

<b>Versuch 4 A: Brennweitenbestimmung von Linsen</b>
<b>4 B: Mikroskop</b>

**Physikalische Grundbegriffe**

- Brechungsindex, Brechungsgesetz, Reflexion, Totalreflexion
- Brennweite, Brennpunkt, Brechkraft,
- Abbildungsgleichung, Hauptebene, dünne/dicke Linsen
- Vergrößerung,
- Linsensysteme, Lupe, Mikroskop, Auge, Sehfehler
- Auflösung, numerische Apertur

**messtechnische Grundlagen:**

- Mikroskop
- Optische Bank

**weiterführende Literatur:**

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 373-401
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 223-245
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 223-245

**Erläuterung der wichtigsten physikalischen Begriffe**

- Ausbreitung des Lichtes

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Der Wellenlängenbereich, für den das Auge für elektromagnetische Wellen empfindlich ist, erstreckt sich von etwa 400 nm (violett) bis 750 nm (rot). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts im materiefreien Raum (Vakuum) beträgt:

$$c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$$

In Materie ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$  kleiner als  $c_0$  und abhängig von der Art der Materie. Als Folge der Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts beim Übertritt von einem Medium in ein anderes erfährt ein Lichtstrahl, wenn er nicht gerade senkrecht auf die Grenzfläche auftrifft, eine Richtungsänderung. Dies wird als **Lichtbrechung** bezeichnet. Als **Brechzahl** oder **Brechungsindex**  $n$  definiert man:

**Definition des Brechungsindex  $n$ :**

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (4.1)$$

Da  $c < c_0$  ist, sind die Brechzahlen von Materie größer als 1. Für das Vakuum ist definitionsgemäß  $n = 1$ . Für Gase ist  $n \sim 1$ .

Einige Werte:  $n(\text{Luft}) = 1,0003$ ;  $n(\text{Glas}) = 1,5$  bis  $1,9$  (je nach Glassorte);  
 $n(\text{Wasser}) = 1,33$ ;  $n(\text{Diamant}) = 2,4$ .

- **Das Brechungsgesetz**

Ein Lichtstrahl 1 treffe unter dem Winkel  $\alpha_1$  (**gemessen zum Lot**) auf die Grenzfläche zweier Medien mit den Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  (s. Abb. 4.1). Der in das Medium 2 eindringende Strahl 2 wird dann zum Lot hingebrochen ( $\alpha_2 < \alpha_1$ ), wenn  $n_2 > n_1$  und vom Lot weggebrochen, wenn  $n_2 < n_1$ . Es läßt sich folgende Beziehung herleiten (siehe Anhang II):

$$\boxed{n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2} \quad (4.2)$$

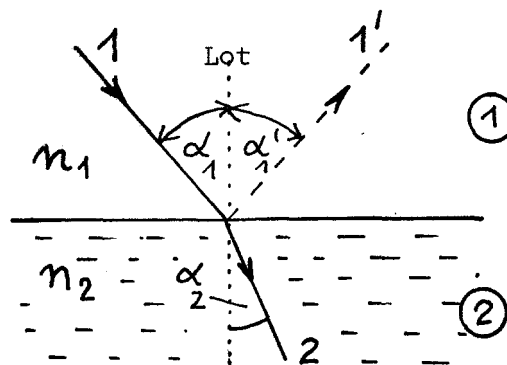


Abb. 4.1: Brechungsgesetz.

- **Das Reflexionsgesetz**

Ein Teil des auf die Grenzfläche zweier Medien auftreffenden Lichts wird immer reflektiert. Für den Winkel des reflektierten Strahls  $\alpha_1'$  gilt:

$$\alpha_1' = \alpha_1 \quad (4.3)$$

Die Strahlen 1, 1', 2 und das Lot liegen in einer Ebene. Ein Medium heißt **optisch dichter** bzw. **optisch dünner** als ein anderes, wenn seine Brechzahl größer bzw. kleiner ist als die des anderen Mediums. Unter der **optischen Weglänge** versteht man das Produkt aus geometrischer Weglänge und Brechzahl.

- **Totalreflexion**

Tritt ein Lichtstrahl vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium über (z.B. von Glas in Luft), so wird er vom Lot weggebrochen (Strahl 1 in Abb. 4.2), d.h. der Winkel  $\alpha_2$  ist größer als  $\alpha_1$ . Lässt man den Einfallswinkel  $\alpha_1$  zunehmen, so nimmt auch  $\alpha_2$  zu, bis er den Wert ( $\alpha_2 = 90^\circ$  erreicht hat (schleifender Austritt, Strahl 2). Der zugehörige Einfallswinkel  $\alpha_g$  heißt **Grenzwinkel der Totalreflexion**, da für alle Einfallswinkel  $\alpha_1 > \alpha_g$  kein Licht in das Medium 2 übertreten kann. Für  $\alpha_1 > \alpha_g$  tritt also **vollständige Reflexion** an der Grenzfläche auf. Man spricht von **Totalreflexion**. Nach dem Brechungsgesetz Gl.4.2 gilt dann für  $\alpha_g$ ,

wenn  $n_1 > n_2$ :

