

Fortgeschrittenen-Praktikum Versuch 1.3

Hall-Effekt an Metallen und Halbleitern

S. Graubner, D. Pfisterer

November 2005

1 Einführung

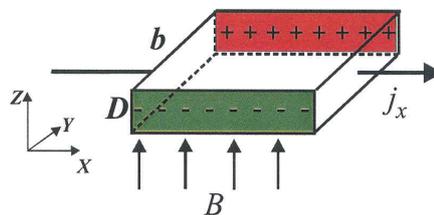
In der Zeit seit seiner Entdeckung im Jahre 1879 durch E.Hall hat sich die Untersuchungsmethode des HALL-Effektes zu einer wichtigen und universell einsetzbaren Messmethode entwickelt. Neben der Untersuchung von Metallen, die in den letzten Jahren etwas in den Hintergrund gerückt ist hat sich vor allem die Charakterisierung von Halbleitern etabliert. Es ist mit Hilfe von HALL-Messungen möglich, eine Vielzahl von elektrischen Daten über eine Probe zu gewinnen. So kann unter anderem auf die Ladungsträgerkonzentration und vor allem auf das Vorzeichen der Ladungsträger geschlossen werden. Aus dem Produkt aus spezifischem Widerstand und Trägerdichte lässt sich die Mobilität der Ladungsträger bestimmen. Und mit Hilfe von temperaturabhängigen Messungen kann die Aktivierungsenergie von Donatoren bzw. Akzeptoren bestimmt werden.

Im Zuge dieses Versuches sollen Untersuchungen sowohl an Metallen als auch an Halbleitern durchgeführt werden um einen groben Überblick über die verschiedenen Anwendungsbereiche des HALL-Effektes zu erhalten.

2 Der Hall-Effekt

Die auf die Ladungsträger wirkende LORENTZkraft führt zu einer Ablenkung der Driftbewegung:

$$F_L = \vec{j} \times \vec{B} \quad (1)$$



(a) Schematische Darstellung des Hall-Effektes

Zur Bestimmung der Ladungsträgerdichte wird ein Strom durch die Probe geschickt. Das sich dabei ausbildende elektrische Feld \vec{E}_{HALL} setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

1. dem OHMSchen Gesetz
2. dem Anteil, der aus der LORENTZkraft resultiert

$$\vec{E}_{\text{HALL}} = \hat{\rho} \cdot \vec{j} + \hat{\rho} \cdot \mu_H (\vec{j} \times \vec{B}) \quad (2)$$

μ_H ist hierbei die HALL-Beweglichkeit, $\hat{\rho}$ der spezifische Widerstand.

Unter der Annahme eines äußeren elektrischen Feldes \vec{E} in x -Richtung ($\vec{E} = (E, 0, 0)$) und eines magnetischen Feldes in z -Richtung ($\vec{B} = (0, 0, B)$) findet man im stationären Fall keine Bewegung der Ladungsträger in y -Richtung

$$\vec{j}_y = \vec{0}.$$

Mit Gl. 2 ergibt sich dann eine Kräftebilanz

$$e E_{H,y} = \frac{1}{n} \left(\vec{j} \times \vec{B} \right)_y,$$

womit die Kompensation der COULOMB-Kraft durch die LORENTZ-Kraft zum Ausdruck kommt. Die meßbare HALL-Feldstärke ergibt sich daraus zu

$$\vec{E}_{H,y} = R_H \vec{j} \times \vec{B},$$

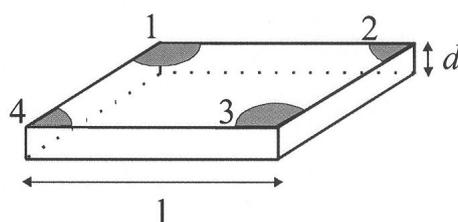
mit der HALL-Konstanten

$$R_H = \frac{1}{n e}.$$

Für den Fall eines senkrecht zur Stromrichtung wirkenden Magnetfeldes gilt für die HALL-Spannung zwischen zwei Kontakten:

$$U_H^{42} = \frac{\rho \cdot \mu_H \cdot B \cdot I}{d} \quad (3)$$

3 Hall-Messung nach van-der-Pauw-Geometrie



(b) Probe mit Van-der-Pauw-Geometrie

Durch zyklisches Tauschen und Umkehrung der Stromrichtung, wodurch sich der Meßfehler verkleinern läßt, erhält man vier HALL-Spannungen aus denen man gemäß:

$$R_H = \rho \cdot \mu_H = \frac{d}{4B} (R_{31,42} - R_{13,42} + R_{42,13} - R_{24,13}) = \frac{1}{n e} \quad (4)$$

die Trägerdichte n bestimmen kann. Das Vorzeichen von R_H gibt Aufschluß darüber, ob der Ladungstransport durch Elektronen oder Löcher stattfindet. Dies gilt jedoch strenggenommen nur, wenn der Ladungstransport ausschließlich über einen Ladungsträgertyp stattfindet. Bei gleichzeitigem Vorliegen genügend hoher Konzentrationen des jeweils anderen Typs gestaltet sich die Bestimmung des Vorzeichens und der Konzentration der Ladungsträger weitaus schwieriger. Die LORENTZ-Kraft bewegt nämlich Löcher und Elektronen in die selbe Richtung, sodaß mitunter die Polarität der Probe nicht mit der Polarität der HALL-Spannung übereinstimmt. Im allgemeinen Fall ist die HALL-Konstante dann definiert über:

$$R_H = \frac{r_p \mu_p^2 p - r_n \mu_n^2 n}{(\mu_p p + \mu_n n)^2} \quad (5)$$

wobei der HALL-Faktor r_H allgemein definiert ist über die zeitliche Mittelung der Relaxationszeit τ

$$r_H = \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} \quad (6)$$

Diese Tatsache kann die Messung p-leitender Proben deutlich erschweren. Damit das Vorzeichen eindeutig ist, muß folglich

$$r_p \mu_p^2 p - r_n \mu_n^2 n \geq 0 \quad (7)$$

bzw. mit der Annahme eines HALL-Faktors $r_H \approx 1$

$$p \geq \frac{\mu_n^2 n}{\mu_p^2} \quad (8)$$

gelten. Nimmt man z.B. eine 30fach höhere Beweglichkeit der Elektronen gegenüber der der Löcher an, bedeutet dies, daß die Löcherkonzentration mindestens um den Faktor 900 gegenüber der Elektronenkonzentration höher sein muß, damit das Vorzeichen korrekt ermittelt werden kann.

Die Leitfähigkeitsmessung nach van der Pauw kann für sich den Anspruch erheben, unabhängig von der Probengeometrie zu sein, solange folgende Anforderungen erfüllt sind:

1. Die Probe ist einfach zusammenhängend, d.h. sie besitzt eine glatte Oberfläche ohne eingeschlossene Löcher.
2. Die Probe weist eine homogene Dicke auf.
3. Die Kontakte sind an der Umrandung der Probe aufgebracht.
4. Das Verhältnis von Kontaktgröße zu Probengröße ist klein.

Zur Widerstandbestimmung schickt man einen Strom von Kontakt 1 zu 2 und mißt den Spannungsabfall zwischen Kontakt 3 und 4.

Für den Widerstand ergibt sich folglich:

$$R_{12,34} = \frac{U_{34}}{I_{12}} \quad (9)$$

Durch zyklisches Tauschen und Umkehrung der Stromrichtung erhält man nun acht Widerstände. Hieraus läßt sich der spezifische Widerstand ρ wie folgt bestimmen:

$$\rho = \frac{\pi \cdot d}{\ln 2} \cdot \frac{1}{8} \left[(R_{21,34} - R_{12,34} + R_{32,41} - R_{23,41}) \cdot f_a + (R_{43,12} - R_{34,12} + R_{14,23} - R_{41,23}) \cdot f_b \right] \quad (10)$$

f_a und f_b sind die sogenannten VAN DER PAUW Faktoren, die eine Anpassung des Widerstandes an die Probengeometrie bewirken. Bei einer quadratischen Probe gilt $f_a = f_b = 1$. Weicht die Geometrie von der quadratischen Form ab, mißt man einen zu großen Widerstand. Die VAN DER PAUW Faktoren sind über folgende Funktion definiert:

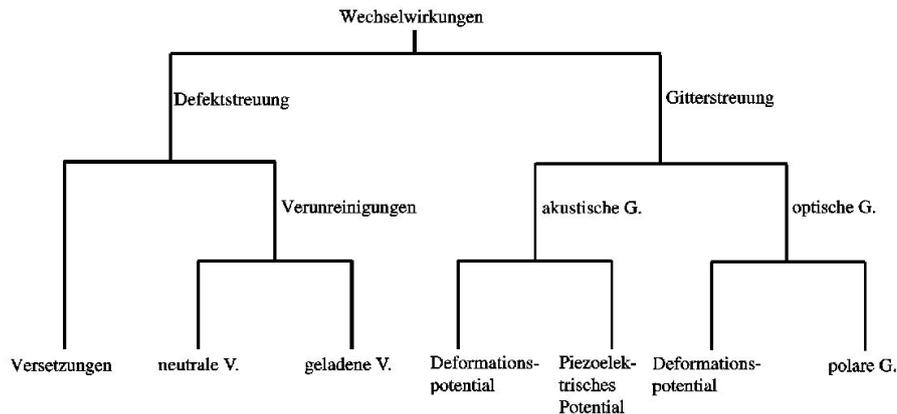
$$\frac{Q_{a,b} - 1}{Q_{a,b} + 1} = \frac{f_{a,b}}{\ln 2} \cdot \operatorname{arccosh} \left[\frac{1}{2} \exp \left(\frac{\ln 2}{f_{a,b}} \right) \right] \quad (11)$$

Hierbei werden $Q_{a,b}$ aus den Verhältnissen der Widerstände gebildet:

$$Q_a = \frac{R_{21,34} - R_{12,34}}{R_{32,41} - R_{23,41}} \quad \text{und} \quad Q_b = \frac{R_{43,12} - R_{34,12}}{R_{14,23} - R_{41,23}} \quad (12)$$

4 Streuprozesse in Festkörpern

Die Leitfähigkeit und damit der Widerstand eines Halbleiters ist gekennzeichnet durch die Häufigkeit und Stärke der Wechselwirkung mit der die am Ladungstransport beteiligten Ladungsträger mit dem Material in Wechselwirkung treten. In einem perfekten Kristall würden die Ladungsträger auf unbestimmte Zeit vom angelegten elektrischen Feld beschleunigt werden, konsistent zur Bandstruktur des Kristalls. Jeder Kristall besitzt jedoch Gitterfehlstellen, gewollte oder ungewollte Verunreinigungen, Gitterschwingungen, Versetzungen ... Ein Ladungsträger kann also eine Vielzahl von Wechselwirkungen während seines Weges durch den Kristall erfahren. Nachfolgend sind die Streumechanismen dargestellt, die auftreten können.



(c) Streuprozesse in Festkörpern

4.0.1 neutrale Störstellenstreuung

Quantenmechanisch betrachtet man eine einlaufende ebene Welle und eine gestreute auslaufende Welle, die sich zusammensetzt aus einer ebenen Welle und einer Kugelwelle. Das Quadrat der Streuamplitude liefert den differentiellen Wirkungsquerschnitt und man gelangt somit zu folgender Mobilität:

$$\mu_N = \frac{e m^*}{20 \varepsilon a_B \hbar m_0 N_N} \quad (13)$$

Die Mobilität ist hier nur indirekt über die Konzentration der neutralen Streuzentren von der Temperatur abhängig.

