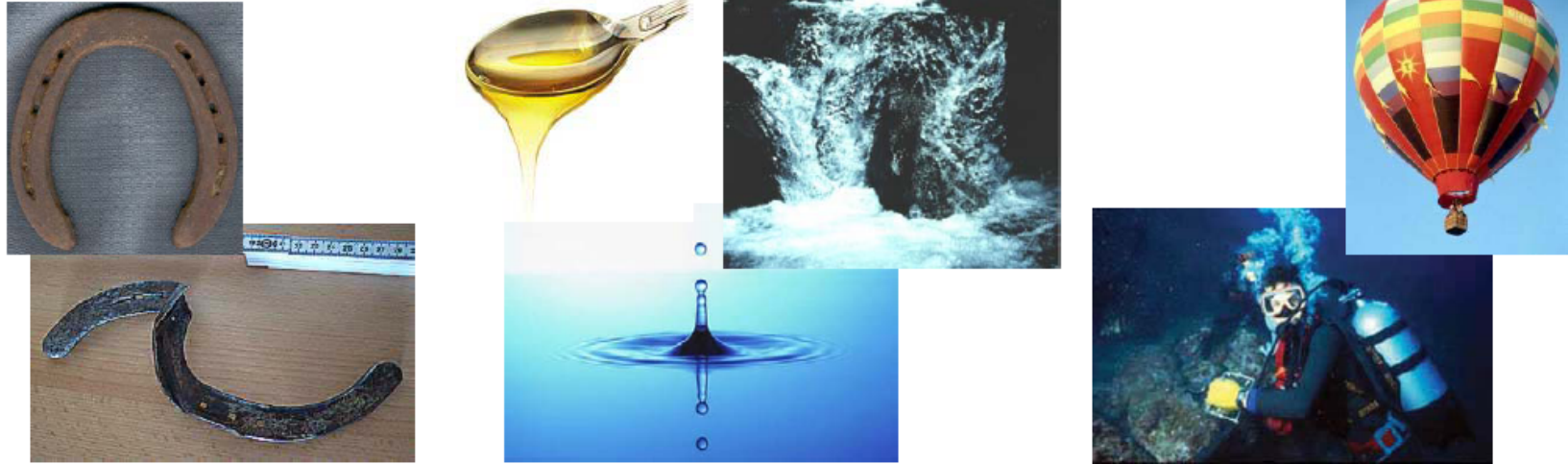


I. Mechanik

I.3 Mechanik deformierbarer Körper und Medien

Aggregatzustände von Materie



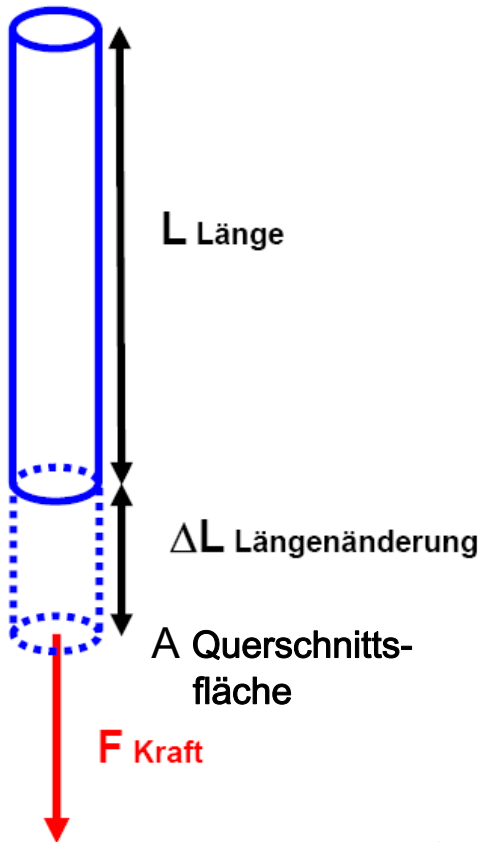
• Materie kann in **3 Aggregatzuständen** vorkommen:

- **fest:** form- und volumenstabil, homogen
Atome und Moleküle sind dicht gepackt und starr miteinander verbunden
- **flüssig:** volumenstabil, nicht formstabil, homogen
Atome und Moleküle sind dicht gepackt aber verschiebbar
- **gasförmig:** weder form- noch volumenstabil, homogen,
verdünnte Anordnung; Atome bzw. Moleküle frei beweglich



Kristall-,
Flüssigkeits-
Gasmodelle

Elastische Deformationen fester Körper



- die Verformung eines festen Körpers unter der Wirkung einer Kraft heißt elastisch, wenn nach der Beanspruchung der Körper seine ursprüngliche Form wieder annimmt.

