

III. Schwingungen und Wellen

III.2 Wellen

Wellenphänomene



Wasserwellen



Schallwellen



Lichtwellen



Definition einer Welle

- Eine **Welle** ist ein Vorgang, der sich periodisch in Zeit und Raum ausbreitet und Energie transportiert ohne gleichzeitigen Materietransport



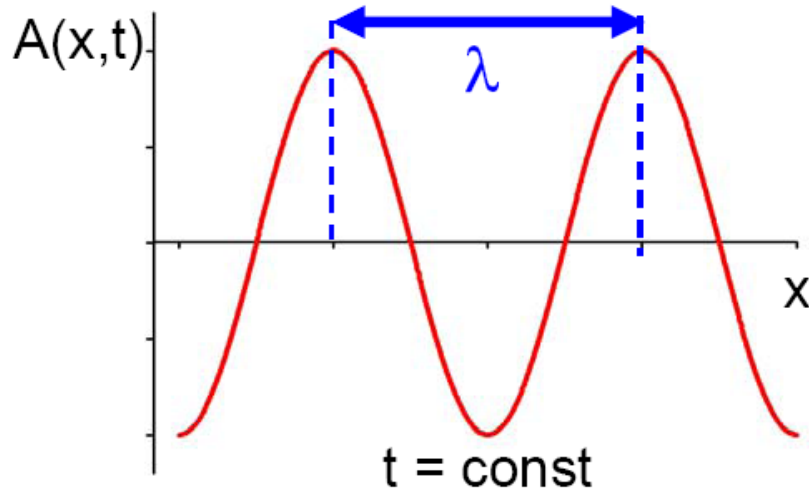
Schnappschuss (**fester Zeitpunkt**)
vom Schiff: **räumlich periodische**
Zustandsänderung des Wassers



Film von Boje (**an festem Ort**):
zeitlich periodische Auf- und
Ab- Bewegung des Wassers

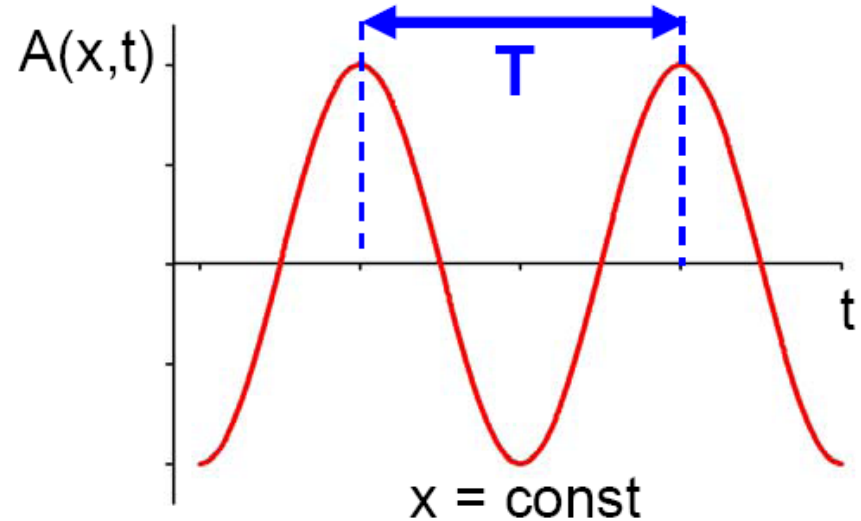
Wellenlänge, Periodendauer

- räumliche Darstellung



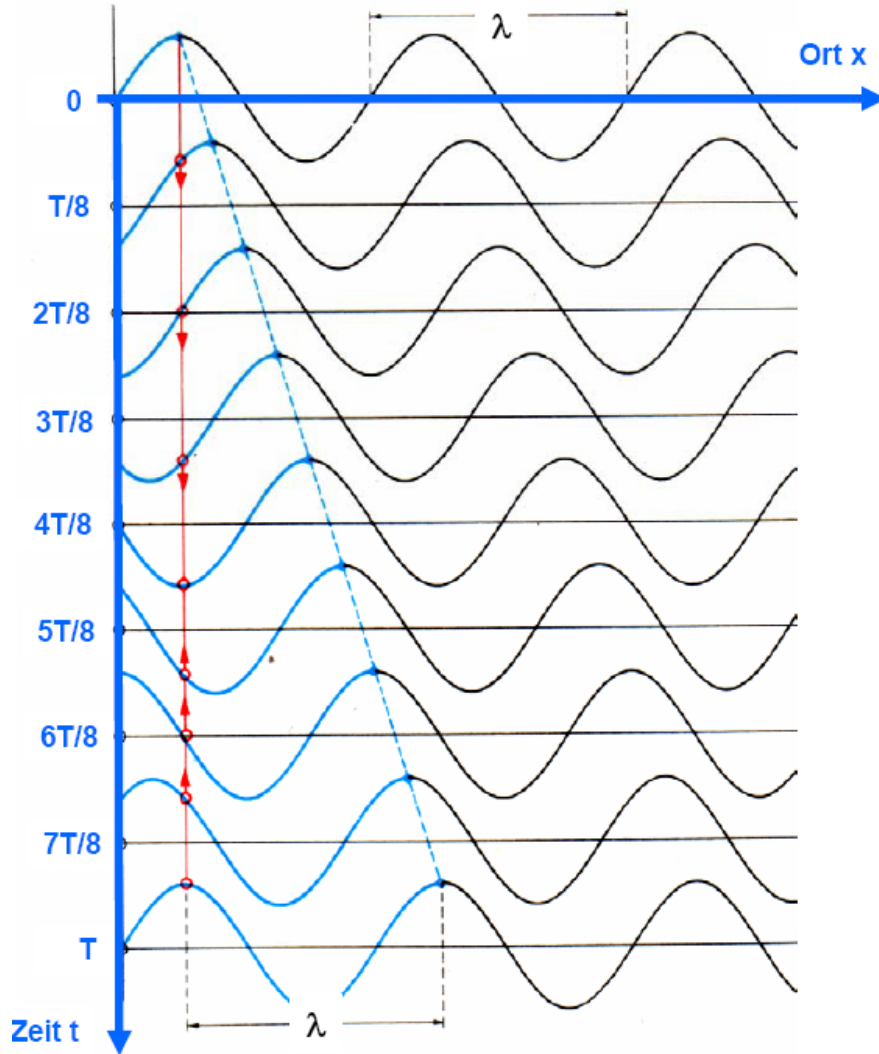
- zu fester Zeit t wird eine **räumlich harmonische** Auslenkung mit der **Wellenlänge λ** beobachtet

- zeitliche Darstellung



- am festen Ort x wird eine **zeitlich harmonische** Schwingung mit der **Periodendauer T** beobachtet

Wellenausbreitung



- **Wellenausbreitung:**
räumlich und zeitlich harmonische Schwingungen sind gekoppelt. Während der Periodendauer T breitet sich die gesamte Welle um die Strecke λ aus:

Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

- die **Amplitude $A(x,t)$** einer Welle ist sowohl eine Funktion der Ortskoordinate x als auch der Zeit t

$$A^{\pm}(x,t) = A_0 \cdot \sin\left(2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$A^+(x,t)$ läuft mit zunehmender Zeit in Richtung negativer x -Werte,
 $A^-(x,t)$ in Richtung positiver x -Werte

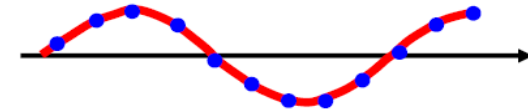
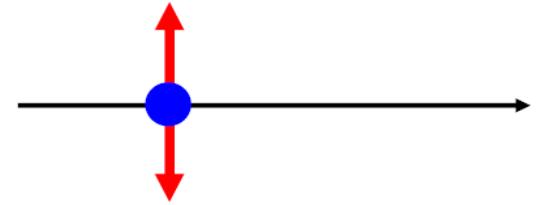
Transversale und longitudinale Wellen

- transversale Wellen:

Schwingungsrichtung **senkrecht** zur Ausbreitungsrichtung

in Materie nur möglich, wenn Scherkräfte auftreten, also nur in Festkörpern, nicht in Gasen und Flüssigkeiten

Beispiele: Seilwellen, elektromagnetische Wellen



Seilwelle

- longitudinale Wellen:

Schwingungsrichtung parallel zur Ausbreitungsrichtung

Beispiel: Schallwellen
(Dichteänderungen in Materie)



Modell einer Verdichtungs-
welle

Kugelwellen und ebene Wellen

Kugel- (Kreis-) Wellen



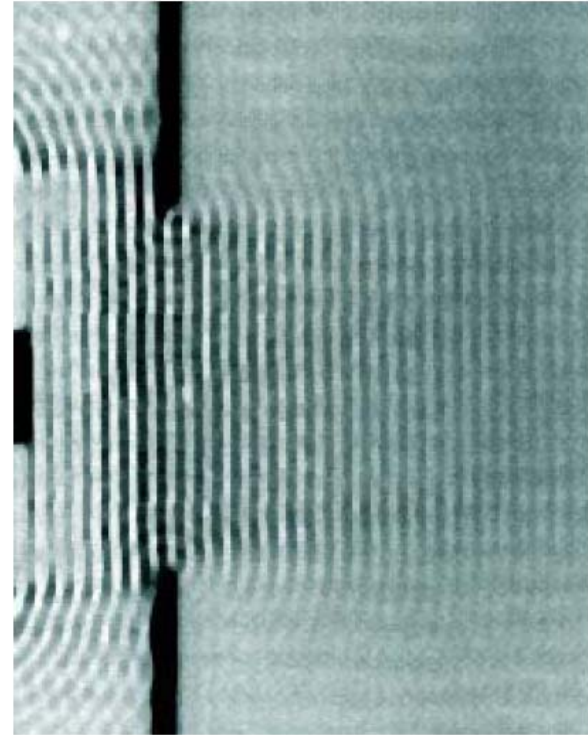
Kugelwellen (in der Ebene Kreiswellen) entstehen durch eine punktförmige Störung in einem homogenen Medium;