4.0.2 ionisierte Störstellenstreuung

Hierbei erfolgt RUTHERFORDstreuung an Streuzentren mit der Ladung Ze . Die quantenmechanische Betrachtung fördert einen Korrekturterm zu Tage, der die Divergenz des Streuquerschnitts für kleine Winkel in der klassischen Betrachtung beseitigt.

$$\mu_I = \frac{128\sqrt{2\pi}(\varepsilon_0\varepsilon_r)^2(kT)^{\frac{3}{2}}}{e^3\sqrt{m^*Z^2N_I}} \cdot \left[\ln(1+\beta^2) - \frac{\beta}{1+\beta} \right]^{-1} \quad (14)$$

wobei

$$\beta = 2L_D \frac{m^*}{\hbar} \sqrt{\frac{2}{m^*} 3kT} \quad L_D = \frac{m^*v}{\hbar} \quad (\text{Debye-Länge}) \quad (15)$$

4.0.3 Streuung an optischen Gitterschwingungen

Die Streuung an optischen Phononen ist ein unelastischer Prozess. Man kann ihn jedoch als elastisch annehmen, wenn man davon ausgeht, daß für $T < \theta$ nach der Absorption eines Phonons durch ein Elektron, eine Reemission des Phonons stattfindet. Das Elektron hat dann zwar eine andere Bewegungsrichtung, aber die selbe Energie. Der Gesamtprozess ist also elastisch. Für die Beweglichkeit gilt:

$$\mu_{oP} = \frac{e}{2m\alpha\omega_g} \exp\left(\frac{\Theta}{T}\right) \quad , \quad T \ll \Theta \quad (16)$$

mit der polaren Konstante

$$\alpha = \frac{1}{137} \sqrt{\frac{mc^2}{2k\Theta}} \left(\frac{1}{\varepsilon_{opt}} - \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (17)$$

für $T \gg \Theta$ muß μ_{oP} noch mit dem Korrekturfaktor $8\sqrt{\frac{T}{9\pi\Theta}}$ versehen werden.

4.0.4 Streuung an akustischen Gitterschwingungen

Durch periodische Deformation des Gitters kann es zu akustischen Gitterschwingungen kommen. Die Streuung findet dann an den Deformationspotentialänderungen statt.

$$\mu_{ak} = \frac{2\sqrt{2\pi}c_{le}e\hbar^4}{3m^{*\frac{5}{2}}k^{\frac{3}{2}}V_{aD}^2} T^{-\frac{3}{2}} \quad (18)$$

mit der longitudinalen elastischen Konstante $c_{le} = \rho v_e^2$
(ρ =Dichte, v_e =longitudinale Schallgeschwindigkeit)

4.0.5 piezoelektrische Streuung

Im Falle von ionischen Bindungen kann es bei periodischen Deformationen des Gitters durch Gitterschwingungen zur Streuung an einem piezoelektrischen Potential kommen. Genauer gesagt ist es die Streuung von Elektronen am elektrischen Feld, welches die akustischen Phononen begleitet. Deshalb kann man sie auch im selben Temperaturbereich als nahezu elastisch betrachten.

$$\mu_{pe} = \frac{16\sqrt{2\pi}\hbar^2\varepsilon\varepsilon_0}{3m^{*\frac{3}{2}}k^{\frac{1}{2}}eP^2} T^{-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

mit der piezoelektrischen Kopplungskonstante

$$P^2 = \frac{V_a^2 P}{\varepsilon \varepsilon_0 c_{te}}$$

4.0.6 Streuung an Versetzungen

Hierbei betrachtet man Streuung an Versetzungen durch Gitterfehlpassung oder nicht abgesättigte Bindungen, die längs der Versetzungslinie als geladene Streuzentren mit abgeschirmten Coulombpotential betrachtet werden. Diese Art von Streuung wird erst von Bedeutung bei hohen Versetzungsdichten ($N_V > 10^7 \text{ cm}^{-1}$). Man gelangt zu:

$$\mu_V = \frac{30 \sqrt{2\pi} (\varepsilon \varepsilon_0)^{\frac{3}{2}} a^2 \sqrt{n} k T}{e^2 f^2 m^{*\frac{1}{2}} N_V} \quad (20)$$