- Beispiel: Dehnung eines Drahtes:
Hooke'sches Gesetz (wie bei Feder)

Längenänderung proportional Kraft $\Delta L \sim F$

relative Längenänderung: $\frac{\Delta L}{L} \sim \frac{F}{A}$

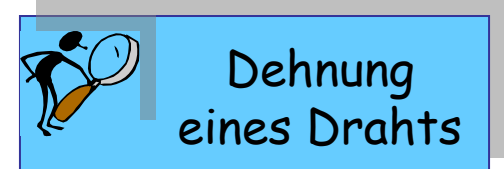
Proportionalitätsfaktor: $\frac{1}{E}$; $\Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}$

E Elastizitätsmodul; Materialparameter: $[E] = \text{N/m}^2$

relative Längenänderung $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

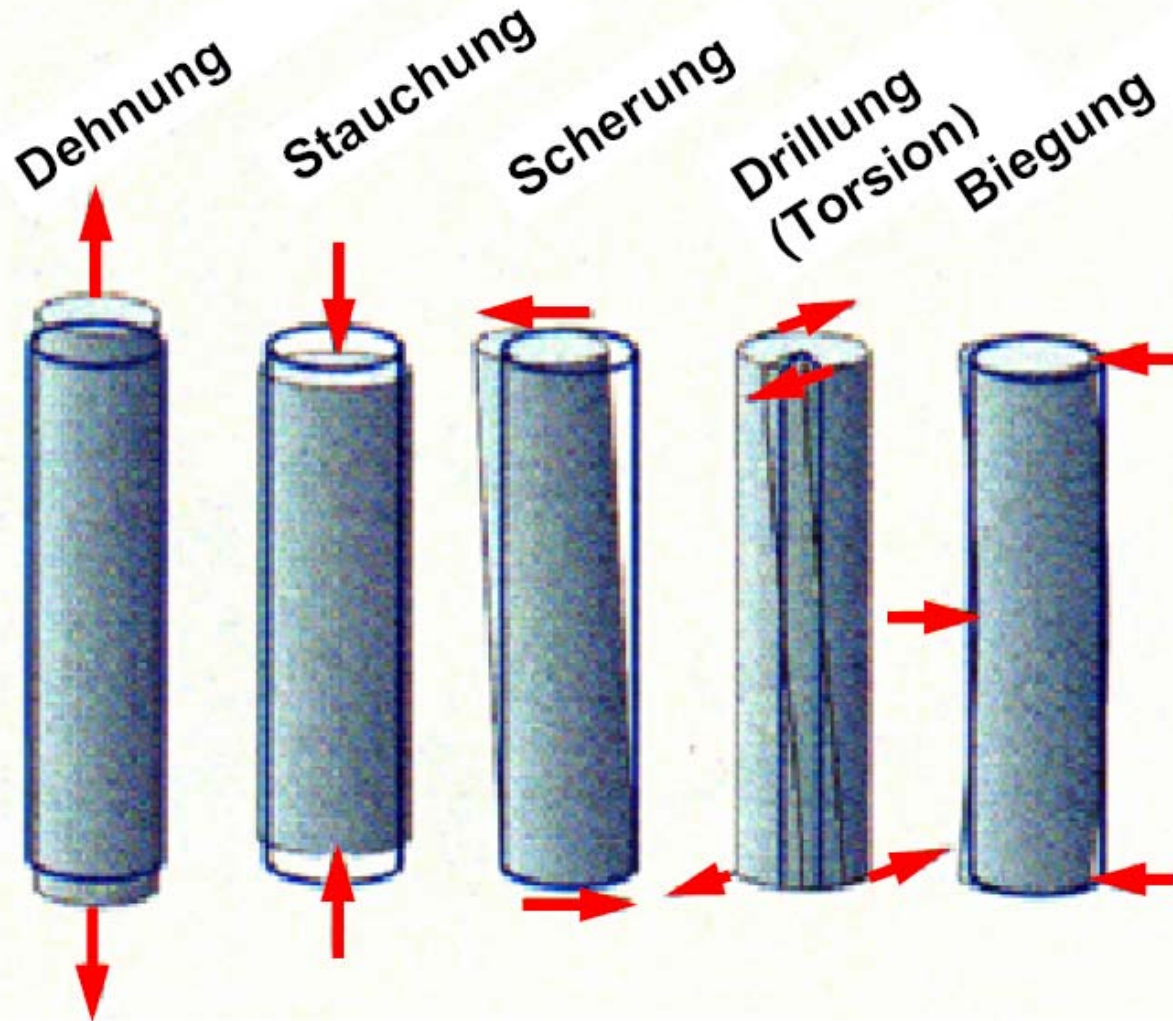
Zugspannung (Druck) $\sigma = \frac{F}{A}$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$



Einheit: $[\sigma] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (Pascal)

