hoch, dass die Einflüsse der Quantenstatistik ohne Probleme vernachlässigt werden können. Das Drude-Modell geht von der Bewegungsgleichung

$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v_D = -eE \tag{4.4}$$

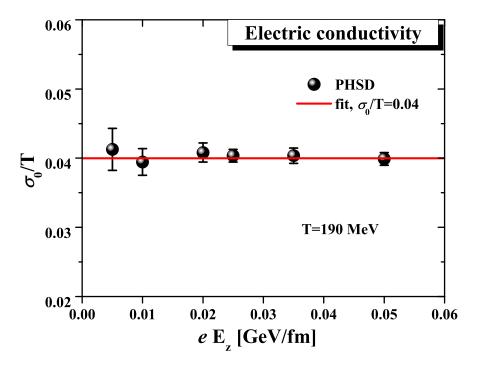


Abbildung 4.2: Elektrische Leitfähigkeit über der Temperatur für  $T=190~{\rm MeV}$  als Funktion der externen Feldstärke. Die Abbildung wurde aus Ref. [41] entnommen.

aus. Der Reibungsterm ist inverse proportional zur mittleren Stoßzeit  $\tau$  und proportional zur Driftgeschwindigkeit  $v_D$ . Je mehr Kollisionen stattfinden, desto stärker wird das Teilchen abgebremst. Das Drude-Modell liefert für die Leitfähigkeit  $\sigma_0$  eines Elektronengases den Ausdruck

$$\sigma_0 = \frac{e^2 n_e \tau}{m_e^*},\tag{4.5}$$

mit der Elektronendichte  $n_e$  und der effektiven Elektronenmasse  $m_e^*$ . Die Drude-Leitfähigkeit lässt sich leicht im DQPM ausrechnen. Die Dichten und die Massen der Quarks sind gegeben und die Stoßrate entspricht der inversen Breite  $\tau^{-1} = \Gamma$ . Man erhält für die Leitfähigkeit:

$$\sigma_{0,DQPM} = \frac{2}{9} \frac{e^2 \ n_q}{M_q \Gamma_q}.\tag{4.6}$$

Der Vorfaktor 2/9 ist das durchschnittliche Ladungsquadrat der Quarks. Obwohl das Drude-Modell in der partonischen Phase eine etwas kleinere Leitfähigkeit als der Transportansatz voraussagt, ist es dennoch sehr nützlich um das qualitative Verhalten der Leitfähigkeit zu erklären. Für die weitere Diskussion betrachten wir anstelle der Leitfähigkeit das dimensionslose Verhältnis  $\sigma_0/T$ , welches sich leichter mit anderen Rechnungen vergleichen lässt. Abbildung 4.3 zeigt einen Vergleich der PHSD und der DQPM Leitfähigkeit (4.6) für unterschiedliche Temperaturen aus Ref [41]. Das Verhältnis  $\sigma_0/T$ 

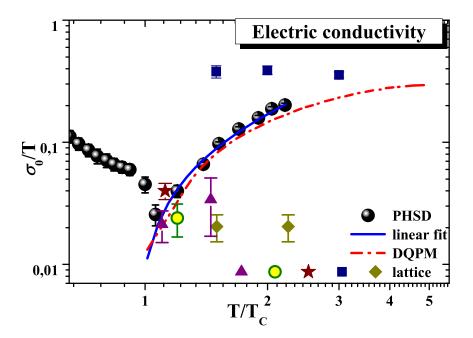


Abbildung 4.3: Elektrische Leitfähigkeit über der Temperatur als Funktion des Verhältnisses  $T/T_c$ . Die schwarzen Symbole zeigen die PHSD-Resultate. Sie können durch einen linearen Fit beschrieben werden (blaue Linie). Die rote Linie zeigt die DQPM-Resultate. Die anderen Symbole sind Ergebnisse unterschiedlicher Gitter-QCD-Rechnungen. Die Abbildung wurde aus Ref. [42] entnommen.

steigt oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  linear an und kann durch den Fit

$$\frac{\sigma_0(T)}{T} = 0.01 + 0.16 \ \frac{T - T_c}{T_c} \tag{4.7}$$

beschrieben werden. Das DQPM liefert eine etwas kleinere Leitfähigkeit als das PHSD Modell. Unterhalb der kritischen Temperatur fällt  $\sigma_0/T$  mit steigender Temperatur leicht ab. Für sehr hohe Temperaturen wird  $\sigma_0/T$  konstant. Das liegt daran, dass für hohe Temperaturen die Masse und die Breite proportional zur Temperatur T sind und die Teilchendichte mit  $T^3$  skaliert. Die Temperaturabhängigkeit fällt dann in  $\sigma_{0,DQPM}/T$  (4.6) weg. In Abschnitt 4.3 werden wir die Leitfähigkeit für endliches Quark-chemisches Potential  $\mu_q$  untersuchen.

### 4.2 Magnetisches Moment

Wie das elektrische Feld wirkt auch das Magnetfeld nur auf die Quarks. Um die Wirkung des Feldes zu untersuchen starten wir mit der Dirac-Gleichung für ein freies Teilchen in einem externen Feld  $A_{\mu}$ :

$$(\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi(p) = 0, \qquad D_{\mu} = p_{\mu} - qeA_{\mu}.$$
 (4.8)

Ohne elektrisches Feld verschwindet die zeitliche Komponente des Viererpotentials und die räumlichen Komponenten können für ein konstantes Magnetfeld als  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{x}$  geschrieben werden.

Zunächst bringen wir die Dirac-Gleichung in die Schrödingerform:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 E & 0_2 \\ 0_2 & \mathbb{1}_2 E \end{pmatrix} \psi(p) = H_{Dirac} \psi(p) = \gamma^0 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 m & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} & \mathbb{1}_2 m \end{pmatrix} \psi(p). \tag{4.9}$$

Anschließend adjungieren wir die Gleichung und multiplizieren beide miteinander. Offensichtlich verhalten sich Fermionen und Antifermionen in einem Magnetfeld gleich. Dadurch erhalten wir eine Gleichung mit einem nur noch  $2 \times 2$ -dimensionalem Operator, der gleichzeitig Fermionen und Antifermionen beschreibt. Der Zustand  $\psi_2$  ist jetzt ein 2-komponentiger Vektor anstelle des vollen 4-komponentigen Dirac-Spinors.

$$2\psi_2^{\dagger}(p)E^2\psi_2(p) = 2\psi_2^{\dagger}(p)(\mathbb{1}_2 m^2 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D})^2)\psi_2(p). \tag{4.10}$$

Wir gehen nun von kleinen Magnetfeldern aus und können damit den Impulsanteil unter Vernachlässigung quadratischer Terme in  ${\bf B}$  wie folgt umschreiben:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D})^2 = \mathbf{D}^2 - qe\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{D}^2 = (\mathbf{p} - qe\mathbf{A})^2 = \mathbf{p}^2 - qe\mathbf{L}\mathbf{B}.$$
 (4.11)