Wellenfront: Kugel oder Kreis



Kreiswelle

Ebene Welle



eine (unendlich große) ebenflächige Störung führt in einem homogenen Medium zu einer ebenen Welle:

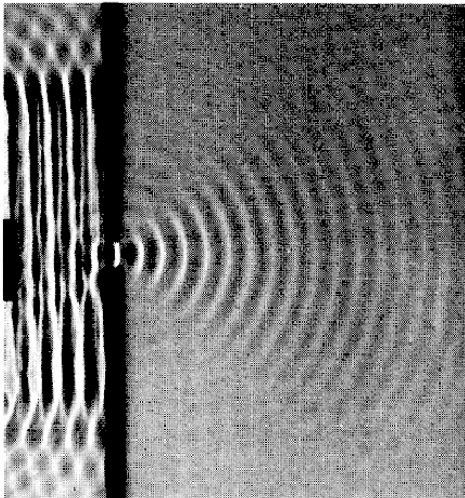
Wellenfront eben



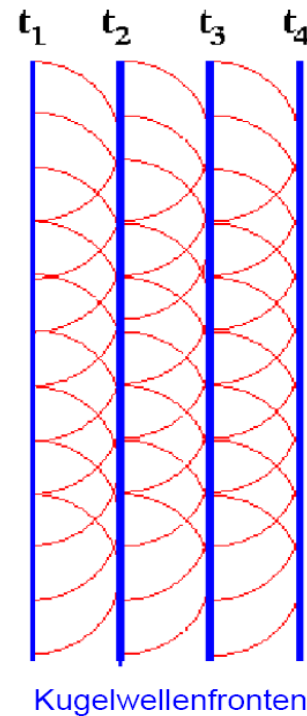
Ebene Welle

Huygens'sches Prinzip

- Von jedem Punkt einer Wellenfront gehen neue kugelförmige **Elementarwellen** aus. Die Einhüllende dieser Elementarwellen ergibt die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt



**Elementar-
wellen**



Christian Huygens
1629-1695

$$x = c_{\text{ph}} \cdot t$$



Ausbreitung einer
ebenen Welle

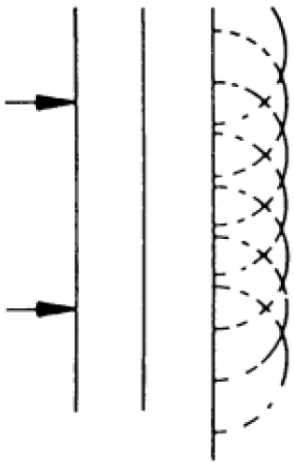


Elementarwellen

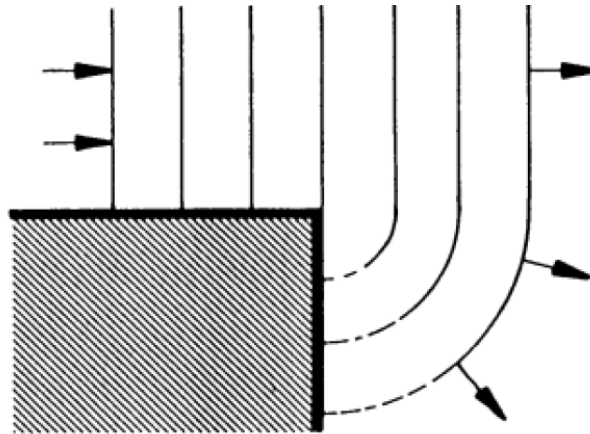
Beugung

Beugung: charakteristisches Wellenphänomen; Eindringen in Bereiche, die bei geradliniger Ausbreitung nicht erreicht werden können

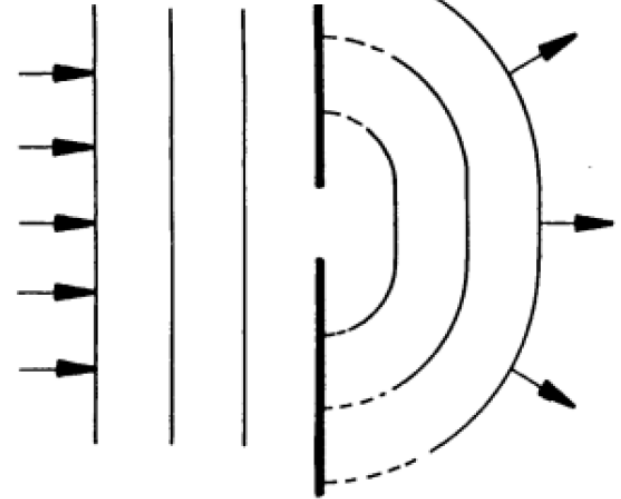
Wellenfront als
Einhüllende der
Elementarwellen



Ausbreitung hinter
einem Hindernis



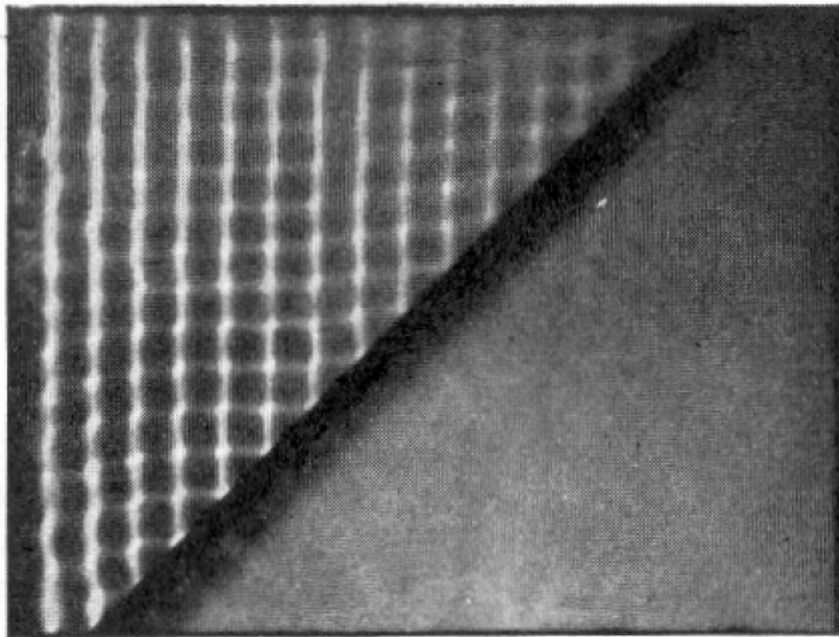
Ausbreitung
hinter einem Spalt



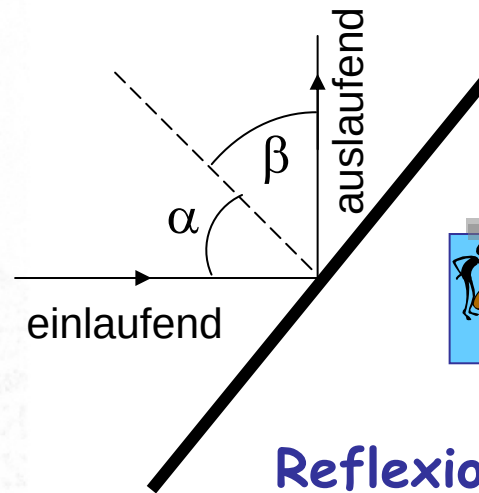
Beugung bei
Wasserwellen

Überlagerung von Wellen

- **Superposition:** Wenn zwei Wellensysteme aufeinander treffen, breiten sie sich so aus, als sei das andere System nicht vorhanden
- **Interferenz:** haben zwei Wellen gleiche Frequenz, gleiche Amplitude und eine feste Phasenbeziehung, so kommt es bei der Überlagerung zu einer **stationären** (zeitunabhängigen) **Interferenz**



Beispiel: Reflexion einer Wasserwelle an Hindernis



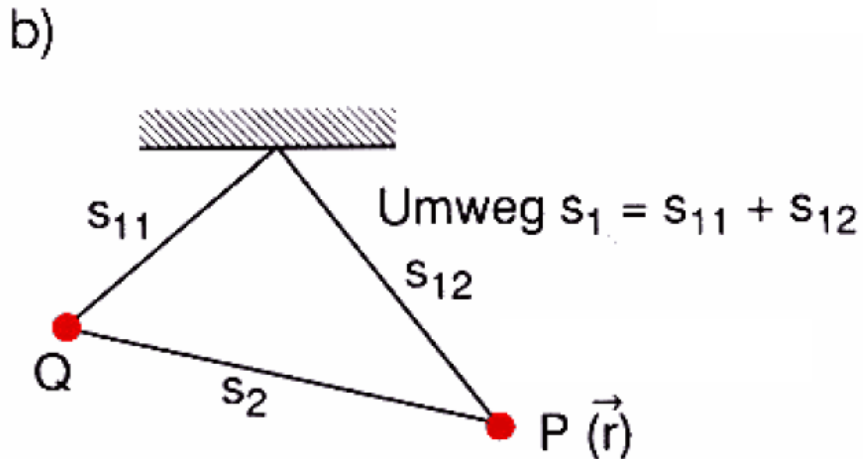
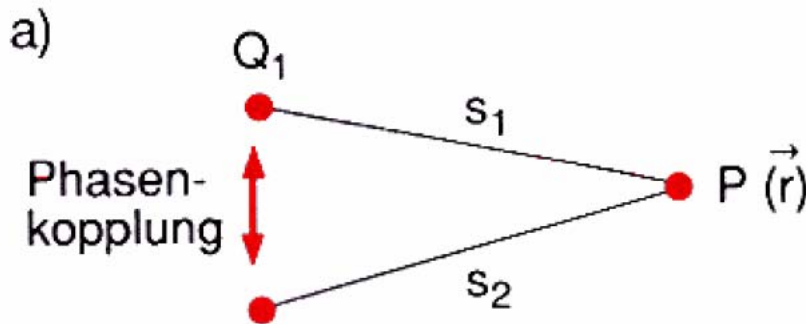
Reflexion von
Wasserwellen