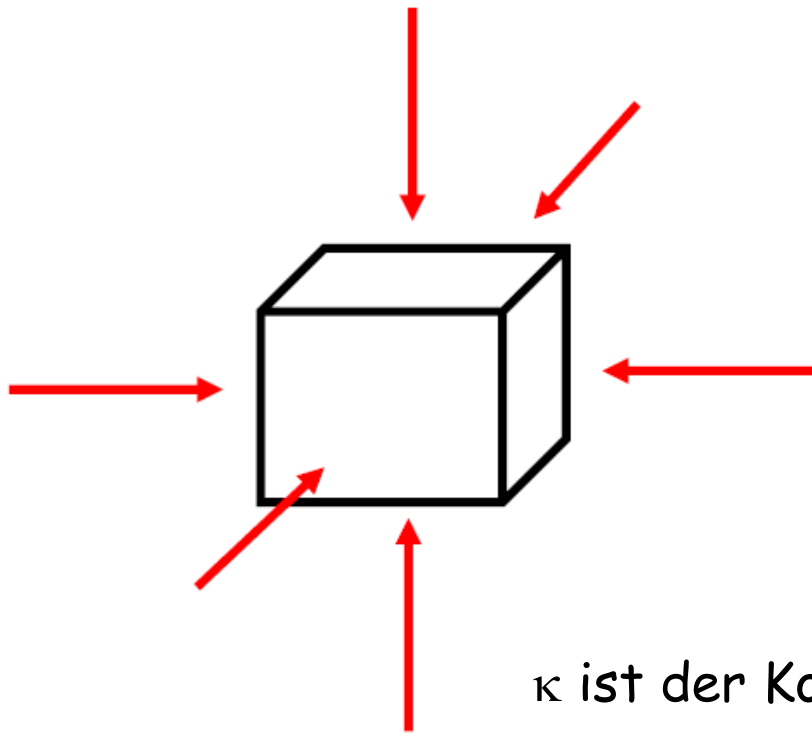
Klassifizierung elastischer Verformungen



- wie bei der Dehnung gibt es Materialparameter, die das elastische Verhalten beschreiben

Kompressibilität von Festkörpern

- Wie stark ändert sich das Volumen eines Festkörpers unter allseitigem Druck ?



Auf alle Würfelflächen wirkt der gleiche Druck

$$p = \frac{F}{A}$$

analog um Hookeschen Gesetz gilt:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\kappa} \cdot p$$

κ ist der Kompressionsmodul (Materialparameter)

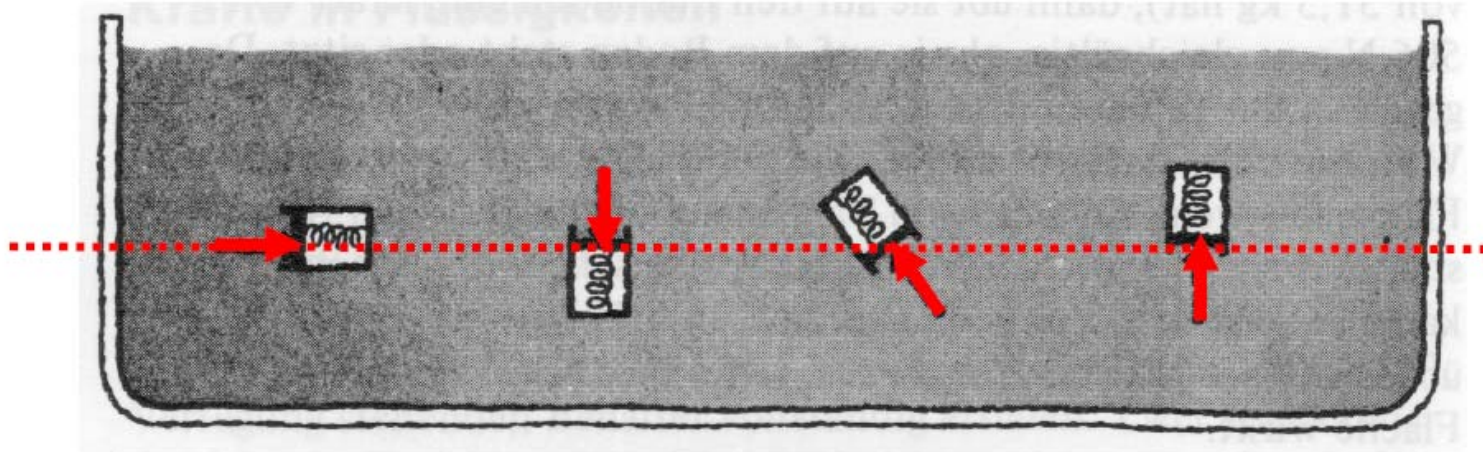
Volumina von Festkörpern sind unter allseitigem Druck nur schwer veränderbar:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx 10^{-6} \quad \text{für } p = 10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ atm (Atmosphäre)}$$

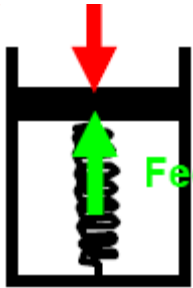
Hydrostatischer Druck in Flüssigkeiten

- Eigenschaften idealer Flüssigkeiten:

Nahezu inkompressibel wie Festkörper \Rightarrow Dichte $\rho = \text{Masse}/\text{Volumen} = \text{const}$;
keine Scherspannungen; Moleküle verschiebbar; Anpassung an Volumen



Kraft auf
Kolben



Federkraft

Der Druck senkrecht zur Fläche des Druckmessers ist unabhängig von seiner Orientierung; d.h. in Flüssigkeiten herrscht allseitig der gleiche **hydrostatischer Druck**