Damit erhält man für den nun 2×2-dimensionalen Hamiltonoperator die genäherte Form

$$H_{Dirac} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - qe(\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma})\mathbf{B}} \approx E - \frac{qe}{2E}(\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma})\mathbf{B} = E - \frac{qe}{2E}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S})\mathbf{B}, \quad (4.12)$$

wobei wir wieder die geringe Magnetfeldstärke ausgenutzt haben.  $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$  ist der Spinoperator, der die beiden Komponenten der Wellenfunktion  $\psi_2$  unterscheidet,  $\mathbf{L}$  ist der Drehimpulsoperator. Im Fall kleiner Energien  $E \to \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + m$  geht die Gleichung in die nicht-relativistische Pauligleichung über:

$$H_{Pauli} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{qe}{2m} (\mathbf{L} + \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{B}. \tag{4.13}$$

Der Einfluss des Magnetfeldes auf die Energie des System wird durch das magnetische Moment  $\mu$  bestimmt:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S = \frac{qe}{2E}(\mathbf{L} + 2\mathbf{S}). \tag{4.14}$$

Es besteht aus zwei Beiträgen: Der eine entsteht durch den Drehimpuls des Teilchens, der andere durch den Spin. Wir werden beide Anteile separat auswerten, um die vollständige magnetische Response des Systems zu erhalten.

#### 4.2.1 Drehimpuls

Der Drehimpuls ist das Resultat der Lorentzkraft, die im Magnetfeld auf das Teilchen wirkt. Sie sorgt dafür, dass elektrisch geladene Teilchen im konstanten Magnetfeld auf Kreisbahnen laufen. In relativistischer Form lautet sie:

$$\mathbf{F}_L = \frac{qe}{E}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}). \tag{4.15}$$

Ebenso wie die Wirkung des elektrischen Feldes (4.1) müssen wir die Lorentzkraft in die Propagation der Testteilchen integrieren. Der Drehimpuls  $\mathbf{L}$  ist durch das Kreuzprodukt aus Ort und Impuls gegeben. Dabei ist zu beachten, dass wir die Ortskoordinate in Abhängigkeit das Mittelpunktes der Kreisbahn  $\mathbf{r}_0$  angeben müssen, da wir sonst den Drehimpuls bezüglich des Koordinatenursprungs berechnen:

$$\mathbf{L} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{p}. \tag{4.16}$$

Da die Lorentzkraft immer zum Zentrum der Rotation hin zeigt, kann sie durch  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + R \frac{\mathbf{F}_L}{|\mathbf{F}_L|}$  bestimmt werden. Der Radius der Kreisbahn ist mit der Präzessionsfrequenz  $\omega = \frac{p_\perp}{ER}$  verknüpft. Für die Rotation im Magnetfeld lautet sie  $\omega = \frac{qeB}{E}$ , wobei  $p_\perp$  der zum Magnetfeld transversale Impulsanteil ist. Setzen wir alles in den Drehimpuls ein erhalten wir:

$$\mathbf{L} = \frac{Rqe}{|\mathbf{F}_L|E}(\mathbf{p}(\mathbf{pB}) - \mathbf{Bp}^2). \tag{4.17}$$

 $\mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{B})$  ist die Projektion des Impulses auf die Richtung des Magnetfelds. Zieht man dies von  $\mathbf{B}\mathbf{p}^2$  ab, erhält man den zum Magnetfeld transversalen Anteil des Impulses multipliziert mit dem Magnetfeld. Ersetzen wir nun noch den Radius erhält man

$$\mathbf{L} = \frac{-p_{\perp}^3}{|\mathbf{F}_L|E} sign(q) \mathbf{e}_B, \tag{4.18}$$

wobei  $\mathbf{e}_B$  der Einheitsvektor in Richtung des Magnetfeldes ist. Betrachten wir ein Magnetfeld, dass nur in der y-Richtung liegt, wird  $\mathbf{e}_B$  zu sign(B). Der Betrag der Lorentzkraft ist durch  $|\mathbf{F}_L| = \frac{|qeB|}{E} p_{\perp}$  gegeben. Damit lautet der Drehimpuls, bzw. dessen y-Komponente:

$$L_y = \frac{-p_\perp^2}{aeB}. (4.19)$$

Für das magnetische Moment des Drehimpulses  $\mu_L$  erhält man:

$$\mu_L = \frac{-p_{\perp}^2}{2RE}.\tag{4.20}$$

Da durch die Lorentzkraft nur die Richtung des Impulses und nicht sein Betrag geändert wird, sind Impulsbetrag und Energie unabhängig vom Magnetfeld. Das bedeutet, dass der Energiebeitrag der Lorentzkraft unabhängig von der Feldstärke ist:

$$\Delta E_{mag,L} = -\mu_L B = -\frac{-p_{\perp}^2}{2BE} B = \frac{p_{\perp}^2}{2E}.$$
 (4.21)

Theoretisch könnten wir ihn ohne externes Magnetfeld berechnen. Wir haben allerdings in (4.20) die Drehimpulsquantisierung vernachlässigt. Wir können daher nicht mit Sicherheit sagen, ob das magnetische Moment invers vom Magnetfeld abhängt oder doch ein anderes komplexeres Verhalten zeigt. Stattdessen berechnen wir den Drehimpuls  $L_y$  (4.19), quantisieren ihn und bekommen mit (4.14) das magnetische Moment  $\mu_L$ .

#### 4.2.2 Spin

Die andere Komponente, die zum magnetischen Moment beiträgt, entsteht aus dem Spin der Quarks, den wir bisher komplett vernachlässigt haben. Um ihn zu berücksichtigen führen wir den Spin **S** als weiteren Freiheitsgrad in unsere Testteilchenfunktion (2.66) ein:

$$F_{XPS} = iG^{<}(X, P, S) \sim \sum_{i=1}^{N} \delta^{(3)}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_{i}(t))\delta^{(3)}(\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i}(t))\delta(P_{0} - \epsilon_{i}(t))\delta^{(2)}(\mathbf{S} - \mathbf{S}_{i}(t)).$$
(4.22)

Da alle Reaktionen im PHSD spinunabhängig sind, erfolgt die einzige Wechselwirkung des Spins über das Magnetfeld. Wir könne daher den Spinanteil von der restlichen Wellenfunktion abseparieren. Auf die Spinwellenfunktion wirkt nur der Anteil des Hamiltonoperators (4.12), der den Spinoperator enthält:

$$H_S = -\frac{qe}{2E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}.\tag{4.23}$$

Die Spinwellenfunktion für ein Fermion mit Spin 1/2 ist ein 2-komponentiger komplexer Vektor:

$$|\chi\rangle = \left|\uparrow\right\rangle. \tag{4.24}$$

Dabei steht  $<\uparrow | \uparrow>$  für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spin in z-Richtung parallel zum Magnetfeld, und  $<\downarrow | \downarrow>$  für die Wahrscheinlichkeit, dass der Spin in z-Richtung antiparallel zum Magnetfeld ausgerichtet ist. Die Spinwellenfunktion ist auf 1 normiert  $<\chi|\chi>=<\uparrow|\uparrow>+<\downarrow|\downarrow>=1$ . Die Spinprojektionen auf die Koordinatenachsen ergeben sich aus:

$$S_i = \frac{1}{2} < \chi |\sigma_i| \chi > . \tag{4.25}$$

Wir benötigen insbesondere die Projektion auf die y-Achse. Mit Hilfe des Hamiltonoperators können wir nun die Bewegungsgleichung für die Spinwellenfunktion herleiten. Die Zeitentwicklung eines quantenmechanischen Zustandes mit einem zeitunabhängigen Hamiltonoperator ist durch