$$\sin \alpha_g = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.4)$$

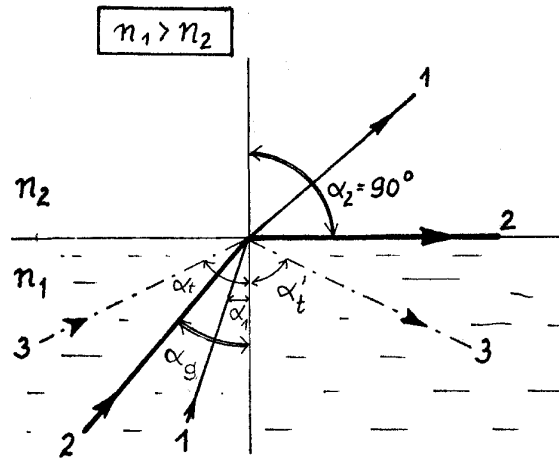


Abb. 4.2: Totalreflexion.

• **Lichtleiter**

Die Totalreflexion findet u.a. Anwendung bei total reflektierenden Prismen und bei den Lichtleitern.

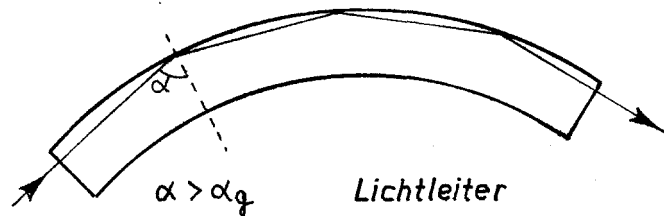


Abb. 4.3: Lichtreflexion in einem gekrümmten Lichtleiter.

Läßt man einen Lichtstrahl in einen gekrümmten Glas- oder Plexiglasstab eintreten, so wird er an der Grenzfläche Glas - Luft totalreflektiert, wenn die Krümmung des Stabes nicht zu stark ist. Licht kann auf diese Weise auch "krummlinig" weitergeleitet werden.

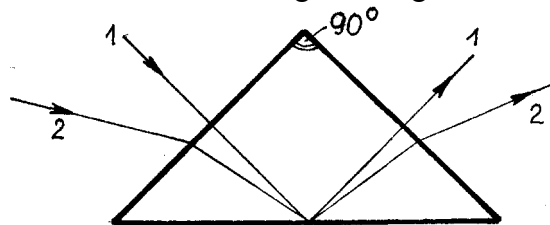


Abb. 4.4: Reflexion des Lichtes an einem Prisma zur Bildumkehr.

Rechtwinklig gleichschenklige Glasprismen werden als totalreflektierende Prismen z.B. zur Bildumkehr in Ferngläsern verwendet (Prismenfernglas).

• **Faseroptik**

Mit einem Lichtleiter lassen sich auch Bilder übermitteln. Zu diesem Zweck gestaltet man den Lichtleiter als Bündel aus sehr vielen, sehr dünnen (einige Mikrometer dick) parallel zueinander liegenden Glas-Fasern. Jede Faser muß gegen die nächst anliegende Faser optisch isoliert sein, d.h. sie muß von einem Mantel aus optisch dünnerem Material umgeben sein. An dem einen Ende des Bündels befindet sich eine kleine Linse, die die Umgebung auf die Stirnseite des Bündels abbildet, auf der anderen Seite ist eine Kamera, die das Bild aufweitet. Jede Faser erzeugt nur einen Bildpunkt. Es entsteht so ein Rasterbild. Je mehr Fasern pro Flächeneinheit vorhanden sind, desto besser ist die Bildqualität. In der Medizin werden Lichtleiter in der Endoskopie eingesetzt, in der Technik zur Nachrichtenübertragung.

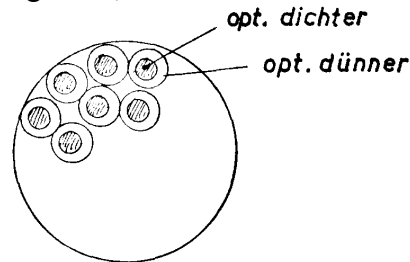


Abb. 4.5: Schematischer Aufbau einer Faseroptik aus einzelnen Lichtleitern.

• **Optische Systeme**

Unter einem **optischen System** versteht man ganz allgemein eine Anordnung aus einer oder mehreren brechenden gekrümmten Grenzflächen. Eine brechende Fläche ist eine Grenzfläche zwischen zwei optisch verschiedenen, d.h. durch verschiedene Brechzahlen  $n$  und  $n'$  gekennzeichneten Medien. Die im folgenden betrachteten optischen Systeme sollen speziell aus kugelförmig (sphärisch) gekrümmten Grenzflächen bestehen. Optische Systeme beeinflussen Lichtbündel und Lichtstrahlen, die das System durchsetzen. Wir untersuchen, wie parallele Lichtbündel durch ein optisches System zunächst mit einer und später mit mehreren brechenden Flächen verändert werden und definieren die das System kennzeichnenden Größen.

