Versuch 1A: Oberflächenspannung Dichte

Physikalische Grundbegriffe

- **Druck**
- **Schweredruck, hydrostatischer Druck, Auftrieb**
- **spezifische Oberflächenenergie, Oberflächenspannung**
- **Kapillarität**
- **Dichte**

Messtechnische Grundlagen

- **Hydrostatische Waage**

Weiterführende Literatur

- **W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 130-139**
- **W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 53-62,71-74**
- **V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 58-67**

Erläuterung der wichtigsten Physikalischen Begriffe

- **Spezifische Oberflächenenergie**

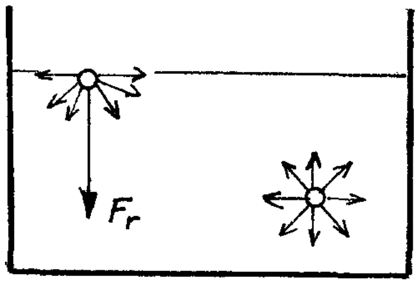


Abb. 1.1: Schematische Darstellung der zwischen den Molekülen herrschenden Kräfte.

Zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit herrschen anziehende Kräfte, die sog. **Kohäsionskräfte.** Im Innern einer Flüssigkeit ist jedes Molekül gleichmäßig von Nachbarmolekülen umgeben. Daher sind die an jedem Molekül angreifenden Kräfte nach allen Seiten gleich groß und heben sich gegenseitig auf, d.h. es entsteht keine resultierende Kraft. Moleküle an oder nahe der Oberfläche sind jedoch nicht mehr gleichmäßig von Nachbarmolekülen umgeben, so daß an ihnen eine ins Innere der Flüssigkeit gerichtete resultierende Kraft F_r angreift (Abb.1.l). Will man die Oberfläche einer Flüssigkeit vergrößern, so müssen Moleküle aus dem Innern an die Oberfläche transportiert werden. Dies erfordert eine Arbeit gegen die Kraft F_r. Diese geleistete Arbeit ist dann als potentielle Energie in der Oberfläche gespeichert (= Oberflächenenergie). Wird nun unter Aufwendung der Energie ΔW die Oberfläche einer Flüssigkeit um ΔA vergrößert, so heißt der Quotient ΔW/ΔA **spezifische Oberflächenenergie** ε.

Definition: spezifische Oberflächenenergie ε

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A}} \qquad \textbf{(1.1)}$$

SI-Einheit für ε: 1 J / m^2
cgs-Einheit für ε: l erg / cm^2 (erg ist die cgs-Einheit für die Energie: l erg =10^{-7} J).

ε ist eine Materialkonstante und nur abhängig von der Molekülart und der Temperatur. Die in der Oberfläche A einer Flüssigkeit gespeicherte potentielle Energie ist: $W = \varepsilon \cdot A$

Anmerkung: Da jedes System in der Natur dem Zustand minimaler potentieller Energie zustrebt, wird eine Flüssigkeit, wenn sie keinen äußeren Kräften unterworfen ist, bei gegebenem Volumen die Form mit der minimalen Oberfläche einnehmen: dies ist die Kugelform.

- ## Oberflächenspannung

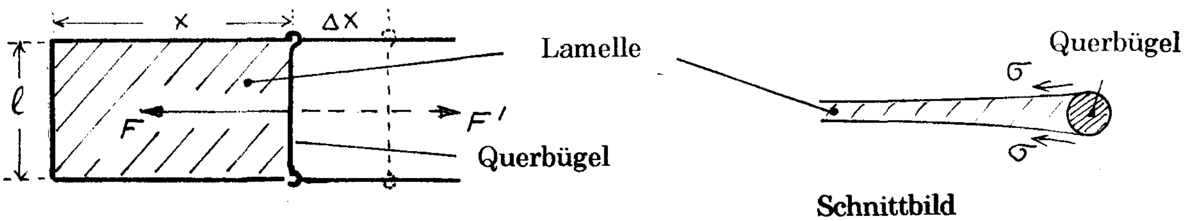


Abb. 1.2: Definition der Oberflächenspannung

Wir betrachten nun eine ebene Flüssigkeitslamelle zwischen den Schenkeln eines U-förmig gebogenen Drahtes mit einem beweglichen Querbügel (Abb.1.2). Die Flüssigkeit haftet aufgrund der Adhäsionskräfte (s.u.) an der Drahtberandung. Da die Lamelle versucht, ihre Oberfläche zu verkleinern, zieht sie mit einer Kraft F nach links. Eine gleich große Gegenkraft F' versucht, dies zu verhindern. Die am Bügel angreifende Kraft F wirkt zu dieser parallel in der Lamellenoberfläche **(Tangentialkraft)**. Man nennt die pro Längeneinheit am Bügel angreifende Kraft **Oberflächenspannung** σ.

Definition: Oberflächenspannung σ

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{2 \cdot l}} \qquad \textbf{(1.1a)}$$

SI-Einheit für σ: 1 N / m
cgs-Einheit für σ: 1 dyn / cm
(dyn ist die cgs-Einheit für die Kraft: 1 dyn =10^{-5} N)

Der Faktor 2 im Nenner der kommt daher, daß jeweils Ober- **und** Unterseite der Lamelle mit der Länge l am Querbügel angreifen.

Da die Kraft F in der Abb.l.2 nicht von der x-Position des Querbügels abhängt, ist die Oberflächenspannung keine elastische Spannung, wie z.b. die Tangentialspannung in einer gespannten Gummi-Membran. σ ist nicht von der Größe und der Gestalt der Oberfläche abhängig, sondern von der Molekülart. Sie nimmt mit steigender Temperatur der Flüssigkeit ab und ist stark von Zusätzen und damit auch von Verunreinigungen abhängig. Stoffe, die die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten wesentlich herabsetzen, nennt man *oberflächenaktiv* oder *kapillaraktiv*. Man kann zeigen, daß Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie einander gleich sind, d.h. $\sigma = \varepsilon$.

> Um dies zu beweisen, machen wir folgenden Gedankenversuch: Wir verschieben den Querbügel in der Abb.l.2 um die Strecke Δx nach rechts. Dadurch wird die Lamellenoberfläche (Vorder- und Rückseite!) um die Fläche $\Delta \mathbf{A} = 2 \cdot \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{l}$ vergrößert. Die dazu nötige Arbeit ist nach der Definition der spezifischen Oberflächenenergie gleich $\mathbf{\Delta W = \Delta A \cdot \varepsilon = 2 \cdot \Delta x \cdot l \cdot \varepsilon}$. Andererseits können die angreifende Kraft aufgrund der Definition der Oberflächenspannung gleich $\mathbf{F} = \sigma \cdot 2 \cdot \mathbf{l}$, und die bei der Verschiebung aufgewendete Arbeit gleich $\Delta \mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{x} = \sigma \cdot 2 \cdot \mathbf{l} \cdot \Delta \mathbf{x}$ gesetzt werden. Diese beiden Arbeitsbeträge müssen einander gleich sein und ein Kürzen in der Gleichung zeigt, daß $\varepsilon = \sigma$ ist.

Grenzt die Flüssigkeit nicht an Luft, sondern an eine andere Flüssigkeit, so spricht man von **Grenzflächenspannung** bzw. von **spezifischer Grenzflächenenergie**. Zahlreiche Erscheinungen beruhen auf der Wirkung der Oberflächen bzw. Grenzflächenspannung, wie z.b. Benetzung, Kapillarität, Bildung eines Ölfilms auf Wasseroberflächen oder die **Tropfenbildung**. So bleibt eine Flüssigkeit, die aus einer engen Öffnung nach unten austritt, trotz ihrer Schwere zunächst an der Öffnung hängen. Es bildet sich ein Tropfen, der langsam größer wird, sich einschnürt und bei Erreichen einer bestimmten Größe schließlich abreißt. Ist F_G die Gewichtskraft des abreißenden Tropfens, 2r der Durchmesser der Kontraktionsstelle, so gilt angenähert: $\mathbf{F_G} = 2\pi \cdot \mathbf{r} \cdot \sigma$

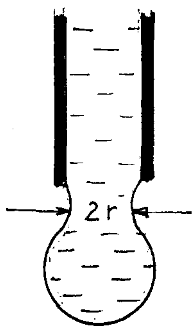


Abb. 1.3: Bildung eines Flüssigkeitstropfen an einer Kapillaren.

Auf Grund dieser Beziehung ist ersichtlich, daß die Tropfengröße im wesentlichen von der Oberflächenspannung und von der Dichte der austropfenden Flüssigkeit abhängig. Bei verschiedenen Flüssigkeiten kann also die Tropfengröße erheblich differieren! Medikamentenmengen werden oft in "Tropfenzahlen" verordnet. Gleiche Tropfenzahl verschiedener Medikamente sind im allgemeinen also verschiedene Volumina!

- **Druck**

Der Druck p ist definiert als Kraft pro Fläche. Die Kraft F muß dabei senkrecht zur Fläche A wirken.

Definition:	**Druck**	$\boxed{\mathbf{p = F / A}}$	**(1.2)**
SI-Einheit für p:	**$1\ N / m^2$**	**$= 1$ Pa**	**(Pascal)**
oder bar :	**1 bar**	**$= 10^5$ Pa**	
	1 mbar	**= 1 hPa**	
cgs-Einheit für p:	**$1\ dyn / cm^2 = 0{,}1\ Pa = 10^{-6}$ bar**		

In der Technik galt früher: $1\ at = 1\ kp / cm^2 = 0{,}981\ bar = 0{,}981\ 10^5\ Pa$
Ebenso war früher gebräuchlich die Einheit Torr:

$760\ Torr = 1 atm = 1{,}013\ bar = 1013\ mbar = 1{,}013\ 10^5\ Pa$
daher: 1 Torr = 1,33 mbar

- ## Überdruck in einer Luftblase innerhalb einer Flüssigkeit

In einer Flüssigkeit mit der Oberflächenspannung σ befinde sich eine Luftblase mit dem Radius r. Durch die Wirkung der Oberflächenspannung sucht sich die Oberfläche der Blase zu verkleinern, so daß in der Blase ein Überdruck p_i entsteht, der von der Oberflächenspannung σ und vom Radius r abhängt. Die Berechnung von p_i kann aus folgender Energiebetrachtung erfolgen:

> Wir denken uns den Radius r der Blase um einen kleinen Betrag Δr vergrößert. Die Oberfläche nimmt dadurch um $\Delta \mathbf{A} = 8\pi\, \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r}$ zu, und als Folge davon erhöht sich die Oberflächenenergie um $\Delta \mathbf{W} = \sigma \cdot \Delta \mathbf{A} = \sigma \cdot 8\pi\, \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r}$. Diese Energiezunahme stammt aus der bei der Volumenvergrößerung geleisteten Druck-Volumen-Arbeit $\mathbf{W} = \mathbf{p_i} \cdot \Delta \mathbf{V}$. Die Volumenänderung ΔV beträgt bei der Kugel gleich $4\pi \cdot \mathbf{r}^2 \cdot \Delta \mathbf{r}$. Es gilt $\Delta W_\sigma = \Delta W$ oder $\sigma \cdot 8\pi \cdot \mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{p_i} \cdot 4\pi \cdot \mathbf{r}^2 \cdot \Delta \mathbf{r}$. Daraus läßt sich durch Kürzen sofort ableiten:

$$\boxed{\mathbf{p_i} = \frac{2 \cdot \sigma}{\mathbf{r}}} \qquad \textbf{(1.3)}$$

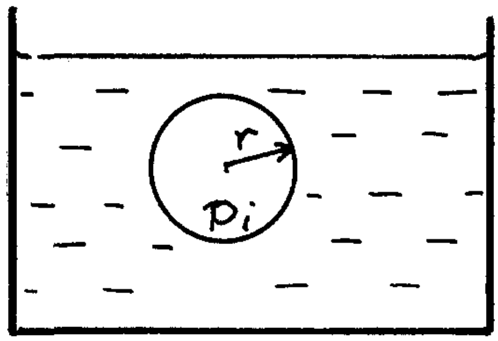
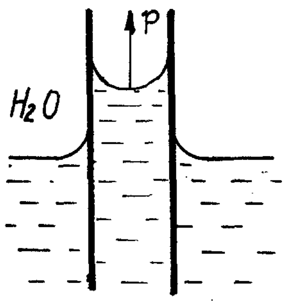


Abb. 1.4: Definition der physikalischen Größen zur Beschreibung einer Luftblase in einer Flüssigkeit.

Für den Überdruck in einer <u>Seifenblase</u> ergibt sich wegen der doppelten Oberfläche (Innen-und Außenfläche!): $p_i = \frac{4\sigma}{r}$. Der Überdruck in einer Blase ist also umso geringer, je größer der Krümmungsradius ist! Bläst man z.B. eine Seifenblase zu größerem Volumen auf, so sinkt der Druck in der Blase (im Gegensatz zum Aufblasen eines Gummiballons). Die Beziehung gemäß obiger Gleichung zwischen Überdruck in einer Gasblase und der Oberflächenspannung der sie umgebenden Flüssigkeit wird in der Medizin auch als ***Laplace-Gleichung*** bezeichnet. Sie spielt bei der Lungenfunktion eine Rolle. Die innere Oberfläche der Lungenbläschen (Alveolen) wird von einer Flüssigkeitsschicht bedeckt, d.h. der Druck in den Alveolen ist von deren Radius und der Oberflächenspannung dieser Flüssigkeit abhängig. Da der Druck in den kleinen Alveolen bei konstanter Oberflächenspannung größer ist als in den größeren, müßten die kleinen Alveolen eigentlich zugunsten der großen verschwinden. Oberflächenaktive Stoffe in den kleineren Bläschen verhindern dies jedoch (siehe Lehrbücher Physiologie).

• Kapillarität (Kapillar-Ascension, Kapillar-Depression)

Bei einer sphärisch gekrümmten Flüssigkeitsoberfläche wirkt eine durch die Oberflächenspannung bedingte Kraft zum Krümmungsmittelpunkt hin, die an der Oberfläche den Druck $\mathbf{p} = 2\sigma / \mathbf{r}$ erzeugt.



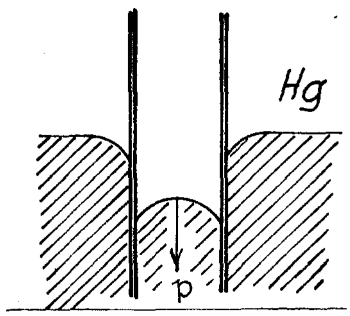


Abb. 1.5: Erläuterung der Begriffe Kapillar-Ascension (links) und Kapillar-Depression (rechts).

Dieser ***Kohäsionsdruck*** ist die Ursache für die **Kapillar-Ascension** in engen Röhren bei benetzenden Flüssigkeiten (z.B. bei Glas - Wasser, Abb. 1.5 links) und die **Kapillar-Depression** bei nichtbenetzenden Flüssigkeiten (z.B. bei Glas - Quecksilber, Abb. 1.5 rechts). Die Krümmung von Flüssigkeitsoberflächen (Meniskus) in Gefäßwandnähe ist die Folge des Wirkens der **Kohäsions-** und **Adhäsionskräfte**. Adhäsionskräfte sind Molekularkräfte zwischen Molekülen verschiedener Substanzen (z.b. zwischen denen der Gefäßwand und der Flüssigkeit), während Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen ein und desselben Körpers wirken. Die Abb. 1.6 zeigt das vektorielle Zusammenwirken von Adhäsions- und Kohäsionskräften in Gefäßwandnähe. Die Flüssigkeitsoberfläche stellt sich immer **senkrecht** zum resultierenden Kraftvektor $\vec{\mathbf{F}}_{res}$ ein. Je nach dem Verhältnis von Adhäsionskraft zu Kohäsionskraft kann die Krümmung von oben betrachtet konkav (z.b. bei Wasser gegen Glas) oder konvex (z.b. bei Quecksilber gegen Glas) sein.

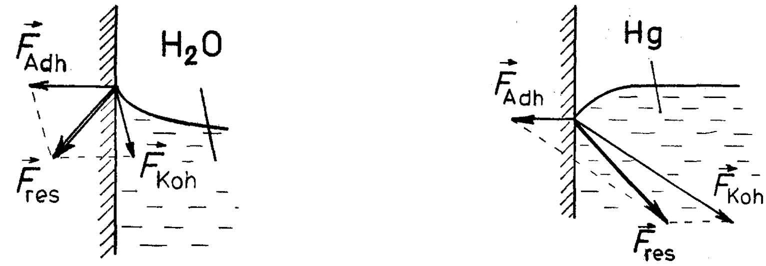


Abb. 1.6: Das vektorielle Zusammenwirken von Adhäsions- und Kohäsionskräften in der Nähe einer Gefäßwand.

- **Dichte**

Die Dichte ρ eines Körpers ist definiert als Masse m des Körpers dividiert durch sein Volumen V.

Definition: Dichte

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

SI-Einheit für ρ: 1 kg / m^3
cgs-Einheit für ρ: 1 g / cm^3

Für Gase wird die Dichte oft in g/l (Gramm/Liter) angegeben.
Das Raummaß Liter (l) ist definiert als:

$$\mathbf{1\ Liter\ (l) = 1\ dm^3 = 10^3\ cm^3 = 10^{-3}\ m^3}$$

- **Schweredruck**

Der Druck, den eine ruhende Flüssigkeitssäule auf ihre Grundfläche ausübt, heißt Schweredruck.

Definition: Schweredruck

$$\boxed{p = \rho \cdot g \cdot h} \quad \mathbf{(1.4)}$$

h: Höhe der Flüssigkeitssäule
ρ: Dichte der Flüssigkeit
g: Erdbeschleunigung

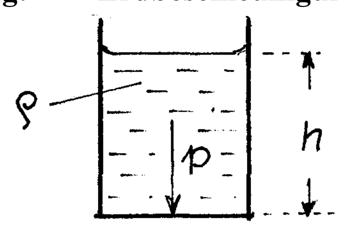


Abb. 1.7: Zur Definition des Schweredruckes.

Der Druck, den z.B. eine 1 mm hohe Quecksilbersäule auf ihre Grundfläche ausübt, ergibt sich aus obiger Definitionsgleichung zu p = 1,33 mbar (Dichte von Hg : 13,6 g/cm^3. Der Druck

einer l mm hohen Quecksilbersäule wurde auch als **l Torr** (Abk. von *Torricelli*) bezeichnet. Entsprechend üben auch Gase im Schwerefeld der Erde einen Druck auf ihre Grundfläche aus. Man kann daher einen **Luftdruck** bei 0°C in Meereshöhe von ca. p = 760 Torr = 1013 mbar errechnen. Dieser Normaldruck von 1013 mbar (entsprechend dem Schweredruck einer 760 Millimeter hohen Quecksilbersäule) wurde früher mit l atm (physikalische Atmosphäre) bezeichnet.
Auf Grund des Schweredruckes und der Abnahme der Dichte der Atmosphäre nimmt der Luftdruck mit zunehmender Höhe näherungsweise exponentiell gemäß der sog. ***barometrischen Höhenformel*** ab:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{e}^{-\mathbf{a}\cdot\mathbf{h}}$$

wobei h: Höhe über Meeresniveau, p_0 : Druck in der Höhe h = 0 , ρ_0: Dichte der Luft in der Höhe h = 0 und $\mathbf{a} = \rho_0 \cdot \mathbf{g} / \mathbf{p}_0$ bedeuten.

- **Auftrieb, Archimedisches Prinzip**

An jedem in einer Flüssigkeit der Dichte ρ eintauchenden Körper vom Volumen V_K greift eine nach oben gerichtete Kraft F_A an, die man als **Auftriebskraft** oder kurz als **Auftrieb** bezeichnet. Sie ergibt sich zu:

$$\boxed{\mathbf{F}_\mathbf{A} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_\mathbf{K}} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Das Produkt ρ V_K entspricht der Masse der vom Körper mit dem Volumen V_K verdrängten Flüssigkeit und der berechnete Auftrieb $\rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_\mathbf{K}$ somit der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dies nennt man auch das **Archimedische Prinzip**, das man auch wie folgt formulieren kann: **Der Auftrieb eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge.**

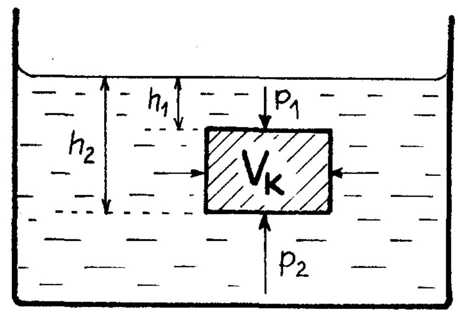


Abb. 1.8: Erläuterung der physikalischen Größen zur Ableitung der Auftriebskraft

Die Formel zur Berechnung der Auftriebskraft kann aus folgender Überlegung abgeleitet werden: Auf einen Körper wirkt in einer Flüssigkeit von allen Seiten der Schweredruck der Flüssigkeit (Abb. 1.8). Gemäß dem hydrostatischen Druck ist dieser auf die Oberseite gleich $p_1=\rho g h_1$ auf die Unterseite gleich $p_2=\rho g h_2$. Die Drucke auf die Seitenflächen kompensieren sich in gleicher Höhe. Ist A die Querschnittsfläche des Körpers, so ist $\mathbf{F}_1 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{A} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{A}$ die von der Flüssigkeit auf die Oberseite ausgeübte Kraft, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{A} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{A}$ diejenige auf die Unterseite. Da $h_2 > h_1$, ist auch $F_2 > F_1$, d.h. der Körper erfährt eine nach oben gerichtete Kraft vom Betrag $\mathbf{F}_\mathbf{A} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{A} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}_\mathbf{K}$.