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle$$
 (4.26)

gegeben. Mit

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})^{2n} = (\mathbf{B}^{2}\mathbb{1}_{2} + B_{x}B_{y}\{\sigma_{x}, \sigma_{y}\} + B_{y}B_{z}\{\sigma_{y}, \sigma_{z}\} + B_{x}B_{z}\{\sigma_{x}, \sigma_{z}\})^{n} = B^{2n}\mathbb{1}_{2}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})^{2n+1} = B^{2n}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B} = B^{2n+1}\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

$$(4.27)$$

können wir die Exponentialfunktion in Sinus und Cosinus zerlegen und erhalten für den Zeitentwicklungsoperator:

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{i\frac{qe}{2E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(t-t_0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\frac{qe}{2E}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}(t-t_0))^n 
= \mathbb{1}_2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\frac{qe}{2E}B(t-t_0))^{2n} + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}}{B} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\frac{qe}{2E}B(t-t_0))^{2n+1}$$

$$= \mathbb{1}_2 \cos(\frac{qe}{2E}B(t-t_0)) + i\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}}{B} \sin(\frac{qe}{2E}B(t-t_0)).$$
(4.28)

Wir verwenden diesen Operator um die Spinwellenfunktion der Quarks zu propagieren. Ausgehend vom momentanen Zustand  $|\chi>$  berechnen wir dann, ob der Spin im aktuellen Zeitschritt parallel oder antiparallel zum Magnetfeld ausgerichtet ist. Die zeitliche Entwicklung der Spinprojektionen  $\mathbf{S}_i$  berechnet sich aus der Bewegungsgleichung für Operatoren im Heisenbergbild (2.18). Die zum Magnetfeld parallele Komponente bleibt konstant, während die senkrechten Komponenten um die Magnetfeldachse präzessiert. Damit wir dennoch eine Magnetisierung im QGP erhalten, müssen wir zusätzlich Spinumklappprozesse einführen. Dazu interpretieren wir 1/3 aller elastischen Kollisionen als p-Wellen-Streuung, die mit einem Spinflip einhergeht. Um einen entsprechenden Mechanismus zu erhalten, betrachten wir ein einfaches nichtwechselwirkendes Spinsystem. Im Gleichgewicht muss die Magnetisierung, also das magnetische Moment pro Volumen, konstant sein. Daher muss auch die Anzahl an Umklappprozessen in beide Richtungen gleich groß sein:

$$n_{\uparrow}P_{\uparrow,\downarrow} = n_{\downarrow}P_{\downarrow,\uparrow} \iff \frac{P_{\uparrow,\downarrow}}{P_{\downarrow,\uparrow}} = \frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}} = \exp\left(-(E_{\downarrow} - E_{\uparrow})/T\right) = \exp\left(-\frac{qeB}{ET}\right).$$
 (4.29)

Dabei beschreibt P die Wahrscheinlichkeit eines Spinflips und n die Besetzungswahrscheinlichkeit der jeweiligen Spinausrichtung. Die beiden Zustände sind im Gleichgewicht bezüglich der Boltzmann-Statistik verteilt und ihr Verhältnis ist durch die Energiedifferenz der beiden Ausrichtungen gegeben. Wir wählen unsere Spinflip-Wahrscheinlichkeiten so, dass sie für ein nichtwechselwirkendes System die Gleichgewichtsbedingung (4.29) reproduzieren:

$$P_{\downarrow,\uparrow} = 1,$$
  $P_{\uparrow,\downarrow} = \exp\left(-\frac{qeB}{ET}\right).$  (4.30)

Für eine konstante Spinflip-Wahrscheinlichkeit  $P_{\uparrow,\downarrow}$  konnte der entsprechende Gleichgewichtszustand numerisch reproduziert werden. Allerdings mussten dazu die Prozesse  $q + \bar{q} \leftrightarrow g$  vernachlässigt werden, da diese für etwa 10% - 20% Abweichung vom Gleichgewichtszustand verantwortlich waren. In der vollen Simulation wird das System noch durch die ständige Änderung der Energie in den elastischen Kollisionen gestört.

In einem idealen Spin-System erhält man für die Magnetisierung aus dem statistischen Operator:

$$M = \frac{\langle \mu_S \rangle}{V} = \frac{e^{\frac{qeB}{2ET}} - e^{-\frac{qeB}{2ET}}}{e^{\frac{qeB}{2ET}} + e^{-\frac{qeB}{2ET}}}.$$
 (4.31)

Für geringe Magnetfelder verläuft die Magnetisierung proportional zum Magnetfeld. Die Proportionalitätskonstante ist die magnetische Suszeptibilität  $\chi_S$ :

$$M = \chi_S B. \tag{4.32}$$

Da wir uns sowieso auf kleine Magnetfelder beschränken müssen, ist die Suszeptibilität eine ideale Größe um den Einfluss des Magnetfelds auf die Messung zu untersuchen.

### 4.2.3 Vorbereitende Simulationen im externen Magnetfeld

In diesem Abschnitt geht es um die Frage, welche Magnetfeldstärken wir in den Simulationen verwenden können. Während das vom Drehimpuls induzierte magnetische Moment  $\mu_L$  unabhängig vom Magnetfeld bestimmt werden kann, benötigen wir für das Spin-induzierte magnetische Moment  $\mu_S$  möglichst große Felder, damit wir eine endliche Magnetisierung mit ausreichend guter Statistik erhalten. Dabei treten jedoch zwei Probleme auf. Zum einen können wir nicht zu beliebig großen Magnetfeldern übergehen, da die gesamte Herleitung des magnetischen Moments auf der Annahme beruht, dass die Felder klein sind. Zum anderen wird durch die Diskretisierung der Zeit dem

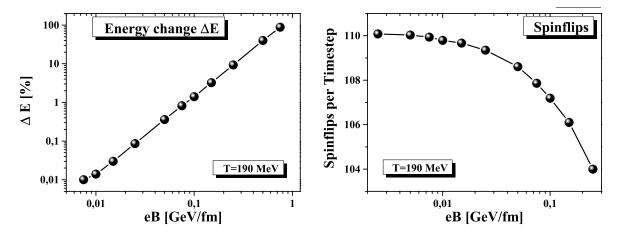


Abbildung 4.4: Prozentualer Anstieg der Energie (linke Seite) und Anzahl der Spinflips pro Zeitschritt (rechte Seite) als Funktion der Magnetfeldstärke für  $T=190~{\rm MeV}$  und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

System durch das Magnetfeld Energie zugeführt. Eigentlich verrichtet ein Magnetfeld keine Arbeit am System, da die Lorentzkraft nur die Impulsrichtung und nicht den Betrag ändert. Dies kann aber mit einer diskreten Zeit nur näherungsweise erfüllt werden, sodass dem System in jedem Zeitschritt etwas Energie zugeführt wird. Die linke Seite von Abbildung 4.4 zeigt den prozentualen Anstieg der Energie über einen Zeitraum von 200 fm/c als Funktion des Magnetfeldes. Der Effekt potenziert sich mit steigender Feldstärke. Die rechte Seite von Abbildung 4.4 zeigt die Anzahl der Spinflips pro Zeitschritt ebenfalls als Funktion der Feldstärke. Der Abfall der Kurve hat nichts mit der Änderung der Energie zu tun. Er entsteht allein aus dem stärkeren Magnetfeld und der dadurch