• **Brechung an einer sphärischen Fläche**

Die Abb.4.6 zeigt (im Schnittbild) eine kugelförmige Grenzfläche zwischen den Medien mit den Brechzahlen  $n$  (links) und  $n'$  (rechts).  $M$  ist der Krümmungsmittelpunkt,  $r$  der Radius der Grenzfläche. Wir definieren zunächst eine sog. **optische Achse**. Diese ist eine Linie, die durch den Krümmungsmittelpunkt  $M$  geht. Bei einem opt. System mit mehreren brechenden Flächen liegen die Mittelpunkte **sämtlicher** Grenzflächen auf der optischen Achse. Strahlen, die nahe der optischen Achse verlaufen heißen **Paraxialstrahlen**.

Für die Brechzahlen  $n$  und  $n'$  vor und hinter der brechenden Fläche soll gelten:  $n' > n$ .

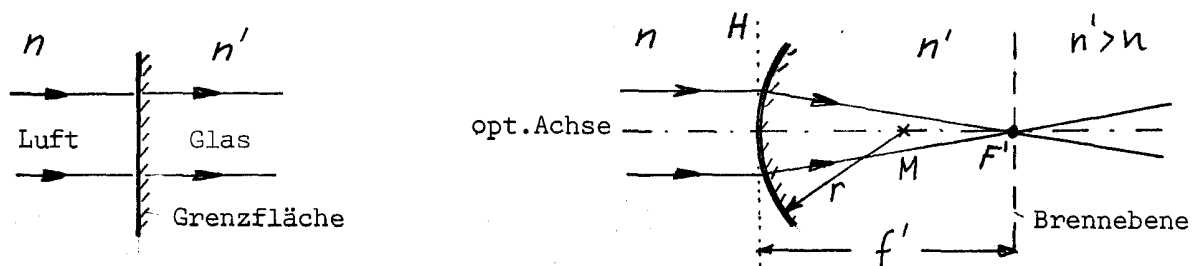


Abb. 4.6: Ablenkung eines Lichtstrahls beim Übergang von Luft in Glas.

Wir lassen nun ein paralleles Lichtbündel (gezeichnet sind in Abb.4.6 (rechts) nur der obere und der untere Randstrahl) von links **parallel zur optischen Achse** auf die Grenzfläche fallen. Nach dem Brechungsgesetz werden dann die Strahlen bei Überschreiten der Grenzfläche zum Lot hin gebrochen, d.h. die Strahlen oberhalb der optischen Achse werden nach unten, die unterhalb der Achse verlaufenden Strahlen nach oben gebrochen. Aus dem Parallelbündel wird also ein **konvergentes Bündel**. Zum Vergleich ist in Abb. 4.6 (links) der Verlauf eines Parallelbündels an einer ebenen Grenzfläche dargestellt: Das Bündel bleibt parallel!

Für **Paraxialstrahlen** ergibt sich, daß das **Parallelbündel näherungsweise in e i n e m Punkt F'** fokussiert wird. F' heißt **Brennpunkt** oder Fokus .

Die **senkrecht** zur optischen Achse durch F' verlaufende Ebene heißt **Brennebene**. Der Abstand  $f'$  des Brennpunktes von der Scheitelebene wird **Brennweite** genannt.

Läßt man in der Anordnung gemäß Abb. 4.7 ein paralleles Lichtbündel von rechts her wieder parallel zur optischen Achse auf die Grenzfläche fallen, so erfolgt eine Brechung der Strahlen vom Lot weg (wegen  $n' > n$ ), d.h. das Bündel wird wieder konvergent und in F fokussiert (Abb. 4.7).

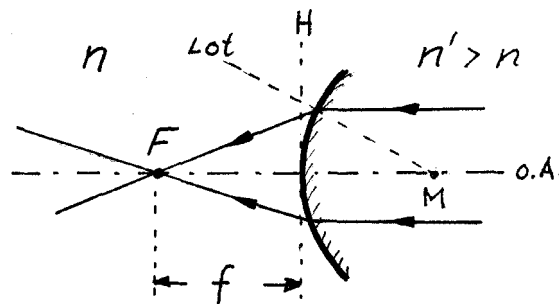


Abb. 4.7: Ablenkung eines parallelen Lichtstrahls an einer gekrümmten Fläche.

Es existiert also diesseits und jenseits der Grenzfläche je ein Brennpunkt F und F', deren Abstände  $f$  und  $f'$  von der Scheitelebene H (auch **Hauptebene** genannt) die Brennweiten sind.

In den bisher diskutierten Fällen (Abb. 4.6 und Abb. 4.7) war die Grenzfläche von links her gesehen **konvex** gekrümmt. Wählen wir eine **konkave** Krümmung ( $n'$  soll wieder größer als  $n$  sein), so ergeben sich für den Einfall paralleler Bündel von links und von rechts die in der Abb. 4.8 dargestellten Strahlenverläufe. In beiden Fällen wird das Parallelbündel nach Überschreiten der Grenzfläche nun **divergent**. Die rückwärtige Verlängerung der divergenten Strahlen (gestrichelt) führt näherungsweise zu einem gemeinsamen Divergenzpunkt F' bzw. F. Diese Punkte werden ebenfalls als Brennpunkte bezeichnet (virtueller Brennpunkt). Die divergenten Strahlen scheinen von diesen Punkten herzukommen.