Reflexionsgesetz:
Einfallswinkel α = Ausfallwinkel β
(gemessen gegen Lot)

Reflexionsgesetz herzuleiten aus dem Huygenschen Prinzip

Kohärenz

- Zwei Wellensysteme sind **kohärent**, wenn sie in einer **festen Phasenbeziehung** zueinander stehen, d.h. die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ an einem Punkt ist unabhängig von der Zeit; $\Delta\varphi$ ergibt sich aus dem **Gangunterschied** (dem Unterschied in der durchlaufenen Strecke)



Beispiel a):

starre Phasenkopplung: beide Wellen werden durch den gleichen Mechanismus erzeugt; (z.B. Doppeltupfer)

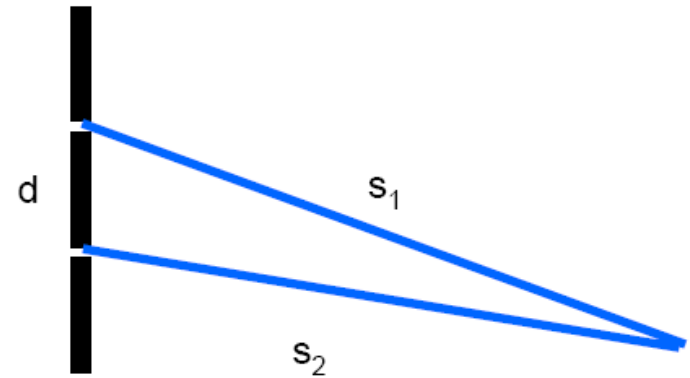
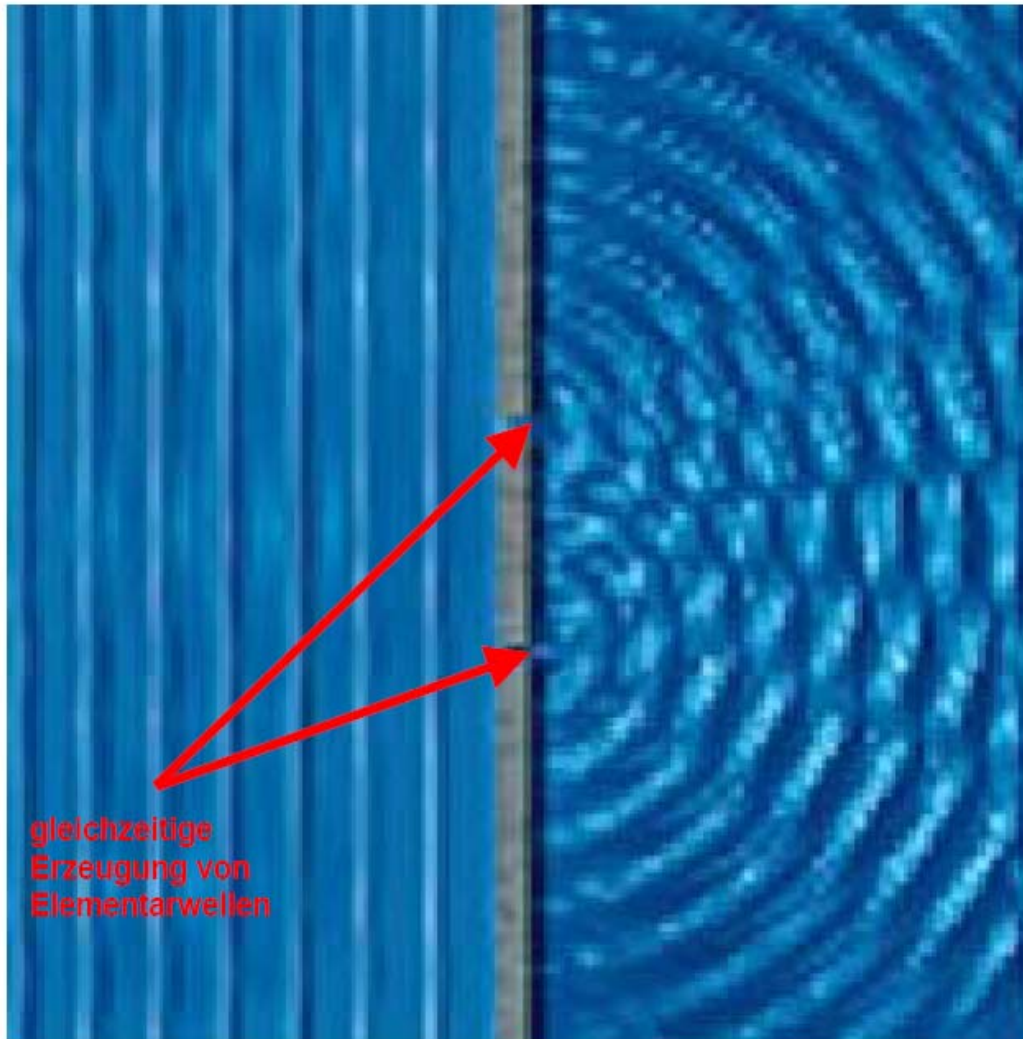
Beispiel b):

Aufteilung einer Welle in zwei Teilwellen

Phasendifferenz:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (s_1 - s_2)$$

Interferenz am Doppelspalt



Gangunterschied: $s_1 - s_2$

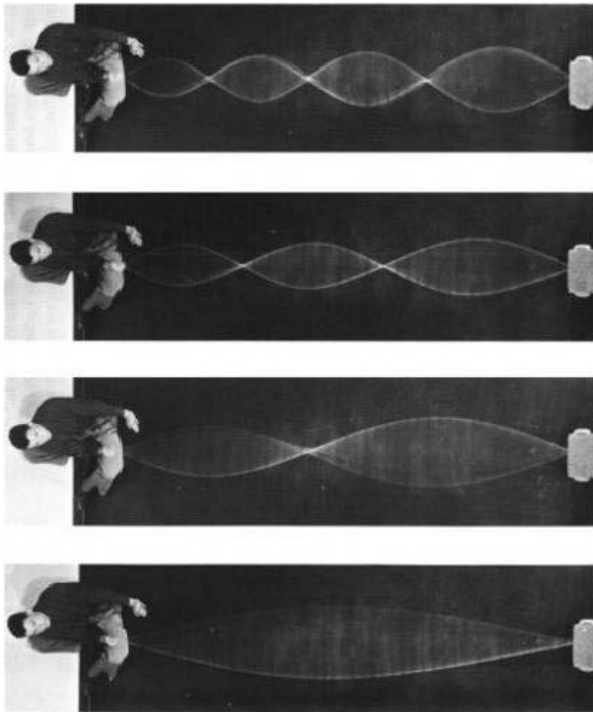
- Wenn $s_1 - s_2 = 2 \cdot n \cdot \lambda / 2$
(gradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge) dann
konstruktive Interferenz
(Verstärkung)
- Wenn $s_1 - s_2 = (2 \cdot n + 1) \cdot \lambda / 2$
(ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge) dann
destruktive Interferenz
(Auslöschung)



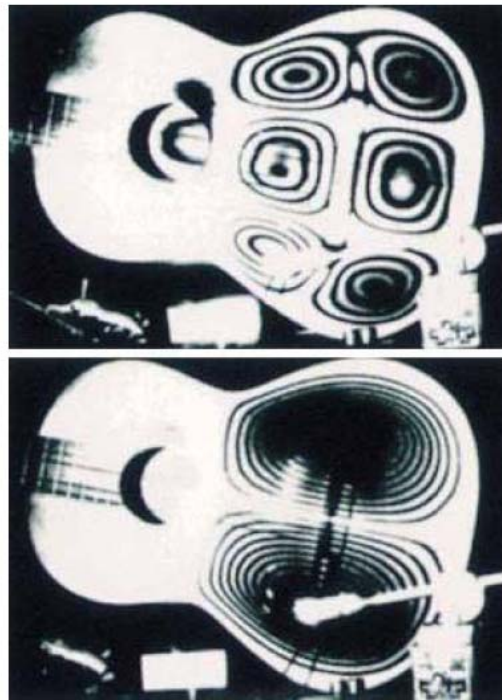
Interferenz am
Doppelspalt

Stehende Wellen

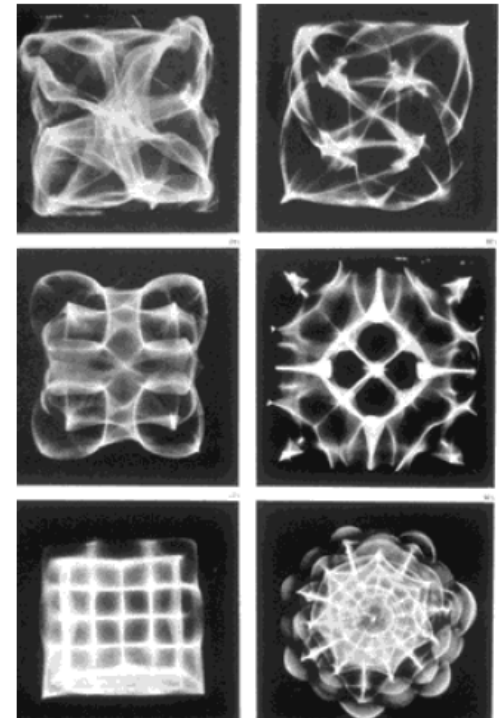
- **Stehende Wellen** entstehen durch Überlagerung zweier entgegengesetzt laufender Wellen gleicher Frequenz und Amplitude
- Beispiele: Schwingendes Seil, schwingende Saite, schwingende Membranen; schwingende Luftsäulen (Pfeiffen)