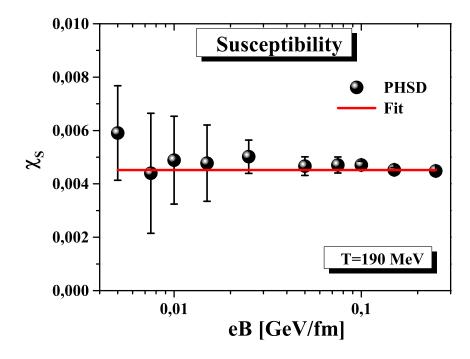


Abbildung 4.5: Magnetische Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion der externen Magnetfeldstärke für T=190 MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_g$ .

verringerten Spinflip-Wahrscheinlichkeit (4.30).

Um die Energie in der Box nicht zu stark zu verletzen, müssen wir daher kleine Felder wählen. Dies führt allerdings zu sehr starken Schwankungen in der magnetischen Suszeptibilität  $\chi_S$  und zu großen statistischen Fehlern, wie Abbildung 4.5 zeigt. Hier ist die Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion der Magnetfeldstärke abgebildet. Es zeigt sich allerdings auch, dass die Suszeptibilität, wie vermutet, annähernd unabhängig vom Magnetfeld ist. Das bedeutet, der Betrag des Energiebeitrags des Spins  $\Delta E_{mag,S}$  steigt quadratisch mit dem Magnetfeld an. Insgesamt ist der Energiebeitrag des Spins negativ:

$$\Delta E_{mag,S} = -\chi_S B^2. \tag{4.33}$$

Für noch kleinere Feldstärken als in Abbildung 4.5 gezeigt, steigt der Fehler auf über 100% an. Wir benötigen einen guten Kompromiss zwischen Energieerhaltung und geringem statistischem Fehler. Daher verwenden wir Magnetfelder zwischen eB=25 MeV/fm und eB=50 MeV/fm. Für diese Felder ist die Energie um maximal 0.4% verletzt und die statistischen Fehler liegen in der Größenordnung von 10%. Weiter werden für diese Felder auch die Kontinuumswerte des durch den Drehimpuls-induzierten magnetischen Moments  $\mu_L$  und der Anzahl der Spinflips reproduziert. Die Abhängigkeit des magnetischen Moments vom Magnetfeld ist in Abbildung 4.6 mit und ohne Drehimpulsquantisierung zu sehen. Die Abbildung zeigt den Energiebeitrag durch den Drehimpuls  $\Delta E_{mag,L}$ , der auch mit quantisiertem Drehimpuls  $\mathbf{L}$  unabhängig vom Magnetfeld ist. Beide Kurven steigen nur gering mit der Feldstärke an, was am Anstieg der

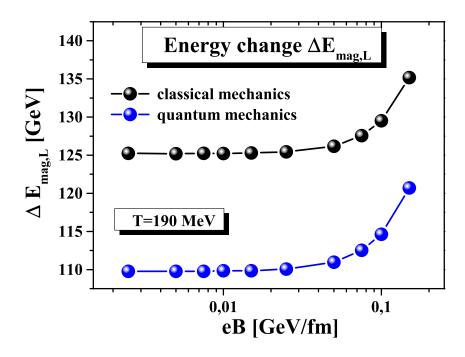


Abbildung 4.6: Beitrag des Drehimpulses zur Energie  $\Delta E_{mag,L} = -\mu_L B$  als Funktion der externen Magnetfeldstärke für T=190 MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ . Der statistische Fehler ist so gering, dass die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen.

Energie mit der Zeit liegt. Der Beitrag des Drehimpulses ist im Gegensatz zu dem des Spins positiv. Das führt dazu, dass für geringe Felder der Gesamtbeitrag zur Energie  $\Delta E$  zunächst positiv ist und mit steigendem Feld abfällt, bis er schließlich negativ wird. Insbesondere gibt es eine Feldstärke  $B_c$ , bei der sich die beiden Beiträge gegenseitig aufheben. Auf die Suszeptibilitäten angewendet bedeutet dies, dass die Spin-Suszeptibilität positiv  $\chi_S > 0$  und die Drehimpuls-Suszeptibilität negativ  $\chi_L < 0$  ist. Oberhalb der kritischen Magnetfeldstärke ist das QGP paramagnetisch, unterhalb diamagnetisch. Abbildung 4.7 zeigt den Beitrag des Drehimpulses zu Energie  $\Delta E_{mag,L} = -\mu_L B$  als Funktion der Temperatur T. Der statistische Fehler des Beitrags ist zu klein, als dass man ihn unter den Symbolen der Messwerte noch erkennen kann. Er nimmt maximal einen Wert von 0.1% an. Der Energiebeitrag steigt mit der Temperatur an und kann durch die Funktion

$$\Delta E_{mag,L}(T) = 0.29816 \cdot (T - 95.8592)^{2.81977} [MeV]$$
(4.34)

mit der Temperatur T in MeV beschrieben werden. Der Beitrag des Spins bzw. die Suszeptibilität  $\chi_S$  zeigen ein anderes Verhalten. Zwar steigen sie auch mit der Temperatur an, allerdings nimmt der Anstieg mit der Temperatur ab, anstatt größer zu werden. In Abbildung 4.8 ist die Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion der Temperatur T zu sehen. Die Messwerte können durch die Funktion

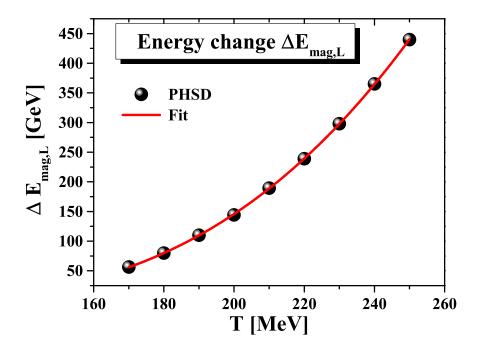


Abbildung 4.7: Energiebeitrag des Drehimpulses  $\Delta E_{mag,L}$  als Funktion der Temperatur für verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ . Der statistische Fehler ist so gering, dass die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen.