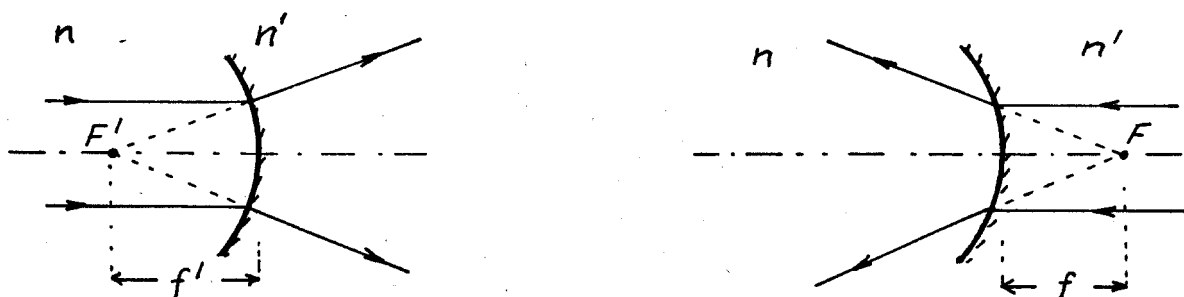


Abb. 4.8: Strahlengang durch eine konkav gekrümmte Grenzfläche.

Die Brennweiten  $f$  und  $f'$  lassen sich bei gegebenem Krümmungsradius  $r$  und den Brechzahlen  $n$  und  $n'$  nach dem Brechungsgesetz berechnen. Für interessierte Leser ist dies im Anhang II durchgeführt. Es ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$f = \frac{n}{n' - n} r \quad \text{und} \quad f' = \frac{n'}{n' - n} r \quad (4.4 \text{ a,b})$$

Das Verhältnis  $f/f'$  der Brennweiten ergibt folgende wichtige Beziehung:

$$\frac{f}{f'} = \frac{n}{n'} \quad (4.5)$$

Die Brennweiten verhalten sich wie die Brechzahlen!

- **Brechkraft**

Neben den Brennweiten  $f$  und  $f'$  dient zur Charakterisierung der Fokussierungseigenschaften einer brechenden Fläche die **Brechkraft  $D$**  (auch **Brechwert  $D$**  genannt). Sie ist wie folgt definiert:

**Definition der Brechkraft  $D$ :**

$$D = \frac{n}{f} \quad (4.6)$$

**SI-Einheit für  $D$ :**  $1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dpt (Dioptrie)}$

Für die Brechkraft  $D$  einer brechenden Fläche erhält man dann aus der G1.4.4a oder G1.4.4b die Beziehung:

$$D = \frac{n' - n}{r}$$

Optische Systeme, die ein Parallelbündel konvergent machen, werden auch als **sammelnde** Systeme, diejenigen, die ein Parallelbündel divergent machen, als **zerstreuende** Systeme bezeichnet (Sammellinsen, Zerstreuungslinsen). Beide Systeme werden durch die Vorzeichen bei  $f$ ,  $f'$  und  $D$  unterschieden. Es wird vereinbart:

- Für **sammelnde Systeme** sollen die Werte für  $f$ ,  $f'$  und  $D$  **positiv** sein.
- Für **zerstreuende Systeme** sollen die Werte für  $f$ ,  $f'$  und  $D$  **negativ** sein.

Für die **vorzeichengerechte** Berechnung der Brechkraft oder der Brennweiten ist dann wie folgt zu verfahren:

Wählen Sie eine Blickrichtung auf das System (z.B. von links nach rechts): Erscheint die Krümmung der Grenzfläche **konvex**, so ist  $r$  **positiv** einzusetzen, ist sie **konkav**, so muß  $r$  **negativ** eingesetzt werden.

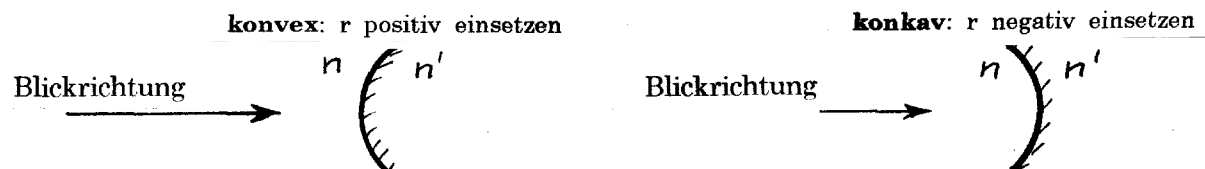


Abb. 4.9: Zur Definition des Vorzeichens der Brechkraft bzw. Brennweite.

Für die Brechzahldifferenz  $n'-n$  gilt bei gleicher Blickrichtung:

**Brechzahl hinter der brechenden Fläche minus Brechzahl vor der Grenzfläche.**

In der Optik gilt ein wichtiger Satz:

**Der Strahlengang durch ein optisches System ist umkehrbar.**

Kehren wir z.B. in der Abb. 4.7 die Strahlrichtung um, so sieht man, daß Strahlen, die aus dem Brennpunkt  $F$  kommen, nach Durchtritt durch die brechende Fläche parallel weiterlaufen (Abb. 4.10). Parallele Lichtbündel werden erzeugt, indem man eine **punktförmige** Lichtquelle in den Brennpunkt einer Sammellinse stellt. Eine punktförmige Lichtquelle verifiziert man durch Beleuchten einer kleinen Lochblende.