Druckmesser:

Gleichgewichtsstellung:

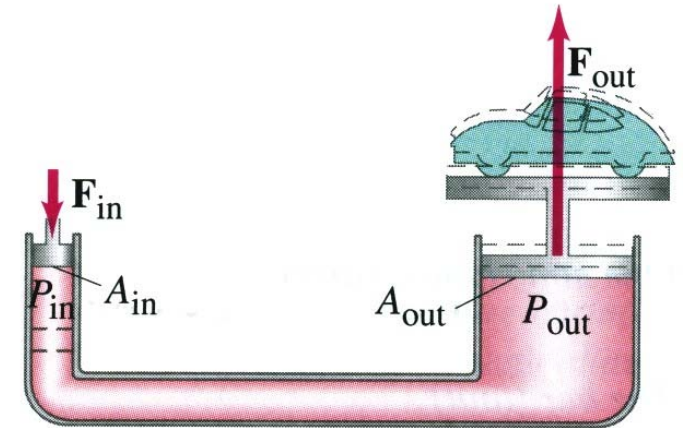
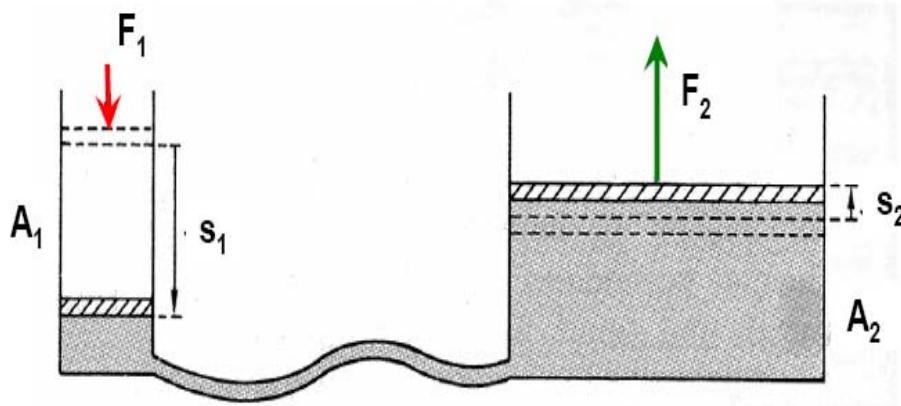
Federkraft = Druck \times Fläche



Hydrostatischer
Druck

Hydraulische Presse

Anwendung: hydraulische Hebebühne



Prinzip: Man drückt mit Kraft F_1 den linken Kolben mit Querschnitt A_1 um s_1 nach unten. Der hydrostatische Druck p ist überall in der Flüssigkeit gleich groß. Der rechte Kolben mit Querschnitt A_2 wird mit der Kraft F_2 nach oben gedrückt und hebt sich um s_2

Inkompressibilität: $V_1 = A_1 \cdot s_1 = A_2 \cdot s_2 = V_2$

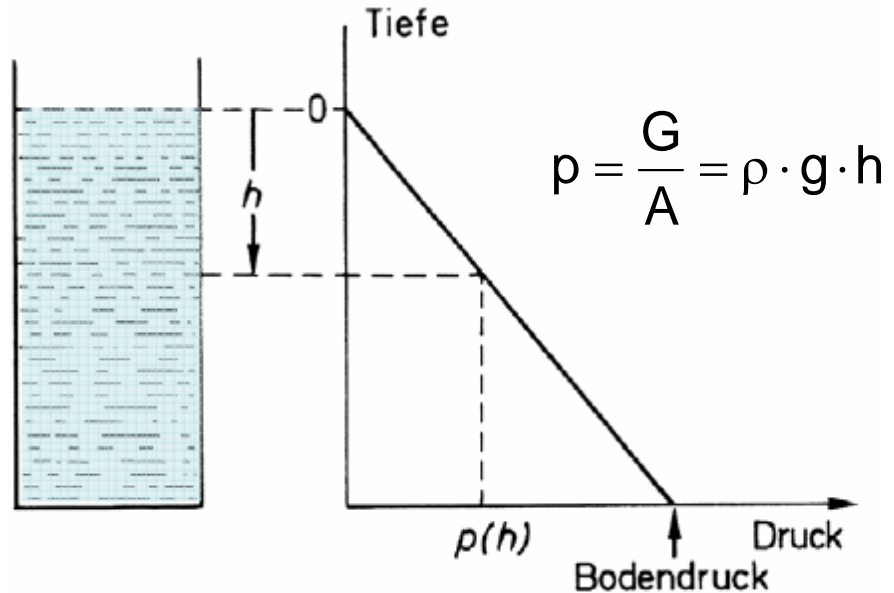
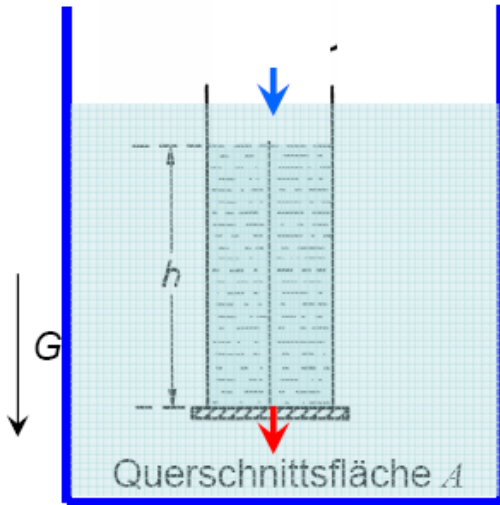
Hydrostatischer Druck: $p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = \text{const}$