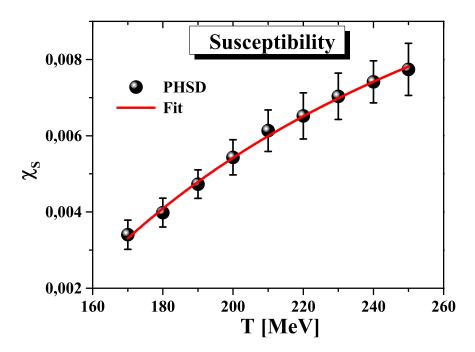


Abbildung 4.8: Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion der Temperatur T für verschwindendes Quark-chemisches Potential  $\mu_q$ .

$$\chi_S(T) = 0.01736 - \frac{2.38671}{T} \tag{4.35}$$

mit der Temperatur T in MeV beschrieben werden. Auf die Gesamtenergie betrachtet nimmt der prozentuale Beitrag des Spins mit der Temperatur sogar ab, während der Beitrag des Drehimpulses zunimmt. Der Zuwachs wird aber mit der Temperatur geringer. Obwohl die beiden Funktionen die Daten im untersuchten Bereich 170 MeV < T < 250 MeV gut beschreiben, bleibt unklar, bis zu welchen Temperaturen T > 250 MeV sie extrapoliert werden können.

Der Gesamtbeitrag des Magnetfelds zur Energie des Systems (inklusive Drehimpuls und Spin) ergibt sich aus:

$$\Delta E(T,B) = \Delta E_{maq,L}(T) - \chi_S(T)B^2. \tag{4.36}$$

Er ist eine Funktion der Temperatur und über den Spin auch des externen Magnetfeldes. Das kritische Magnetfeld  $B_c(T)$ , bei dem die Wirkung des Magnetfeldes verschwindet, ergibt sich aus  $\Delta E(T, B_c) = 0$ ,

$$B_c(T) = \sqrt{\frac{\Delta E_{mag,L}}{\chi_S}},\tag{4.37}$$

und hat ein Minimum in der Nähe von  $T_c$  bei T=156.3 MeV (siehe Abbildung 4.9). Der Minimalwert ist  $eB_{c,min}=0.397$  GeV<sup>2</sup>. Für hohe Temperaturen steigt es mit  $eB_c\sim T^{5/3}$ 

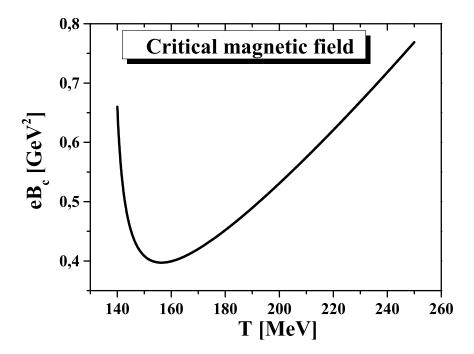


Abbildung 4.9: Kritisches Magnetfeld  $eB_c(T)$  als Funktion der Temperatur T.

an. Sein Wert für T=250 MeV beträgt  $eB_c=0.769$  GeV<sup>2</sup>. Das Minimum am Phasenübergang entsteht aus der Abhängigkeit von  $\Delta E_{mag,L} \sim \frac{p_\perp^2}{E}$ . Die funktionale Abhängigkeit ist der Scherviskosität  $\eta \sim \frac{1}{\Gamma T} \frac{p^4}{E^2}$  sehr ähnlich [20]. Auch sie zeigt ein Minimum nahe der kritischen Temperatur, was dadurch entsteht, dass das Verhältnis zwischen Impuls und Energie klein wird.

Wir vergleichen nun die Stärke des kritischen Magnetfeldes  $eB_c$  mit denen in Schwerionenkollisionen. In Ref. [43] wurden die maximal erreichbaren Feldstärken für Gold-Gold Kollsionen bei RHIC-Energien berechnet. Für Energien von  $\sqrt{s} = 200$  GeV erhält man ein maximales Feld von  $eB = 8.7 \cdot 10^{-2}$  GeV<sup>2</sup>. Dies ist nicht einmal ein viertel des minimalen kritschen Magnetfeldes. Wir können daher schließen, dass sich das QGP in allen bisher durchführbaren Schwerionenkollisionen diamagnetisch verhält. Dieses Ergebnis ist konsistent mit Gitter-QCD-Simulationen [19].

#### 4.3 Endliches chemisches Potential

Bisher haben wir alle Rechnungen bei verschwindendem Quark-chemischen Potential  $\mu_q$  durchgeführt. Wir werden nun den Einfluss eines endlichen Quark-chemischen Potentials  $\mu_q$  untersuchen. In der PHSD Simulation müssen wir nichts verändern, da alle entscheidenden Größen über die lokale Energiedichte parametriert sind. Es ändert sich nur die Initialisierung. Um das Potential zu berücksichtigen müssen in der laufenden Kopplung (2.80) die Temperatur durch die effektive Temperatur  $T^* = \sqrt{T^2 + \mu_q^2/\pi^2}$ 

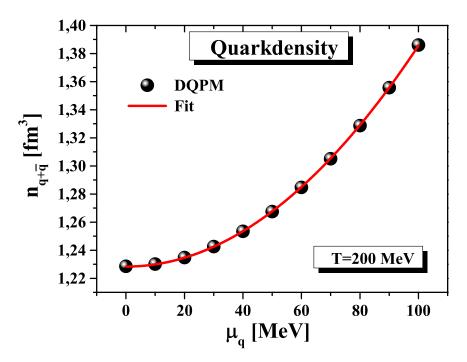


Abbildung 4.10: Quark+Antiquark-Dichte als Funktion des Quark-chemischen Potentials  $\mu_q$  für T=200 MeV.

ersetzt und in (2.76 - 2.79) das Potential berücksichtigt werden. Dadurch wird die Masse der Teilchen leicht erhöht. Für T=170 MeV steigt die Masse für  $\mu_q=100$  MeV um 1.8% im Vergleich zu verschwindendem Quark-chemischem Potential an. Viel wichtiger ist hingegen das chemische Potential in (2.85). Hier sorgt es dafür, dass mehr Quarks als Antiquarks im System vorhanden sind. Für die elektromagnetischen Observablen ist jedoch die Unterscheidung zwischen Teilchen und Antiteilchen nicht wichtig, wenn das Gesamtsystem ladungsneutral ist. Die Gesamtladung des Systems ändert sich durch das Quark-chemische Potential nicht, lediglich die Gesamtanzahl der geladenen Teilchen im System. Diese steigt mit dem Quark-chemischen Potential an. Abbildung 4.10 zeigt die totale Quarkdichte als Funktion des Quark-chemischen Potentials  $\mu_q$  für T=200 MeV. Der Anstieg der Dichte lässt sich sehr gut mit einer Parabel beschreiben:

$$n_{q+\bar{q}}(T,\mu) = n_{q+\bar{q}}(T) \cdot (1 + a\mu_q^2).$$
 (4.38)

Wenn mehr Teilchen im System sind, hat dies auch einen Einfluss auf die Obervablen. Wir erwarten daher, dass sie auch mit der Teilchenzahl anwachsen. In Abbildung 4.11 ist der Einfluss des Quark-chemischen Potenials auf die Leitfähigkeit, bzw.  $\sigma_0/T$ , für T=200 MeV dargestellt. Die Werte können ebenfalls mit einer Parabel beschrieben werden. Auch bei allen anderen Temperaturen lässt sich der Anstieg sehr gut durch einen

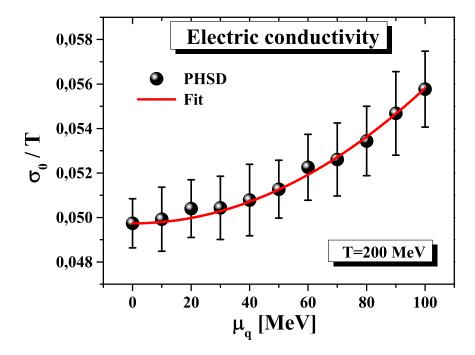


Abbildung 4.11:  $\sigma_0/T$  als Funktion des Quark-chemischen Potentials  $\mu_q$  für T=200 MeV.

