

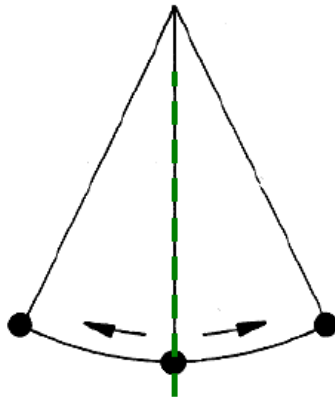
III. Schwingungen und Wellen

III.1 Schwingungen

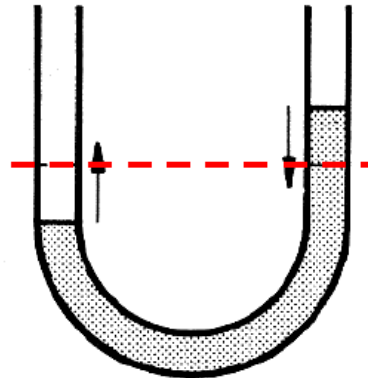
Schwingungen

- Eine Schwingung ist ein **zeitlich periodischer** Vorgang
- Schwingungen finden im allgemeinen um eine stabile Gleichgewichtslage statt, d.h. bei kleinen Auslenkungen x (Winkel φ) aus der Gleichgewichtslage gibt es eine **rücktreibende Kraft F** (Drehmoment M bei Drehbewegungen), die das Gleichgewicht wieder herstellen will.

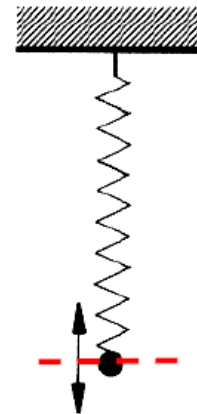
$$F \sim -x; \quad M \sim -\varphi$$



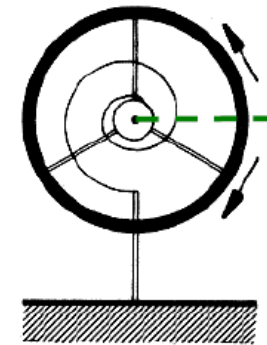
Pendel



schwingende
Flüssigkeitssäule



Feder-
pendel



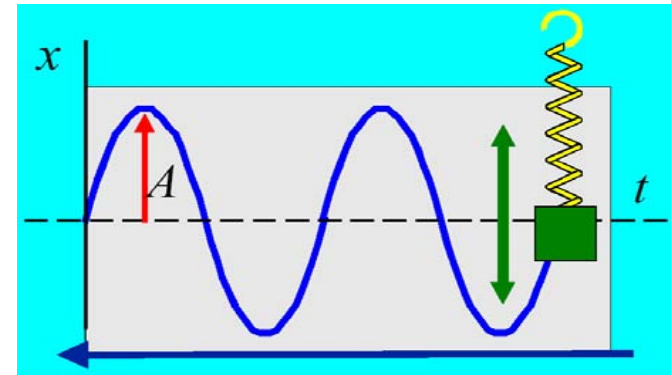
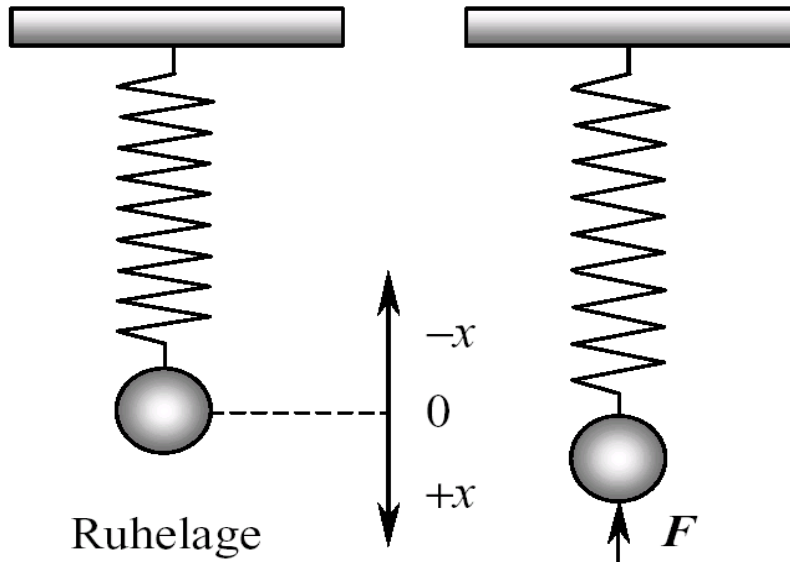
Drehschwingung



Längs- und Drehschwingungen

Systeme, die zu Schwingungen angeregt werden können, heißen **Oszillatoren**

Federschwingung



Die rücktreibende Kraft $F = -D \cdot x$ beschleunigt die Masse m ; Rückholung ist mit Trägheit verbunden

Anwendung des II. Newtonschen Axioms $F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x$

Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$$

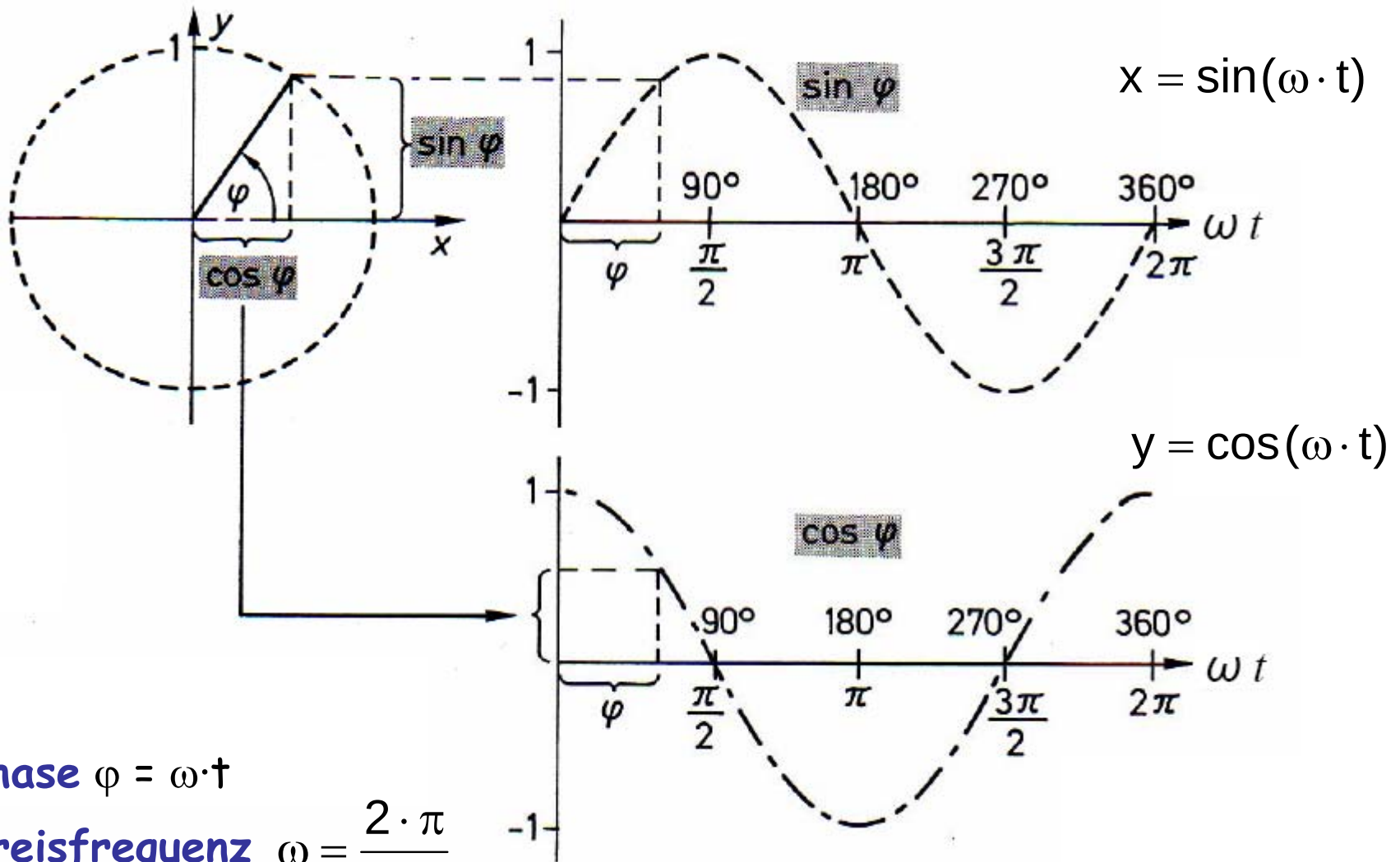
Lösung: $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\uparrow$ Amplitude $\uparrow$ Anfangsphase

Überprüfung
durch
Einsetzen



Analogie: Schwingung $\Leftrightarrow$ Kreisbewegung



Phase $\varphi = \omega \cdot t$

Kreisfrequenz $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$

Schwingungsdauer T

Einheit der Frequenz

- **Frequenz:** $f = \frac{1}{T}$

Einheit $[f] = 1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$

benannt nach Heinrich Hertz, dem
Entdecker der elektromagnetischen Wellen
→ Grundlage für Radio, Fernsehen,
moderne Telekommunikation etc.



Heinrich Hertz
1857 - 1894

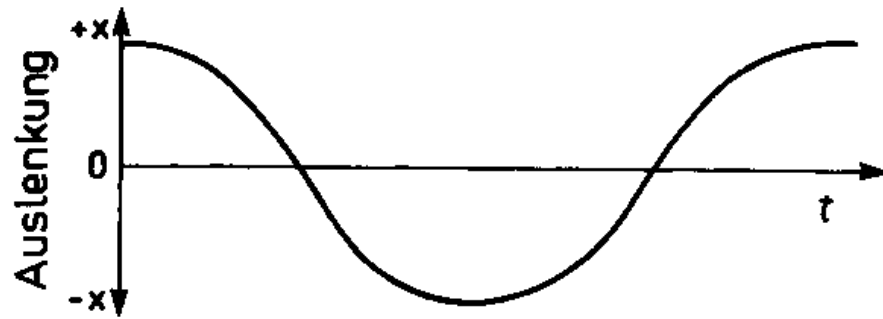
Beispielrechnung zum Federpendel:

ein Körper mit einer Masse von 0,8 kg schwingt an einer Feder mit der Federkonstanten $D = 720 \text{ N/m}$. Welche Schwingungsdauer und Schwingungsfrequenz ergeben sich ?

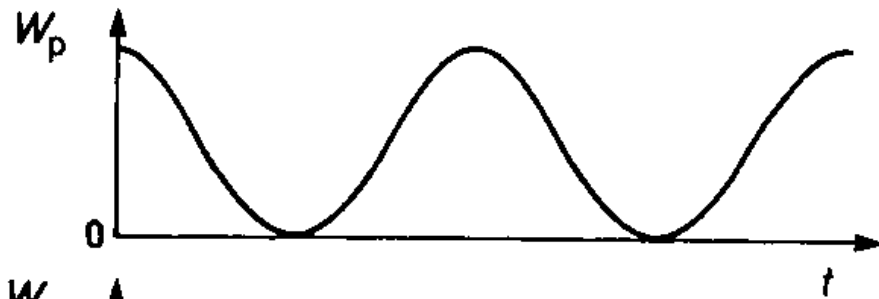
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{720 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{0,8 \text{ kg}}} = \sqrt{\frac{720 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1}}{0,8 \text{ kg}}} = \sqrt{900 \text{ s}^{-2}} = 30/\text{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6,28}{30 \text{ s}^{-1}} = 0,209 \text{ s}; \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,209 \text{ s}} = 4,79 \text{ Hz}$$

Energieerhaltung bei Schwingungen

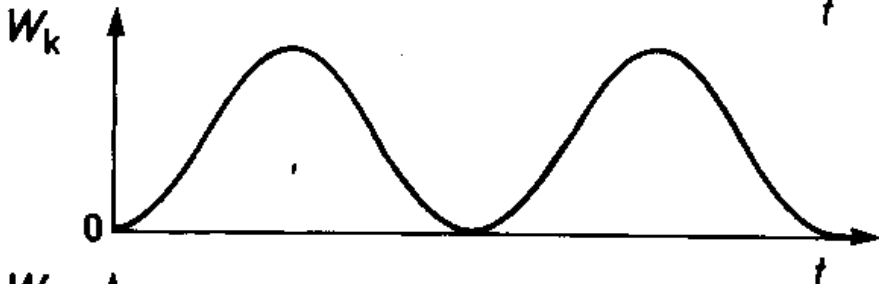


Auslenkung: $x = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$



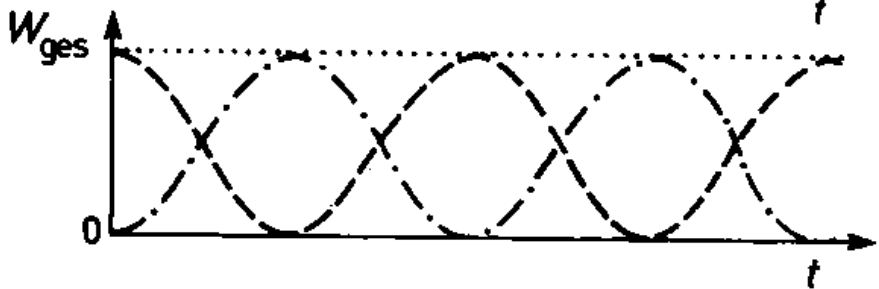
potenzielle Energie: $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$