Schwingendes Seil



Schwingender
Gitarrenboden

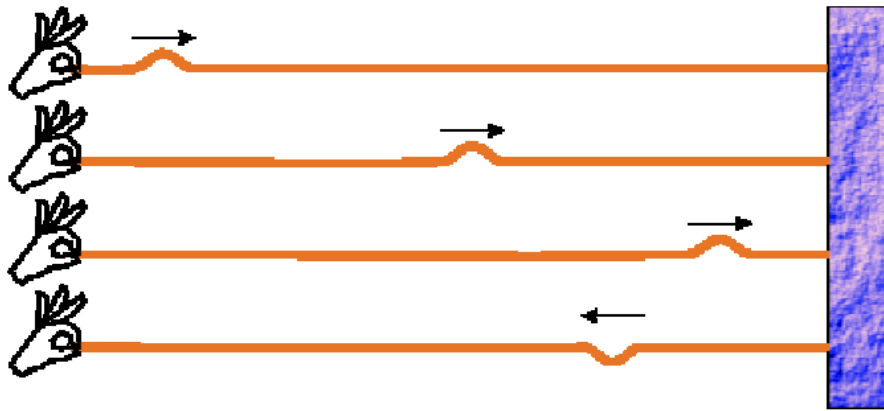


3-dimensionale stehende
Wellen-Strukturen in einer
Flüssigkeit



2-dim. stehende Wellen

Reflexion am festen und losen Ende

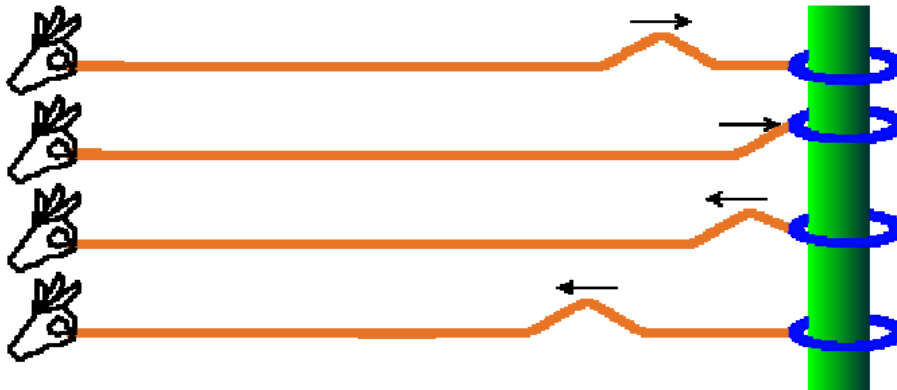


festes Ende

- Bei der Reflexion an einem festen Ende gibt es einen **Phasensprung von 180° (π)**. Eine resultierende stehende Welle hat an dieser Stelle immer einen Schwingungsknoten



Reflexion am
festen Ende



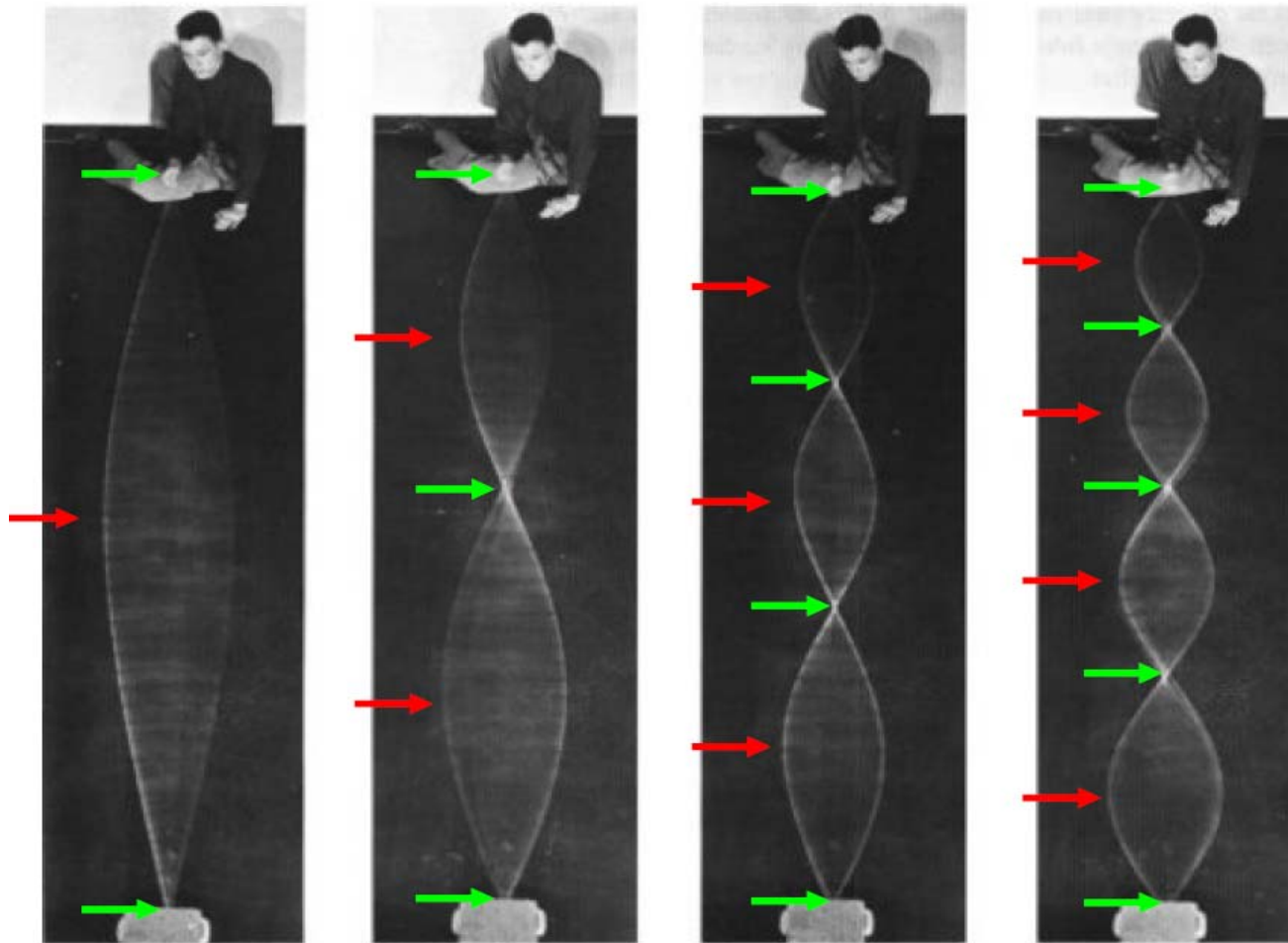
loses Ende

- Bei Reflexion an einem losen Ende gibt es keinen Phasensprung

- Die Randbedingungen (offen oder lose) bestimmen die Lage der ortsfesten **Schwingungsknoten** und **Schwingungsbäuche**

Eigenschaften stehender Wellen

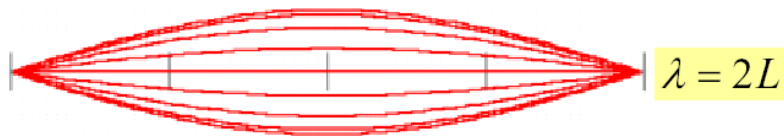
Die Überlagerung der hinlaufenden und der reflektierten Seilwelle ergibt ortsfeste **Schwingungsknoten** (grüne Pfeile) und **Schwingungsbäuche** (rote Pfeile)



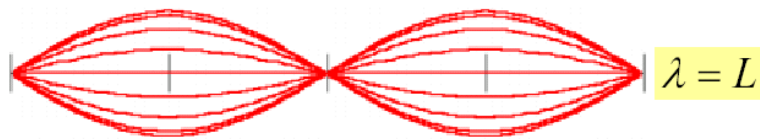
Stehende
Seilwelle

Eigenschaften stehender Wellen

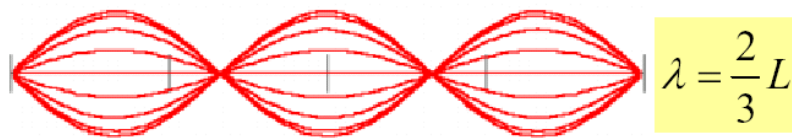
- Die Überlagerung von nach rechts und nach links laufenden Wellen führt zur Ausbildung von **Schwingungsbäuchen** und **Schwingungsknoten** an festen Orten
- Die Vorgabe der Randbedingung (hier beide Enden fest) und der Länge ermöglicht nur ganz bestimmte **Eigenschwingungen**