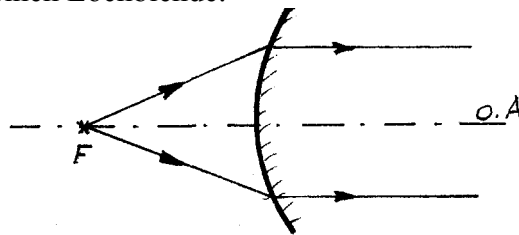


Abb. 4.10: Die Erzeugung eines parallelen Lichtbündels.

- **Schräg einfallende Parallelbündel**

Fällt ein Parallelbündel unter einem kleinen Winkel  $\alpha$  zur optischen Achse auf ein optisches System (s. Abb. 4.11 (links)), so wird das Bündel hinter dem System in der **Brennebene** fokussiert. Den Fokussierungsort findet man, indem man einen Strahl  $S$  (gestrichelt) parallel zum Bündel durch den Brennpunkt  $F$  zeichnet und diesen Strahl nach der Grenzfläche als Parallelstrahl  $S'$  zur optischen Achse bis zum Schnitt mit der Brennebene weiterführt.

Umgekehrt verlaufen alle von **einem** außerhalb der opt. Achse in der Brennebene gelegenen Punkt  $P$  ausgehenden Lichtstrahlen nach der Grenzfläche als **Parallelbündel** schräg zur optischen Achse weiter (Abb. 4.11 (rechts)). Die Richtung des Parallelbündels nach der Grenzfläche ist die des Strahls  $S'$  in der Abb.4.11 (rechts).  $S'$  ist wiederum der Verlauf eines von  $P$  ausgehenden und parallel zur optischen Achse verlaufenden Strahls  $S$ .

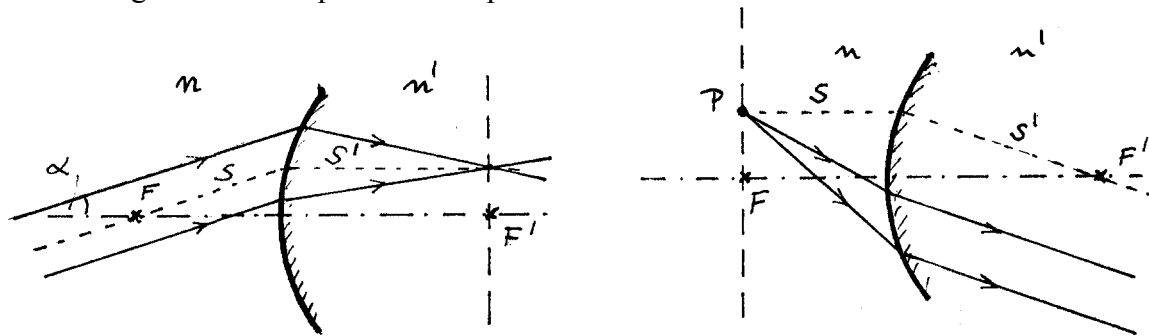


Abb. 4.11: Strahlengang schräg einfallender Parallelbündel.

- **Brechung an mehreren sphärischen Flächen, Linsen**

Um alle formelmäßigen Beziehungen konsequent sowohl für Systeme mit einer als auch für solche mit mehreren brechenden Flächen anwenden zu können, muß folgendes vereinbart werden:

$n$  ist grundsätzlich die Brechzahl des Mediums **vor der ersten**,  $n'$  diejenige **nach der letzten** brechenden Fläche des optischen Systems.

(Bei nur einer brechenden Fläche ist diese die erste und letzte zugleich!)

Abb. 4.12 (links) zeigt ein optisches System aus zwei brechenden Flächen mit den Einzelbrechwerten  $D_1$  und  $D_2$ . Das zwischen den Flächen befindliche Medium habe die Brechzahl  $n_G$ . Die Brechwerte  $D_1$ , und  $D_2$  der beiden Grenzflächen berechnen sich dann nach den Formeln:

$$D_1 = \frac{n_G - n}{r_1} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{n' - n_G}{r_2}$$

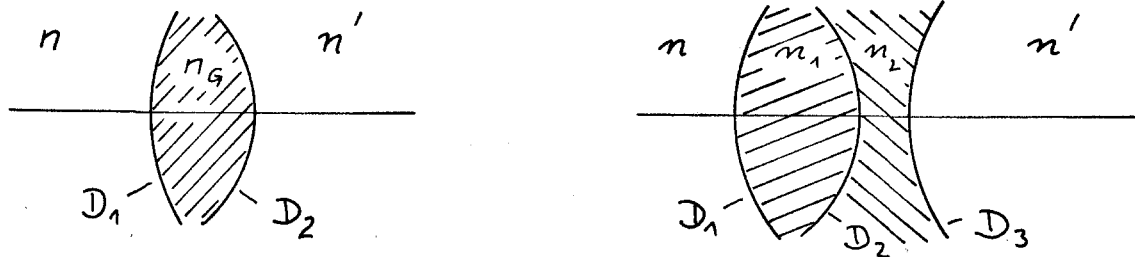


Abb. 4.12: Optische Systeme aus zwei (links) und drei (rechts) brechenden Flächen.