$W_{\text{pot}} = 0$ bei Nulldurchgang



kinetische Energie: $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

W_{kin} maximal bei Nulldurchgang



Summe aus kinetischer und potenzieller Energie ist konstant

$$\frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \text{const}$$

fortlaufende Umwandlung $W_{\text{pot}} \leftrightarrow W_{\text{kin}}$

Fadenpendel

Drehmoment: $M = -L \cdot G \cdot \sin \varphi$

II. Newtonsches Axiom: $M = J \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$

Trägheitsmoment: $J = m \cdot L^2$

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \underbrace{-L \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi}_{\text{rücktreibendes Drehmoment}}$$

Näherung für kleine Winkel φ : $\sin \varphi \approx \varphi$

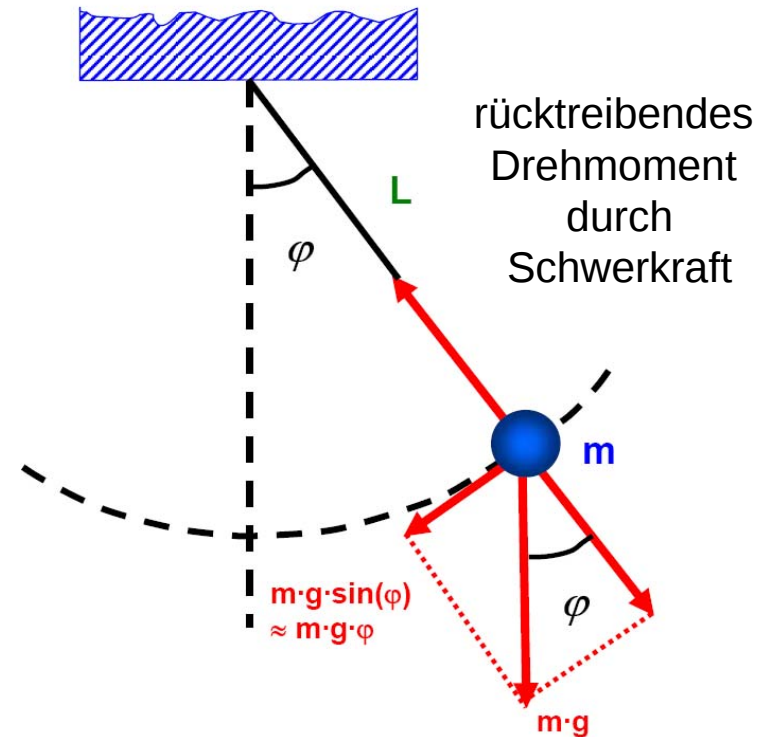
Schwingungsgleichung: $\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \varphi = 0$

Lösung: $\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}$

analog zu Lösung bei Federpendel:

Schwingungsgleichung $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{D}{m} \cdot x(t) = 0$

Lösung: $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$



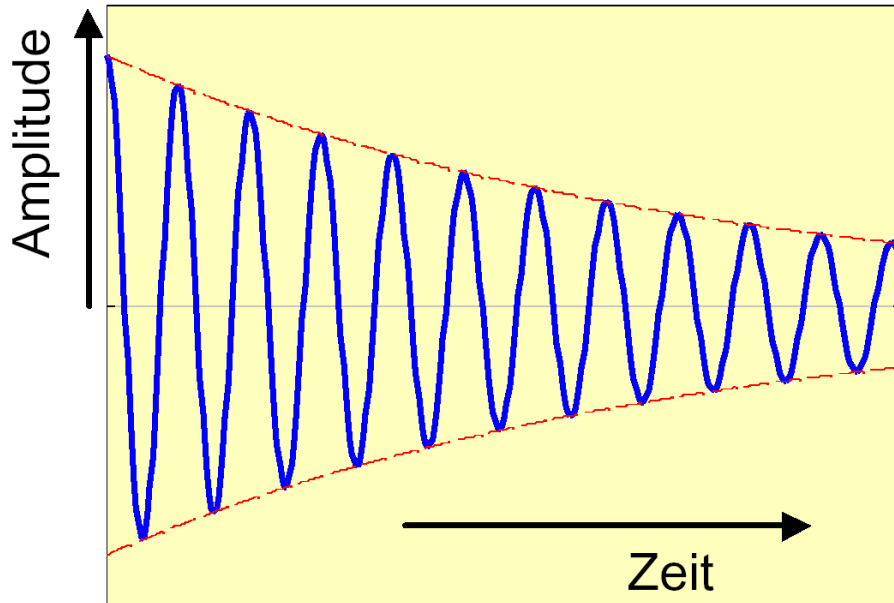
$\Rightarrow T \sim \sqrt{L};$
unabhängig von m !!



Fadenpendel: $T \sim \sqrt{L}$

Gedämpfte Schwingungen

- In der Realität nimmt die Amplitude einer mechanischen Schwingung aufgrund von Reibung mit der Zeit ab $\Rightarrow$ **gedämpfte Schwingung**



Reibungskraft $\sim$ Geschwindigkeit

Schwingungsgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x - k \cdot \frac{dx}{dt}$$

$\uparrow$
Reibungsterm

Lösung: $x(t) = \underbrace{x_0 \cdot e^{-\gamma \cdot t}}_{\text{abklingende Amplitude}} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ mit $\gamma = \frac{k}{2 \cdot m}$ und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

abklingende
Amplitude

$\Rightarrow$ exponentielle Dämpfung der Amplitude
um so schneller je größer Reibung

$\Rightarrow$ Kreisfrequenz ω kleiner
als Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
(ohne Reibung)



gedämpfte Schwingung

Erzwungene Schwingungen

- durch Reibung nimmt die Amplitude einer Schwingung mit der Zeit ab; dem System wird laufend mechanische Energie entzogen und in Wärme umgewandelt
- diese Verluste können kompensiert werden durch periodische Energiezufuhr von außen $\Rightarrow$ **erzwungene Schwingungen**
- das System wird jetzt beschrieben durch
 1. die Parameter des freien harmonischen Oszillators:
Eigenfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$; Dämpfung $\gamma = \frac{k}{2 \cdot m}$
 2. die Parameter des Erregers:
Frequenz ω ; Amplitude F_0