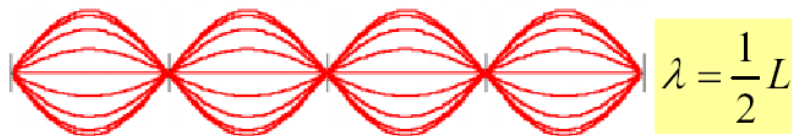
Grundwelle



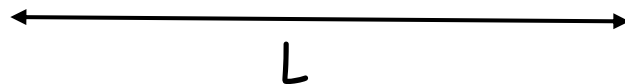
1. Oberwelle



2. Oberwelle



3. Oberwelle



beidseitig
eingespannte
Saite

Saiteninstrumente



Violine



Cello



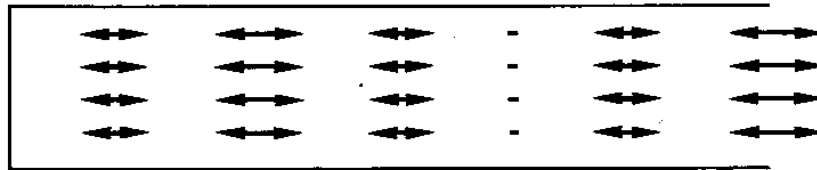
Bratsche



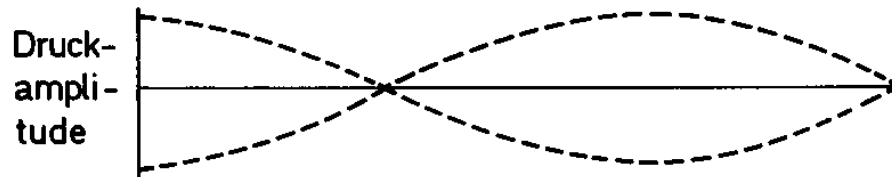
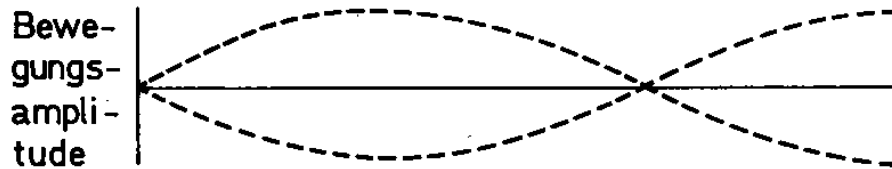
Gitarre

Stehende Schallwellen

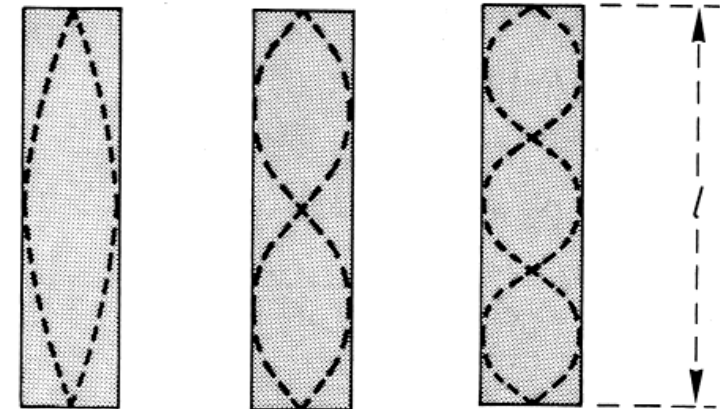
Schallwellen in Gasen
sind longitudinal !



Bewegung der Teilchen



Geringste Auslenkung der
Gasmoleküle bei maximalem Druck



$$\frac{\lambda}{2} = l$$

$$f_1$$

$$2 \frac{\lambda}{2} = l$$

$$f_2 = 2 f_1$$

$$3 \frac{\lambda}{2} = l$$

$$f_3 = 3 f_1$$

Grund- und Oberwellen



offene und
gedackte
Pfeiffe

Schallgeschwindigkeiten

$$c_{\text{fest}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$c_{\text{fl}} = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

$$c_{\text{gas}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot k_B \cdot T}{m}}$$

Feste Körper in Stabform	m/s	Flüssigkeiten bei 15 °C	m/s	Gase bei 0 °C	m/s
Aluminium	5100	Alkohol	1170	Helium	<u>970</u>
Blei	1200	Kochsalzlösung 20%	1600	Kohlendioxid CO ₂	260
Eisen	5000	Petroleum	1325	Leuchtgas	440
Glas	5000	Quecksilber	1430	Luft	<u>331</u>
Messing	3500	Tetrachlorkohlenstoff	950	Sauerstoff	315
Plexiglas	1580	Wasser, destilliert	1464	Stickstoff	336
Tannenholz, trocken	5200	Xylol	1350	Wasserstoff	1260

E = Elastizitätsmodul

ρ = Dichte

K = Kompressionsmodul

κ = C_p/C_v = Adiabatenexponent

k_B = Boltzmann-Konstante

T = Temperatur

m = Molekülmasse

$$c_{\text{He}} = 970 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad c_{\text{Luft}} = 331 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c = f \cdot \lambda; \quad f = \frac{c}{\lambda}$$

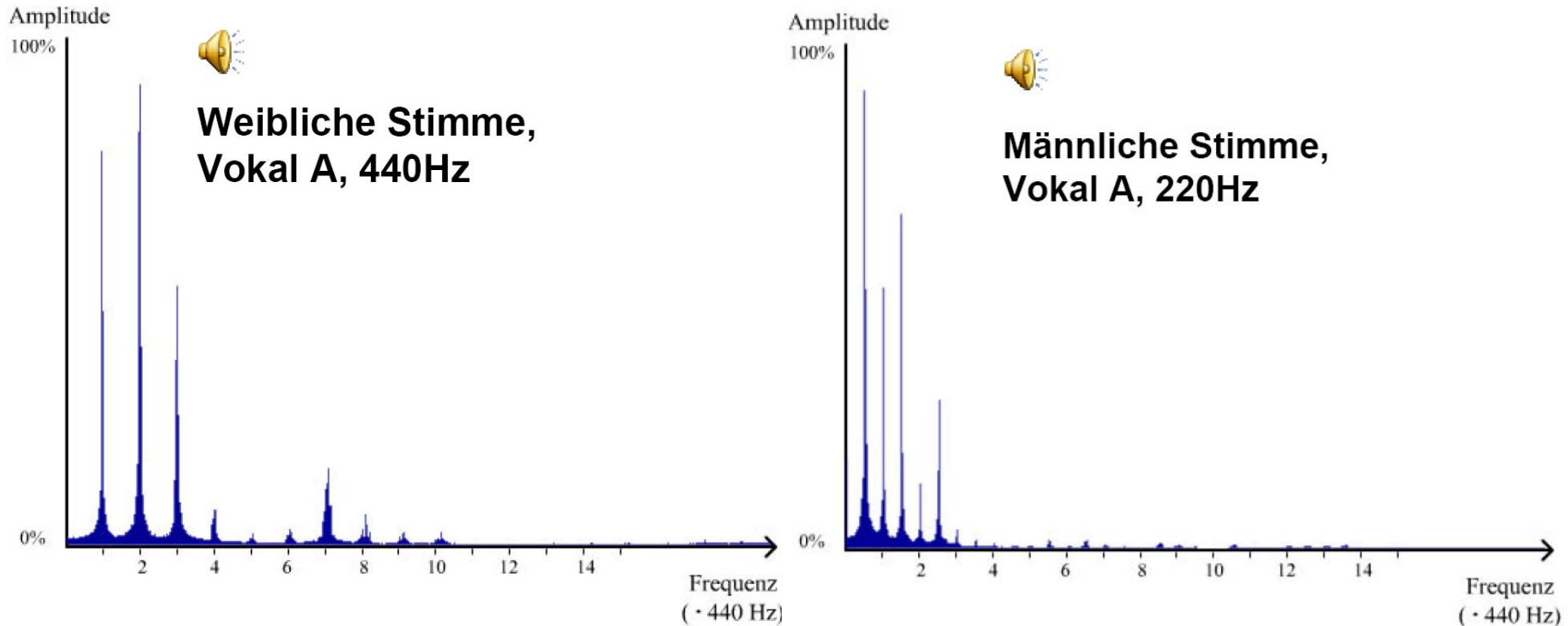
bei gleicher Wellenlänge λ höhere Frequenz f
in He im Vergleich zu Luft: $f_{\text{He}} > f_{\text{Luft}}$



Sprechen in Helium

Stimmenerkennung

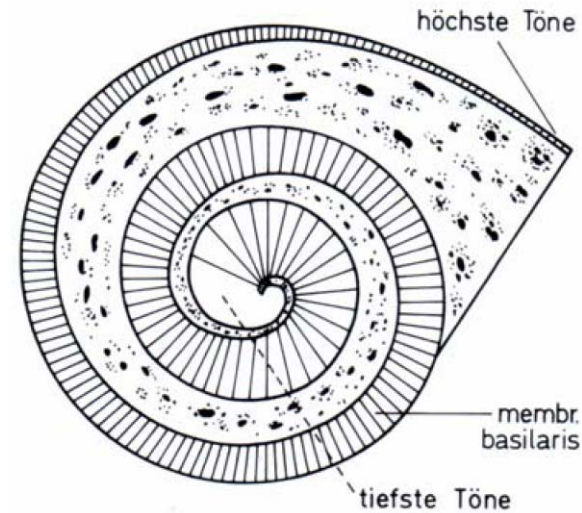
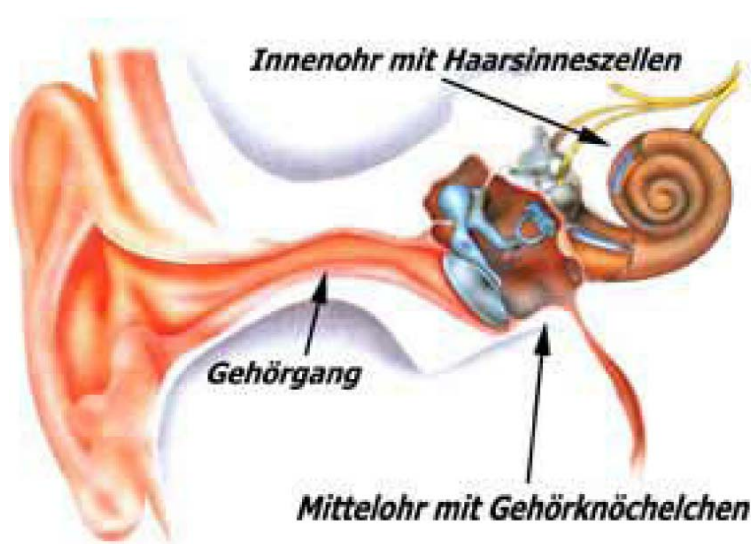
- Fourierzerlegung der Schallwellen