Hierbei bedeutet:

a=Abstand der nicht abgesättigten Bindungen

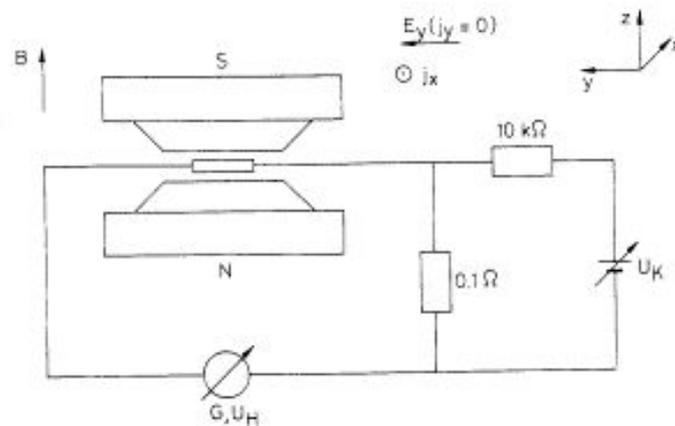
n=effektive Konzentration der Ladungsträger zur Abschirmung

f=Besetzungswahrscheinlichkeit der geladenen Streuzentren

5 Versuchsdurchführung und Auswertung

5.1 Hall-Effekt an Metallen

5.1.1 Versuchsaufbau



(d) Versuchsaufbau Teil 1

Zur Messung der Proben ist ein Elektromagnet geeignet zu verschalten. Über die Regelung des Spulenstroms ist die magnetische Feldstärke einstellbar. Die zugehörige Spannung ist zu notieren. Mit Hilfe einer kommerziellen Hall-Sonde wird das Magnetfeld gemessen.

Zur Messung der Hall-Spannung wird ein Galvanometer benutzt. Dazu ist die Spannungsempfindlichkeit des Galvanometers und dessen Innenwiderstand zu bestimmen. Der Fehlerstrom der Hall-Sonde wird durch eine geeignete Schaltung kompensiert.

5.1.2 Versuchsdurchführung

Es sollen Untersuchungen an den Metallen Kupfer und Zink durchgeführt werden. Bei der Zinkprobe soll anhand der bekannten Dicke der Probe die HALL-Konstante ermittelt werden. Bei Kupfer ist die HALL-Konstante bekannt und die Dicke gesucht. Für beide Proben ist die Beweglichkeit zu bestimmen.

Um dies zu realisieren wird der Steuerstrom durch die Probe von 2 bis 10 A variiert und dazu die Steuerspannung, das Magnetfeld und die Hall-Spannung notiert.

$d_{Zn} = 5 \cdot 10^{-5} m$
$\rho_{Zn} = 5.45 \cdot 10^{-8} \Omega m$
$R_{Cu} = -6.3 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{C}$
$\rho_{Cu} = 1.55 \cdot 10^{-8} \Omega m$