Schwingungsgleichung:
$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -D \cdot x - k \cdot \frac{dx}{dt} + F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

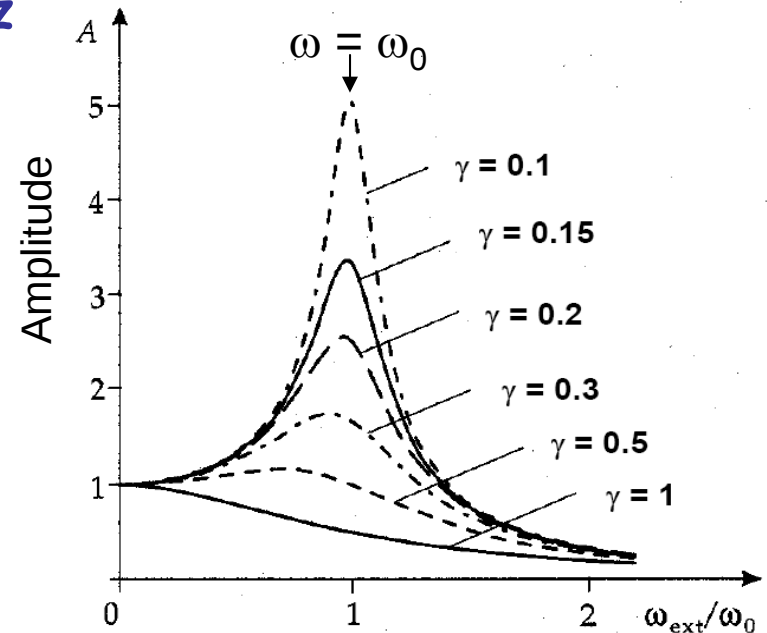
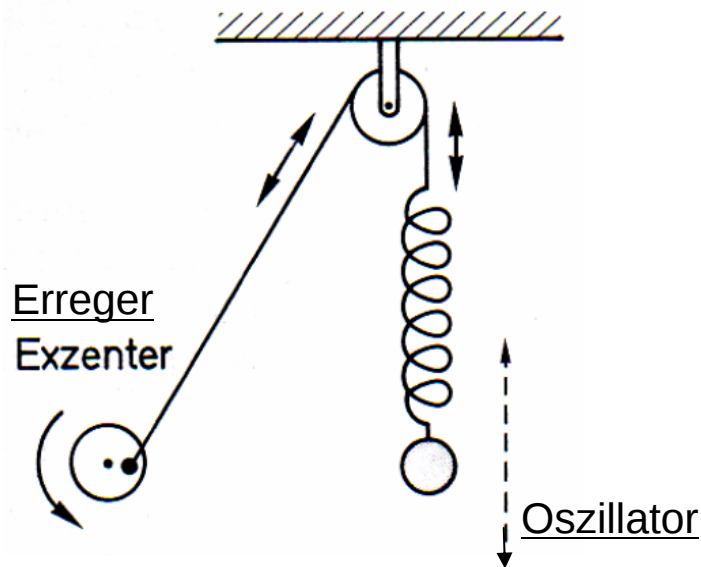
$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
Rückstell- Reibungs- Erreger
kraft kraft

Erzwungene Schwingungen

- nach einer Einschwingzeit schwingt der Oszillator mit der Erregerkreisfrequenz ω
- die Amplitude der Schwingung hängt empfindlich von der externen Kreisfrequenz ω ab:

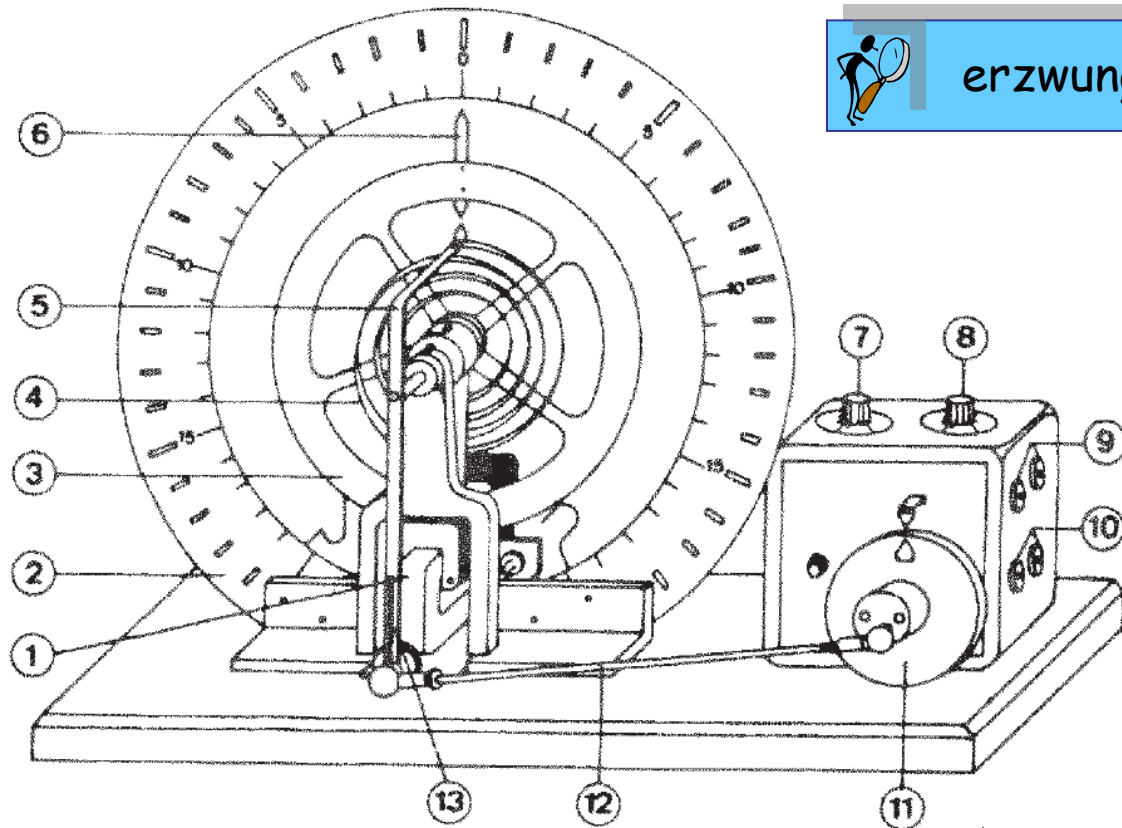
ist die Frequenz der externen Kraft gleich der Eigenfrequenz des freien, ungedämpften Oszillators, so führt das System Schwingungen aus, deren Amplituden größer werden als die der externen Kraft