Energieerhaltung: $F_1 \cdot s_1 = \frac{F_1}{A_1} \cdot A_1 \cdot s_1 = p \cdot V_1 = p \cdot V_2 = F_2 \cdot s_2$

Die Kraft, um etwas zu heben, wird kleiner aber der Verschiebungsweg verlängert sich !!

Schweredruck in Flüssigkeiten

- Gewichtskraft der Flüssigkeitssäule: $G = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot A \cdot h \cdot g$



$$p = \frac{G}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

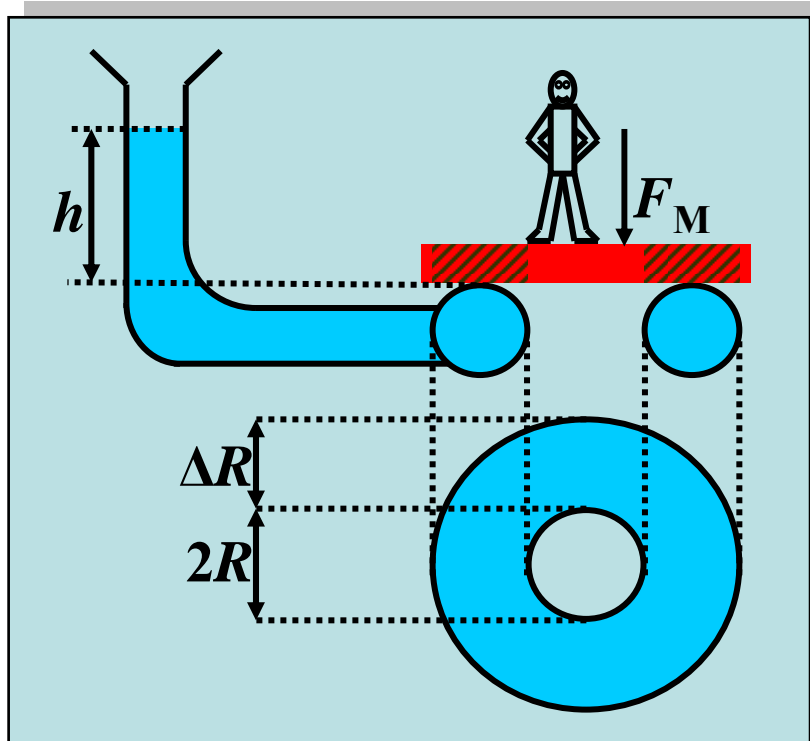
Der Schweredruck ist abhängig von der Höhe der Flüssigkeitssäule



Kommunizierende
Röhren

Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit wird die Dichte durch den Schweredruck nicht geändert (Näherung)

Wasserwaage



$$R = 0.19 \text{ m}$$
$$\Delta R = 0.12 \text{ m}$$

Wie hoch muß Wassersäule stehen, damit der Schweredruck des Wassers dem Druck der Person auf Brett das Gleichgewicht hält?

Gleichgewicht: $\rho_{\text{Metag}} = \rho_{\text{Wasser}}$

$$\rho_M = \frac{M_M \cdot g}{A} = \rho_W \cdot g \cdot h$$

$$M_M = \rho_W \cdot A \cdot h$$

$$\rho_W = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$A = 2\pi \cdot R \cdot \Delta R = 0.143 \text{ m}^2$$



Wasserwaage

$$\text{Experiment: } h = 0.56 \text{ m} \Rightarrow M_{\text{Metag}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3} \cdot 0.143 \text{ m}^2 \cdot 0.56 \text{ m} = 80 \text{ kg}$$

Quecksilber-Barometer

- Messung des Luftdrucks:

Wie hoch steht die Quecksilbersäule, wenn der Luftdruck $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa}$ beträgt ?