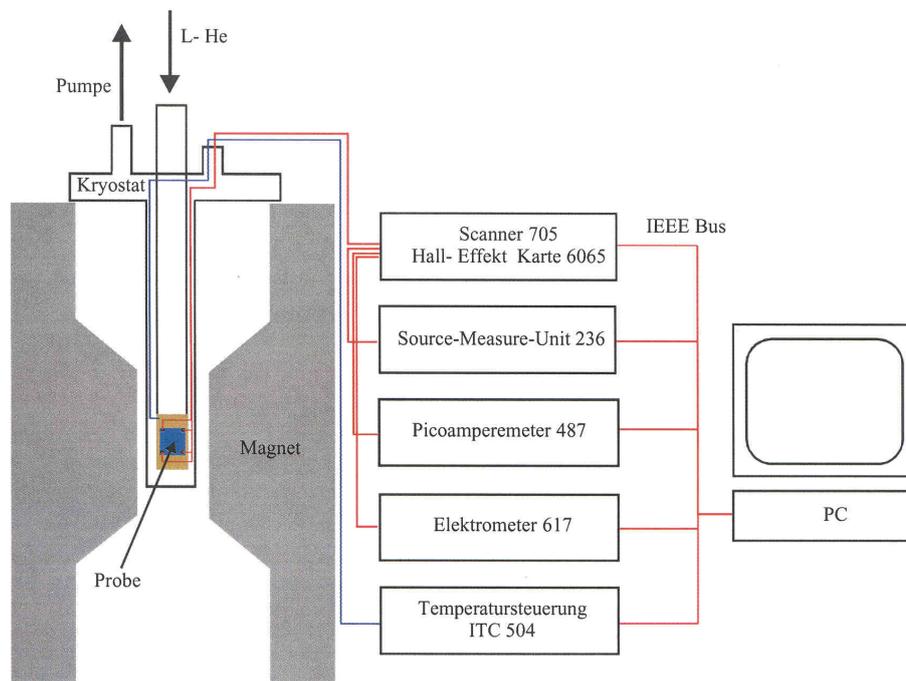
5.2 Hall-Effekt an Halbleitern

5.2.1 Versuchsaufbau

Für diesen Versuchsteil wird entweder ein ZnO- oder ein Si- Bulkkrystall verwendet. Er liegt in Form eines quadratischen 5 bis 10 mm breiten und 0,5 mm dicken Wafers vor. Der Krystall wurde bereits in der Nähe der vier Ecken mit gelötetem Indium und Kupferdraht kontaktiert.

Diese Anordnung ist optimal für die Anwendung der van-der-Pauw Messmethode geeignet. Die Probe wird in einem kommerziell erhältlichen Kryostaten unter Vakuum aufbewahrt. Mit Hilfe einer Kühlapparatur, die Stickstoff oder Helium verwendet, und einer Widerstandsheizung kann die Temperatur zwischen 4,2 K und 500 K eingestellt werden. Eine PID-Temperaturregelung hilft beim Einstellen und Halten der gewünschten Temperatur. Der Kryostat befindet sich in einem AEG Elektromagneten der eine magnetische Flussdichte von bis zu 1 T erzeugen kann. Die Meßelektronik besteht aus einer Konstantstromquelle (Keithley SMU 236), die für die HALL-messungen einen Strombereich zwischen 0,1 nA und 100 mA ermöglicht. Die Spannungsmessung erfolgt mit einem Keithley 617 Elektrometer. Für die Verschaltung der Kontakte untereinander wird ein Keithley 705 Scanner eingesetzt. Der Probenhalter besteht aus einem Kupferblech, welches direkt mit dem Wärmetauscher des Kryostaten verschraubt ist. Der Temperaturgradient zwischen Wärmetauscher und Kryostat ist kleiner als 3K.

Zur Impedanzwandlung zwischen Probenwiderstand und Spannungsausgang kommt eine Keithley 6065 HALLmeßkarte zum Einsatz. Deren Ausgangsimpedanz beträgt 30Ω , somit ist es theoretisch möglich, Halbleiterproben mit einem Widerstand von bis zu $10 T \Omega$ zu untersuchen. Die Meßleitungen sind in Guard-Technik bestehend aus Triaxialkabeln ausgelegt, um ein möglichst gutes Signal-Rauschverhältnis zu erhalten. Der Unterschied zu Biaxialkabeln besteht darin, daß zwischen Innenleiter und Abschirmung ein weiterer Innenleiter liegt, der mittels schnellen Operationsverstärkers auf das Potential des Innenleiters gelegt wird. Hiermit werden kapazitive Kopplungen zwischen Innenleiter und Abschirmung weitestgehend vermieden, die sich besonders stark bei Stromstärken $< 1 \mu A$ bemerkbar machen würden. Die Ermittlung von ρ , R_H , μ_H und der Ladungsträgerdichte erfolgt mit Hilfe eines auf LABVIEW basierenden Meßprogrammes, welches auch die Anpassung der VAN DER PAUW Faktoren übernimmt.



