

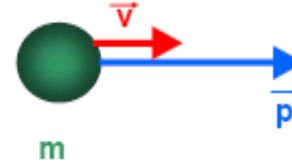
I.3 Erhaltungssätze

Impuls, Drehimpuls, Energie

Der Impuls

- Eine Masse m , die sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat den **Impuls** $\vec{p}$

$$\vec{p} = m \vec{v}$$



- Der Impuls $\vec{p}$ ist eine Vektorgröße;
die Einheit des Impulses ist $[p] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
- Die zeitliche Änderung des Impulses ist eine Kraft

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$m = \text{const}$

II. Newtonsches
Axiom

⇒ wenn keine Kraft auf einen Körper wirkt, so ändert sich sein Impuls nicht und bleibt konstant

- **Kraftstoß:** während der Wirkungsdauer Δt bewirkt die Kraft $\vec{F}$ eine Impulsänderung $\Delta \vec{p}$ des Körpers: $\Delta \vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$

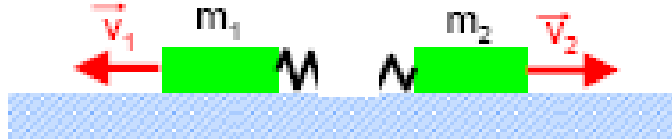
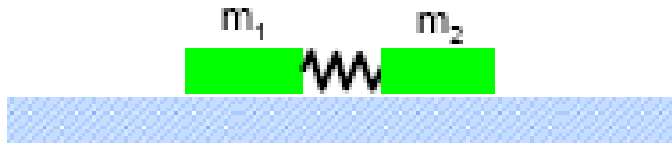
Impulserhaltung

- In einem abgeschlossenen System (keine Kraftwirkung von außen) ist der Gesamtimpuls $\vec{P}_{\text{ges}}$, d.h. die Summe der Einzelimpulse $\vec{p}_i$ aller Massen m_i konstant

$$\vec{P}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \overrightarrow{\text{const}}$$

- durch Wechselwirkung der Massen untereinander können sich die Einzelimpulse der Massen ändern, aber so, dass der Gesamtimpuls des Systems konstant bleibt

1. Beispiel für Impulserhaltung



- Die beiden ruhenden Massen auf der Luftkissenbahn stellen ein abgeschlossenes System dar (Reibungskräfte durch Luftpolster kompensiert). Nach Lösen der Feder bewegen sich die Wagen in entgegengesetzten Richtungen

- bei gleichen Massen $m_1 = m_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$
die Wagen fahren mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag in entgegengesetzte Richtungen

- Gesamtimpuls vor Lösen der Feder:

Beide Wagen in Ruhe: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_2 = 0;$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

- Gesamtimpuls nach Lösen der Feder:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \quad \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{P}_{\text{ges}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2$$



Wagen auf
Luftschiene

2. Beispiel für Impulserhaltung

Hochsprung: Springer und Erde bilden angeschlossenes System. Beim Hochspringen stößt sich der Springer mit der Masse m mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ von der Erde ab. Was bedeutet das für die Erde?



- Gesamtimpuls vor dem Absprung:

$$\vec{P}_{\text{ges}} = \vec{p} + \vec{p}_E = 0$$

- Gesamtimpuls nach Absprung:

$$\vec{P}_{\text{ges}} = m \vec{v} + m_E \vec{v}_E \stackrel{!}{=} 0$$

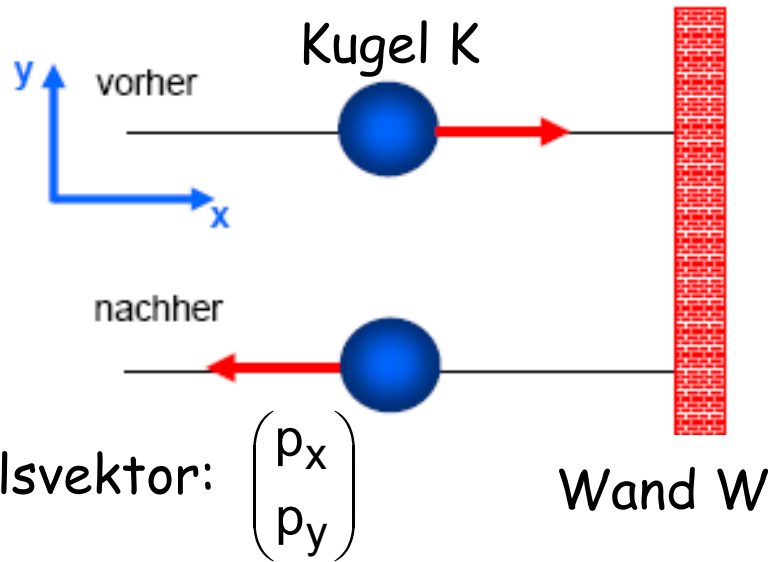
$$\vec{v}_E = -\frac{m}{m_E} \vec{v} \approx 0$$

$$m \approx 70 \text{ kg}; m_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; \frac{m}{m_E} \approx 10^{-23}$$

3. Beispiel für Impulserhaltung

- Ein Ball prallt gegen eine Wand und wird reflektiert

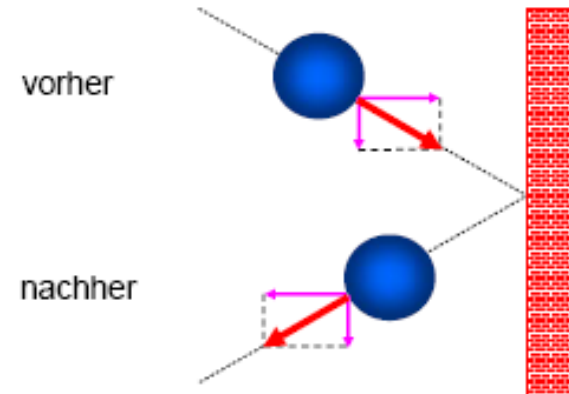
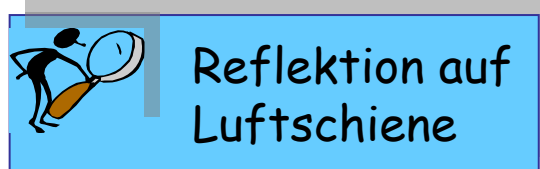
a.) senkrechtes Auftreffen auf Wand b.) Auftreffen unter einem Winkel



$$\begin{pmatrix} p_{K,x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{K,x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{W,x} \\ p_{W,y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{W,x} \\ p_{W,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_{K,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{W,x} = 2p_{K,x}; \quad p_{W,y} = 0$$



$$\begin{pmatrix} p_{K,x} \\ p_{K,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_{K,x} \\ p_{K,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{W,x} \\ p_{W,y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{W,x} \\ p_{W,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_{K,x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{W,x} = 2p_{K,x}; \quad p_{W,y} = 0$$

Superposition von Impulserhaltung entlang der Koordinatenachsen

Beispiel für Impulserhaltung: Raketenantrieb



Raketenprinzip:

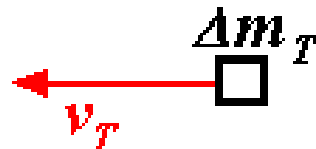
beim Raketenantrieb wird ein Flugobjekt dadurch beschleunigt, dass ein Teil seiner Masse mit großer Geschwindigkeit entgegengesetzt zur Flugrichtung ausgestoßen wird