Gleichgewicht:

Gewichtskraft der Quecksilbersäule =
Kraft durch Luftdruck

$$m_Q \cdot g = p_{\text{Luft}} \cdot A$$

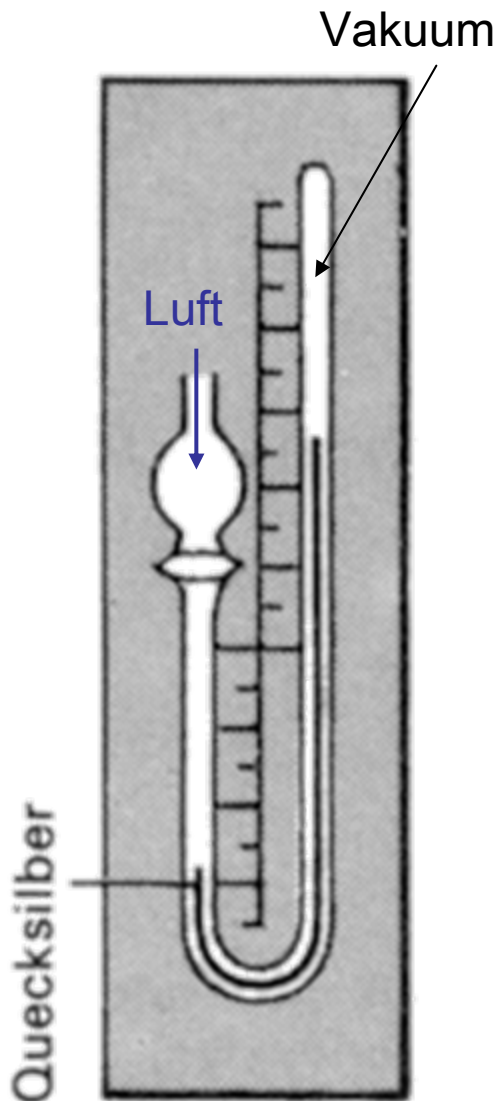
$$= \rho_Q \cdot V \cdot g = \rho_Q \cdot A \cdot h \cdot g = p_{\text{Luft}} \cdot A$$

$$h = \frac{p_{\text{Luft}}}{\rho_Q \cdot g}$$

Quecksilber (Hg) hat bei 0°C eine Dichte von $13,595 \text{ g/cm}^3$

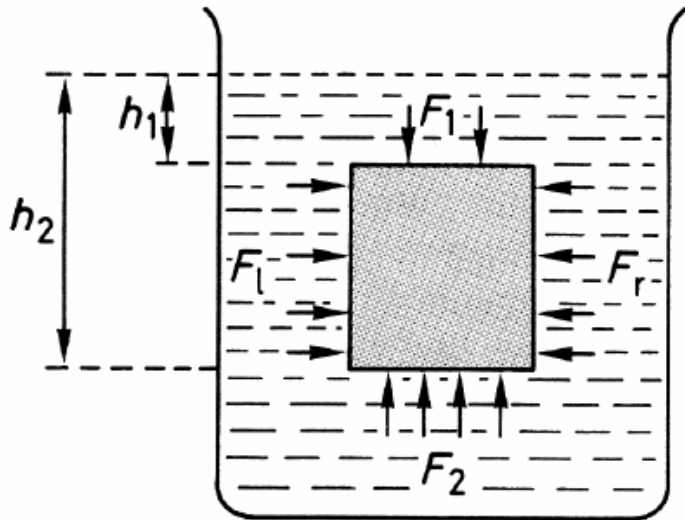
$$h = \frac{1,01325 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2}{13,595 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}$$

$$= 0,7597 \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} \approx 0,760 \text{ m(Hg)} = 760 \text{ Torr}$$



H₂O- und Hg-Säulen

Auftrieb und Archimedisches Prinzip



- Kraftwirkung auf Körper in Flüssigkeit:

- seitliche Kräfte heben sich auf:

$$F_l - F_r = 0$$

- Kräfte oben und unten bewirken eine **Auftriebskraft**:

$$\begin{aligned} F_a &= F_2 - F_1 = g \cdot \rho_{fl} \cdot A \cdot h_2 - g \cdot \rho_{fl} \cdot A \cdot h_1 \\ &= g \cdot \rho \cdot A \cdot (h_2 - h_1) = g \cdot \rho_{fl} \cdot V = g \cdot m_{fl} \end{aligned}$$

Archimedisches Prinzip: Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge

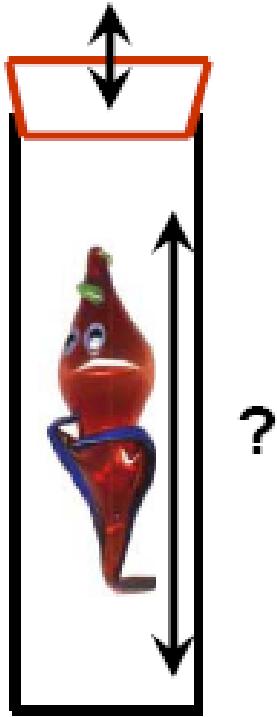
Die Gewichtskraft des eingetauchten Körpers wird um die Auftriebskraft verringert:

$$F_{ges} = F_G - F_a = (\rho_K - \rho_{fl}) \cdot g \cdot V$$

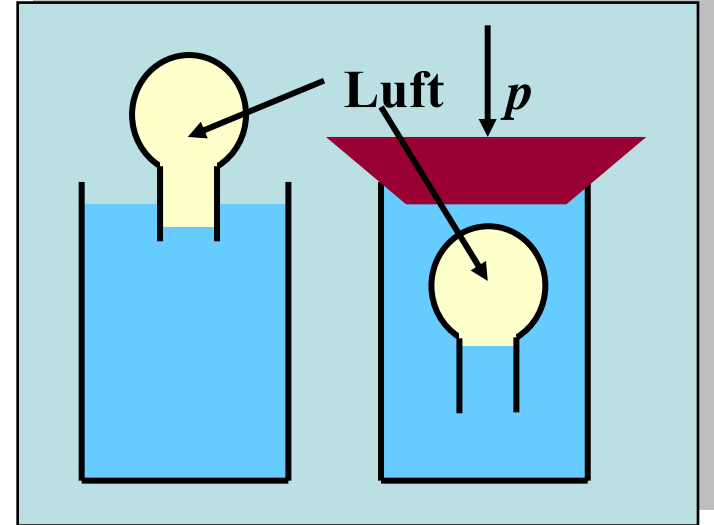


Auftrieb:
Eintauchen eines Al-
Zylinders in Wasser

Kartesischer Taucher



Auftrieb:
Kartesischer
Taucher



- Wird der Druck auf Stopfen erhöht, so erhöht sich allseitig der Druck in der Flüssigkeit
⇒ Luft in Glaskörper komprimiert ⇒ weniger Wasser verdrängt
⇒ Auftriebskraft kleiner ⇒ Taucher sinkt
- Durch geeignete Druckwahl kann Taucher steigen, sinken oder schweben

Oberflächenspannung

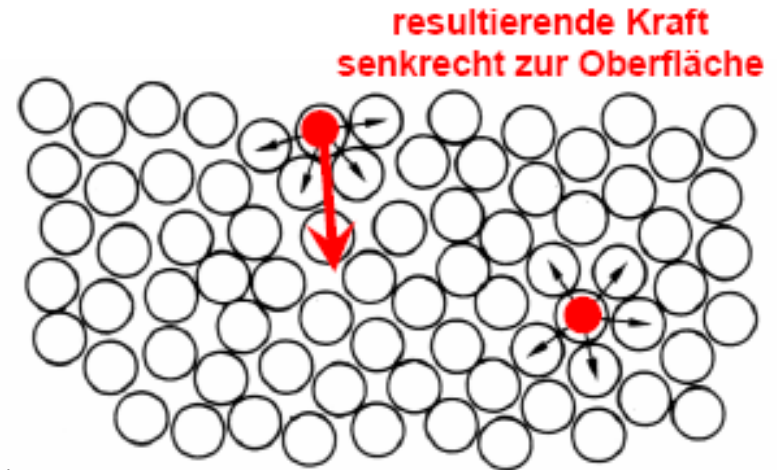
Moleküle in Flüssigkeiten ziehen sich an: **Kohäsion**

- an der Oberfläche gibt es nur eine geringere Zahl von Bindungspartnern.

⇒ Kraft senkrecht zur Oberfläche ins Innere der Flüssigkeit gerichtet
⇒ **Oberflächenspannung**

- Flüssigkeitsmoleküle an Oberfläche weniger stark gebunden
⇒ Flüssigkeitsmoleküle an Grenzflächen (flüssig-fest) können von Atomen des Festkörpers angezogen werden
⇒ **Adhäsion**

- Konsequenzen: **Benetzungseigenschaften; Kapillarität**



Oberflächenspannung

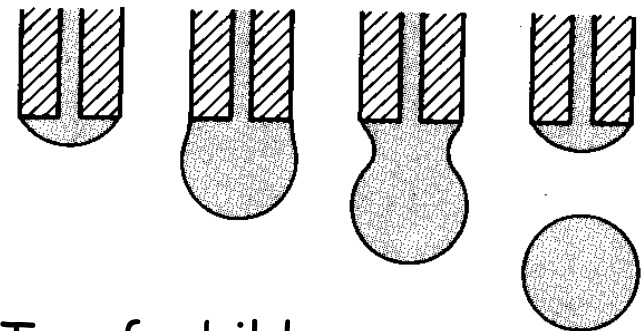
- Um weitere Moleküle an die Oberfläche der Flüssigkeit zu bringen, muss Arbeit gegen die Kohäsionskraft geleistet werden.

Oberflächenspannung:

$$\sigma = \frac{\text{aufzuwendende Arbeit}}{\text{vergrößerte Oberfläche}}$$

Einheit $[\sigma] = \text{N} \cdot \text{m} / \text{m}^2 = \text{N} / \text{m}$

- Da Arbeit aufgewendet werden muss, um eine Oberfläche zu vergrößern, stellt sich ohne äußere Einflüsse für das gegebene Volumen immer die minimale Oberfläche ein
⇒ Kugel, Tropfen

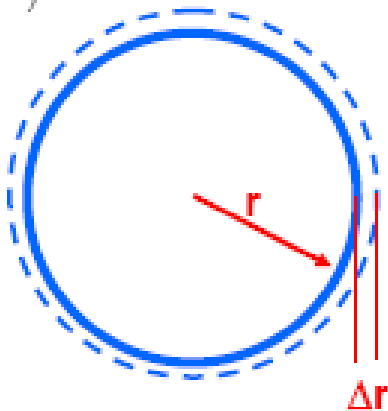


Tropfenbildung:
Oberflächen minimieren sich



Oberflächenspannung:
Nadeln auf Wasser

Innendruck einer Seifenblase



Energiebilanz bei Vergrößerung der Oberfläche;
Änderung des Radius von $r \rightarrow r + \Delta r$