Korrekturfaktor  $(1+a\mu_q^2)$  beschreiben. Dasselbe Verhalten zeigt sich auch für die magnetischen Momente  $\mu_L$  und  $\mu_S$ . Abbildung 4.12 zeigt den Energiebeitrag des Drehimpulses  $\Delta E_{mag,L}$  und Abbildung 4.13 die Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion des Quark-chemischen

Potentials  $\mu_q$ . Auch hier lassen sich die Daten gut durch eine Parabel beschreiben. In beiden Abbildungen wurde der statistische Fehler vernachlässigt. Im Beitrag des Drehimpulses ist er zu gering, als dass man ihn noch unter den Symbolen erkennen könnte, in der Suszeptibilität ist er hingegen größer als die Änderung mit dem Quark-chemischen Potential. Die Datenpunkte weisen aber trotzdem auf eine quadratische Abhängigkeit hin.

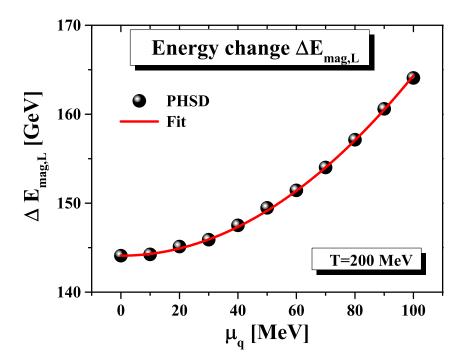


Abbildung 4.12: Energiebeitrag des Drehimpulses  $\Delta E_{mag,L}$  als Funktion des Quarkchemischen Potentials  $\mu_q$  für T=200 MeV. Der statistische Fehler ist so gering, dass die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen.

Wir können aus der Skalierung der einzelnen Größen schließen, dass sich der Einfluss des endlichen Quark-chemischen Potentials hauptsächlich aus dem Anstieg der Quarkdichte erklären lässt. Wir beschreiben die  $\mu_q$ -Abhängigkeit der drei untersuchten Größen jeweils durch einen Korrekturfaktor  $(1+a_x(T)\mu_q^2)$ . Die Größen  $a_x(T)$  sind dabei wiederum eine Funktion der Temperatur. Sie fallen mit der Temperatur ab, da bei steigender Temperatur der Einfluss des Quark-chemischen Potentials auf die Quarkdichte geringer wird. Im Fall der Leitfähigkeit kann diese Temperaturabhängigkeit durch  $a_{\sigma_0}(T) = c_{\sigma_0}/T^2$  beschrieben werden. In Abbildung 4.14 ist  $c_{\sigma_0}$  in Abhängigkeit der Temperatur T dargestellt. Der beste Fit ergibt  $c_{\sigma_0} = 0.46$ . Auf die gleiche Art und Weise verfahren wir auch bei den drehimpulsabhängigen Größen. Hier lässt sich diese Näherung allerdings erst für Temperaturen T > 190 MeV anwenden. Für kleinere Temperaturen fällt  $c_L$  ab und ist keine Konstante mehr. Abbildung 4.15 zeigt  $c_L$  für den Temperaturbereich 190 MeV < T < 250 MeV. Der beste Fit liefert  $c_L = 0.57$ . Verfahren wir genauso für die spinabhängigen Größen, erhalten wir  $c_S = 0.49$ . Dieser Wert ist allerdings aufgrund der großen statistischen Fehler der Suszeptibilität  $\chi_S$  nur unter Vorbehalt zu betrachten.

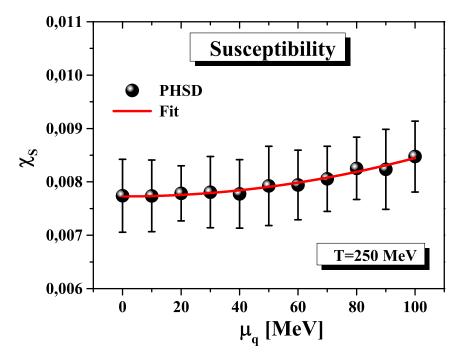


Abbildung 4.13: Suszeptibilität  $\chi_S$  als Funktion des Quark-chemischen Potentials  $\mu_q$  für T=250 MeV.

Auch er wurde nur in dem Temperaturbereich 190 MeV < T < 250 MeV bestimmt, da der Korrekturfaktor  $c_S$  für T < 190 MeV nicht durch eine  $T^{-2}$ -Abhängigkeit beschrieben werden kann.

Wir haben die magnetischen Momente  $\mu_S$  und  $\mu_L$ , bzw. die magnetfeldunabhängigen Größen  $\chi_S$  und  $\Delta E_{mag,L}$ , und die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_0$  für den Temperaturbereich 170 MeV < T < 250 MeV und endliches Quark-chemisches Potential  $\mu_q < 100$  MeV bestimmt. Die spinabhängigen Größen zeigen ein paramagnetisches, die drehimpulsabhängigen Größen ein diamagnetisches Verhalten. Es gibt ein kritisches Magnetfeld  $B_c$ , für das sich die beiden Beiträge gegenseitig aufheben. Die dafür nötigen Feldstärken können aber in den heutigen Experimenten noch nicht hergestellt werden. Für endliches Quark-chemisches Potential skalieren die drei Größen wie die Quarkdichte.

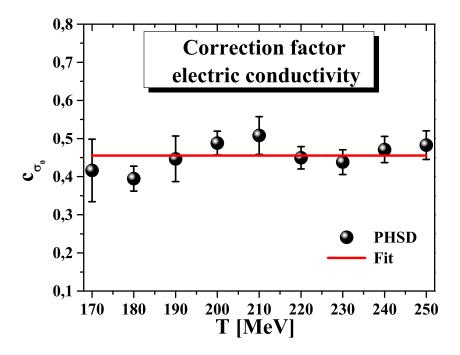


Abbildung 4.14: Korrekturfaktor  $c_{\sigma_0}$  für  $\sigma_0/T$  für endliches Quark-chemisches Potential  $\mu_q$  als Funktion der Temperatur T.

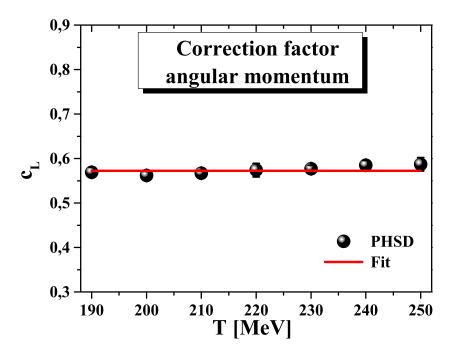


Abbildung 4.15: Korrekturfaktor  $c_L$  für  $\Delta E_{mag,L}$  für endliches Quark-chemisches Potential  $\mu_q$  als Funktion der Temperatur T.