⇒ **Resonanz**



Die Amplitudenüberhöhung ist um so stärker je kleiner die Dämpfung

Erzwungene Schwingungen: Pohlsches Rad

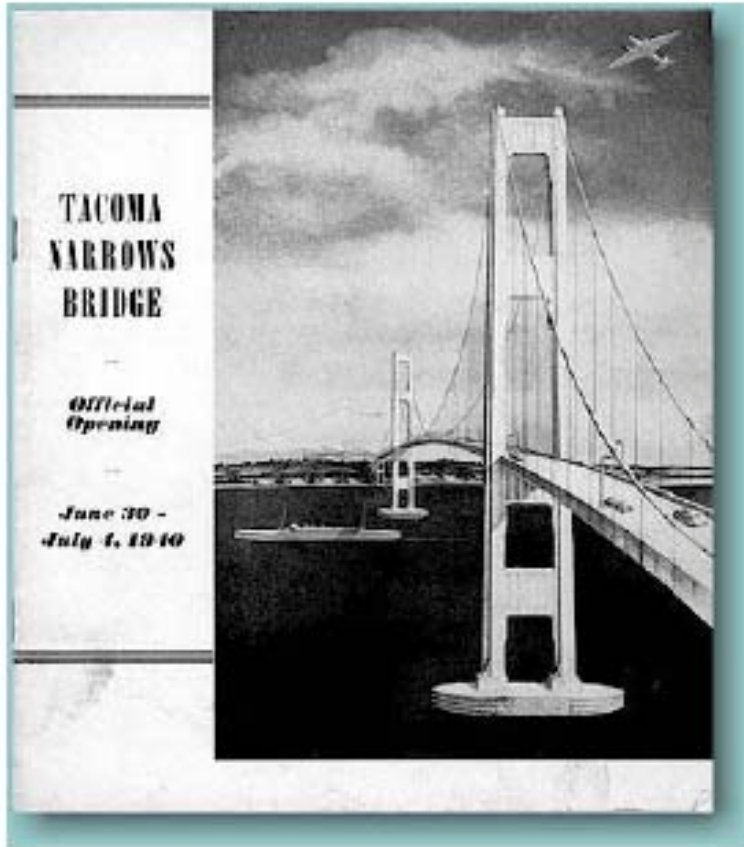


erzwungene Schwingung

Abbildung 1: Pohlsches Rad 1) Elektromagnet, 2) Skala, 3) Schwingendes System, 4) Spiralfeder, 5) Übertragungshebel, 6) Zeiger des schwingenden Systems, 7) Drehzahleinstellung, fein, 8) Drehzahleinstellung, grob, 9) Buchsen für Motorspannung, 10) Messbuchsen für Erregerspannung, 11) Antriebsrad und Exzenter, 12) Schubstange, 13) Führungsschlitz zur Einstellung der Amplitude

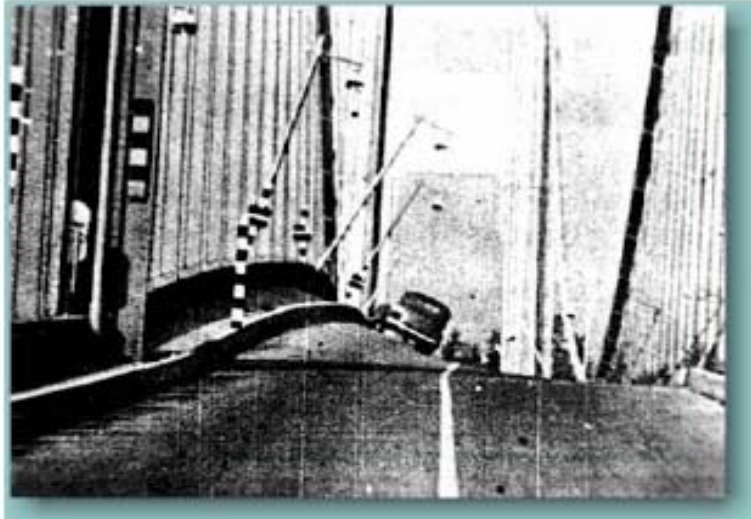
Resonanzkatastrophe

Tacoma Narrows Bridge (eingeweiht Juni/July 1940)



Resonanzkatastrophe

Sturm im November 1940

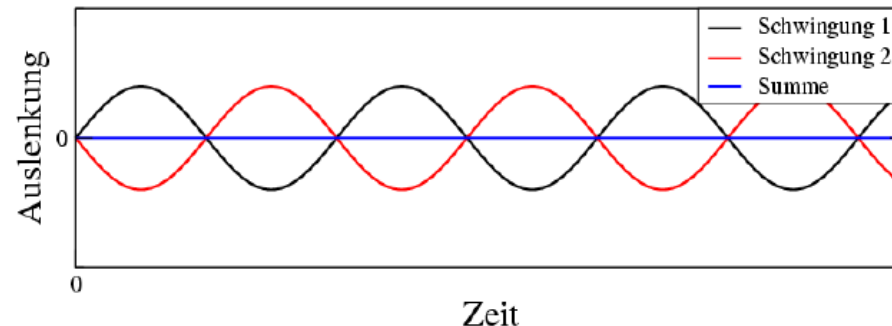
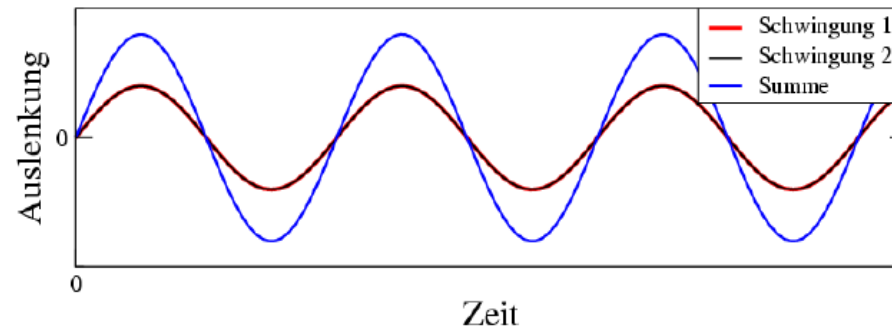
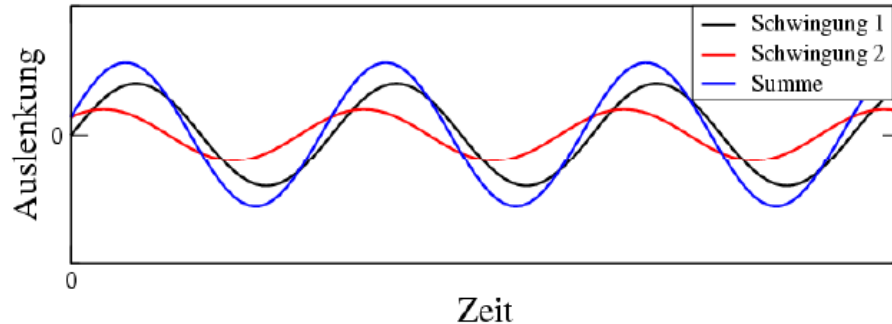


durch geringe Energiezufuhr mit der richtigen
Frequenz können große Schäden angerichtet werden