Was man unbedingt wissen sollte:

- Wo treten Kohäsion- und Adhäsionskräfte auf und in welche Richtung wirken sie?
- Wie lässt sich die Dichte eines Körpers berechnen?
- Wie ist der physikalische Druck definiert?
- Was bezeichnet man als Schweredruck, wo tritt er auf?
- Durch welche geschichtliche Begebenheit gelangte das Archimedische Prinzip historische Bedeutung?
- Welche Eigenschaft eines Körpers kann unter Zuhilfenahme des Archimedischen Prinzips bestimmt werden?
- Wie funktioniert eine hydrostatische Waage?
- Wie ist die Oberflächenspannung definiert und von was ist sie abhängig?
- Welcher Druck herrscht im Inneren einer Blase?
- Was beschreibt die Volumenstromstärke?
- Warum ist die Volumenstromstärke in einem Rohr konstant, wie nennt man diesen Zusammenhang?
- Wie ist der Strömungswiderstand definiert?
- Wie berechnet sich der Druck einer strömenden Flüssigkeit, wenn die Strömungsgeschwindigkeit konstant ist?
- Was ist am hydrodynamischen Paradoxon paradox?
- Von was ist die Viskosität abhängig, wie lautet ihre Definition?
- Für welche Strömungen und Rohre gilt das Hagen-Poiseuillesche Gesetz?
- Wie ist die Volumenstromstärke abhängig von:
  - dem Radius der Röhre
  - der Länge des Rohres
  - der Viskosität der strömenden Flüssigkeit
  - der Druckdifferenz

Versuchsdurchführung 1 A I: Dichte

- **Apparative Grundlagen**

Die hydrostatische Waage

Gegeben sei ein beliebig geformter Körper der Dichte ρ_K. Wägt man diesen Körper, wenn er sich zunächst in Luft und dann in einer Flüssigkeit der Dichte ρ_{Fl} befindet, so zeigt die Waage im zweiten Fall eine geringere Gewichtskraft an. Die Differenz der in Luft und in der Flüssigkeit erhaltenen Gewichtskräfte G_L und G_{Fl} ist gleich dem Auftrieb F_A:

$$\mathbf{G_L - G_{Fl} = F_A} \qquad \textbf{(1.6)}$$

Auch in Gasen erfahren alle Körper einen Auftrieb. Aufgrund der sehr viel geringeren Gasdichten gegenüber den Dichtewerten von Flüssigkeiten kann dieser Einfluß hier allerdings vernachlässigt werden.

Ist V_K das Volumen des Körpers, so ist $\mathbf{F_A} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_K}$ und es gilt: $\mathbf{G_L - G_{Fl}} = \rho_{Fl} \cdot \mathbf{V_K} \cdot \mathbf{g}$. Aus dieser Gleichung läßt sich das unbekannte Volumen V_K durch die Beziehung $\mathbf{G_L = mg} = \rho_K \cdot \mathbf{V_K} \cdot \mathbf{g}$ eliminieren. Man erhält:

$$\rho_K = \rho_{Fl} \cdot \frac{\mathbf{G_L}}{\mathbf{G_L - G_{Fl}}} \qquad \textbf{(1.7)}$$

Bei bekannter Dichte der Flüssigkeit läßt sich so ρ_K berechnen.

Auf die gleiche Weise läßt sich auch die Dichte von Flüssigkeiten bestimmen. Man wägt einen beliebigen Körper zunächst in Luft, dann in einer Flüssigkeit von bekannter Dichte ρ_{Fl} und anschließend in der Flüssigkeit mit der unbekannten Dichte ρ^*. Die zweimalige Anwendung der obigen Gleichung ergibt dann:

$$\frac{\rho^*}{\rho_{Fl}} = \frac{\mathbf{G_L - G_{Fl^*}}}{\mathbf{G_L - G_{Fl}}} \qquad \textbf{(1.8)}$$

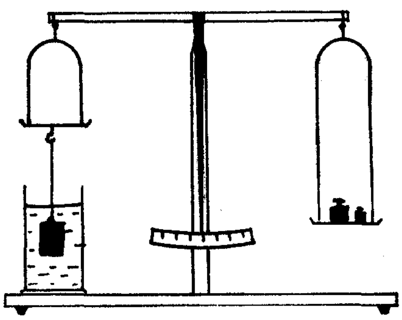


Abb. 1.9: Schematischer Aufbau einer Hydrostatischen Waage.

- **Aufgabenstellung:**

Man bestimme die Dichten eines gegebenen festen Körpers und einer Salzlösung mit der hydrostatischen Waage.

- **Versuchsdurchführung:**

Der gegebene, beliebig geformte Körper wird mit einer Waage zunächst in Luft, dann in Wasser (Dichte ρ_{Fl}) und schließlich in der Salzlösung (Dichte ρ^*) gewogen. Aus den gewonnenen Werten für G_L, G_{Fl} und G_{Fl*} werden nach obigen Gleichungen die Dichte ρ_K des Körpers und die Dichte ρ^* der Salzlösung berechnet. Die Dichtewerte von Wasser sind unten angegeben. Statt der Gewichtskräfte G können die aus der Wägung bestimmten Massen m_L, m_{Fl} und m_{Fl*} eingesetzt werden, da sich die Erdbeschleunigung g herauskürzt. Die Masse des Aufhängedrähtchens (40 mg) ist jeweils abzuziehen.
Dichtewerte von Wasser:

Temperatur / ^{0}C	**15**	**20**	**25**
Dichte /(g / cm^3)	**0,999**	**0,998**	**0,997**

Versuchsdurchführung 1 A II: Oberflächenspannung von Wasser

- ## Apparative Grundlagen

Blasenmethode

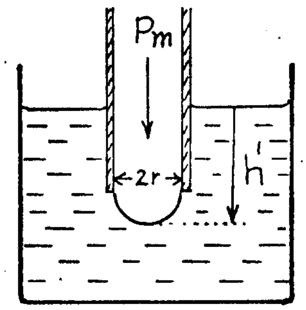


Abb. 1.10: Definition der physikalischen Parameter zur Blasenmethode.

Aus einer Kapillare (Innenradius r), die in eine Flüssigkeit eintaucht (Eintauchtiefe h'), werden Luftblasen in die zu messende Flüssigkeit gedrückt. Nach obigen Grundlagen steht der Innenraum der Blase unter dem Überdruck $\mathbf{p_i} = 2\sigma / \mathbf{r}$. Die Größe des Radius variiert während der Blasenbildung. Er wird minimal, wenn er gleich dem Kapillarradius ist (dieser Zustand ist in Abb. 1.10 dargestellt). Der zugehörige Innendruck erreicht dann also einen Maximalwert. Mißt man diesen Maximaldruck p_m , so muß er gleich dem Innendruck p_i plus dem Schweredruck $\rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}'$ (ρ = Dichte der Meßflüssigkeit) sein.

$$\mathbf{p_m} = \mathbf{p_i} + \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} \qquad \textbf{(1.9)}$$

- ## Aufgabenstellung

Man bestimme die Oberflächenspannung von Wasser nach der Blasenmethode.

- ## Versuchsdurchführung

Der oben erläuterte Gesamtdruck p_m wird mit einem Wassermanometer (U-Rohr-Manometer) gemessen. Es gilt also:

$$\mathbf{p_m} = \rho_W \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h_m}$$

wobei ρ_W die Dichte der Manometerflüssigkeit, in unserem Fall Wasser, ist. In Abb. 1.13 ist der gesamte Meßaufbau schematisch dargestellt. Es gilt also die Beziehung:

$$\rho_W \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h_m} = \frac{2\sigma}{\mathbf{r}} + \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}' \qquad \textbf{(1.10)}$$

Mit dem Handgebläse HG erzeugt man im Vorratsgefäß VG gerade soviel Überdruck, daß die Wassersäule im U-Rohr (Wassermanometer) **langsam** im linken Schenkel steigt (Gummibällchen vom Handgebläse höchstens ein- bis zweimal zusammendrücken!). Ist p_m erreicht, so perlt die erste Blase von der Kapillare ab, und die Wassersäule im Rohr sinkt

einige Millimeter ab, um anschließend wieder bis zur Höhendifferenz h_m am Manometer anzuwachsen. Die maximale Höhendifferenz h_m erhält man, indem man am linken Schenkel den Höchststand und am rechten den Tiefststand der Wassersäule abliest und die Differenz bildet. Die Ablesegenauigkeit soll ±0,5 mm betragen.
Die Eintauchtiefe h' der Kapillare soll etwa 1 mm betragen. Der Kapillarradius ist am Arbeitsplatz angegeben. Für die Dichte von Wasser kann hier 1 g / cm^3 gesetzt werden.
Man berechne σ nach obiger Gleichung **zunächst in cgs-Einheiten** und rechne diesen Wert dann in **SI-Einheiten** um. Die Temperatur der Meßflüssigkeit (Raumtemperatur!) ist anzugeben.

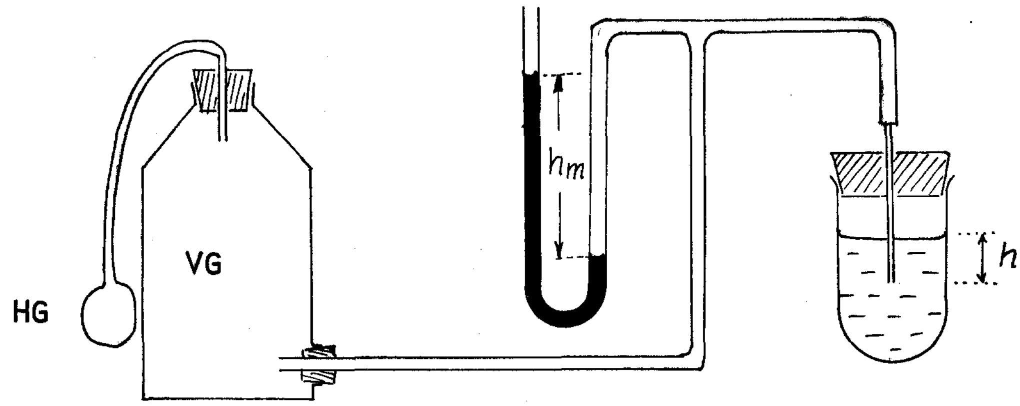


Abb. 1.11: Meßaufbau zur Bestimmung der Oberflächenspannung mit Hilfe der Blasenmethode.