- menschliche Stimmen haben ihr charakteristisches **Obertonspektrum**, welches durch die individuelle Beschaffenheit des Klangkörpers Mensch bestimmt wird. So erkennt man Menschen an ihrer Stimme genau wie wir verschiedene Instrumente an ihrem spezifischen Klang erkennen

Ohr und Hören

- Umsetzung von Schallwellen in elektrische Signale



Schnecke des Innenohres

- **äußeres Ohr** - Schalltrichter
- **Mittelohr** – Übertragung des Schalls ins Innenohr
- **Innenohr** – eigentliches Gehör: Umwandlungen mechanischer Schwingungen in elektrische Signale
 - Frequenzanalyse über unterschiedliche Resonanzpositionen in der Gehörschnecke für hohe und tiefe Töne
 - detektierbarer Frequenzbereich; 16 Hz $\leftrightarrow$ 16 kHz



Schallwahrnehmung

$$\text{Schallintensität } J = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}}$$

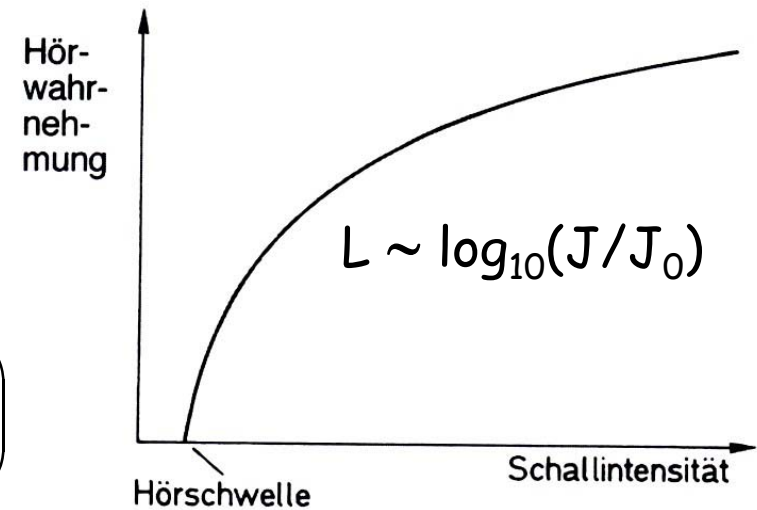
Die **subjektive Schallwahrnehmung**, d.h. die Lautstärke L , wächst **logarithmisch** mit der Schallintensität

$$\text{Lautstärke [dB]} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\text{Schallintensität}}{\text{Bezugsintensität}} \right)$$

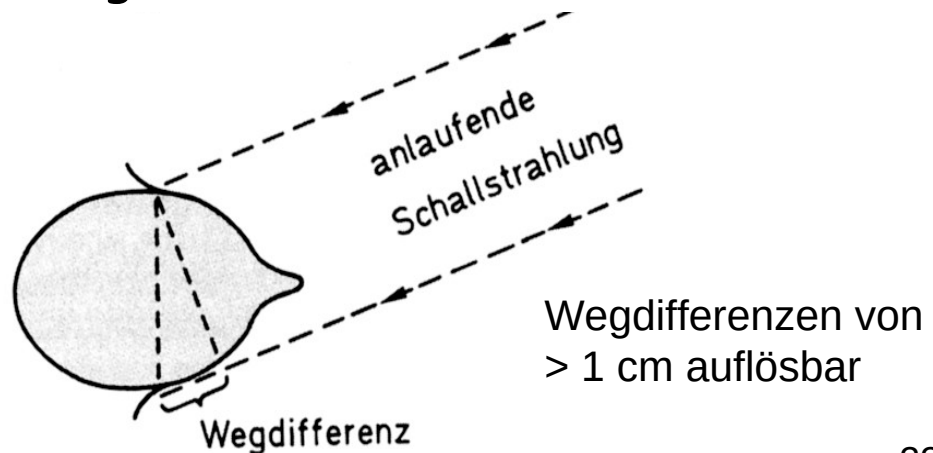
$$\text{Bezugsintensität} = \text{Hörschwelle} = J_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$$

Beispiele:

J_1 / J_0	dB(A)	
1	0	Hörschwelle
10	10	Blätterrauschen
10^4	40	Unterhaltung
10^7	70	Lärm
10^{13}	130	Schmerzschwelle
10^{16}	160	Hörverlust



Die **Richtungswahrnehmung** entsteht aus der Zeitdifferenz des Eintreffens von Schallsignalen an beiden Ohren.