Überlagerung von Schwingungen

- in einem schwingungsfähigen System können auch mehrere Schwingungen gleichzeitig angeregt sein: Überlagerung nach dem **Superpositionsprinzip**

$$x_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t); \quad x_2(t) = A_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi) \Rightarrow x_{\text{ges}}(t) = x_1(t) + x_2(t)$$



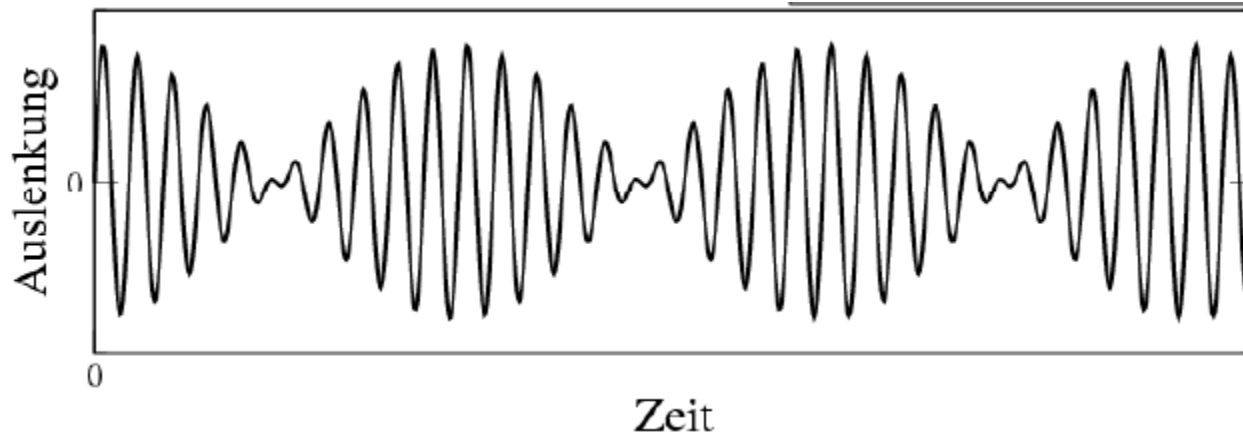
- harmonische Schwingungen gleicher Frequenz, verschiedener Amplitude und Phase:
 $\Rightarrow$ **harmonische Gesamtschwingung**

- gleiche Frequenz, Amplitude und Phase:
 $\Rightarrow$ **konstruktive Interferenz**

- gleiche Frequenz und Amplitude, aber gegenphasig ($\varphi = \pi$)
 $\Rightarrow$ **destruktive Interferenz**

Schwebungen

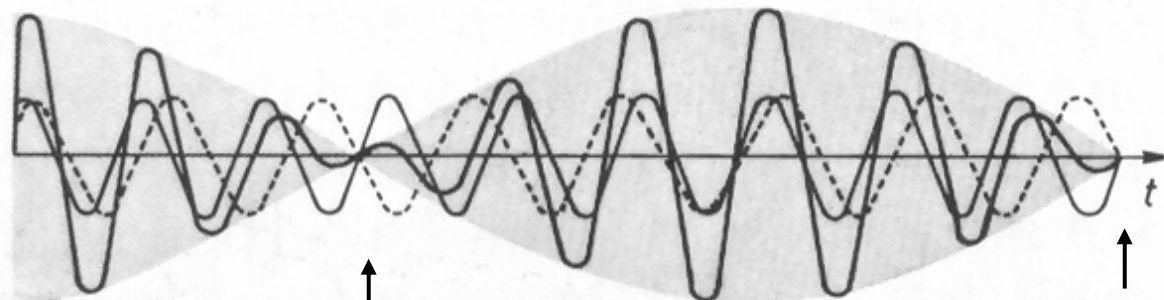
- die Überlagerung von zwei Schwingungen fast gleicher Frequenz und Amplitude führt zu **Schwebungen**



- die Frequenz der Schwebung ist gleich der Differenz der beiden Einzelfrequenzen: $f_s = f_1 - f_2$