Übungsaufgaben:

Ü 1.1) Wie sind Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie definiert ? Welche SI-Einheiten haben sie?

Ü 1.2) Skizzieren Sie den Überdruck in einer Seifenblase als Funktion des Durchmessers der Blase.

Ü 1.3) Um welchen Faktor vergrößern oder verkleinern sich Oberflächenspannung, Oberflächenenergie und Überdruck in einer Blase, wenn der Durchmesser der Blase verdoppelt wird?

Ü 1.4) Um welchen Faktor steigt die rücktreibende Kraft in der Abb.l.2 an, wenn man den Bügel so weit zieht, daß die Lamellenfläche sich verdoppelt?

Ü 1.5) Wie ist der Druck definiert und welche SI-Einheit hat er?

Ü 1.6) Wie groß ist der Luftdruck auf Meereshöhe bei 0 °C ?

Ü 1.7) Berechnen Sie die Konstante a im Exponenten der barometrischen Höhenformel, wenn die Dichte der Luft $\rho_0 = 1{,}29$ g/l beträgt.
Wie groß ist der Druck in 1000 m Höhe?
In welcher Höhe beträgt der Luftdruck nur noch die Hälfte des Wertes auf Meereshöhe?

Ü 1.8) Welchen Druck in SI-Einheiten und in bar übt eine 10 m hohe Wassersäule auf ihre Unterlage aus?

Ü 1.9) 1 Torr entspricht wieviel hPa? l hPa sind wieviel mbar?

Ü 1.10) Eine Eisenkugel und eine Holzkugel mit gleichem Durchmesser werden unter Wasser getaucht. Welche Kugel hat den größeren Auftrieb?

Ü 1.11) Eine Alu-Kugel mit dem Durchmesser d habe in Wasser einen Auftrieb von 5 N. Welchen Auftrieb hat dann eine Alu-Kugel mit dem doppelten Durchmesser?

Ü 1.12) Ein Holzwürfel (Dichte 0,8 g/cm), der in Wasser schwimmt, hat einen Auftrieb von 20 N. Wie groß ist seine Gewichtskraft in Luft? Welchen Auftrieb hat der Würfel, wenn er in Quecksilber (Dichte 13,5 g/cm^3) schwimmt?

Versuch 1B: Viskosität

Physikalische Grundbegriffe

- **Flüssigkeitsströmung**
- **Kontinuitätsgleichung, Bernoulli-Gleichung**
- **Viskosität**
- **Hagen-Poiseuillesches Gesetz**
- **Strömungswiderstand**

Erläuterung der wichtigsten Physikalischen Begriffe

Weiterführende Literatur:

- **W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 139-153**
- **W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 63-70**
- **V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 67-76**

• Flüssigkeitsströmung in Kapillaren

Man unterscheidet zwischen idealen und realen Flüssigkeiten. Ideale Flüssigkeiten sollen völlig inkompressibel und ohne innere Reibung sein. Sie sind in der Praxis kaum realisierbar. Wir haben es immer mit **realen Flüssigkeiten** zu tun. Sie können als nahezu inkompressibel betrachtet werden, doch treten bei strömenden Flüssigkeiten Reibungskräfte innerhalb der strömenden Flüssigkeit auf.
Eine Rohrströmung kann **laminar** oder **turbulent** sein. Die laminare Strömung ist wirbelfrei. Ein Kriterium für das Auftreten laminarer oder turbulenter Strömung ist die sog. **Reynoldszahl**, die weiter unten näher erläutert wird.
Im folgenden betrachten wir die Flüssigkeitsströmung in Rohren mit kreisförmigem Querschnitt.

• Volumenstromstärke

Die Volumenstromstärke i ist definiert als das Volumen ΔV, das pro Zeiteinheit Δt durch eine beliebige Querschnittsstelle des Rohres fließt.

Definition: Volumenstromstärke

$$\boxed{\mathbf{i = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}}} \qquad \mathbf{(1.11)}$$

SI-Einheit von i: $\mathbf{1\ m^3 / s}$

Zwischen der Volumenstromstärke i, der Strömungsgeschwindigkeit v und der Querschnittsfläche A besteht folgender Zusammenhang:

$$\boxed{\mathbf{i = A \cdot v}} \qquad \textbf{(1.12)}$$

- **<u>Kontinuitätsgleichung</u>**

Wir betrachten ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt (siehe Abb. 1.12). An der Rohrquerschnittsstelle (l) mit der Querschnittsfläche A_1 sei die Volumenstromstärke gleich i_1 und die Strömungsgeschwindigkeit betrage v_1. Entsprechendes gelte für die Stelle (2). Wegen der Inkompressibilität der Flüssigkeit muß die Volumenstromstärke i an jeder Stelle des Rohres gleich groß sein, d.h. es ist $i_1 = i_2$. Mit der Definitionsgleichung der Volumenstromstärke erhält man dann:

$$\boxed{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \qquad \textbf{(1.12a)}$$

Diese Gleichung heißt **Kontinuitätsgleichung.** Verengt sich also ein Rohr, so steigt dort die Strömungsgeschwindigkeit an, während die Volumenstromstärke unverändert bleibt Ein Rohr mit variablem Querschnitt kann auch als eine **Serien-** oder **Reihen**-Schaltung von verschiedenen Rohrstücken mit jeweils konstantem aber untereinander verschiedenen Querschnitten betrachtet werden. Wir halten fest: **Bei einer Serien-Schaltung von Rohren ist die Volumenstromstärke an jeder Stelle gleich groß, d.h. i = const.**

- **<u>Bernoulli-Gleichung</u>**

Zwischen dem Druck p in einer strömenden Flüssigkeit und der Strömungsgeschwindigkeit v besteht ebenfalls ein Zusammenhang. Es zeigt sich, daß an den Stellen höherer Strömungsgeschwindigkeit der Druck kleiner ist als an den Stellen geringerer Geschwindigkeit. Die von **Bernoulli** aufgestellte Beziehung für eine reibungsfreie Strömung lautet:

$$\boxed{\mathbf{p} + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \mathbf{v}^2 = \mathbf{const.}} \qquad \textbf{(1.13)}$$

wobei ρ die Dichte der Flüssigkeit ist.
In der Abb. 1.12 ist eine Rohrströmung mit veränderlichem Querschnitt dargestellt. Nach der Kontinuitätsgleichung ist die Geschwindigkeit an der Rohrverengung größer ($v_2 > v_1$), d.h. der Druck ist dort geringer ($p_2 < p_1$). Wegen dieser paradox anmutenden Verhältnisse spricht man auch von einem *hydrodynamischen Paradoxon*. Die Bernoulli-Gleichung findet zahlreiche Anwendungen in der Technik (siehe Lehrbücher der Physik).

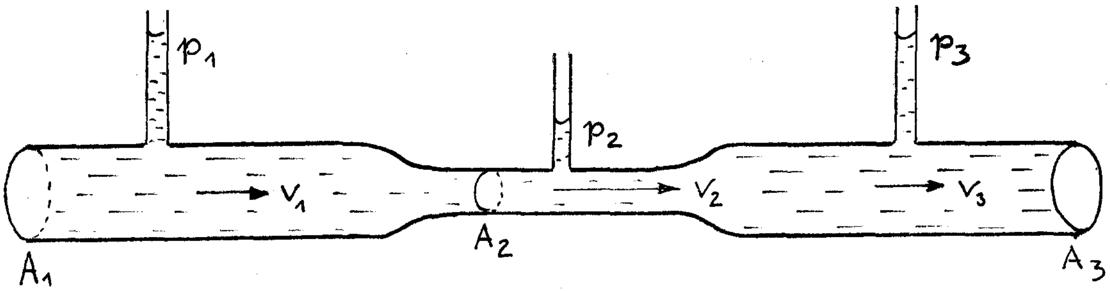


Abb. 1.12: Anordnung von Röhren mit unterschiedlichem Rohrquerschnitt zur Erläuterung der Bernoulli Gleichung.

Handelt es sich bei der Anordnung laut Abb. 1.12 um ein flexibles Rohr (z.B. Blutgefäß mit Verengung), so kann bei starker Einengung der Druck im Gefäß so weit sinken, daß der Druck außen größer ist als innen und das Gefäß verschließt. Die Strömung ist dann unterbrochen, die Strömungsgeschwindigkeit ist Null, d.h. das Gefäß öffnet sich wieder ... usw. — die Engstelle verschließt und öffnet sich periodisch.

- **Innere Reibung**

Eine reale strömende Flüssigkeit kommt zum Stillstand, wenn nicht ständig eine Kraft (oder ein Druck) in Strömungsrichtung wirkt. Dies zeigt, daß in einer strömenden Flüssigkeit Reibungskräfte herrschen, die den antreibenden Kräften entgegenwirken. Da Reibungskräfte z.b. zwischen verschieden schnell aneinander gleitenden Körpern auftreten, ist zu vermuten, daß in einer Strömung Bereiche unterschiedlicher Strömungsgeschwindigkeit vorhanden sind. Untersucht man die Strömungsgeschwindigkeit einer Rohrströmung, so ist zunächst festzustellen, daß die Flüssigkeit infolge der Adhäsionskräfte an der Rohrinnenwand haftet - die Geschwindigkeit dort also grundsätzlich Null ist. In der Rohrmitte ist die Geschwindigkeit maximal, so daß eine Geschwindigkeitszunahme vom Rohrrand zur Rohrmitte hin vorhanden sein muß.

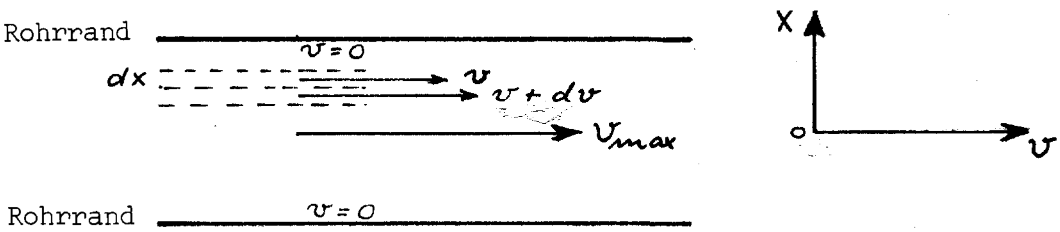


Abb. 1.13: Geschwindigkeitsprofil der Strömung einer Flüssigkeit zur Erläuterung der Viskosität.