### 5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Wirkung von konstanten elektromagnetischen Feldern auf das Quark-Gluon-Plasma mit dem Parton-Hadron-String-Dynamics Modell untersucht. Zunächst haben wir die Methode der Nichtgleichgewichts-Greensfunktionen vorgestellt und daraus Transportgleichungen abgeleitet, die es erlauben, Teilchen mit endlicher Breite durch die Testteilchenmethode zu propagieren. Anschließend haben wir das Dynamical-QuasiParticle-Model vorgestellt um das QGP im Gleichgewicht zu untersuchen, da thermodynamische Größen wie Entropiedichte, Energiedichte und Druck an Resultate aus Gitter-QCD-Rechnungen gefittet wurden (siehe Abbildung 2.3 und 2.4). Die Kombination der Testteilchenmethode mit dem DQPM liefert schließlich die partonische Dynamik des PHSD Modells. Dieses Transportmodell ermöglicht die Untersuchung des QGP auch außerhalb des thermodynamischen Gleichgewichts und ist in den letzten Jahren erfolgreich für relativistische Schwerionenreaktionen und die Berechnung von Transportkoeffizienten eingesetzt worden [11, 18, 20, 27, 41, 42].

In Kapitel 3 haben wir kurz die praktische Durchführung von Transportsimulationen besprochen und sind auf die Besonderheiten in der Simulation von "unendlicher" partonischer Materie eingegangen. Weiter haben wir ein vereinfachtes Modell für die hadronische Dynamik vorgestellt, welches stabile Simulationen an der QCD-Phasengrenze ermöglicht. Zu diesem Zweck haben wir ein hadronisches Wechselwirkungspotential aus Gitter-QCD-Daten bestimmt. Für die Zukunft planen wir eine selbstkonsistente Berechnung der hadronischen Potentiale um das Modell weiter zu verbessern und belastbare Simulationen an der Phasengrenze durchführen zu können.

Der Hauptaspekt dieser Arbeit liegt auf der Response des QGP auf elektromagnetische Felder. Um die Wirkung von Magnetfeldern zu untersuchen, haben wir zunächst das PHSD Modell um Spinfreiheitsgrade erweitert. Dann haben wir die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma_0$ , die Spin-Suszeptibilität  $\chi_S$  und den Beitrag des Drehimpulses zur Energie des Systems  $\Delta E_{mag,L}$  untersucht. Diese Größen sind, zumindest für kleine Felder, von deren Stärke unabhängig. Wir haben die Abhängigkeit dieser Größen von der Temperatur T und dem Quark-chemischen Potential  $\mu_q$  im Bereich von 170 MeV < T < 250 MeV und  $\mu_q$  < 100 MeV untersucht. Es hat sich gezeigt, dass alle drei Größen mit der Temperatur anwachsen. Während der Ansteig der Suszeptibilität mit der Temperatur schwächer wird, steigt er für die anderen beiden Größen an. Die Leitfähigkeit skaliert im untersuchten Bereich mit  $T^2$ , die Suszeptibilität mit  $T^{-1}$  und der Energiebeitrag des Drehimpulses mit  $T^{2.82}$ . Es hat sich weiter gezeigt, dass das QGP in allen gegenwärtigen Schwerionenkollisionen diamagnetisch sein sollte. Erst ab Magnetfeldern von mindestens eB > 0.4 GeV<sup>2</sup> wird es paramagnetisch.

Die Auswirkung von endlichem Quark-chemischem Potential  $\mu_q$  ist für alle drei Größen ähnlich. Sein Einfluss kann immer durch einen Korrekturfaktor  $(1 + c_x \mu_q^2/T^2)$  beschrie-

ben werden. Dies liegt primär am Anstieg der Teilchenzahl, die ebenfalls quadratisch mit dem Quark-chemischen Potential anwächst.

Da man das QGP im Experiment nicht in hohen konstanten Feldern erzeugen kann, besteht der nächste Schritt in der Untersuchung der Response des Systems auf zeitabhängige elektromagnetische Felder. Von besonderem Interesse sind dabei Felder, die mit denen in Schwerionenkollisionen vergleichbar sind.

# Literaturverzeichnis

[1]	BRAHMS collaboration: I. Arsene et al. Nucl. Phys. A 757, 1-27 $\left(2005\right)$
[2]	PHOBOS collaboration: B.B.Back et al. Nucl. Phys. A 757, 28-101 (2005)
[3]	STAR Collaboration: J. Adams et al. Nucl. Phys. A 757, 102-183 (2005)
[4]	PHENIX Collaboration: K. Adcox et al. Nucl. Phys. A 757, 184-283 (2005)
[5]	J. Rafelski and B. Müller, Phys. Rev. Lett. 48, 1066-1069 (1982)
[6]	R. Stock et al. (NA35 Collaboration), Nuclear Physics A, Volume 525, p. 221-226.
[7]	C. Adler, Phys. Rev. Lett. 90, 082302 (2003)
[8]	STAR Collaboration: K.H. Ackermann, et al. Phys. Rev. Lett. 86, 402-407 (2001)
[9]	Y. Aoki et al., JHEP 0906 088 (2009)
[10]	F. Karsch, E. Laermann and A. Peikert, Phys. Lett. B 478, 447 (2000)
[11]	E.L. Bratkovskaya, O. Linnyk, V.P. Konchakovski, M.I. Gorenstein, W. Cassing, arXiv:1007.2812 [nucl-th]
[12]	P.F. Kolb, P. Huovinen, U. Heinz, H. Heiselberg, Phys. Lett. B 500, 232-240 (2001)
[13]	M. Buballa, Phys. Rept. 407, (2005) 205-376
[14]	G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Luetgemeier, B. Petersson, Nucl. Phys. B 469, 419-444 (1996)
[15]	J.L. Nagle, Eur. Phys. J. C49, 275-279 (2007)
[16]	C. S. Fischer, J. Luecker, Phys. Lett. B 718, 1036-1043 (2013)

60 Literaturverzeichnis

[17]	http://www.fair-center.eu/en/for-users/experiments/cbm.html
[18]	V. Voronyuk, V.D Toneev, W. Cassing, E.L. Bratkovskaya, V.P. Konchakovski, S.A. Voloshin, Phys. Rev. C 83, 054911 (2011)
[19]	G. S. Bali, F. Bruckmann, M. Constantinou, M. Costa, G. Endrodi, S. D. Katz, H. Panagopoulos and A. Schaefer, Phys. Rev. D 86, 094512 (2012)
[20]	V. Ozvenchuk, O. Linnyk, M. I. Gorenstein, E. L. Bratkovskaya, W. Cassing, Phys. Rev. C 87, 064903 (2013)
[22]	M. Peskin and D. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley Publishing Company (1995)
[22]	J. Beringer $et~al.$ (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 $(2012)$
[23]	D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30, 1343 (1973)
[24]	H. David Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346 (1973)
[25]	Hartmut Haug: Statistische Physik - Gleichgewichtstheorie und Kinetik. Vieweg (1997) ISBN 3-528-07285-7
[26]	L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)
[27]	W. Cassing, Eur. Phys. J. ST 168, 3 (2009)
[28]	R. van Leeuwen et al.: Introduction to the Keldysh Formalism, Lect. Notes Phys. 706, 33-59 (2006)
[29]	P. C. Martin and J. Schwinger, Phys. Rev. 115, 1342 (1959)
[30]	L. P. Kadanoff and G. Baym, Quantum statistical mechanics, Benjamin, New York (1962)
[31]	A. Peshier, Phys. Rev. D 70, 034016 (2004)
[32]	A. Peshier, J. Phys G 31, S371 (2005)
[33]	W. Botermans and R. Malfliet, Phys. Rep. 198 (1990)
[34]	B. Vanderheyden, G. Baym, arXiv:hep-ph/0002291
[35]	A. Peshier, Phys.Rev. D63 (2001) 105004
[36]	E.L. Bratkovskaya, W. Cassing, V.P. Konchakovski and O. Linnyk, Nucl. Phys. A 856, 162 (2011)