Zeitpunkt: t

$$\vec{P}_{\text{ges}} = m \cdot \vec{v}$$

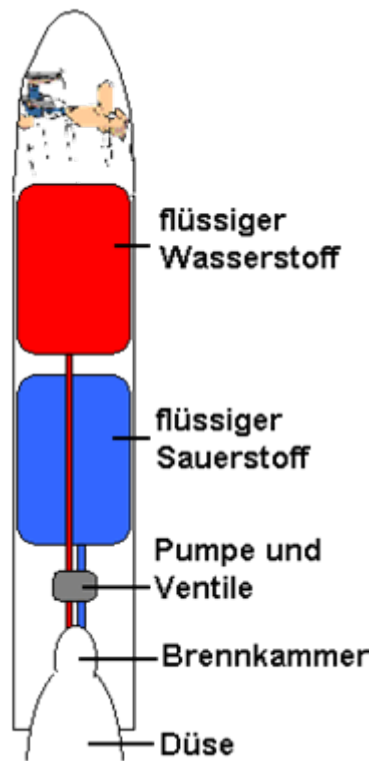


Zeitpunkt: $t + \Delta t$



$$\vec{P}_{\text{ges}} = m \cdot \vec{v} = \Delta m_T \cdot \vec{v}_T + (m - \Delta m_T) \cdot (\vec{v} + \Delta \vec{v}) \Rightarrow \text{Lösung: } \vec{v} = \vec{v}(t)$$

Bauformen von Raketen



Drehimpuls

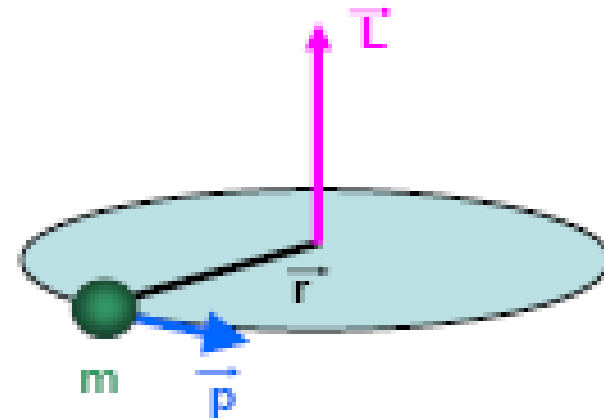
Eine Masse m , die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn bewegt, besitzt einen **Drehimpuls $\vec{L}$**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Für den Betrag von $\vec{L}$ gilt:
 $\vec{r} \perp \vec{p}$, d.h. von $\vec{r}$ und $\vec{p}$ eingeschlossener Winkel $\varphi = 90^\circ$;
d.h. $\sin \varphi = 1$

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= L = r \cdot p \cdot \sin(90^\circ) = r \cdot p \\ &= r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = \underbrace{m \cdot r^2}_J \cdot \omega; \end{aligned}$$

Die Größe $J = m \cdot r^2$ ist das Trägheitsmoment des Massenpunktes bzgl. der Achse durch den Mittelpunkt der Kreisbahn mit Radius r .
Das Trägheitsmoment ist eine skalare Größe: Einheit: $[J] = \text{kg m}^2$

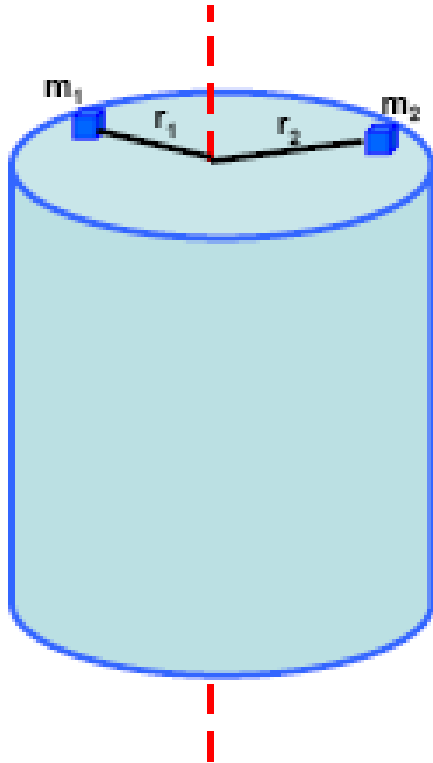


Der Drehimpuls ist eine vektorielle Größe und steht senkrecht auf der Bahnebene.

$$L = m r^2 \cdot \omega$$

Einheit: $[L] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Trägheitsmoment eines starren Körpers



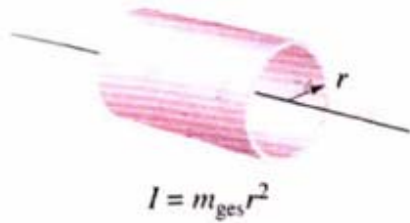
- Man kann sich den gesamten **starren Körper** aus den Massenelementen m_i zusammengesetzt denken, die sich im Abstand r_i von der Drehachse befinden.
- **Starrer Körper** heißt, dass alle Massenelemente starr miteinander verbunden sind, d.h. sich alle Massenelemente mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω um die Drehachse drehen.
- Das **Trägheitsmoment** des starren Körpers bzgl. der Drehachse ist die Summe der Trägheitsmomente $J_i = m_i \cdot r_i^2$ aller Massenelemente bzgl. dieser Drehachse

$$J_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N J_i = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$$

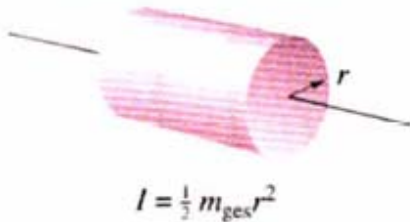
Trägheitsmomente starrer Körper

(für verschiedene Geometrien und bzgl. unterschiedlicher Drehachsen)

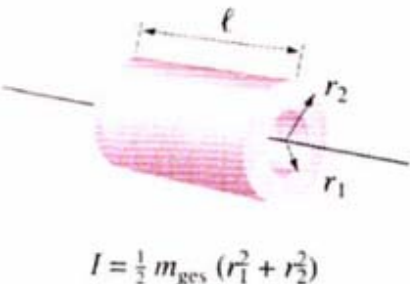
Zylindermantel;
Drehachse = Körperachse



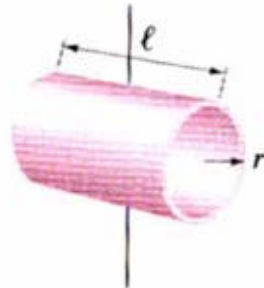
Massiver Zylinder;
Drehachse = Körperachse



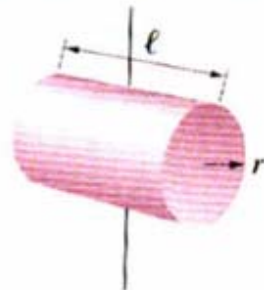
Hohlzylinder;
Drehachse = Körperachse



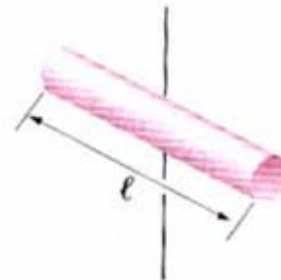
Zylindermantel;
Drehachse durch Mittel-
punkt $\perp$ Körperachse



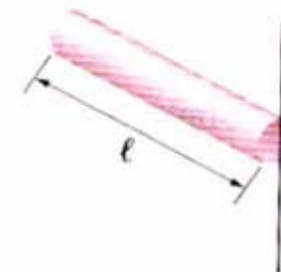
Massiver Zylinder;
Drehachse durch Mittel-
punkt $\perp$ Körperachse



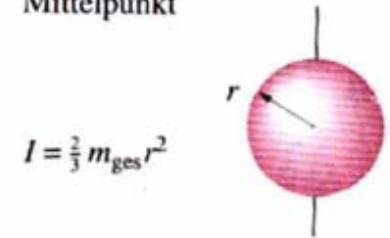
Dünner Stab;
Drehachse durch Mittel-
punkt $\perp$ Körperachse



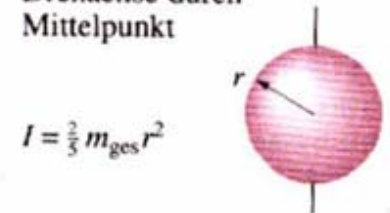
Dünner Stab;
Drehachse durch ein
Ende $\perp$ Körperachse



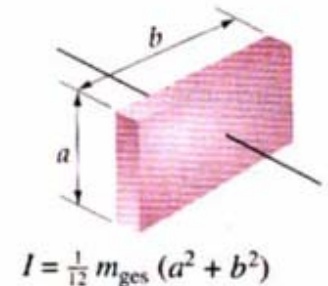
Dünne Kugelschale;
Drehachse durch
Mittelpunkt