Quer zur Strömung (x-Richtung in Abb. 1.13) besteht also ein sog. **Geschwindigkeitsgefälle** oder **Geschwindigkeitsgradient**. Man versteht darunter die Geschwindigkeitsänderung pro Längeneinheit quer zur Strömung, also den Ausdruck dv/dx.

> Benachbarte Flüssigkeitsbereiche haben also im allgemeinen in einer Strömung unterschiedliche Geschwindigkeiten und üben so gegenseitig hemmende bzw. beschleunigende Kräfte aufeinander aus. Dies ist so zu verstehen, daß auf Grund der sog. **Brownschen Bewegung** Moleküle quer zur Strömung aus dem schnelleren in den langsameren Bereich und umgekehrt gelangen. Dadurch wird Impuls übertragen, was gleichbedeutend ist mit dem Wirken einer Kraft.

- **<u>Viskosität (Zähigkeit)</u>**

Für die Reibungskräfte in einer Strömung hat bereits Newton einen Ansatz formuliert: Die Reibungskraft F zwischen zwei Flüssigkeitsschichten der Dicke dx (s.Abb. 1.12), die mit der Fläche A aneinandergrenzen und den Geschwindigkeitsunterschied dv haben, ist proportional zur Fläche A und dem Geschwindigkeitsgradient dv/dx:

$$\mathbf{F} = \eta \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}} \qquad \textbf{(1.14)}$$

Der <u>materialabhängige</u> Proportionalitätsfaktor η wird **Viskosität**, **Zähigkeit** oder **Koeffizient der inneren Reibung** genannt. Die obige Gleichung ist damit die Definitionsgleichung für die Viskosität:

<u>Definition:</u>	**<u>Viskosität</u>**	$\boxed{\eta = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}}}}$
SI-Einheit für η:		$1\ \mathbf{Pa \cdot s} = 1 \frac{\mathbf{N \cdot s}}{\mathbf{m}^2} = 1 \frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m \cdot s}}$
cgs-Einheit für η:		$1\ \mathbf{P}\ (\mathbf{Poise}) = 1 \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{cm \cdot s}}$

Die Zähigkeit einer Flüssigkeit ist **stark temperaturabhängig**. η nimmt bei allen Flüssigkeiten mit steigender Temperatur ab. So ist z.b. die Viskosität von Wasser bei 50 °C nur noch etwa halb so groß wie bei 20^0C. Die **Reibungskraft F** in der Definitionsgleichung ist parallel zur Fläche A, stellt also eine sog. Tangentialkraft dar. Man nennt die pro Flächeneinheit wirkende Tangentialkraft die **Schubspannung** τ. Somit kann man die Gleichung entsprechend anders definieren:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dx}} \qquad \textbf{(1.14a)}$$

Flüssigkeiten, deren Viskosität η bei unveränderter Temperatur konstant ist, d.h. unabhängig von der Schubspannung τ und dem Geschwindigkeitsgradienten dv/dx ist, werden als **newtonsche Flüssigkeiten** bezeichnet. Homogene Flüssigkeiten (z.b. Wasser, Alkohol usw.) sind in der Regel **newtonsch**, während heterogene Flüssigkeitssysteme (z.b. Blut) meistens **nichtnewtonsche** Fluide sind.

- **<u>Hagen-Poiseuillesches Gesetz</u>**

- **Strömung in engen Röhren**

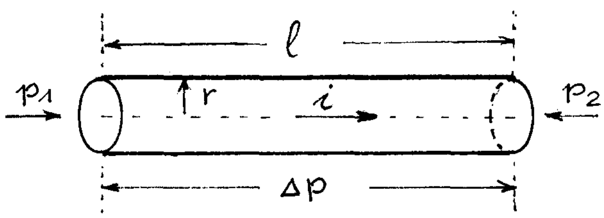


Abb. 1.14: Zur Definition der physikalischen Größen, die für das Hagen-Poiseuillesche Gesetz relevant sind.

Durch eine Kapillare mit kreisförmigem Querschnitt, der Länge l und dem Radius r soll eine Flüssigkeit der Viskosität η strömen. Zur Aufrechterhaltung der Strömung realer Flüssigkeiten muß ständig von außen eine Kraft auf die Flüssigkeit in Strömungsrichtung einwirken, hervorgerufen z.b. durch einen Druckunterschied $\Delta p = p_1 - p_2$ zwischen Anfang und Ende der Kapillare.
Für eine **stationäre Strömung** (bedeutet unbeschleunigte Strömung) läßt sich dann die Volumenstromstärke i in der Kapillare aus der Bedingung ableiten, daß die Summe aus treibender Kraft und entgegenwirkender Reibungskraft Null sein muß. Es ergibt sich dann:

$$\boxed{\mathbf{i} = \frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}} = \frac{\pi \cdot \mathbf{r}^4}{8 \cdot \mathbf{l} \cdot \eta} \cdot \Delta \mathbf{p}} \qquad \textbf{(1.15)}$$

Diese Gleichung ist das **Hagen-Poiseuillesche Gesetz**. Eine genaue Herleitung ist im Anhang II zu diesem Versuch gegeben. Das Hagen-Poiseuillesche Gesetz gilt, nur für **laminare Strömung** in Röhren mit **kreisförmigem** Querschnitt.

• Reynolds-Zahl

Eine laminare Strömung kann in eine turbulente Strömung umschlagen, wenn z.b. zu große Strömungsgeschwindigkeiten erreicht werden. Ein Kriterium für das Auftreten von laminarer oder turbulenter Strömung ist die sog. **Reynolds-Zahl** Re. Diese dimensionslose Größe Re setzt sich aus einer Reihe von Parametern zusammen. Für ein Rohr mit dem Radius r, in dem eine Flüssigkeit der Dichte ρ, der Zähigkeit η mit der Geschwindigkeit v strömt, gilt:

$$\mathrm{Re} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \cdot \rho}{\eta}$$

Überschreitet in einer Strömung die Reynolds-Zahl einen kritischen Wert, so geht die laminare Strömung spontan in eine turbulente über. Experimente haben gezeigt, daß bei einer Rohrströmung der Wert $Re_{krit} = 1160$ ist.
Bei der Ableitung des H.-P.-Gesetzes ergibt sich als Zwischenergebnis, daß die Strömungsgeschwindigkeit v in folgender Weise von der Rohrquerschnittsstelle x abhängt:

$$v(x) \sim (r^2 - x^2)$$

v nimmt also **quadratisch** mit der Entfernung x von der Rohrmitte zum Rand hin ab, d.h. v ist in der Mitte am größten, am Rande Null. Trägt man die Geschwindigkeitsvektoren in einer Strömung als Funktion der Rohrquerschnittsstelle auf, so erhält man ein sog. **Geschwindigkeitsprofil**.

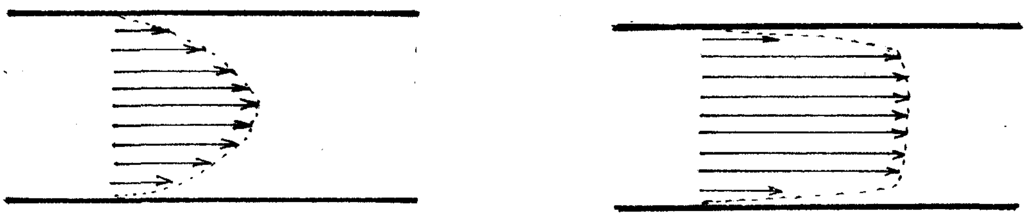


Abb. 1.15: Geschwindigkeitsprofil bei laminarer (links) und turbulenter (rechts) Strömung.

Für eine laminare Rohrströmung erhält man somit wegen $v(x) \sim (r^2 - x^2)$ ein **parabolisches Geschwindigkeitsprofil,** d.h. die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einem Rotationsparaboloid (im Schnittbild ist dies eine Parabel).

Bei turbulenter Strömung ist die Geschwindigkeit wegen der Durchmischung (Wirbel) der verschiedenen Geschwindigkeitszonen mit Ausnahme in Rohrwandnähe über den ganzen Rohrquerschnitt nahezu konstant.

Anwendungen des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes ergeben sich u.a. in der Physiologie des Blutkreislaufs. Besonderes Augenmerk ist dabei auf die starke Abhängigkeit der Volumenstromstärke i vom Kapillarradius r (**4.Potenz!**) zu richten. Verengt sich ein Gefäß, so muß bei gleichbleibender Volumenstromstärke eine entsprechende Druckerhöhung erfolgen. Würde z.B. r auf die Hälfte abnehmen, so müßte der Druck auf das 16-fache (!) steigen.

Nach dem H.-P.-Gesetz wächst für eine Kapillare mit festem Radius und fester Länge die Volumenstromstärke i proportional zur Druckdifferenz Δp, wenn eine newtonsche Flüssigkeit (η = konst. !) vorliegt. Trägt man also die Druckdifferenz Δp als Funktion der Volumenstromstärke i auf, so erhält man für newtonsche Flüssigkeiten eine Gerade, wie in Abb. 1.16 schematisch veranschaulicht ist.

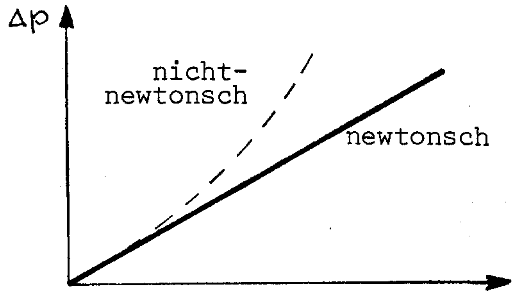


Abb. 1.16: Darstellung der Druckdifferenz Δp in Anhängigkeit der Volumenstromstärke i zur Erläuterung der Eigenschaften einer newtonschen Flüssigkeit.

Für **nichtnewtonsche Flüssigkeiten** erhält man gekrümmte Kurven, d.h. die Zähigkeit ist dann vom Druck oder der Stromstärke abhängig.