Schwebung:
1. Doppelpendel
2. akustisch



Auslöschung

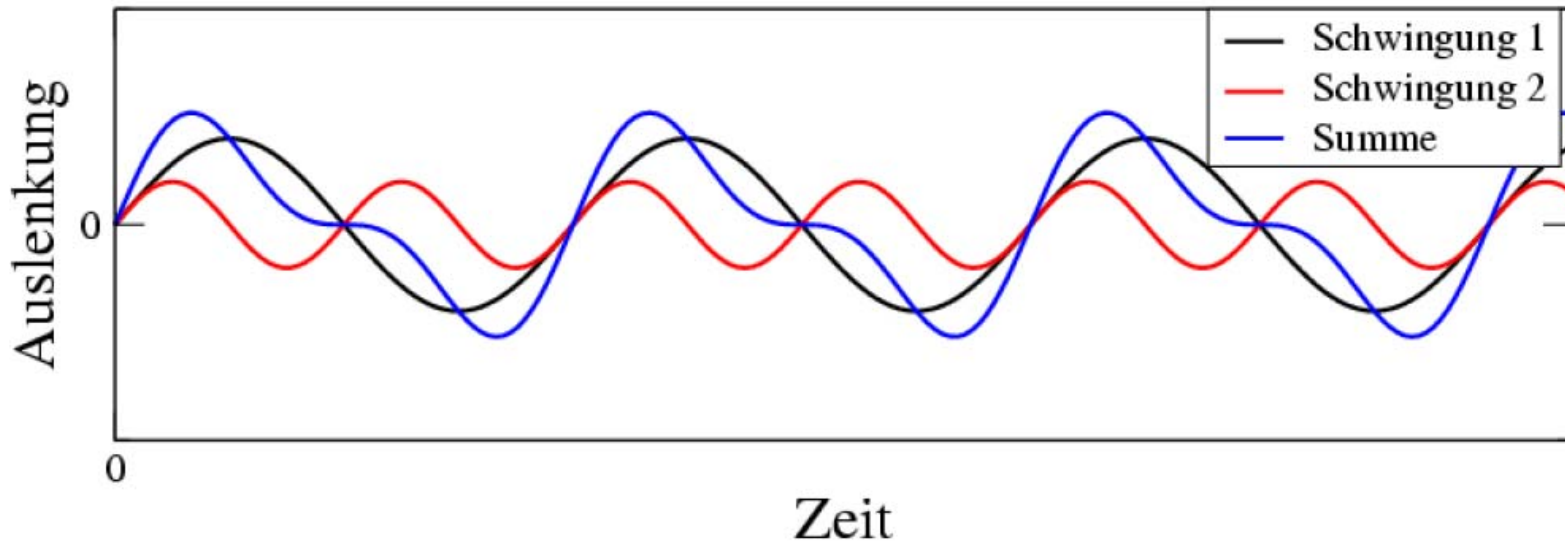
Auslöschung

Verstärkung

Verstärkung

nicht-harmonische Schwingungen

- Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenz, Amplitude und Phase ergibt nicht-harmonische Gesamtschwingungen



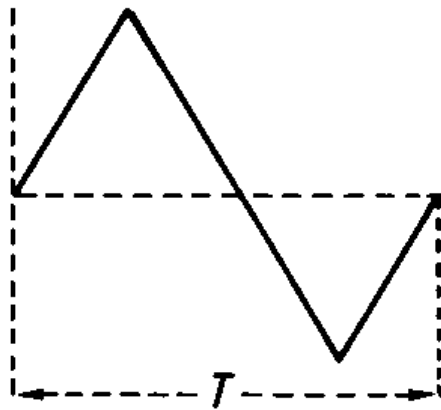
Umkehrung:

Jede nicht-harmonische Schwingung ist als Überlagerung von harmonischer Schwingungen darstellbar

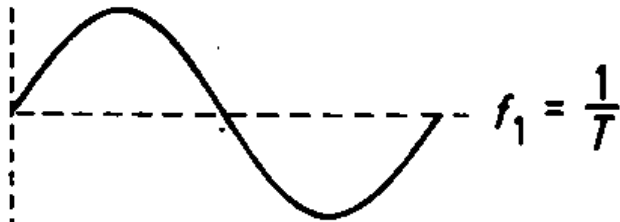
Fourierzerlegung:
$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot 2\pi \cdot f_1 \cdot t + \varphi_n)$$

Fourierzerlegung

- Fourierzerlegung einer Dreieckschwingung: Darstellung durch Überlagerung der Grundwelle mit harmonischer Oberwellen



=



+



+

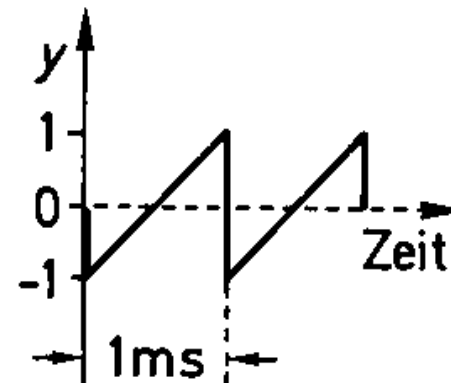


+

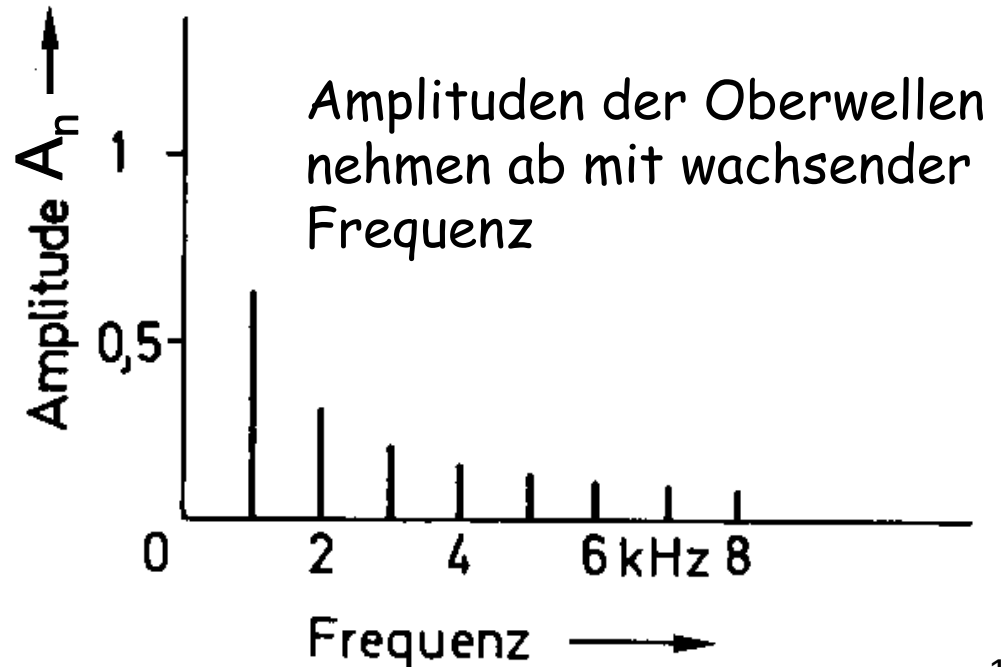


+

...