Massive Kugel;
Drehachse durch
Mittelpunkt



Massiver Quader;
Drehachse durch
Mittelpunkt $\perp$ Oberfläche



Zeitliche Änderung des Drehimpulses

- Eine zeitliche Änderung des Drehimpulses wird durch ein Drehmoment bewirkt. Bei einer Kreisbewegung gilt für den Betrag:

$$\frac{d}{dt}(L) = \frac{d}{dt}(r \cdot p) = r \cdot \frac{d}{dt}(p) = r \cdot F = M$$

Def: $L = r \cdot p$

$r = \text{const}$

Newton II

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(L) = M$$

analog zu $\frac{d}{dt}(p) = F$

- Wenn kein Drehmoment $\vec{M}$ auf einen Körper wirkt, ändert sich der Drehimpuls nicht sondern bleibt erhalten
- Andererseits:

$$\frac{d}{dt}(L) = \frac{d}{dt}(J \cdot \omega) = J \cdot \frac{d}{dt}(\omega) = J \cdot \alpha$$

Def: $L = J \cdot \omega$

$J = \text{const}$

Def: Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$$M = J \cdot \alpha$$

Das Drehmoment bewirkt eine Winkelbeschleunigung (analog $F = m \cdot a$)

Drehimpulserhaltung

- In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_{\text{ges}}$ (Summe der Einzeldrehimpulse $\vec{L}_i$ der zum System gehörenden Massen m_i) zeitlich konstant:

$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \overrightarrow{\text{const}}$$

- In der Regel bleibt wirklich nur der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}_{\text{ges}}$ des Systems erhalten. Durch Wechselwirkungen der Körper untereinander können sich aber deren Einzeldrehimpulse $\vec{L}_i$ ändern.

1. Beispiel: Drehimpulserhaltung

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$

Für abgeschlossene Systeme (keine äußeren Kräfte) bleibt der Drehimpuls erhalten.

für Kreisbewegung mit Kreisfrequenz ω :

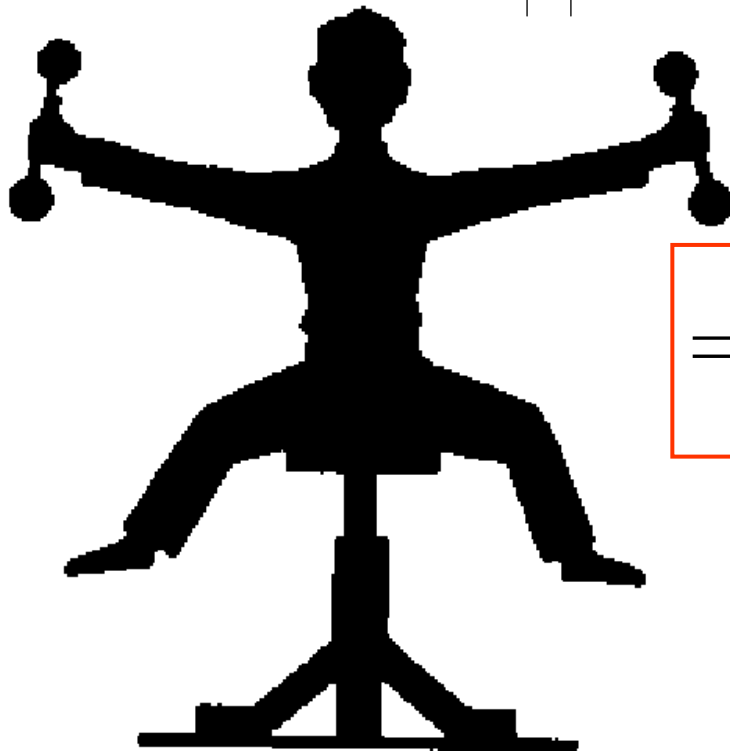
$$|\vec{L}| = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot \omega \cdot r = m \cdot \omega \cdot r^2 = \text{const}$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\text{const}}{m \cdot r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$



Drehstuhl
mit Hanteln



$r \text{ groß} \Rightarrow \omega \text{ klein}$

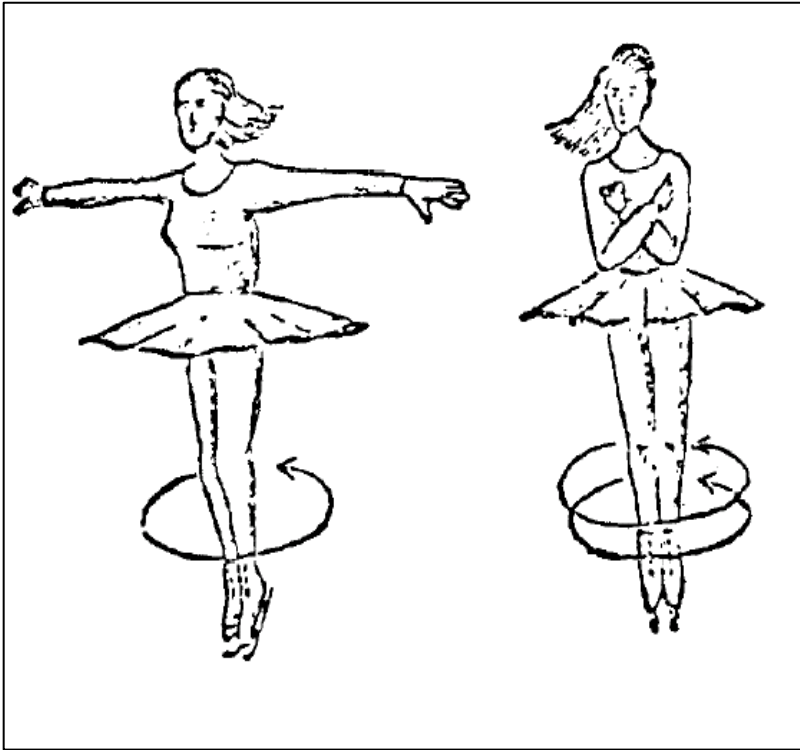


$r \text{ klein} \Rightarrow \omega \text{ groß}$

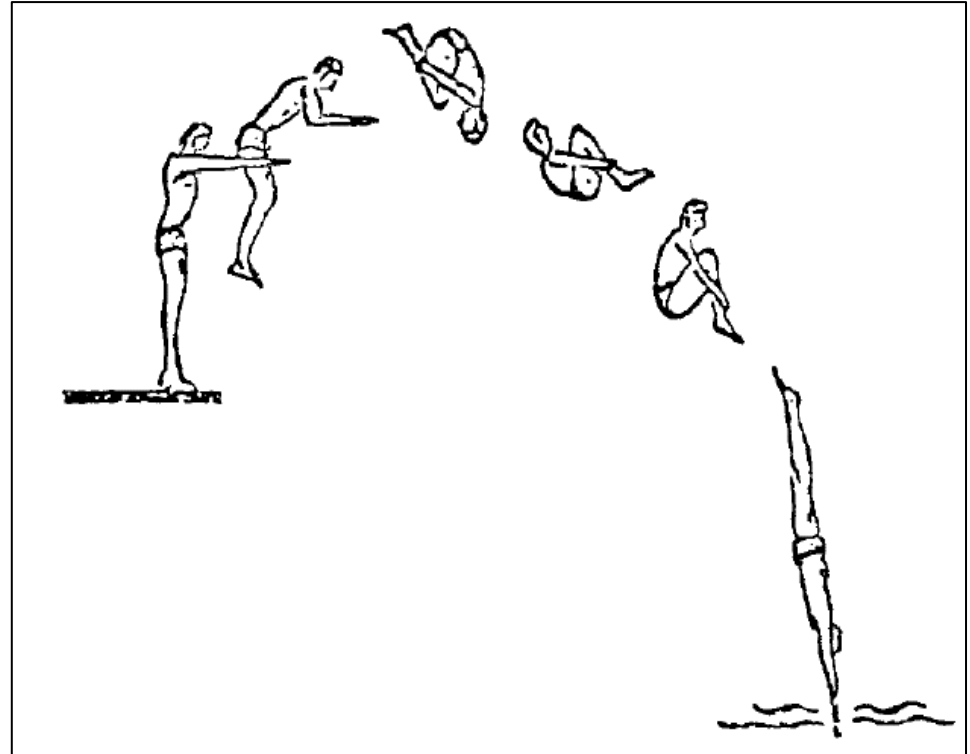
2. Beispiel für Drehimpulserhaltung

$$\Rightarrow \omega = \frac{\text{const}}{m \cdot r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