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{\text{aufzuwendende Arbeit}}{\text{vergrößerte Oberfläche}}$$

• Änderung der Oberflächenenergie:

$$\begin{aligned}\Delta W &= \sigma \cdot \Delta A = \sigma \left[4\pi(r + \Delta r)^2 - 4\pi r^2 \right] \\ &= 4\pi\sigma \cdot \left[r^2 + 2r \cdot \Delta r + \Delta r^2 - r^2 \right] \approx 8\pi \cdot \sigma \cdot r \cdot \Delta r\end{aligned}$$

• mechanische Arbeit:

$$\Delta W = F \cdot \Delta r = p \cdot (4\pi r^2) \cdot \Delta r$$

Gleichsetzen \Rightarrow $p = \frac{2\sigma}{r}$ Innendruck in Seifenblase

Druck in kleinerer Blase größer



Oberflächenspannung:
2 Seifenblasen

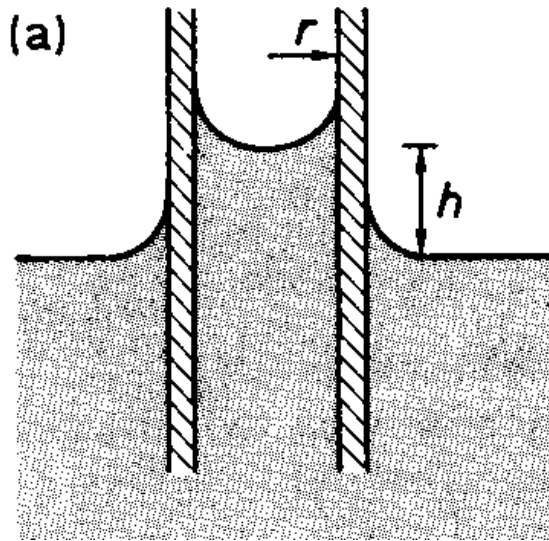


Hg-
Kügelchen

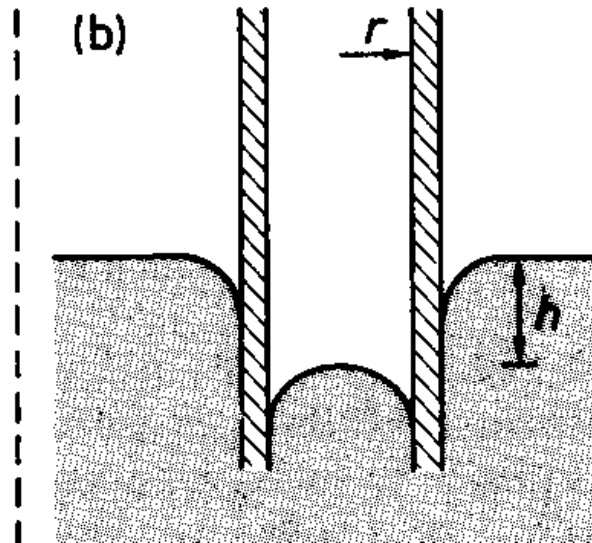
Die Großen fressen die Kleinen !!

Kapillarität

- Hineinziehen/ Herausdrängen von Flüssigkeiten in engen Kanälen (Kapillaren)



Adhäsion > Kohäsion
Oberfläche konkav
gekrümmt
z.B. Wasser (H₂O)



Kohäsion > Adhäsion
Oberfläche konvex
gekrümmt
z.B. Quecksilber (Hg)

Höhe h bestimmt durch Gleichgewicht:
Gewichtskraft =
Kraft durch Oberflächen-
spannung

$$m \cdot g = p \cdot A$$

$$\rho \cdot h \cdot A \cdot g = \frac{2\sigma}{r} \cdot A$$

$$h = \frac{2\sigma}{\rho \cdot r \cdot g}$$

abhängig von
Oberflächen-
Spannung σ und
Radius r der
Kapillare

Anwendung:
Wassertransport in Bäumen



Kapillarität

Zusammenfassung

- **Druck** und **Spannung** (skalare Größen) gegeben durch Verhältnis von wirkender Kraft und Angriffsfläche
- **Festkörper**: form- und volumenstabil; elastisches Verhalten
- **Flüssigkeiten**: volumenstabil, nicht formstabil;
inkompressibel \Rightarrow konstante Dichte,
Allseitigkeit des Drucks; keine Scherspannungen
- **Archimedisches Prinzip**: Auftriebskraft = Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge
- **Oberflächenspannung**: Moleküle an Flüssigkeitsoberflächen schwächer gebunden; Wechselspiel von Kohäsion, Adhäsion und Gewichtskraft bestimmen Benetzungseigenschaften