Für die drei brechenden Flächen der Abb.4.12 (rechts) gilt:

$$D_1 = \frac{n_1 - n}{r_1}; \quad D_2 = \frac{n_2 - n_1}{r_2}; \quad D_3 = \frac{n' - n_2}{r_3},$$

wenn  $n_1$  und  $n_2$  die Brechzahlen der Medien zwischen den Flächen sind.

Ein optisches System gemäß Abb. 4.12 (links) wird auch als **Linse** bezeichnet. Linsen sind durchsichtige Körper, die im allgemeinen von zwei sphärischen Flächen begrenzt sind. Es gibt auch Linsen, bei denen eine Begrenzungsfläche eine Ebene ist (z.B. **Plankonvex-Linse**).

Für die **Gesamtbrechkraft  $D$**  eines optischen Systems aus mehreren brechenden Flächen gilt (ohne Beweis):  $D = D_1 + D_2 + D_3 + \dots$  (4.8)

wenn die gegenseitigen Abstände der Grenzflächen klein sind im Vergleich zu den Krümmungsradien. Man spricht dann von **dünnen Systemen** (dünne Linsen). Für die Gesamtbrennweiten des Systems gilt dann:

$$f = \frac{n}{D} \quad \text{und} \quad f' = \frac{n'}{D}$$

Ein optisches System (z.B. eine Linse) hat **eine** Brechkraft  $D$  aber **zwei** Brennweiten  $f$  und  $f'$ , die verschieden sind, wenn die Medien vor und hinter dem System verschieden sind. Dies ist z.B. beim Auge der Fall. Sind die Medien gleich, dann sind es auch die Brennweiten (z.B. bei Linse in Luft).

Setzt man zwei dünne Linsen (Abb. 4.13 (links)) mit den Einzelbrechwerten  $D_1$  und  $D_2$  ohne Abstand zusammen, so gilt für die Gesamtbrechkraft  $D$ :

$$D = D_1 + D_2$$

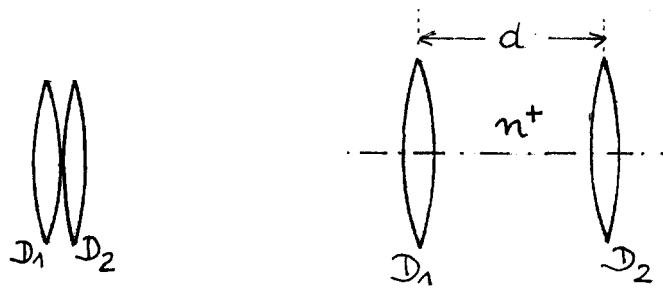


Abb. 4.13: Linsensysteme aus zwei dünnen Linsen.

Haben die Beiden Linsen einen Abstand  $d$  voneinander (Abb. 4.13 (rechts)), so ergibt sich (ohne Beweisführung) für die Gesamtbrechkraft  $D$ :

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n^+} \cdot D_1 \cdot D_2 \quad (4.9)$$

wenn  $n^+$  die Brechzahl des Mediums zwischen den Linsen ist (Formel von Gullstrand).

- **Die Hauptebene eines optischen Systems**

Ein Lichtstrahl, der ein optisches System aus mehreren brechenden Flächen durchsetzt, wird an jeder Fläche gebrochen. Diese Mehrfachbrechung kann bei dünnen Systemen näherungsweise durch **eine** Brechung an einer **Ebene H**, der sog. **Hauptebene**, ersetzt werden.

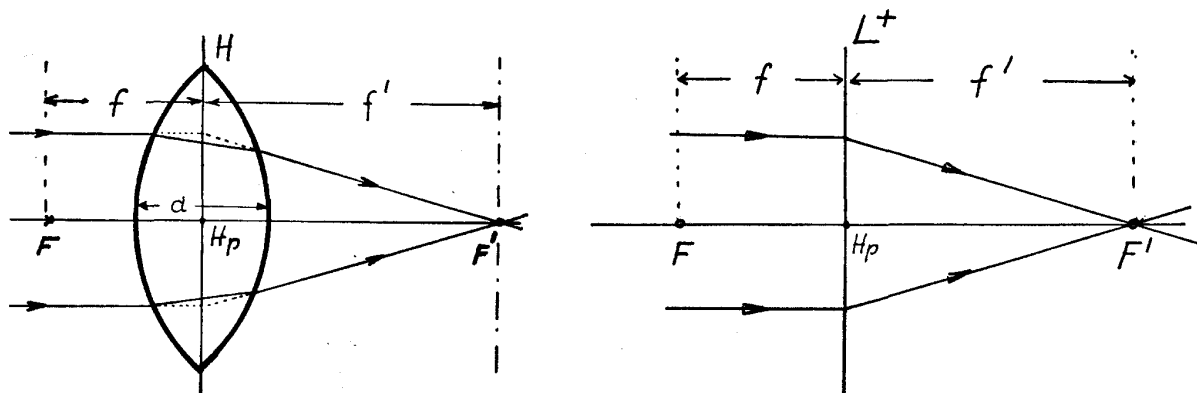


Abb. 4.14: Strahlengang in einer Linse.