(e) Versuchsaufbau Teil 2

5.2.2 Versuchsdurchführung

Im Versuchsteil „Halbleiter“ ist eine temperaturabhängige Hall-Messung im Bereich von 200 bis 400 K durchzuführen. Die Schrittweite der Messung beträgt 20K. Dabei werden der spezifische Widerstand, die Ladungsträgerdichte und die Beweglichkeit gemessen und in Form einer .dat Datei ausgegeben. Es ist dann mit Hilfe der gemessenen Daten folgende Auswertung anzufertigen:

- Die Beweglichkeit soll gegen die Temperatur aufgetragen werden. Es ist ein Fit $f(T) = a \cdot T^b$ durchzuführen. Dabei ist besonders der Parameter b von Interesse. Wie kann man das Ergebnis mit Hilfe der in dieser Anleitung befindlichen Informationen über Streumechanismen interpretieren?
- Der spezifische Widerstand ist gegen die Temperatur aufzutragen.
- In einem Plot soll $\log(n(T))$ gegen $1000/T$ aufgetragen werden. Anhand der Geradensteigung des Plots soll näherungsweise die Energietiefe des Donatorniveaus errechnet werden.

5.2.3 Bestimmung der Tiefe der Donatorniveaus

Die Boltzmann-Verteilung kann zu Rate gezogen werden um die Besetzung des Leitungsbandes durch ein im Abstand ΔE befindlichen Donatorniveaus zu beschreiben:

$$n(T) = n_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$$

Dies lässt sich Umformen zu:

$$\begin{aligned} \frac{n(T)}{n_0} &= e^{-\frac{\Delta E}{k_b T}} \\ \ln(n(T)) - \ln(n_0) &= -\frac{\Delta E}{k_b T} \\ \frac{1000 \cdot \ln(n(T)) \cdot T}{1000} - \frac{1000 \cdot \ln(n_0) \cdot T}{1000} &= -\frac{\Delta E}{k_b} \\ \frac{\ln(n(T))}{\left(\frac{1000}{T}\right)} \cdot 1000 - \underbrace{\frac{\ln(n_0)}{\left(\frac{1000}{T}\right)}}_{=0} \cdot 1000 &= -\frac{\Delta E}{k_b} \\ \Delta E &= -1000 \cdot k_B \cdot s \end{aligned}$$

Wobei s die Steigung der Fitgeraden im Plot von $\log(n(T))$ gegen $1000/T$ darstellt.

Vorbereitungen auf den Versuch

Für diesen Versuch sind zumindest Grundkenntnisse in Festkörperphysik erforderlich. Dazu gehört außer dem Inhalt dieser Anleitung unter anderem noch:

- Was sind Festkörper? Welche unterschiedlichen Typen gibt es?
- Anhand welcher elektrischen Eigenschaften kann man Festkörper einteilen?
- Was ist das Bändermodell? Wie kann man es erklären?
- Welche Näherungen gibt es für die Lösung der Schrödinger-Gleichung in Festkörpern?
- Was ist das Drude-Modell?
- Über welche grundlegenden Charakteristiken verfügen Halbleiter?
- Was sind Donatoren und Akzeptoren? Wie erzeugt man sie?
- Wie kann man thermische Anregung in Halbleitern formal beschreiben?
- Was ist die Lorentz-Kraft? Wie kann man damit den Hall-Effekt erklären?
- Wie unterscheiden sich die Temperaturabhängigkeiten der elektrischen Messgrößen von Metallen und Halbleitern?
- Welche Informationen stecken in der Hall-Konstanten? Wie kann man sie bestimmen?

Es ist nicht nötig, die Formeln für die Streumechanismen im Kopf zu haben, die Abhängigkeiten sollte man sich allerdings merken.

5.3 Literaturempfehlungen

Einführung in die Festkörperphysik; Kittel; Oldenbourg-Verlag
Festkörperphysik; Ashcroft, Mermin; Oldenbourg-Verlag
Einführung in die Halbleiterphysik; Seeger; Vieweg-Verlag
Höhere Experimentalphysik; Böhm, Scharmann; VCH