Literaturverzeichnis 61

[37]	W. Ehehalt and W. Cassing, Nucl. Phys. A 602 (1996) 449
[38]	W. Cassing and E. L. Bratkovskaya, Phys. Rep. 308 (1999) 65
[39]	B. Andersson et al. Phys. Rep. 97 (2&3), 31-145 (1983)
[40]	V. Ozvenchuk, O. Linnyk, M. I. Gorenstein, E. L. Bratkovskaya, W. Cassing, Phys. Rev. C 87, 024901 (2013)
[41]	W. Cassing, O.Linnyk, T. Steinert, V. Ozvenchuk, Phys. Rev. Lett. 110, 182301 (2013)
[42]	O. Linnyk, E.L. Bratkovskaya, W. Cassing, V.P. Konchakovski, V. Ozvenchuk, arXiv:1308.6259 [nucl-th]
[43]	V. Voronyuk, V.D Toneev, W. Cassing, E.L. Bratkovskaya, V.P. Konchakovski, S.A. Voloshin, Phys. Rev. C83 054911 (2011)

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Die Zeitkontur des Keldysh-Formalismus. Die Zeit $t_1$ liegt auf dem chronologischen $(+)$ , die Zeit $t_2$ auf dem antichronologischem $(-)$ Ast. Die	
	Abbildung wurde aus Ref. [27] entnommen	11
2.2	Massen und Breiten der Quarks (violett) und Gluonen (orange). Die Ab-	
2.3	bildung wurde aus Ref. [36] entnommen	22
2.4	Dreiecke). Die Abbildung wurde aus Ref. [36] entnommen Vergleich des Wechselwirkungsmasses $\tilde{W} = \frac{\epsilon - 3P}{T^4}$ aus DQPM-Rechnungen mit Gitter-QCD-Resultaten aus Ref. [9]. Die Abbildung wurde aus	23
2.5	Ref. [36] entnommen	<ul><li>25</li><li>26</li></ul>
3.1	Stoßraten für $T = 190$ MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential $\mu_q$	31
3.2	Stoßraten für die Prozesse $g \to q + \bar{q}$ und $q + \bar{q} \to g$ für $T = 190$ MeV und verschwindes Quark-chemisches Potential $\mu_q$	32
3.3	Zeitliche Entwicklung der Dichten für die unterschiedlichen Quarkflavor und Gluonen für $T=190~{\rm MeV}$ und verschwindendes Quark-chemisches	
3.4	Potential $\mu_q$	33
3.5	weils $1/T^4$ skaliert um dimensionslose Größen zu erhalten Zeitlicher Verlauf der einzelnen Energiebeiträge und der Gesamtenergie für die kritische Temperatur $T=T_c=158$ MeV und verschwindendes	35
3.6	Quark-chemisches Potential $\mu_q$	37
5.0	Temperatur $T = T_c = 158$ MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential $\mu_q$	38
4.1	Zeitlicher Verlauf der elektrischen Flussdichte für unterschiedliche konstante elektrische Felder für $T=190$ MeV. Die Abbildung wurde aus Ref.	
	[41] entnommen	40
4.2	Elektrische Leitfähigkeit über der Temperatur für $T=190$ MeV als Funktion der externen Feldstärke. Die Abbildung wurde aus Ref. [41] entnommen.	41

4.3	Elektrische Leitfähigkeit über der Temperatur als Funktion des Verhält-	
	nisses $T/T_c$ . Die schwarzen Symbole zeigen die PHSD-Resultate. Sie können durch einen linearen Fit beschrieben werden (blaue Linie). Die rote	
	Linie zeigt die DQPM-Resultate. Die anderen Symbole sind Ergebnis-	
	· · ·	
	se unterschiedlicher Gitter-QCD-Rechnungen. Die Abbildung wurde aus Ref. [42] entnommen	42
4.4	Prozentualer Anstieg der Energie (linke Seite) und Anzahl der Spinflips	42
4.4	pro Zeitschritt (rechte Seite) als Funktion der Magnetfeldstärke für $T =$	
	190 MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential $\mu_q$	47
15		41
4.5	Magnetische Suszeptibilität $\chi_S$ als Funktion der externen Magnetfeldstär- ke für $T=190$ MeV und verschwindendes Quark-chemisches Potential $\mu_q$ .	48
4.6	Beitrag des Drehimpulses zur Energie $\Delta E_{mag,L} = -\mu_L B$ als Funktion	40
4.0	der externen Magnetfeldstärke für $T = 190$ MeV und verschwindendes	
	Quark-chemisches Potential $\mu_q$ . Der statistische Fehler ist so gering, dass	
	die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen	49
4.7	Energiebeitrag des Drehimpulses $\Delta E_{maq,L}$ als Funktion der Temperatur	43
4.1	für verschwindendes Quark-chemisches Potential $\mu_q$ . Der statistische Feh-	
	ler ist so gering, dass die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen	50
4.8	Suszeptibilität $\chi_S$ als Funktion der Temperatur $T$ für verschwindendes	00
1.0	Quark-chemisches Potential $\mu_q$	50
4.9	Kritisches Magnetfeld $eB_c(T)$ als Funktion der Temperatur $T$	51
4.10	Quark+Antiquark-Dichte als Funktion des Quark-chemischen Poten-tials	01
	$\mu_q$ für $T=200$ MeV	52
4.11	$\sigma_0/T$ als Funktion des Quark-chemischen Potentials $\mu_q$ für $T=200$ MeV.	53
	Energiebeitrag des Drehimpulses $\Delta E_{mag,L}$ als Funktion des Quark-chemischen	n
	Potentials $\mu_q$ für $T=200$ MeV. Der statistische Fehler ist so gering, dass	
	die Fehlerbalken innerhalb der Symbole liegen	54
4.13	Suszeptibilität $\chi_S$ als Funktion des Quark-chemischen Potentials $\mu_q$ für	
	$T = 250 \text{ MeV}. \dots$	55
4.14	Korrekturfaktor $c_{\sigma_0}$ für $\sigma_0/T$ für endliches Quark-chemisches Potential $\mu_q$	
	als Funktion der Temperatur $T$	56
4.15	Korrekturfaktor $c_L$ für $\Delta E_{mag,L}$ für endliches Quark-chemisches Potential	
	$\mu_q$ als Funktion der Temperatur $T$	56

#### Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Gießen, den 27. September 2013