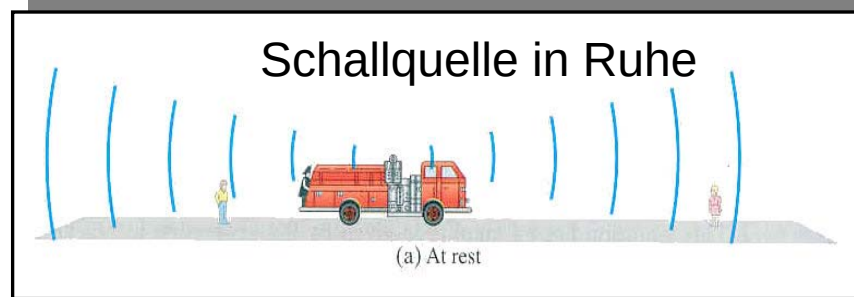


Der Doppler Effekt

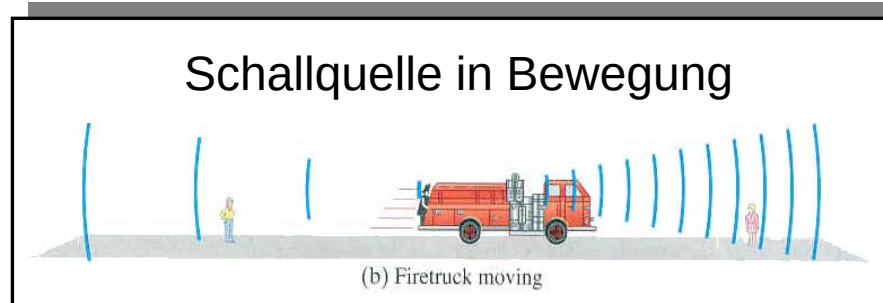


Christian Doppler
1803 - 1853

**Frequenz-
erniedrigung**
bei Entfernen



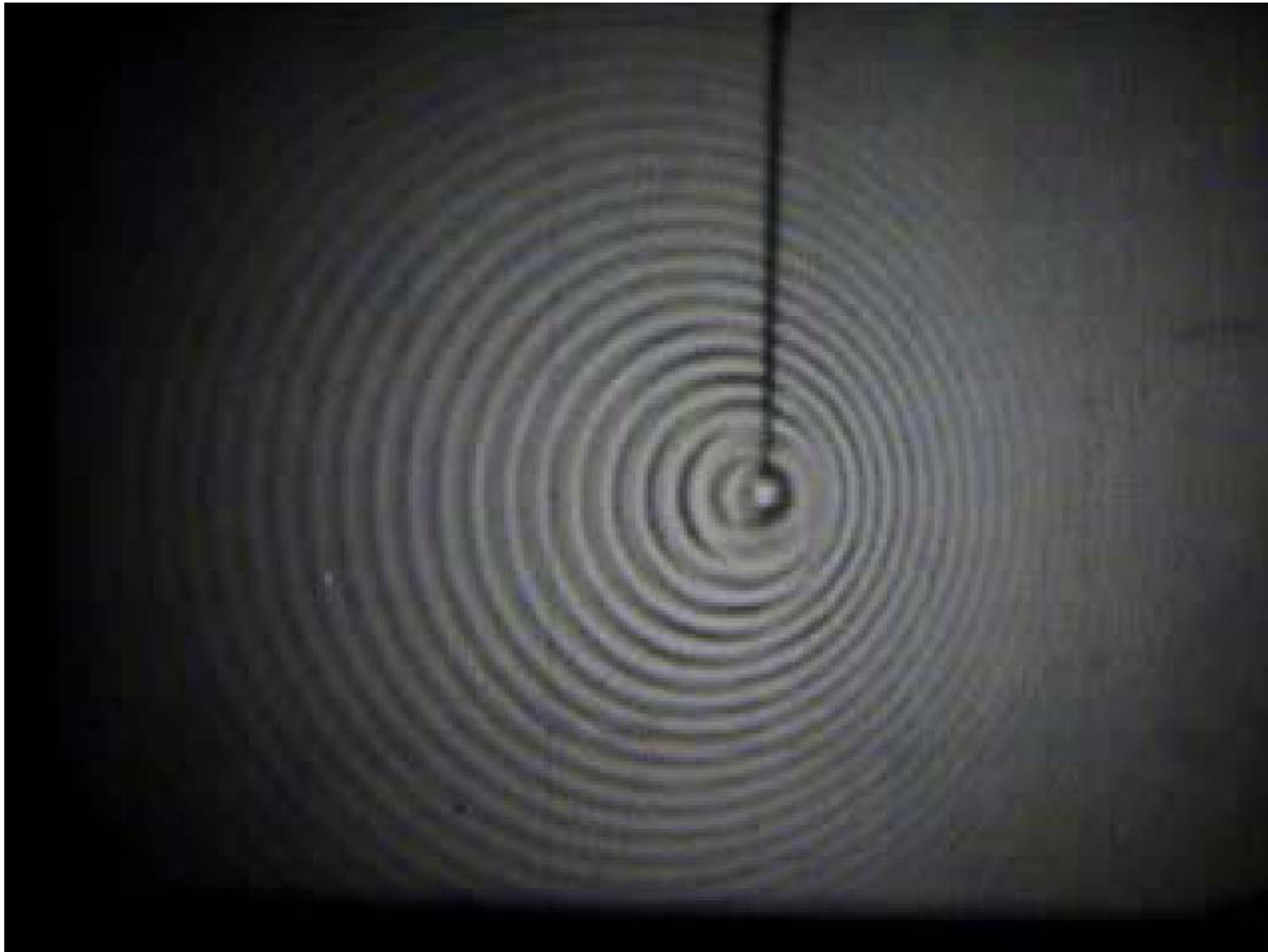
$$f_0 = \frac{1}{T}$$



**Frequenz-
erhöhung**
bei Annäherung

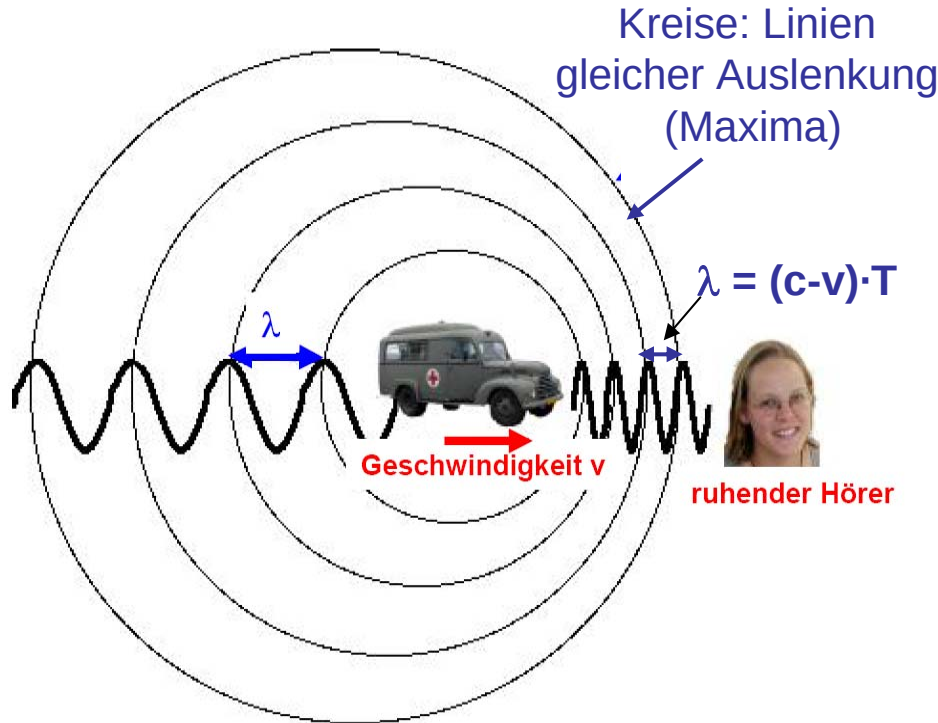
- Bewegen sich Schallquelle und ein Hörer relativ zueinander mit der Geschwindigkeit v , dann wird von dem Hörer eine Schallfrequenz f registriert, die verschieden ist von der Sendefrequenz f_0 , die ein Hörer im Ruhesystem der Quelle wahrnimmt. Die Frequenzverschiebung $\Delta f = f - f_0$ heißt **Doppler-Verschiebung**

Dopplereffekt bei Wasserwellen



Dopplereffekt bei
Wasserwellen

Der Doppler Effekt



- die Quelle emittiert Signale (Maxima) im Zeitabstand $T=1/f_0$
- im System des Hörers ist der räumliche Abstand zweier Signale (Maxima) $\lambda=(c-v) \cdot T$, weil sich das Signal mit der Geschwindigkeit c bewegt und die Quelle selbst mit v
- die Ausbreitung der Welle im Medium (Luft) erfolgt mit der Geschwindigkeit c ; also:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c-v) \cdot T} = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot f_0 \Rightarrow \Delta f = f - f_0 = \frac{v}{c} \cdot f_0 \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{v}{c}}$$

$v > 0$ Quelle und Hörer bewegen sich aufeinander zu $\Rightarrow$ Frequenzerhöhung

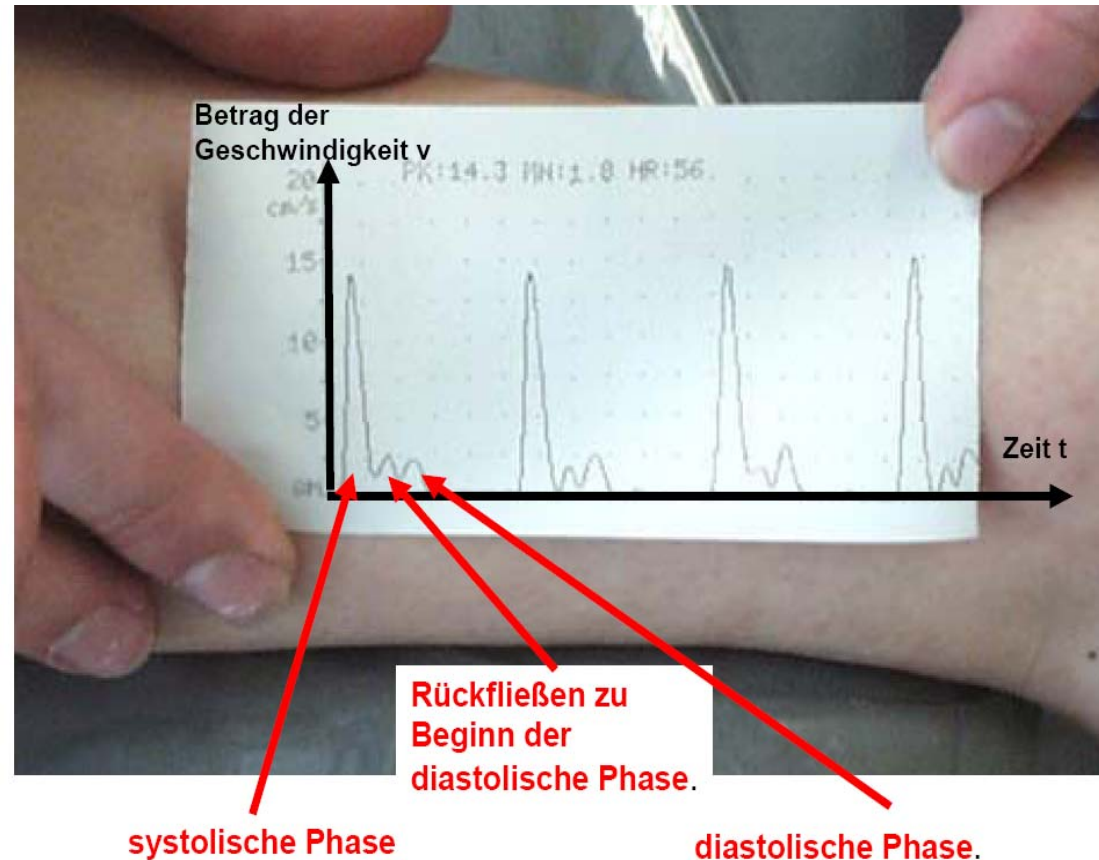
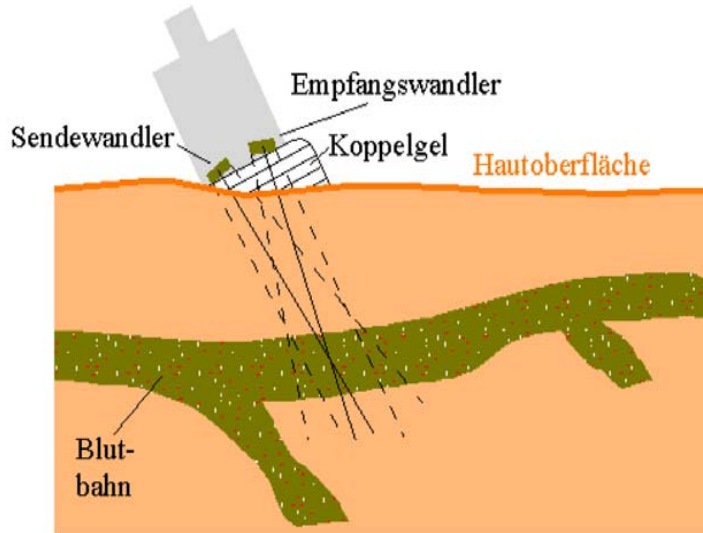
$v < 0$ Quelle und Hörer bewegen sich voneinander weg $\Rightarrow$ Frequenzerniedrigung

Beispiel: Schallquelle fährt mit 100 km/h ($v = 28 \text{ m/s}$) an uns vorbei:

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{28 \text{ m/s}}{331 \text{ m/s}} = 0,09 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\Delta f}{f_0} = 18\% \approx \text{kleine Terz}$$