Um die Hauptebene zu finden, verlängert man den in das System eintretenden Strahl **geradlinig weiter** und den austretenden Strahl **geradlinig rückwärts** (in Abb. 4.14 (links) punktiert gezeichnet). Die Schnittpunkte dieser so geradlinig vorwärts und rückwärts verlängerten Strahlen bilden dann die Hauptebene. Der Schnittpunkt der Hauptebene mit der optischen Achse heißt **Hauptpunkt  $H_p$** . Für dünne Linsen fällt die Hauptebene praktisch mit der Mittelebene der Linse zusammen.

Die vollständige Kennzeichnung eines optischen Systems erfolgt somit durch die Angabe der optischen Achse, der Hauptebene und der Lage der Brennpunkte. Die Buchstaben  $L^+$  oder  $L^-$  an der Hauptebene sollen ein sammelndes ( $L^+$ ) oder ein zerstreues ( $L^-$ ) System kennzeichnen. (Abb. 4.14 (rechts): Sammellinse).

Bei nur einer brechenden Fläche ist die Hauptebene mit der Scheitelebene an die gekrümmte Grenzfläche identisch. Alle Entfernungsangaben, wie z.B. Brennweiten, Gegenstands- und Bildweiten, beziehen sich auf die Hauptebene.

- **Optische Abbildung**

Mit optischen Systemen (Linsen) lassen sich Abbildungen erzielen. Es wird dabei das von einem Gegenstandspunkt divergent ausgehende Licht nach Durchtritt durch die Linse zu einem **Bildpunkt** vereinigt.

- **Bildkonstruktion**

Gegeben sei eine Sammellinse  $L^+$  mit den Brennpunkten  $F$  und  $F'$ . Im Abstand  $g$  (= Gegenstandsweite) von der Hauptebene  $H$  befindet sich ein Gegenstand  $G$  in Gestalt eines zur optischen Achse senkrechten Pfeiles (Abb. 4.15). Wir suchen zunächst das Bild der Pfeilspitze. Dazu wählen wir von den unendlich vielen von der Pfeilspitze ausgehenden Lichtstrahlen zwei Strahlen aus, deren Verläufe durch die Linse bereits bekannt sind. Es sind dies der sog. **Parallelstrahl** und der **Brennpunktstrahl**.

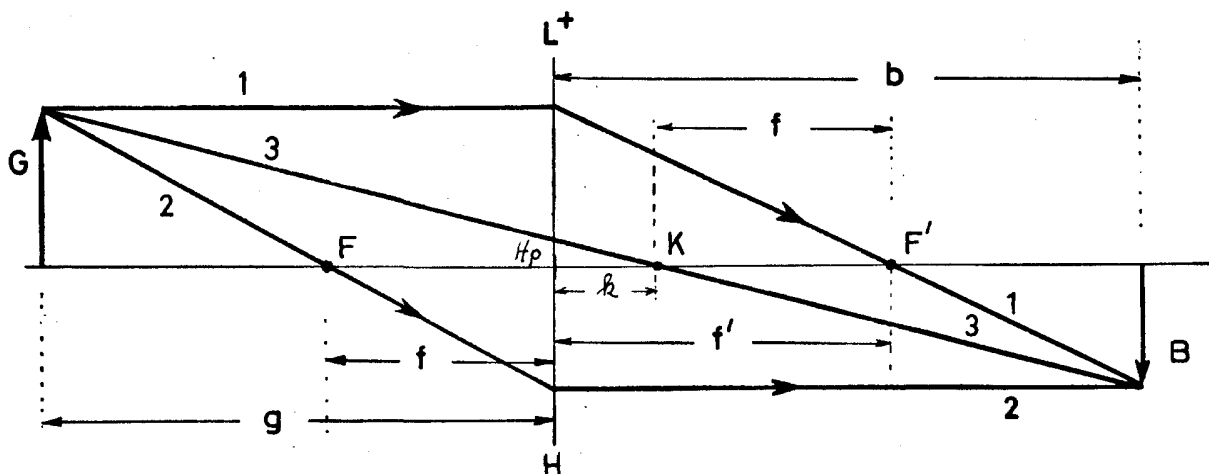


Abb. 4.15: Bildkonstruktion für eine dünne Sammellinse.

- 1) Ein zur opt. Achse paralleler Strahl geht nach der Hauptebene in Richtung  $F'$  (Strahl 1 in Abb. 4.15).
- 2) Ein durch den Brennpunkt  $F$  verlaufender Strahl geht nach der Linse parallel zur optischen Achse weiter (Strahl 2).

Der Schnittpunkt dieser Strahlen hinter der Linse ergibt den Bildpunkt der Pfeilspitze. Alle übrigen Bildpunkte müssen analog konstruiert werden. Liegen die Gegenstandspunkte in einer senkrecht zur optischen Achse orientierten Ebene, so liegen näherungsweise auch die Bildpunkte in einer Ebene senkrecht zur optischen Achse.