> Die **Zähigkeit des Blutes** zeigt ein recht kompliziertes Verhalten. Blut ist eine Suspension von Zellen (hauptsächlich Erythrozyten) im Blutplasma. Die Viskosität des Blutes hängt von der Belastung (Schubspannung, Druckdifferenz) ab, so daß das Blut eine nichtnewtonsche Flüssigkeit ist. Die Viskositätswerte des Blutes sind auch noch von einer Reihe weiterer Faktoren abhängig, wie z.B. dem Volumengehalt an Erythrozyten (= Hämatokrit), dem Alter, dem Geschlecht. Als Anhaltswert gilt, daß die Viskosität des Blutes etwa 4,5 mal so groß ist wie die des Wassers. Die Viskosität des **Blutplasmas** ist nur etwa zweimal so groß wie die von Wasser. In sehr engen Gefäßen (Durchmesser < 300 µm ist die Viskosität des Blutes nur etwa halb so groß wie in den weiten Gefäßen (Fahraeus-Lindqvist-Effekt). Die Blutkörperchen ordnen sich hier im Axialstrom an, so daß praktisch nur die Zähigkeit des Plasmas wirksam ist. Man beobachtet auch, daß für geringe Strömungsgeschwindigkeiten die Viskosität erheblich ansteigen kann.

• Druck-Volumen-Arbeit

Der Transport von viskosen Flüssigkeiten durch Rohre erfordert eine ständige Energiezufuhr - z.B. durch Arbeitsleistung einer Pumpe -, um einerseits die kinetische Energie und andererseits die zur Überwindung der inneren Reibung erforderliche Reibungsarbeit zu liefern. Eine einfache Überlegung ergibt, daß zur Förderung eines Flüssigkeitsvolumens V gegen eine Druckdifferenz Δp, ohne Einbeziehung der kinetischen Energie, folgender Betrag

W_{pV} an Reibungsarbeit nötig ist:

$$\boxed{\mathbf{W_{pV} = \Delta p \cdot V}} \qquad \textbf{(1.16)}$$

Dieser Arbeitsaufwand wird als **Druck-Volumen-Arbeit** bezeichnet.

Die kinetische Energie der strömenden Flüssigkeit ist oft vernachlässigbar klein gegen die Reibungsarbeit. Soll sie trotzdem mit in die Betrachtung einbezogen werden, so ist sie zu berechnen nach der Formel $\mathbf{W_k = \frac{1}{2} m v^2}$, wenn v die Strömungsgeschwindigkeit und m die geförderte Flüssigkeitsmasse ist. Die **Druck-Volumen-Leistung** P_{pV} ist die pro Sekunde geleistete Druck-Volumen-Arbeit: $\mathbf{P_{pV} = dW_{pV}/dt = \Delta p \cdot dV/dt = \Delta p \cdot i}$, d.h.

$$\mathbf{P_{pV} = \Delta p \cdot i} \qquad \textbf{(1.16a)}$$

Medizinisches Beispiel: Herzleistung
Während jeder Systole des Herzens wird vom linken Ventrikel ein bestimmtes Blutvolumen V_s (= Schlagvolumen) unter Überwindung eines mittleren Aortendrucks Δp_A ausgestoßen (großer Kreislauf). Wie groß ist die vom Herzen geleistete Druck-Volumen-Arbeit bei einem Puls von 70 min^{-1}, einem Schlagvolumen V_s = 70 cm^3 und einem Druck Δp_A = 100 mmHg (Torr), wenn die gleichzeitig vom rechten Ventrikel (kleiner Kreislauf) geleistete Arbeit 15% des linken beträgt? (Lösung: P = 1,25 W)

- **<u>Strömungswiderstand und Leitwert von Kapillaren</u>**

Stellt sich in einer Kapillare bei einer Druckdifferenz Δp eine Volumenstromstärke i ein, so definiert man das Verhältnis Δp/i als **Strömungswiderstand R.**

<u>Definition: Strömungswiderstand</u> $\boxed{\mathbf{R = \frac{\Delta p}{i}}}$ **(1.17)**

SI-Einheit für R: $1 \ \mathbf{\frac{Pa \cdot s}{m^3}}$

Entsprechend: Leitwert $\boxed{\mathbf{G = \frac{1}{R} = \frac{i}{\Delta p}}}$ **(1.18)**

SI-Einheit für G: $1 \ \mathbf{\frac{m^3}{Pa \cdot s}}$

Der Strömungswiderstand R und der Leitwert G sind von der Länge und dem Innenradius der Kapillare und der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängig. Durch Vergleich der beiden Definitionsgleichungen mit dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz erhält man:

$$\mathbf{R = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{\pi \cdot r^4}} \qquad \mathbf{G = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot l \cdot \eta}} \qquad \textbf{(1.19a,b)}$$

Ersetzt man in diesen beiden Gleichungen den Radius durch den Durchmesser d oder durch die Querschnittsfläche A, so erhält man:

$$\mathbf{R} = \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{l} \cdot \eta}{\mathbf{d}^4} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{k}' \cdot \frac{\mathbf{l} \cdot \eta}{\mathbf{A}^2} \qquad \textbf{(1.20a,b)}$$

mit k = 128/π und k' = 8π.

Der Strömungswiderstand einer Kapillare ist also proportional zur Länge und zur Zähigkeit und umgekehrt proportional zur 4. Potenz des Durchmessers bzw. 2.Potenz der Querschnittsfläche.

Versuchsdurchführung 1B : Viskosität und Hagen-Poiseuillesches Gesetz

- **Aufgabenstellung**

  - **Man prüfe die r^4-Abhängigkeit im H.-P.-Gesetz nach.**
  - **Man bestimme die Viskosität η von Wasser bei Raumtemperatur.**

- **Versuchsdurchführung:**

An eine Kapillare der Länge l und mit dem Innenradius r ist ein erweitertes Glasrohr (Innenradius R) angeschlossen. Die gesamte Anordnung wird senkrecht montiert (Abb.l.17). Zur Vermeidung von Wirbelbildung beim Ausfließen, muß das untere Ende der Kapillare etwas in Wasser eintauchen. Man füllt Wasser bis über die Marke M. in das Glasrohr und mißt die Zeit t, die vergeht, bis der Wasserspiegel von M_1 nach M_2 abgesunken ist. Die vorhandene Druckdifferenz Δp hängt allerdings von der momentanen Flüssigkeitshöhe h ab ($\mathbf{\Delta p = \rho \cdot g \cdot h}$), die mit zunehmender Zeit kleiner wird. Während des Zeitelementes dt nimmt die Flüssigkeitshöhe h um dh ab, und das in dieser Zeitspanne durch die Kapillare geflossene Flüssigkeitsvolumen dV ist:

$$\mathbf{dV = -R^2 \cdot \pi \cdot dh}$$

Setzt man dies, sowie den obigen Ausdruck für Δp, in das Hagen-Poiseuillesche Gesetz ein, so erhält man:

$$\mathbf{-R^2 \cdot \pi \cdot dh = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \rho \cdot g \cdot h}{8l \cdot \eta} \cdot dt \quad bzw. \quad -\frac{dh}{h} = \frac{r^4 \cdot \rho \cdot g}{8l \cdot R^2 \cdot \eta} \cdot dt}.$$

Die Integration und die Auflösung nach η ergeben:

$$\eta = \mathbf{\frac{r^4 \cdot \rho \cdot g \cdot t}{8l \cdot R^2 \cdot \ln(h_1 / h_2)}}.$$

Der Innenradius R des Vorratsgefäßes wird mit einer Schieblehre gemessen. Wegen der dabei gegebenen Bruchgefahr liegt am Arbeitsplatz ein **Muster mit gleichem Innenradius.**
Nur an diesem die Messung durchführen!

Das Wasser wird aus einem im Raum stehenden Vorratsbehälter entnommen. Es hat also Raumtemperatur! Diese Temperatur ist abzulesen und bei dem weiter unten zu bestimmenden Wert für die Zähigkeit des Wassers anzugeben.

Im Bereich von 20°C ändert sich die Zähigkeit pro Grad um etwa 2% !

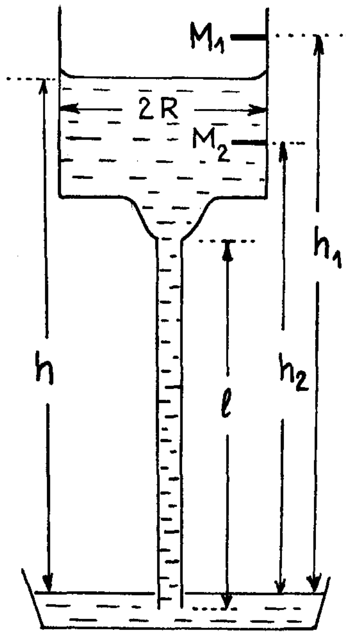


Abb. 1.17: Schematische Darstellung des Meßaufbaus zur Bestimmung der Zähigkeit von Wasser.

Gegeben sind vier Kapillaren gleicher Länge mit verschiedenen Radien r_1 bis r_4 (die Werte sind am Arbeitsplatz angegeben). Man messe nun die Durchlauf Zeiten t_1 bis t_4 des Wassers bei den vier Kapillaren. Sorgt man dafür, daß h_1, h_2 und R bei den vier Messungen gleich groß sind, so muß, wenn η konstant ist, auch der Ausdruck $\mathbf{r^4 \cdot t}$ für die verschiedenen Kapillaren konstant sein: $\mathbf{r^4 \cdot t = k}$ **oder** $\mathbf{t = k \cdot \frac{1}{r^4}}$.

Trägt man also in einem Diagramm die t-Werte gegen die $1/r^4$-Werte auf, so müssen, wenn das H.-P.-Gesetz erfüllt ist, die Meßwerte auf einer Geraden liegen. (siehe Abb. 1.18)

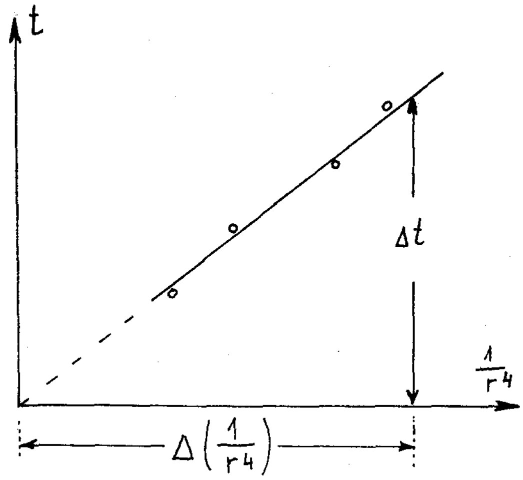


Abb. 1.18: Schematisches Beispiel für die graphische Auftragung der Meßdaten.

Führen Sie die Rechnung zunächst in cgs-Einheiten durch.

• <u>Zur Daten-Auswertung</u>

1. Tragen sie die vier Meßwerte in ein der Abb. 1.18 entsprechendes Diagramm ein und verbinden Sie die Punkte durch eine ausgleichende Gerade.

2. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Steigung $\mathbf{k} = \dfrac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta\left(\dfrac{1}{\mathbf{r}^4}\right)}$ der Geraden. Die Zähigkeit des Wassers berechnet sich dann nach der Formel:

$$\eta = \frac{\mathbf{k} \cdot \rho \cdot \mathbf{g}}{8\mathbf{l} \cdot \mathbf{R}^2 \cdot \ln(\mathbf{h}_1 / \mathbf{h}_2)}$$

wobei die Dichte von Wasser gleich 1 g / cm^3 zu setzen ist.

Führen Sie die Rechnung zunächst in cgs-Einheiten durch. Geben Sie die Zähigkeit des Wassers in cP (= Zentipoise) und in $\mathbf{Pa \cdot s}$ an!

3. Berechnen Sie aus den am Arbeitsplatz vorliegenden Daten und dem Meßergebnis für die Zähigkeit von Wasser den Strömungswiderstand R_1 für die Kapillare l in SI-Einheiten.

- **<u>Meßprotokoll</u>**

Das Meßprotokoll sollte folgende Meßgrößen enthalten:

l = cm;
2R = cm; $\Rightarrow$ R = cm;
h_1 = cm;
h_2 = cm

Raumtemperatur θ = ^{0}C

Wertetabelle:

Kapillar-Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**
r / cm				
t / s				
r^{-4} / cm^{-4}				

Die r^{-4}-Werte auf höchsten 3 Stellen berechnen !

Anhang I (zur Vertiefung)

- **Zusammenschaltung von Kapillaren**

Für die Berechnung von Strömungsgrößen in **Kapillarsystemen** betrachtet man diese zweckmäßigerweise als Zusammenschaltung von Strömungswiderständen. Es stellen sich dann prinzipiell ähnlich der Überlegungen bei elektrischen Stromkreisen folgende Fragen: Wie groß sind Gesamtwiderstand R der Schaltung, Volumenstromstärken i_1, i_2, ... Druckabfälle Δp_1, Δp_2, ... in den einzelnen Kapillaren, wenn z.B. die Einzelwiderstände R_1, R_2, ... und die Gesamtdruckdifferenz Δp vorgegeben sind?
Wir betrachten zunächst eine reine Serienschaltung und eine reine Parallelschaltung.

a) Serienschaltung

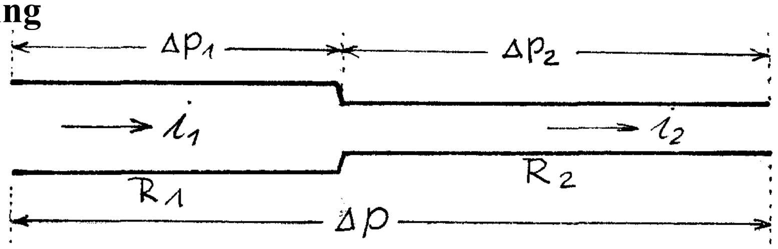


Abb. 1.A.1: Definition der physikalischen Größen für zwei hintereinander geschaltete Röhren unterschiedlicher Dimensionen.

Werden zwei oder mehr Kapillaren mit unterschiedlichen Radien und Längen - also verschiedenen Widerständen R_1, R_2, . . . - hintereinandergeschaltet, so gelten folgende Beziehungen:

$$i_1 = i_2 = ... = i \qquad \text{und} \quad \Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 + ... \quad \textbf{(1.21)}$$

Ersetzt man in der letzten Gleichung die Druckdifferenzen Δp_1, Δp_2, Δp durch die äquivalenten Ausdrücke $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{R}_1, \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{R}_2, \mathbf{i} \cdot \mathbf{R}$, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Konstanz der Volumenstromstärke i:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + ... \qquad \textbf{(1.22)}$$

Der Gesamtwiderstand R ist bei einer Serienschaltung gleich der Summe der Einzelwiderstände.

b) Parallelschaltung

An allen parallel geschalteten Kapillaren ist der Druckabfall gleich groß: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p$

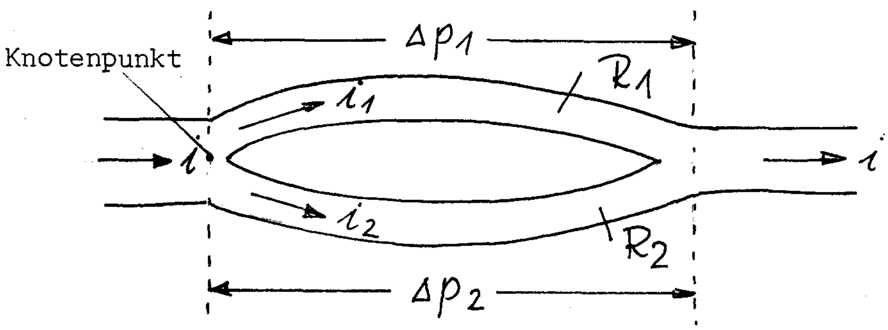


Abb. 1.A.2: Definition der physikalischen Größen für zwei parallel geschaltete Röhren unterschiedlicher Dimensionen.

Für die Stromstärken gilt, dass an einem Verzweigungspunkt (= Knotenpunkt) die Summe

aller zufließenden Stromstärken gleich der Summe der abfließenden Stromstärken sein muss (vergleiche l.Kirchhoffsche Regel oder Knotenpunktsregel für elektrische Schaltungen). Für die obige Schaltung gilt dann $i = i_1 + i_2$.
Ersetzt man in dieser Gleichung die i-Werte durch die äquivalenten Ausdrücke $\Delta p/R$ und berücksichtigt die Gleichheit der Druckabfälle, so erhält man für den Gesamtwiderstand R einer Parallelschaltung:

$$\frac{1}{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mathbf{R}_1} + \frac{1}{\mathbf{R}_2} \qquad \textbf{(1.25)}$$

Bei parallel geschalteten Widerständen ist **der Reziprokwert** des Gesamtwiderstandes gleich der Summe der Reziprokwerte der Einzelwiderstände.

Merke: Für die Leitwerte gilt entsprechend:

Bei einer Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand **immer kleiner als der kleinste** Einzelwiderstand.
In parallel geschalteten Kapillaren verhalten sich die Stromstärken **umgekehrt** wie deren Widerstände .

- **Stokessches Reibungsgesetz**

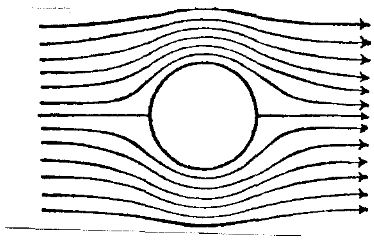


Abb. 1.A.3: Stromlinienbild einer umströmten Kugel.

Eine Kugel mit dem Radius r werde von einer Flüssigkeit der Zähigkeit η umströmt. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sei v. Die Kraft F, mit der man die Kugel festhalten müsste, damit sie nicht von der Strömung mitgenommen wird, ist

$$\mathbf{F} = 6\pi \cdot \eta \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Wird die Kugel mit der Geschwindigkeit v durch eine ruhende Flüssigkeit bewegt, so ist die dafür nötige Kraft F nach derselben Gleichung zu berechnen.

Die Stokessche Reibungskraft F resultiert aus der inneren Reibung in einer Flüssigkeit. Wie bei der Rohrströmung an der Innenwand haftet hier die Flüssigkeit an der Kugeloberfläche. Dies führt wieder dazu, dass sich ein Geschwindigkeitsgefälle in der Flüssigkeit quer zur Bewegung aufbaut und so zum Auftreten einer die Bewegung hemmenden Kraft gemäß führt.

- **Sedimentation**

Anwendungen des Stokesschen Reibungsgesetzes finden sich u.a. bei der Sedimentation von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten. Wir wollen hier die Sinkgeschwindigkeit (= Sedimentationsgeschwindigkeit) einer Kugel in einer Flüssigkeit berechnen:
Lässt man eine Kugel mit dem Radius r und der Dichte ρ_K in einer Flüssigkeit der Dichte ρ und der Viskosität η frei fallen, so tritt **zunächst eine beschleunigte** Fallbewegung auf. Mit zunehmender Geschwindigkeit nimmt aber die der Bewegung entgegengerichtete Stokessche

Reibungskraft immer mehr zu, bis schließlich die nach unten wirkende Gewichtskraft F_G kompensiert wird durch die Summe aus der nach oben wirkenden Auftriebskraft F_A und der Stokesschen Reibungskraft F_{St}. Die Kraftsumme ist jetzt Null, die Bewegung also **unbeschleunigt**, d.h. es stellt sich eine **konstante Sinkgeschwindigkeit v** ein. Es gilt die Kräftebilanz:

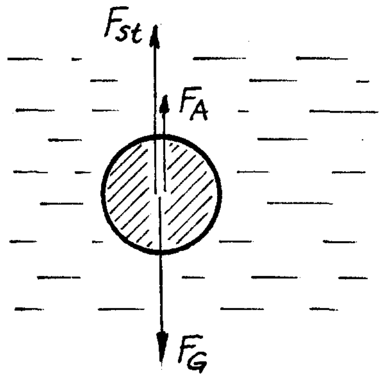


Abb. 1.A.4: Erläuterung der auftretenden Kräfte bei der Sedimentation.

$$F_G = F_A + F_{St} \qquad \textbf{(1.28)}$$

oder $$\mathbf{m} \cdot \mathbf{g} = \rho \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_K} + 6\pi \cdot \mu \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$$

Da $\mathbf{m} = \rho_\mathbf{K} \cdot \mathbf{V_K}$ und $\mathbf{V_K} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{r}^3$ ist, erhält man für v:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{g} \cdot \frac{\rho_K - \rho}{\eta} \qquad \textbf{(1.29)}$$

Die Sinkgeschwindigkeit (Sedimentationsgeschwindigkeit) ist also proportional zu r^2 (kleinere Teilchen sinken sehr viel langsamer als größere!), proportional zum Dichteunterschied von Körper und Flüssigkeit und umgekehrt proportional zur Viskosität. Je zäher das Medium, desto geringer die Sinkgeschwindigkeit! Durch Messen der Sinkgeschwindigkeit einer Kugel in einer Flüssigkeit lässt sich deren Viskosität bestimmen (Kugelfallmethode).