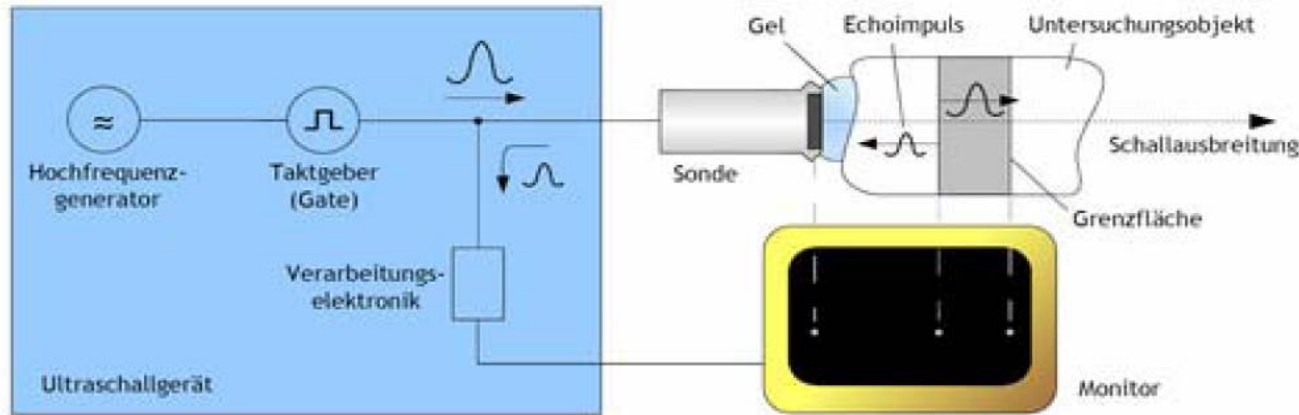
Anwendungen des Dopplereffekts in der Medizin

- Ausnutzung des Dopplereffekts bei **Ultraschall** (30 kHz – 100 MHz)
- Messung der **Strömungsgeschwindigkeit des Bluts**: am strömenden Blut erfährt die remittierte Schallstrahlung eine **Frequenzverschiebung**



Weitere Ultraschallanwendungen: Echoverfahren, Sonographie

- Verschiedene Materialien (Gewebe) dämpfen und reflektieren den Ultraschall unterschiedlich stark $\Rightarrow$ Darstellung von Inhomogenitäten im Gewebe bzw. Gewebeveränderungen;



Zwei Verfahren:

- Messung der Signal-Laufzeit:
Impuls-Echo Verfahren $\Rightarrow$ Tiefenprofil
- Messung der reflektierten Intensität



Machscher Kegel

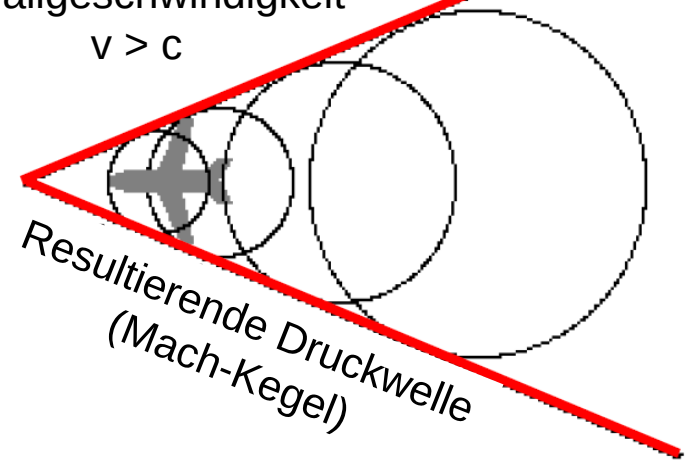


Flugzeug unter
Schallgeschwindigkeit
 $v < c$
Dopplereffekt



Flugzeug mit
Schallgeschwindigkeit
 $v = c$

Flugzeug über
Schallgeschwindigkeit
 $v > c$

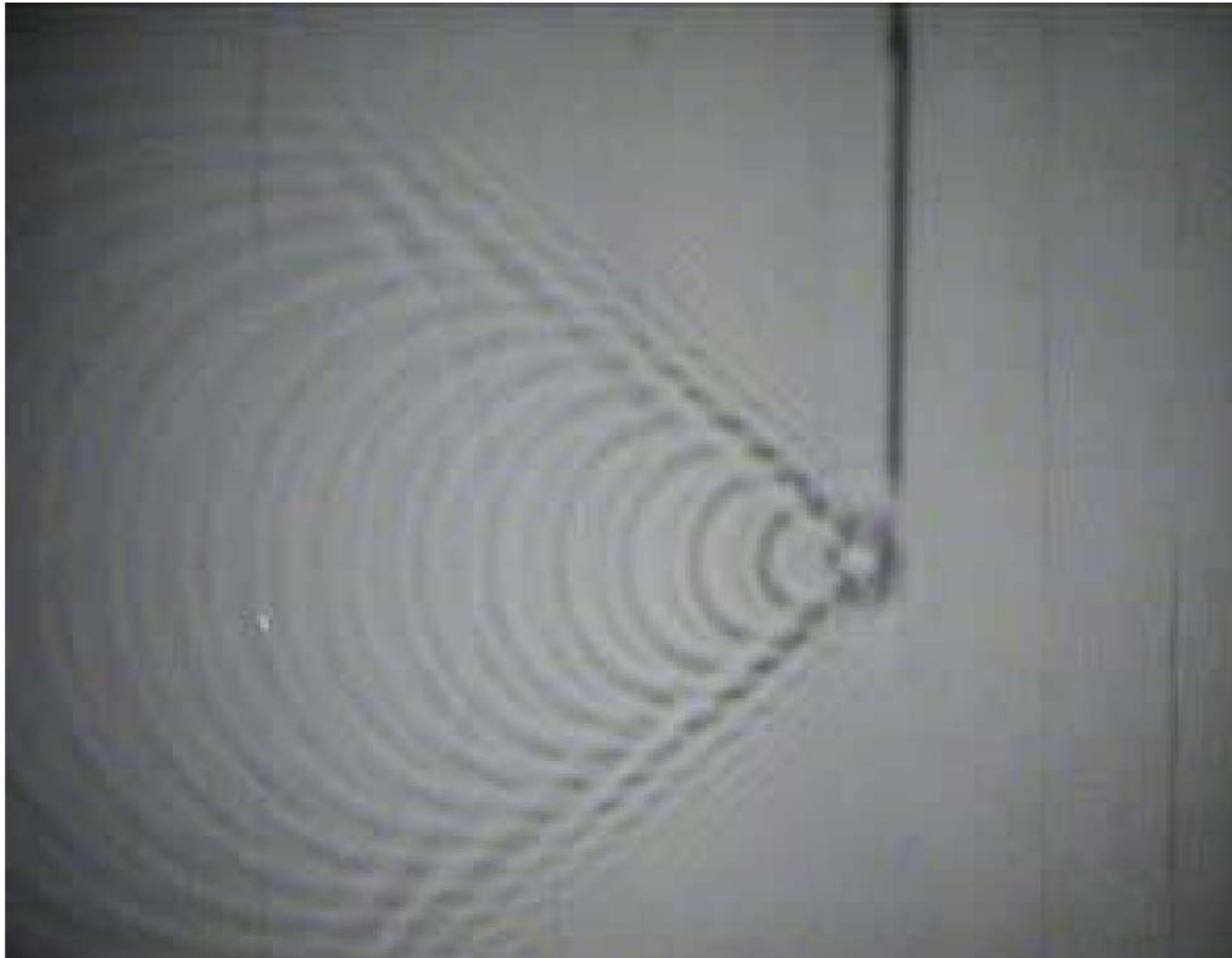


- Bewegt sich eine Schallquelle mit einer Geschwindigkeit v , die größer ist als die Schallgeschwindigkeit c , so ergibt sich durch Überlagerung der Wellen ein **Mach'scher Kegel**



Ernst Mach
1838 - 1916

Machscher Kegel bei Wasserwellen



Mach-Kegel bei
Wasserwellen

Überschallknall



- Beim Durchbrechen der Schallmauer ($v > c$) tritt neben dem **Überschallknall** oft auch der **Wolkenscheibeneffekt** auf: adiabatische Expansion der Luft führt zur Abkühlung; bei hoher Luftfeuchtigkeit wird der Taupunkt erreicht und es bildet sich ein Nebelkegel

Zusammenfassung

- **Wellen** sind periodische Zustandsänderungen in **Ort und Zeit**; sie breiten sich mit der Geschwindigkeit $c = \lambda/T$ aus, wobei die **Wellenlänge** λ die Periodizität im Ort und die **Schwingungsdauer** T die Periodizität in der Zeit beschreibt.
- Es gibt sowohl **transversale** (Auslenkung $\perp$ Ausbreitungsrichtung) wie **longitudinale** (Auslenkung $\parallel$ Ausbreitungsrichtung) Wellen
- Wellenausbreitung erfolgt nach dem **Huygens'schen Prinzip**: neue Wellenfront durch Überlagerung von Elementarwellen
- charakteristische Wellenphänomene sind **Interferenz und Beugung**
- **stehende Wellen** entstehen durch Überlagerung zweier ebener Wellen gleicher Frequenz, Wellenlänge und Amplitude, aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung
- Frequenzverschiebungen treten auf, wenn sich Schallquelle und Hörer relativ zueinander bewegen (**Doppler Effekt**); bei Überschallgeschwindigkeit bildet sich ein **Mach'scher Kegel** (Überschallknall)
- **Ultraschall** wird im Doppler-Verfahren und Impuls-Echo-Verfahren zur Diagnose in der Medizin eingesetzt