r klein $\Rightarrow$ Trägheitsmoment J klein $\Rightarrow \omega$ groß

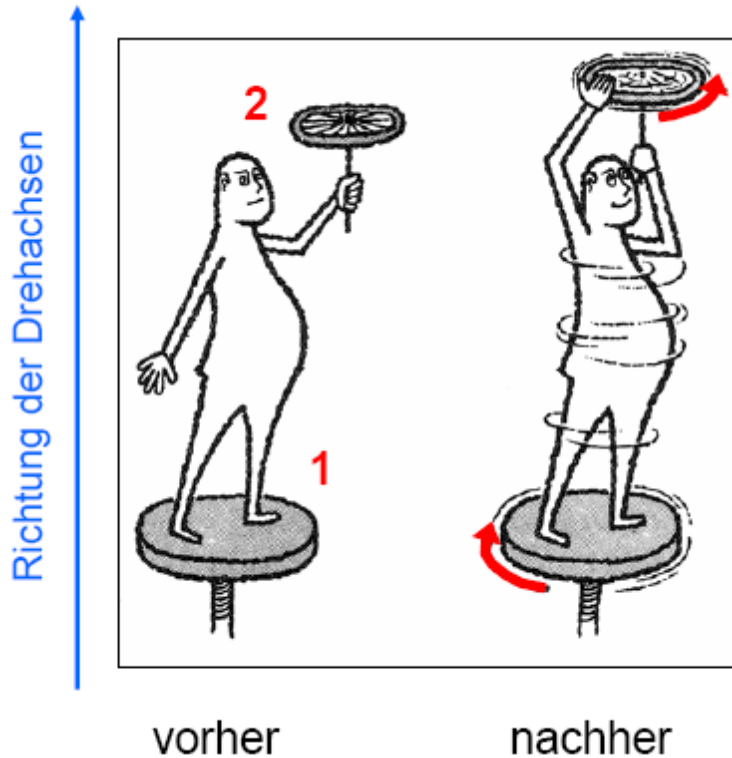


Pirouette



Salto vorwärts

3. Beispiel für Drehimpulserhaltung



Drehstuhl mit
Fahrradfelge

- Gesamtdrehimpuls vorher:

$$\vec{L}_1 = 0; \quad \vec{L}_2 = 0; \quad \Rightarrow \vec{L}_{\text{ges}} = 0$$

- Gesamtdrehimpuls nachher:

$$\vec{L}_1 = J_1 \cdot \vec{\omega}_1 \quad \vec{L}_2 = J_2 \cdot \vec{\omega}_2$$

$$\Rightarrow \vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0$$

wegen Gesamtdrehimpulserhaltung

$$J_1 \cdot \vec{\omega}_1 + J_2 \cdot \vec{\omega}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 = -\frac{J_2}{J_1} \vec{\omega}_2$$

Analog zur Impulserhaltung (Luftkissenbahn): $\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2$

Energie und Arbeit

- In der Mechanik erreicht man durch Anwendung einer Kraft eine Verschiebung eines Körpers (z.B. Anheben eines Gewichts) oder eine Beschleunigung oder auch eine elastische Verformung (Feder); letztlich in jedem Fall eine Verschiebung:

Arbeit ist das Produkt aus Kraft und Weg



- Die an dem Körper geleistete Arbeit ist dann als Energie im Körper gespeichert z.B. als **potenzielle Energie**, **kinetische Energie** (Bewegungsenergie) oder **Verformungsenergie**
- **Energie und Arbeit sind äquivalent und ineinander umwandelbar**
- Neben der mechanischen Energie gibt es noch andere Energieformen: z.B. elektrische Energie, Wärmeenergie, Kernenergie etc. (später)

Arbeit, Energie, Leistung

- Die an einem Körper geleistete physikalische **Arbeit** (work) ist das Produkt aus Kraft (entlang des Weges) mal Verschiebungsweg:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg}$$

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{S} \quad \text{Skalarprodukt}$$

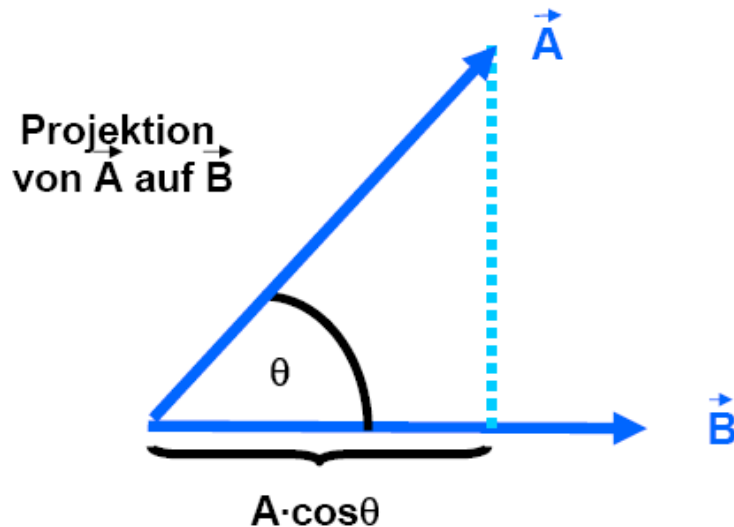
- **Arbeit** ist eine skalare Größe:
Einheit $[W] = \text{kg m s}^{-2} \text{ m} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} = \text{N m} = \text{J (Joule)}$
- Die an einem Körper geleistete Arbeit ist dann als Energie im Körper gespeichert
- Physikalische **Leistung** (power) ist das Verhältnis aus verrichteter Arbeit und der dafür benötigten Zeit

$$\text{Leistung} = \text{Arbeit pro Zeit}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

- Leistung ist eine skalare Größe. Einheit: $[P] = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-3} = \text{J s}^{-1} = \text{Watt}$

Skalarprodukt



Rechenvorschrift:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$= A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

$$= |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta = A \cdot B \cdot \cos \theta$$

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ ist eine skalare Größe C
- Das Skalarprodukt ist das Produkt vom Betrag der Projektion von $\vec{A}$ auf $\vec{B}$ mit dem Betrag von $\vec{B}$ (bzw. umgekehrt)
- Das Skalarprodukt ist kommutativ: d.h. $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

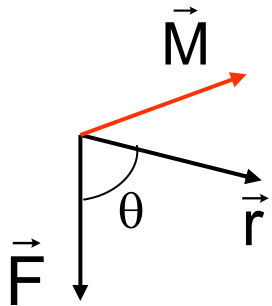
Multiplikation von Vektoren

1.) Vektor mit **Skalar** $\Rightarrow$ Vektor (die Länge des Vektors ändert sich, Richtung bleibt gleich)

z.B. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

2.) **Vektorprodukt (Kreuzprodukt)**: Vektor $\times$ Vektor $\Rightarrow$ Vektor

z.B. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$



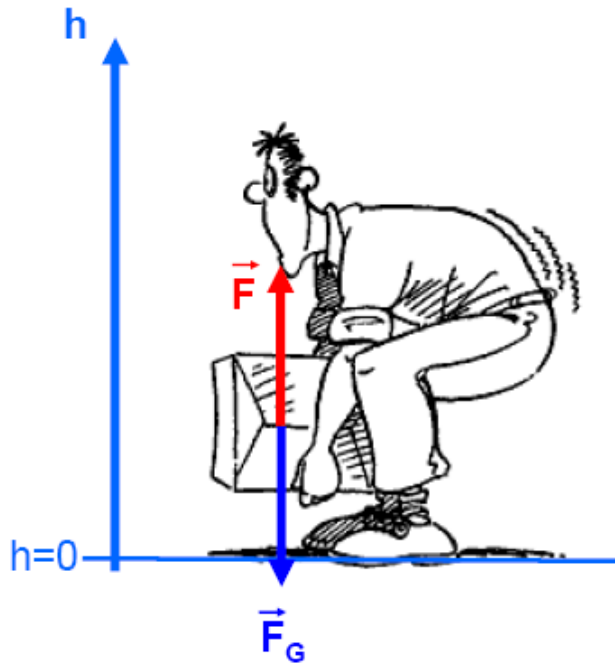
Richtung des resultierenden Vektors bestimmt durch Drehsinn: 1. Vektor in Richtung des 2. Vektors drehen; rechte-Hand-Regel; $\vec{M}$ steht senkrecht auf der durch $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene

Betrag des Vektors $\vec{M}$: $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$

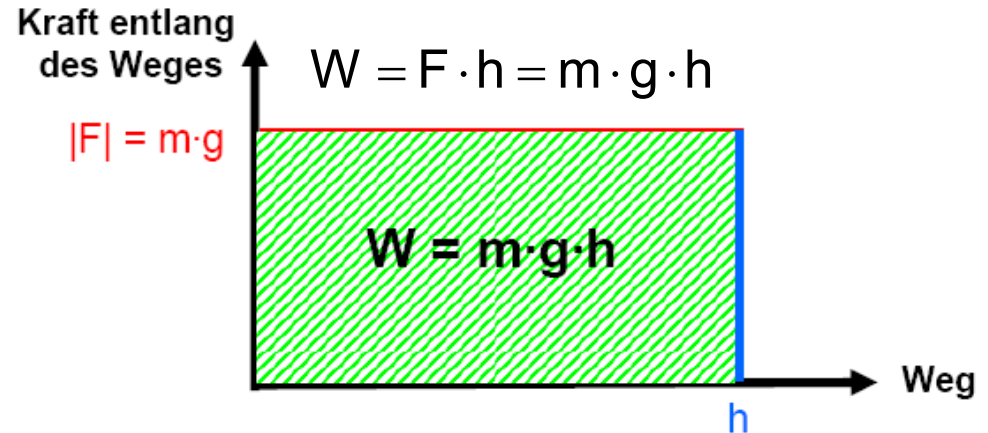
3.) **Skalarprodukt**: Vektor $\cdot$ Vektor = Skalar

z.B. $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ Betrag der skalaren Größe: $W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \theta$

Hubarbeit = potenzielle Energie



- um einen Körper der Masse m senkrecht um die Höhe h zu heben, muss Arbeit gegen die Gewichtskraft geleistet werden.

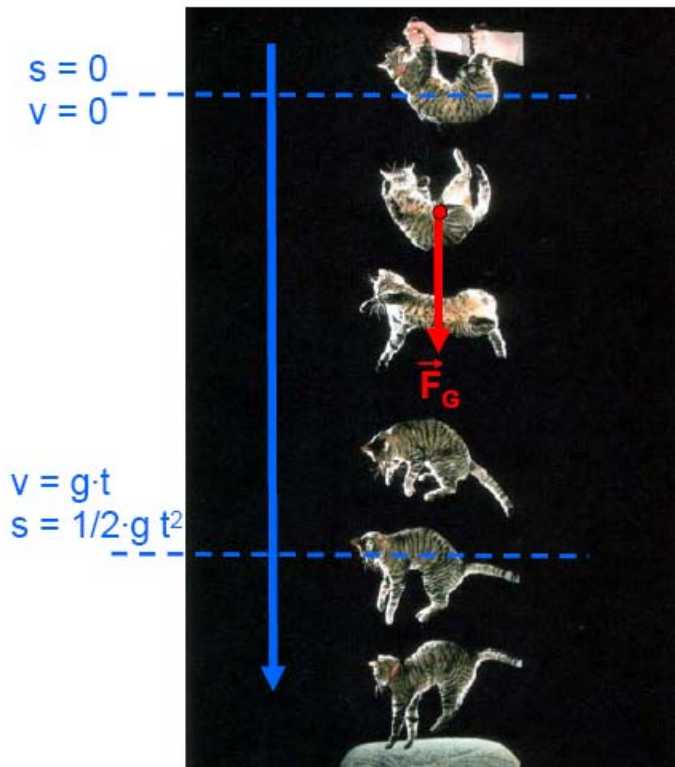


- Die verrichtete **Hubarbeit** kann man aus einem Arbeitsdiagramm (Kraft über Weg) ablesen.
- Nachdem der Körper auf die Höhe h gehoben worden ist, ist die aufgewandte Arbeit in ihm als **potenzielle Energie** gespeichert

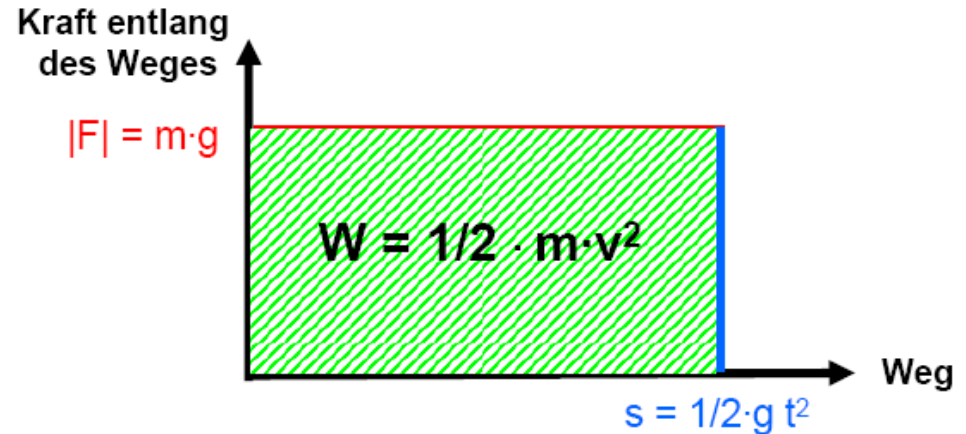
$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$

Lageenergie im Gravitationsfeld der Erde

Beschleunigungsarbeit = kinetische Energie



Ein Körper wird mit konstanter Beschleunigung (konstanter Kraft) von Geschwindigkeit Null auf Geschwindigkeit v gebracht.



- die verrichtete Beschleunigungsarbeit W ist im Arbeitsdiagramm (Kraft über Weg) ablesbar:

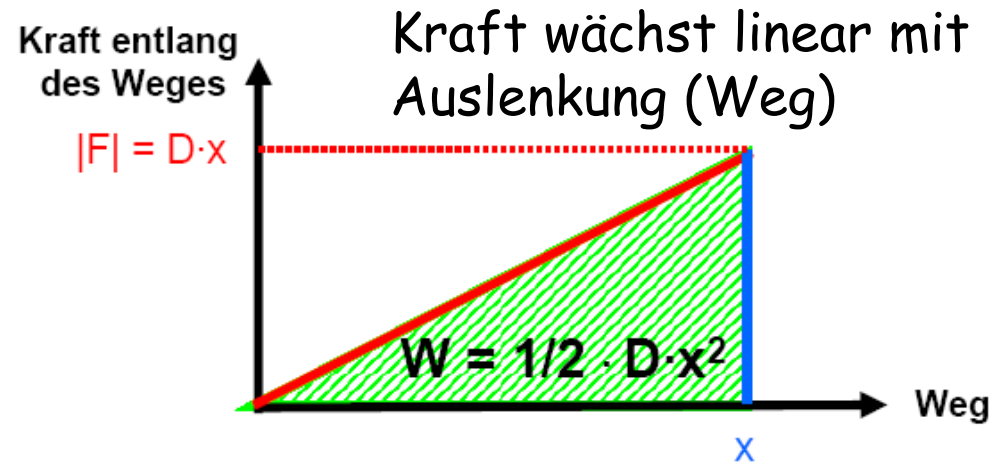
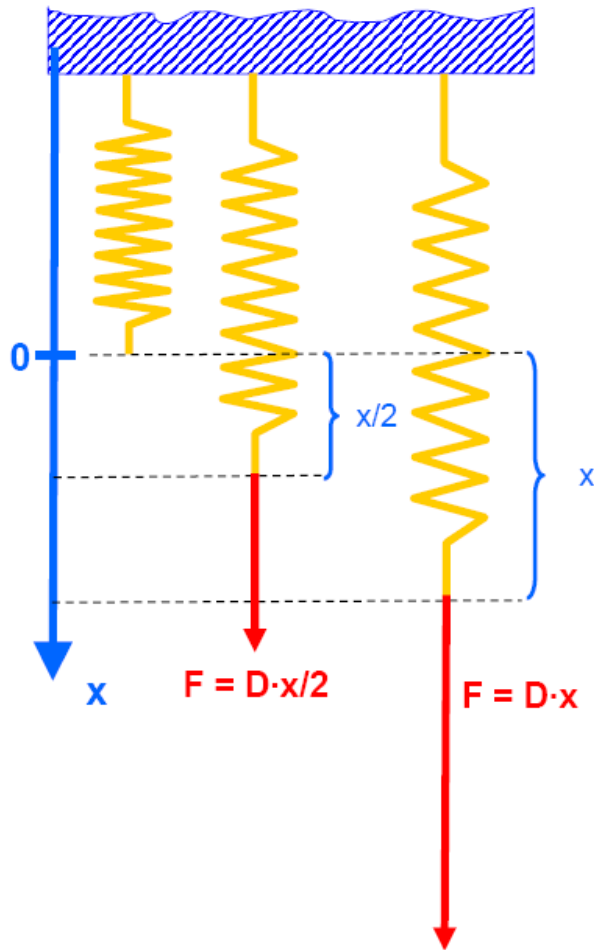
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \theta = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}|, \text{ da } \theta=0; \cos 0^\circ=1$$

$$W = F \cdot s = (m \cdot g) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (g \cdot t)^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

- Nach Beschleunigung auf die Geschwindigkeit v ist die aufgewandte Arbeit im Körper als **kinetische** Energie gespeichert:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Verformungsarbeit = potenzielle Energie



- Die verrichtete Verformungsarbeit W ist im Arbeitsdiagramm (Kraft über Weg) ablesbar:

$$W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

- Nach Dehnung der Feder ist die dazu aufgewandte Arbeit in ihr als **potenzielle Energie** gespeichert:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$$

Umwandlung: Kinetische Energie $\Rightarrow$ Verformungsarbeit

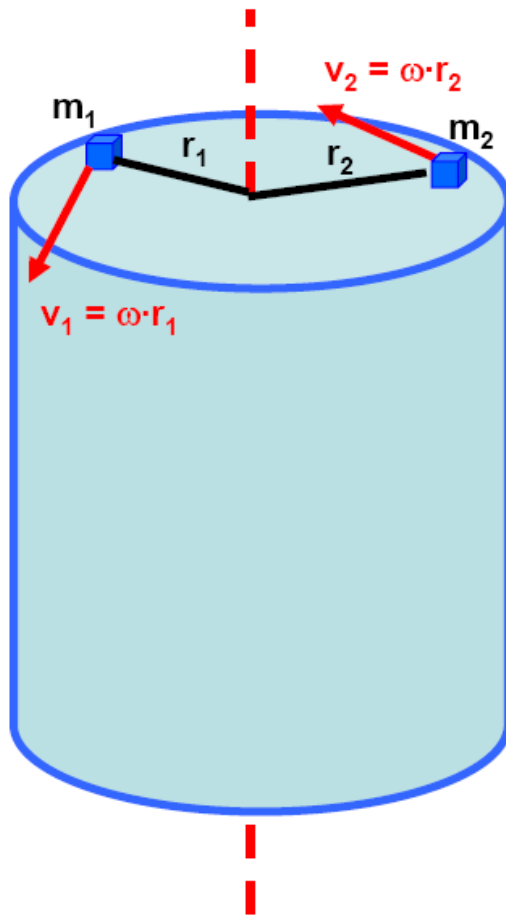
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Wer 150 km/h fährt,
hat 9 mal mehr
Bewegungsenergie
als ein Fahrer mit
50 km/h.

Alle Crash-Tests der
Automobilhersteller
werden bei 60 km/h
durchgeführt



Rotationsenergie



- Die Rotationsenergie ist die kinetische Energie der Rotationsbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse
- Alle Massenelemente m_i rotieren mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω . Die Beträge ihrer Geschwindigkeiten sind $v_i = \omega \cdot r_i$ und ihre kinetischen Energien $E_{\text{kin},i} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$
- Gesamte in der Rotation gespeicherte kinetische Energie

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}^{\text{ges}} &= \sum_{i=1} E_{\text{kin},i} = \sum_{i=1} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \sum_i m_i \cdot r_i^2 = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$$

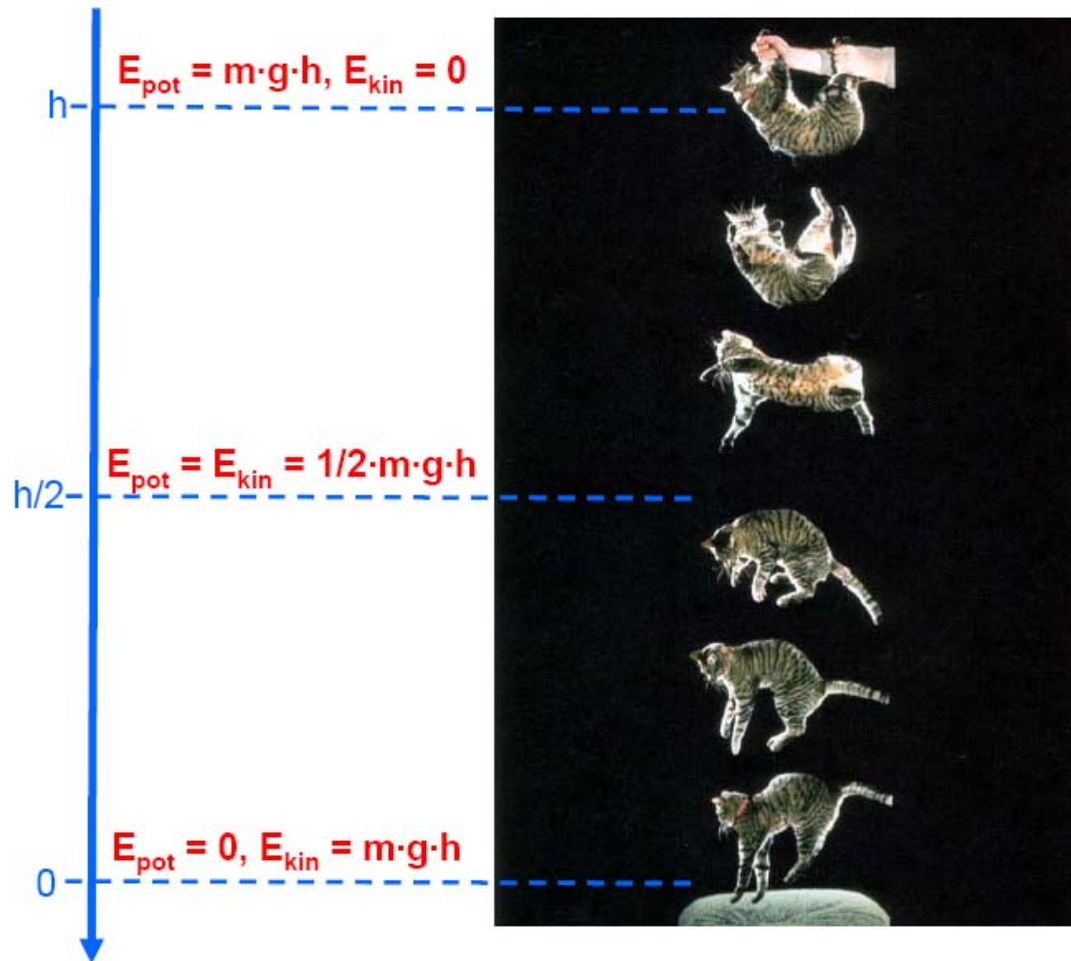
J ist das Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse

Energieerhaltungssatz:

In einem abgeschlossenen System ist die **Gesamtenergie** E_{ges} (Summe der Energien E_i der zum System gehörenden Massen m_i) zeitlich konstant. Dabei kann Energie zwischen den Massen m_i ausgetauscht und zwischen verschiedenen Energieformen umgewandelt werden.

$$E_{\text{ges}} = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_N = \sum_{i=1}^N E_i = \text{const}$$

1. Beispiel für Energieerhaltung



• Energieerhaltung bei freiem Fall der Katze

1.) Katze in Ruhe in Höhe h

$$E_{\text{kin}} = 0; E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h; \\ \Rightarrow E_{\text{ges}} = m \cdot g \cdot h$$

2.) halbe Höhe

$$E_{\text{pot}} = 1/2 \cdot m \cdot g \cdot h \\ E_{\text{kin}} = 1/2 \cdot m \cdot g \cdot h$$

3.) Katze auf Erdboden

$$E_{\text{pot}} = 0; E_{\text{kin}} = 1/2 \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

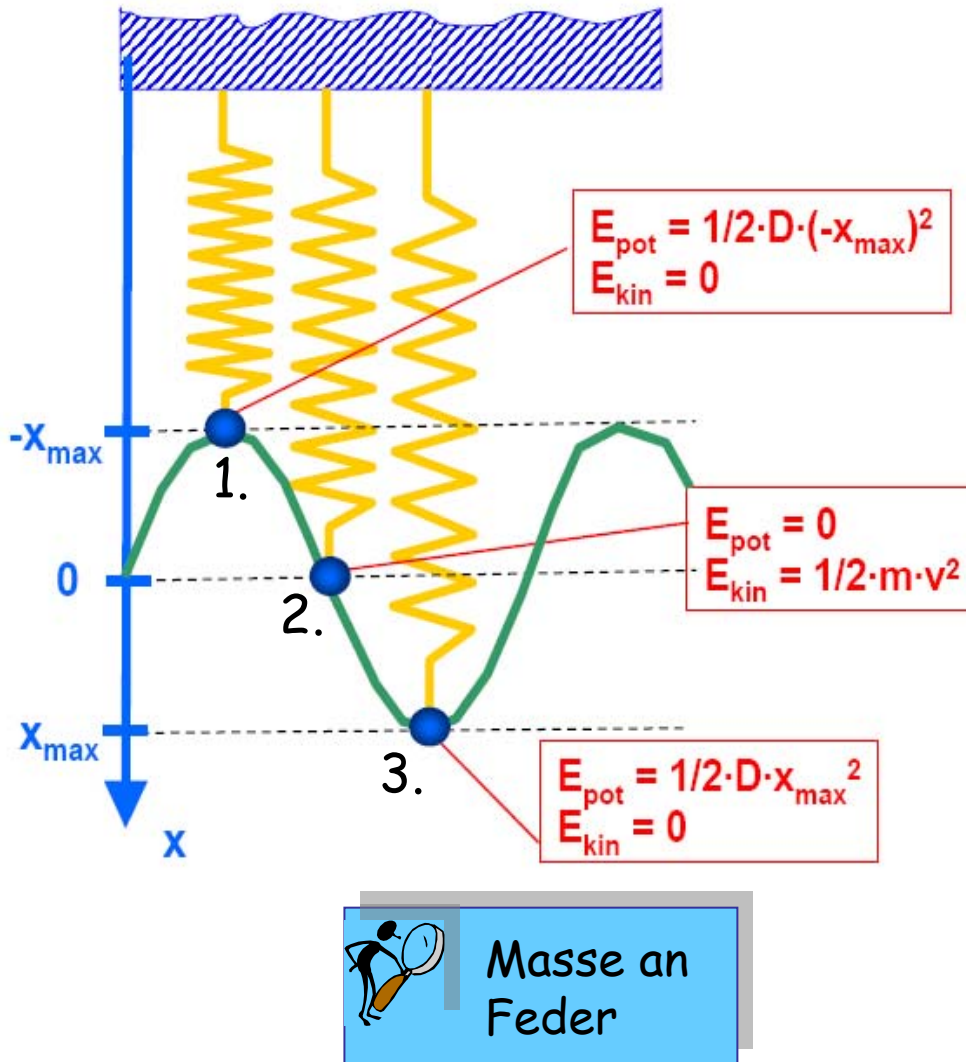
Beim Fallen wird die potenzielle Energie kontinuierlich in kinetische Energie umgewandelt. (Luftreibung vernachlässigt)

periodische Umwandlung: $E_{\text{pot}} \leftrightarrow E_{\text{kin}}$



springender Ball

2. Beispiel für Energieerhaltung



- Die Masse m an der (masselosen) Feder vollführt eine harmonische Schwingung. Es wird periodisch potenzielle in kinetische Energie umgewandelt; die Gesamtenergie bleibt dabei erhalten.

(Reibung und Gravitation vernachlässigt)

- 1.) maximale Stauchung der Feder:

$$E_{\text{kin}} = 0; E_{\text{pot}} = 1/2 \cdot D \cdot (-x_{\max})^2$$

- 2.) Null-Durchgang ($x=0$)

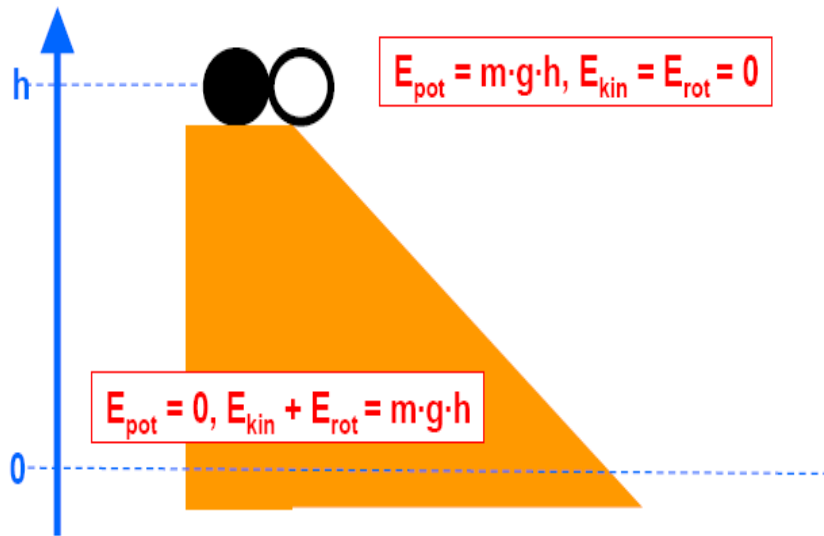
$$E_{\text{pot}} = 0; E_{\text{kin}} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$$

- 3.) maximale Dehnung der Feder

$$E_{\text{kin}} = 0; E_{\text{pot}} = 1/2 \cdot D \cdot (x_{\max})^2$$

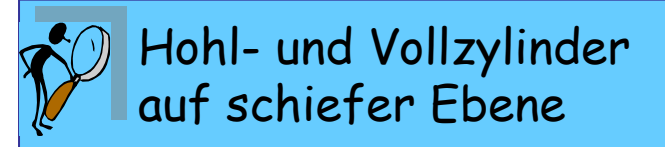
Energieerhaltung: $E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_{\max}^2 = \text{const}$

3. Beispiel für Energieerhaltung



- Ein Vollzylinder und ein Hohlzylinder rollen die schiefe Ebene hinunter: Wer ist schneller ??
- Gesamtenergie = potenzielle + kinetische Energie; die kinetische Energie hat 2 Anteile:
 - a.) Translationsbewegung
 - b.) Rotationsbewegung

Start: $E_{\text{pot}} (\text{Höhe } h) = m \cdot g \cdot h$; $E_{\text{kin}} = E_{\text{rot}} = 0$



Energieerhaltung: $E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} = m \cdot g \cdot h = \text{const}$

Ebene: $E_{\text{pot}} = 0$; $E_{\text{ges}} = m \cdot g \cdot h = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