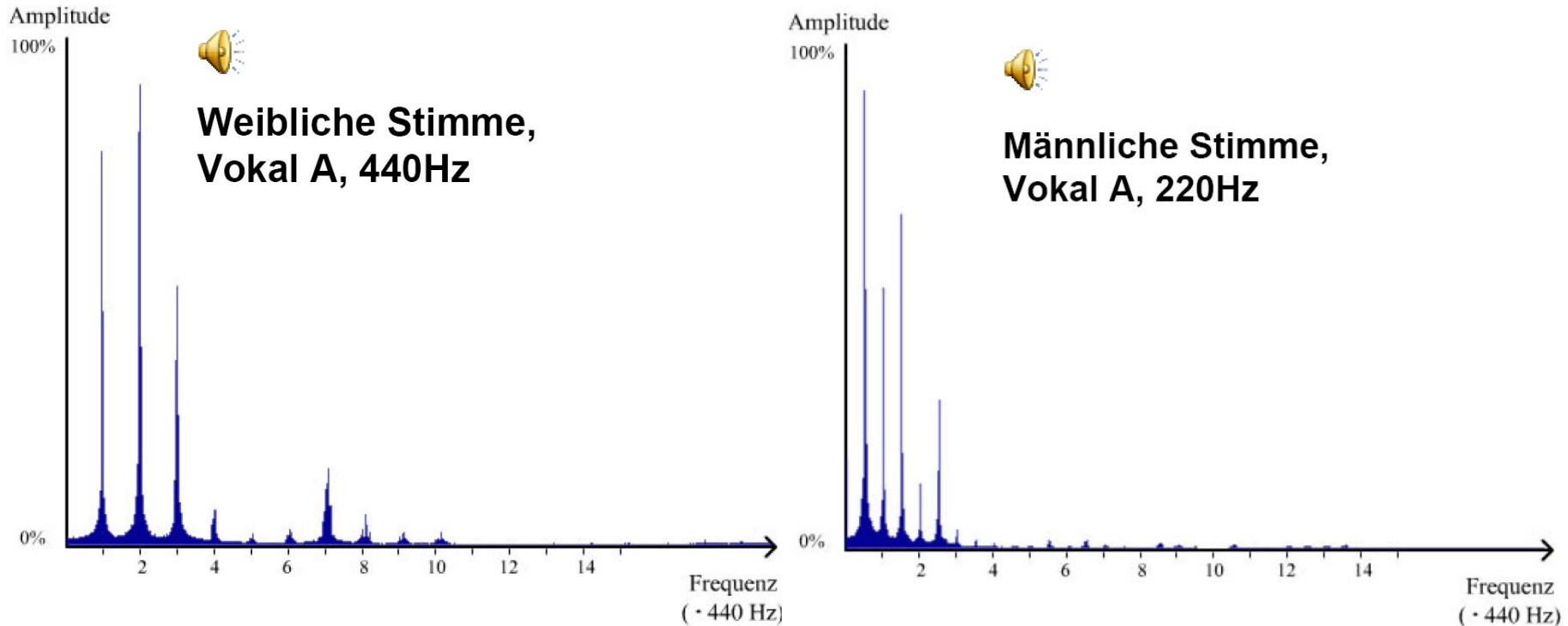


Fourier-
zerlegung



Stimmenerkennung

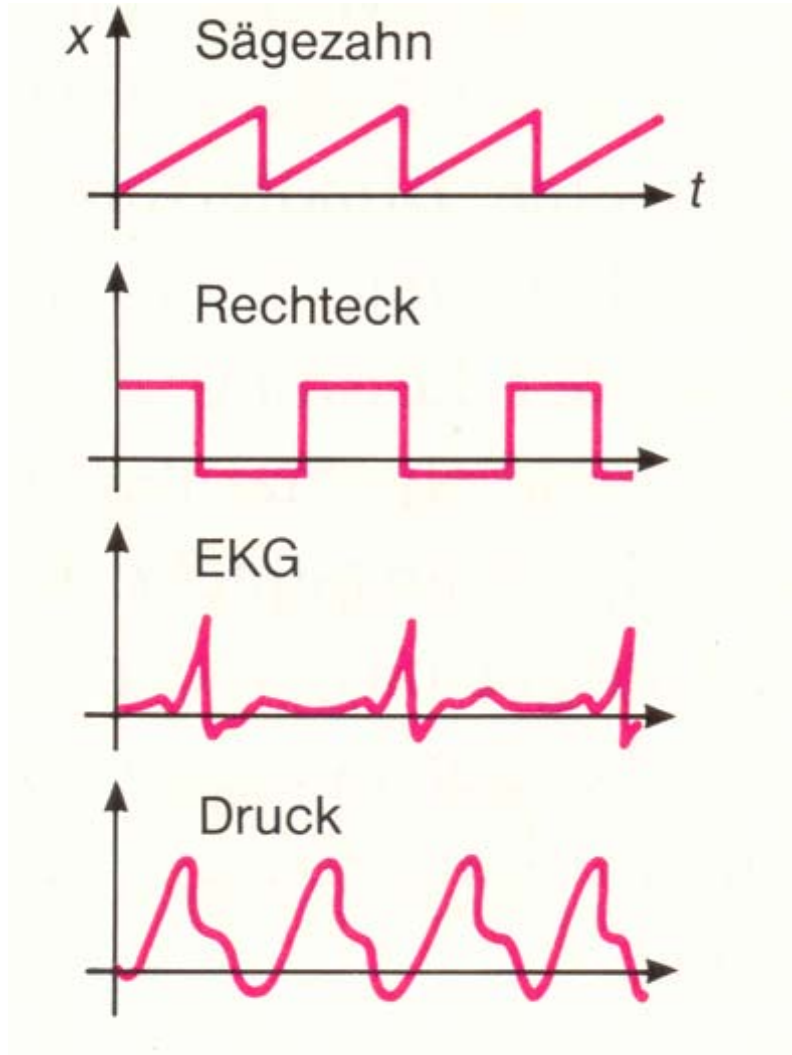
- Fourierzerlegung der Schallwellen



- menschliche Stimmen haben ihr charakteristisches **Obertonspektrum**, welches durch die individuelle Beschaffenheit des Klangkörpers Mensch bestimmt wird. So erkennt man Menschen an ihrer Stimme genau wie wir verschiedene Instrumente an ihrem spezifischen Klang erkennen

Beispiele für anharmonische Schwingungen

Anharmonische Schwingungsformen:



Zusammenfassung

- **Schwingungen sind periodische Zustandsänderungen in der Zeit.** Schwingungsfähige Systeme heißen **Oszillatoren**
- **Eigenschwingungen** von Systemen sind **harmonische Schwingungen**, mathematisch beschreibbar durch Sinus- und Kosinusfunktionen charakterisiert durch Kreisfrequenz, Amplitude und Phase
- aufgrund von Reibungseffekten sind alle Schwingungen gedämpft: die Schwingungsamplitude nimmt mit der Zeit exponentiell ab
- Oszillatoren können durch externe periodische Anregung auch bei anderen Frequenzen als ihrer Eigenfrequenz ω_0 schwingen:
Erzwungene Schwingungen: für $\omega \approx \omega_0$ **Resonanz, Resonanzkatastrophe**
- harmonische Schwingungen überlagern sich nach dem **Superpositionsprinzip**. Die Überlagerung von Schwingungen mit fast gleicher Frequenz führt zu **Schwebungen**
- durch **Fourierentwicklung** lassen sich nicht-harmonische Schwingungen als Überlagerung harmonischer Schwingungen darstellen.