- **Blutsenkung**

Lässt man gerinnungsfrei gemachtes Blut stehen, so sinken die roten Blutkörperchen langsam zu Boden. Unterschiedliche Senkungsgeschwindigkeiten der Erythrozyten verschiedener Blutproben beruhen auf der Veränderung der Viskosität des Plasmas, der Zusammenballung von mehreren Blutkörperchen (größeres r!) und dem Hämatokrit. Die Blutsenkungsgeschwindigkeiten liegen in der Größenordnung von etwa **5-10 mm/h.**

- **Zentrifuge**

Auf Grund der Gleichung zur Sinkgeschwindigkeit haben Teilchen unterschiedlicher Größe und Dichte in ein und derselben Flüssigkeit verschiedene Sedimentationsgeschwindigkeiten, was zu einer Trennung der Komponenten beim Sedimentieren im Erdfeld führt. Dieser Vorgang, der bei kleinen Teilchen im Erdfeld aber recht langsam abläuft, kann erheblich beschleunigt werden, wenn man die Probe in einer Zentrifuge in Rotation versetzt. Dadurch wird in der Gleichung der Sinkgeschwindigkeit statt der Erdbeschleunigung g die

Zentrifugalbeschleunigung $\mathbf{a_f} = \omega^2 \cdot \mathbf{r}$ wirksam, r ist hierbei der Abstand der Probe von der Drehachse, $\omega = 2\pi \cdot \nu$, mit ν = Zahl der Umdrehungen pro Sekunde. Durch entsprechend hohe Drehzahlen lassen sich für a_f Werte bis zum 10^5-fachen der Erdbeschleunigung erreichen (Ultrazentrifugen). Im gleichen Maße steigen dann auch die Sedimentationsgeschwindigkeiten an.

Anhang II Ableitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes (zur Vertiefung)

Gegeben sei ein kreiszylindrisches Rohr der Länge l mit dem Innenradius r. Im Rohr soll eine Flüssigkeit mit der Viskosität η laminar von links nach rechts strömen. Die für die Aufrechterhaltung der Strömung nötige treibende Kraft rührt von einer Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ her, wobei $p_1 > p_2$.

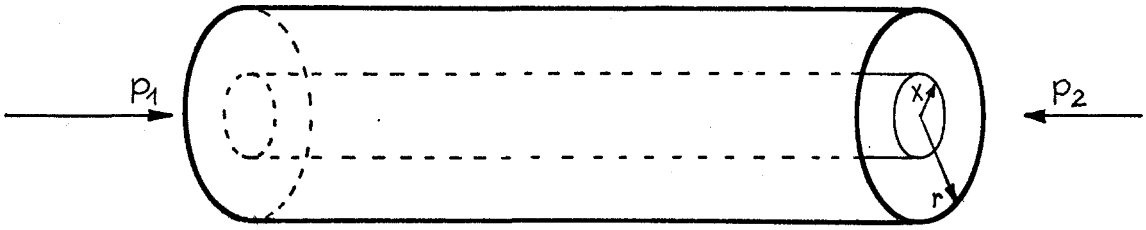


Abb. 2.A.1: Zur Herleitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes.

Wir betrachten im **Innern** des Rohres einen axialen zylindrischen Stromfaden vom Radius x (Abb. 2.A.1). Auf diesen Stromfaden wirkt dann **in** Strömungsrichtung **die** Kraft $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p} \cdot \pi \cdot \mathbf{x}^2$. Infolge der Haftung der Flüssigkeit an der Rohrwand und des durch die innere Reibung bedingten Geschwindigkeitsgefälles steigt die Geschwindigkeit der Flüssigkeit von der Rohrwand bis zur Rohrmitte vom Wert Null bis zu einem Maximalwert an. Die in der Mantelfläche $\mathbf{A} = 2\pi \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{l}$ des Stromfadens auftretende Reibungskraft beträgt nach der Definitionsgleichung der Viskosität

$$\mathbf{F_R} = \eta \cdot \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{dv(x)}}{\mathbf{dx}} = \eta \cdot 2\pi \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{dv(x)}}{\mathbf{dx}}.$$

Bei stationärer Strömung und konstantem Rohrquerschnitt, d.h. bei **unbeschleunigter** Flüssigkeit, muss die Summe der an den Flüssigkeitsteilchen angreifenden Kräfte Null sein:

$$\pi \cdot \mathbf{x}^2 \cdot \Delta\mathbf{p} + \eta \cdot 2\pi \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{l} \cdot \frac{\mathbf{dv(x)}}{\mathbf{dx}} = 0, \mathbf{bzw.}\ \mathbf{dv(x)} = -\frac{\Delta\mathbf{p}}{2\mathbf{l} \cdot \eta} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{dx}$$

Die Strömungsgeschwindigkeit v(x) erhält man durch Integration der Gleichung der obigen Differentialgleichung, wobei als Randbedingung zu beachten ist, dass die Flüssigkeit an der Rohrwand haftet, d.h. für x = r ist v = 0:

$$\int_{v=0}^{v(x)} \mathbf{dv(x)} = -\int_{x=r}^{x} \frac{\Delta\mathbf{p}}{2\mathbf{l} \cdot \eta} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{dx} \quad \mathbf{bzw.} \quad \mathbf{v(x)} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{4\mathbf{l} \cdot \eta}(\mathbf{r}^2 - \mathbf{x}^2).$$

Diese Gleichung gibt Auskunft darüber, wie groß die Strömungsgeschwindigkeit an den verschiedenen Stellen des Rohrquerschnittes ist. An der Rohrwand (x = r) ist die Geschwindigkeit Null, in der Rohrmitte **(x** = 0) ist sie am größten. Wie daraus hervorgeht, nimmt die Geschwindigkeit **quadratisch** mit der Entfernung von der Rohrmitte ab, es liegt also ein **parabolisches Geschwindigkeitsprofil** vor. Abb. 2.A.2 zeigt die Verteilung der Geschwindigkeit. Die Spitzen der Geschwindigkeitsvektoren liegen auf einem Paraboloid.

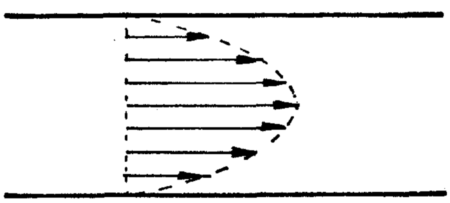


Abb. 2.A.1: Das Geschwindigkeitsprofil in einer Röhre..

Um die Volumenstromstärke $\mathbf{i} = \frac{\mathbf{dV}}{\mathbf{dt}}$ zu berechnen, benutzen wir die Beziehung $\mathbf{i} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}$ (A ist hier die Fläche des Rohrquerschnitts).

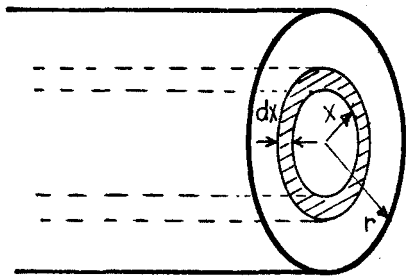


Abb. 2.A.3: Zur Erläuterung der Herleitung der Volumenstromstärke.

Da v eine Funktion von x ist, d.h. v an den verschiedenen Stellen des Rohrquerschnitts verschieden ist, betrachtet man zunächst die Volumenstromstärke **di** durch ein Flächenelement $\mathbf{dA} = 2\pi \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{dx}$ (schraffierte Fläche in Abb. 2.A.3) und erhält i dann durch Integration. Es gilt:
di = dA v(x). Setzt man für dA und v(x) die entsprechenden Ausdrücke ein, so ist:

$$\mathbf{di} = 2\pi \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{dx} \cdot \frac{\Delta \mathbf{p}}{4\eta \cdot \mathbf{l}} (\mathbf{r}^2 - \mathbf{x}^2)$$

Integration liefert dann:

$$\int_0^{\mathbf{i}} \mathbf{di} = \frac{\pi \cdot \Delta \mathbf{p}}{2\eta \cdot \mathbf{l}} \int_{\mathbf{x}=0}^{\mathbf{x}=\mathbf{r}} (\mathbf{r}^2 - \mathbf{x}^2) \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{dx} \quad \textbf{bzw.} \quad \mathbf{i} = \frac{\pi \cdot \mathbf{r}^4 \cdot \Delta \mathbf{p}}{8\eta \cdot \mathbf{l}}$$

Übungsaufgaben:

Ü 1.13)
Um wie viel % muss der Druck ansteigen, wenn sich bei konstantem i der Durchmesser eines Blutgefäßes
a) um l % verringert und
b) um 10 % verringert?

Ü 1.14)
Um wie viel % steigt die Volumenstromstärke, wenn sich bei konstanter Druckdifferenz der Gefäßdurchmesser um 20% erhöht?

Ü 1.15)
Welchen Durchmesser d_2 muss eine Kapillare der Länge l_2 = 20 cm haben, wenn ihr Widerstand genau so groß sein soll wie eine Kapillare mit dem Durchmesser d_1 = l mm und der Länge l_1 = 10 cm ?

Ü 1.16)
Um wie viel Promille vergrößert oder verkleinert sich der Leitwert einer Kapillare, wenn Länge und Durchmesser sich um je 2 Promille vergrößern?

Ü 1.17)
Ein Rohr mit dem Durchmesser 1,0 cm hat eine Engstelle mit dem Durchmesser 0,8 cm. Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit an der Engstelle, wenn sie vor der Engstelle 0,5 m/s beträgt ?

Ü 1.18)
Welche Reynoldszahl gilt für die Aorta (Durchmesser 2,5 cm), wenn die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in ihr 1,0 m/s, die Zähigkeit 4,5 10^{-3} **Pa·s** und die Dichte 1,05 g/cm^3 beträgt ?

Ü 1.19)
Um welchen Faktor vergrößert oder verkleinert sich der Strömungswiderstand einer Kapillare, wenn man den Durchmesser halbiert und gleichzeitig die Länge verdoppelt ?

Ü 1.20)
Was versteht man unter einer **stationären Strömung** ?

Ü 1.21)
An welcher Rohrquerschnittsstelle ist bei laminarer Strömung der Geschwindigkeitsgradient am kleinsten ?

Ü 1.22)
Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Geschwindigkeitsgradienten für eine laminare Rohrströmung als Funktion des Abstands von der Rohrmitte.

Ü 1.23)
Durch ein Rohr werden stationär während einer Minute bei einer Druckdifferenz von 0,2 bar 4,5 l Wasser gepumpt. Welche Druck-Volumen-Arbeit (in SI-Einh.) ist hierzu erforderlich (Die kinetische Energie des Wassers im Rohr soll vernachlässigt werden !) Wie groß ist die

Leistung der Pumpe ? Welche Volumenstromstärke (in cm^3/s) herrscht in dem Rohr ?

Ü 1.24)
Das Volumen der linken Herzkammer ändert sich etwa nach untenstehender Zeitfunktion. Ermitteln Sie aus der Grafik, wie groß etwa die Volumenstromstärke in der Aorta 0,2 s nach Beginn der Auswurfphase der Systole ist. Welche Herzfrequenz (Puls) in min^{-1} liegt vor ?