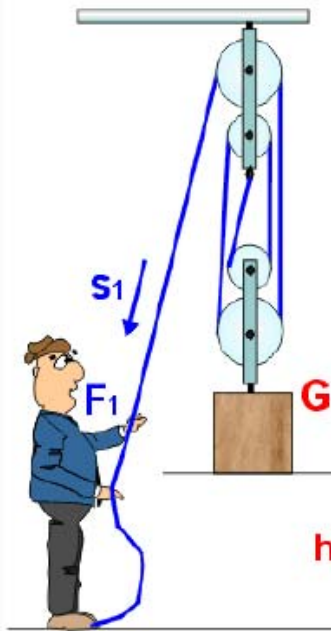
mit $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2$ } Vollzylinder: E_{rot} kleiner,
da J_{voll} kleiner $\Rightarrow E_{\text{trans}}$ größer

$J_{\text{voll}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 < J_{\text{hohl}} = m \cdot R^2$

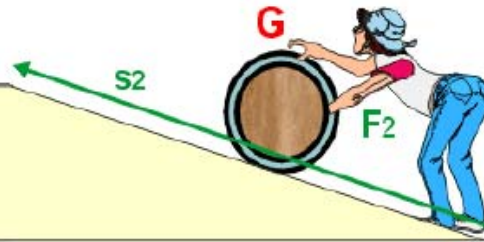
$$v_{\text{voll}} > v_{\text{hohl}}$$

Einfache mechanische Maschinen

Beispiel "Flaschenzug"



Beispiel "Schiefe Ebene"



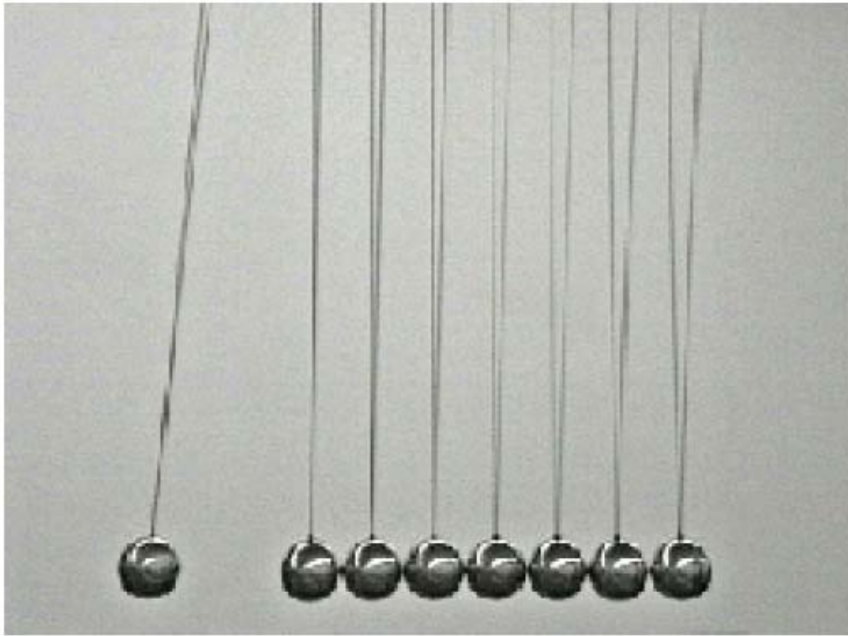
- Durch den Einsatz von mechanischen Maschinen wird die aufzubringende Arbeit nicht verringert.
- Maschinen erlauben es, eine bestimmte Arbeit bei verringertem Kraftaufwand durchzuführen, allerdings verbunden mit einem längeren Arbeitsweg

- **Goldene Regel der Mechanik:**
Was man an Kraft spart, muss man an Weg zulegen.

Elastischer und unelastischer Stoß

- Viele Stoßprozesse lassen sich mit Hilfe von Energieerhaltungssatz und Impulserhaltungssatz analysieren. Beide Sätze gelten auch für Stöße im atomaren Bereich.
- **Elastischer Stoß:** Beide Stoßpartner werden nicht deformiert; für die Bewegung vor und nach dem Stoß sind Energie und Impuls erhalten
- **Unelastischer Stoß:** beim unelastischen Stoß werden die Stoßpartner irreversibel verformt; d.h. mit einem Teil der Bewegungsenergie wird Verformungsarbeit geleistet.
Total unelastischer Stoß: beide Stoßpartner bewegen sich nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit

Beispiel elastischer Stoß



Bifilar aufgehängte Reihe von
Kugelpendeln

Wenn A Kugeln ausgelenkt und losgelassen werden, wie groß ist dann die Zahl B der Kugeln, die auf der anderen Seite wegfliegt ??

Anwendung von Energie- und Impulserhaltungssatz:

Energieerhaltung:

$$A \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{vor}}^2 = B \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{nach}}^2$$

Impulserhaltung:

$$A \cdot m \cdot v_{\text{vor}} = B \cdot m \cdot v_{\text{nach}}$$

Erhaltung von Impuls und Energie sind nur gemeinsam erfüllbar, wenn $A=B$ und $v_{\text{vor}} = v_{\text{nach}}$



Bifilar aufgehängte
Kugelpendel

Beispiel: unelastischer Stoß

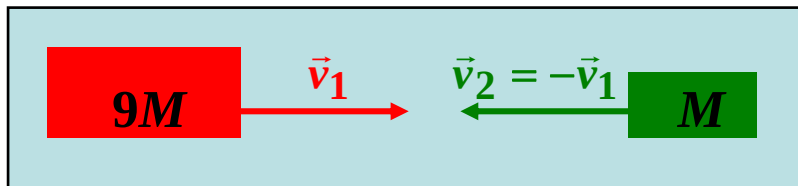
Impulserhaltung bei unelastischem frontalen Stoß

Beide Stoßpartner bewegen sich gemeinsam nach Stoß

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

z.B. vor Stoß: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$; $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$; $\frac{m_1}{m_2} = \frac{9}{1}$



Lastwagen und PkW prallen frontal zusammen

$$\text{nach Stoß: } \vec{v} = \frac{9 \cdot \vec{v}_1 - 1 \cdot \vec{v}_1}{10} = \frac{8}{10} \vec{v}_1 = \frac{4}{5} \vec{v}_1$$



Inelastischer Stoß auf Luftkissenbahn

d.h. Lastwagen $\left(|\vec{v}_1| = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$ setzt gemeinsam mit PkW seine Fahrt mit 80 km/h in ursprünglicher Fahrtrichtung fort. PkW kehrt Fahrtrichtung um und wird von LkW mitgeschleift.

$\Rightarrow$ der massivere Stoßpartner ist im Vorteil !!!

Vergleich: Translation $\Leftrightarrow$ Rotation

Translation (in x-Richtung)

Ort	x
Zeit	t
Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Masse	m
Kraft	F
Impuls	$p = mv$ abgeschl. System: $\Sigma \vec{p} = \text{const}$
Energie, kinetisch:	$W_k = \frac{1}{2}mv^2$
potentiell:	$W_p = \frac{1}{2}Ds^2$

Rotation

Winkel	φ
Zeit	t
Winkel- geschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Winkel- beschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Trägheitsmoment	$J = \Sigma mr^2$
Drehmoment	M
Drehimpuls	$L = J\omega$ abgeschl. System: $\Sigma \vec{L} = \text{const}$
Energie, kinetisch:	$W_k = \frac{1}{2}J\omega^2$
potentiell:	$W_p = \frac{1}{2}D^*\varphi^2$

Zusammenfassung

- **Impuls, Drehimpuls** und **Energie** sind physikalische **Erhaltungsgrößen**.
- Energie kann in verschiedenen Formen vorkommen, die ineinander überführt werden können.
- **Erhaltungssätze**: in abgeschlossenen Systemen ist die Gesamtenergie, der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten; dabei können Teile des Systems (Massen, Teilchen) Energie, Impuls und Drehimpuls in Wechselwirkungen untereinander austauschen.
- **Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung** sind fundamentale Prinzipien, deren Anwendbarkeit über die klassische Mechanik hinausgeht und die auch in der mikroskopischen Physik ihre Gültigkeit behalten.