Verbindet man den Gegenstandspunkt **geradlinig** mit dem Bildpunkt (Strahl 3 in Abb.4.15), so schneidet dieser Strahl die optische Achse in einem Punkt  $K$ , der als **Knotenpunkt** bezeichnet wird. Ohne Beweis sei zitiert, daß man den Abstand  $k$  des Knotenpunktes vom Hauptpunkt  $H_p$  dadurch findet, daß man die Strecke  $k = f' - f$  von der Hauptebene aus nach rechts abträgt, wenn  $k$  positiv und nach links abträgt, wenn  $k$  negativ ist. Neben Parallel- und Brennpunktstrahl steht somit ein dritter Strahl für die Bildkonstruktion zur Verfügung:

- 3) Strahlen, die durch den Knotenpunkt  $K$  verlaufen, erfahren keine Brechung an der Hauptebene.

Für eine **Zerstreuungslinse**  $L^-$  zeigt die Abb. 4.16 die Bildkonstruktion. Der Parallelstrahl 1 wird an der Hauptebene so gebrochen, daß die rückwärtige geradlinige Verlängerung durch  $F'$  geht. Der in Richtung  $F$  verlaufende Brennpunktstrahl 2 verläuft von der Hauptebene ab parallel zur optischen Achse weiter. Wie man sieht, schneiden sich die beiden Strahlen im Bildraum nicht - es entsteht also dort kein Bild. Blickt man aber von rechts durch die Zerstreuungslinse in Richtung Gegenstand, so sieht man ein verkleinertes, aufrechtes Bild an der Stelle, an der sich die rückwärtigen Verlängerungen der im Bildraum divergenten Strahlen schneiden. Man spricht hier von einem **virtuellen** Bild. Das Bild in Abb. 4.15 ist ein **reelles** Bild. Reelle Bilder sind auf einem Schirm abbildbar, virtuelle dagegen nicht.

Eine **Zerstreuungslinse** liefert unabhängig von der Lage des Gegenstandes **immer aufrechte, verkleinerte, virtuelle Bilder**.

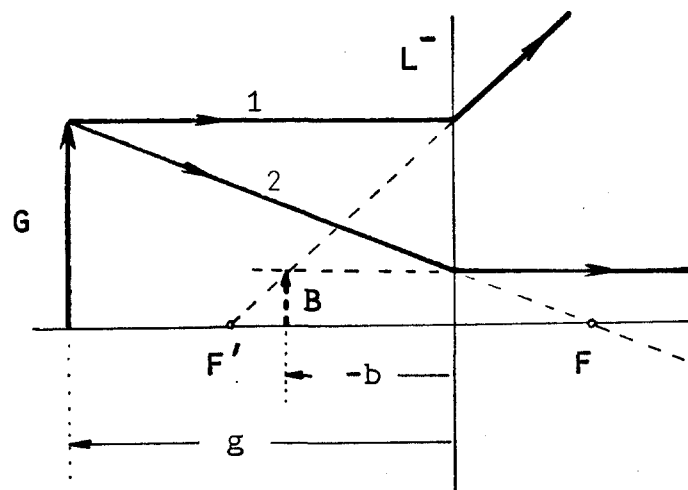


Abb. 4.16: Bildkonstruktion einer Zerstreuungslinse.

Bei der Sammellinse sind die Verhältnisse komplizierter: Für  $g > 2f$  entstehen reelle, umgekehrte, verkleinerte Bilder. Für  $2f > g > f$  (d.h. der Gegenstand ist zwischen einfacher und doppelter Brennweite) entstehen reelle, umgekehrte, vergrößerte Bilder. Für  $g < f$  (d.h. der Gegenstand ist innerhalb der einfachen Brennweite) entstehen virtuelle, aufrechte, vergrößerte Bilder. Dieser Fall wird bei der Besprechung der **Lupe** noch genauer diskutiert.

**Frage:** Wo liegen die Bilder bei einer Sammellinse, wenn der Gegenstand

- a) sehr weit weg (im Unendlichen) und
- b) in der Brennebene liegt ?

(Lösung: a) in der Brennebene; b) im Unendlichen)

- **Symmetrische Abbildung**

Ein besonderer Fall der optischen Abbildung liegt vor, wenn der Gegenstand sich in der doppelten Brennpunktsentfernung ( $g = 2f$ ) befindet. Das Bild entsteht dann ebenfalls in der doppelten Brennpunktsentfernung ( $b = 2f$ ) und es ist so groß wie der Gegenstand ( $B = G$ ). Man spricht von **symmetrischer Abbildung**.

- **Kardinalpunkte**

Brennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte eines optischen Systems werden **Kardinalpunkte** des Systems genannt.

- **Verlauf eines Lichtstrahls durch eine Linse**

Ein Lichtstrahl S treffe auf eine Linse  $L^+$  (siehe Abb. 4.17). Um den weiteren Verlauf des Strahls nach der Linse zu finden, denke man sich den Strahl S durch Parallelstrahlen zu einem Parallelbündel erweitert. Ein Parallelbündel hat seinen Fokussierungspunkt immer in der Brennebene. Um diesen Fokussierungsort zu finden, zeichnet man einen zu S parallelen Strahl S' durch den Brennpunkt F. Dieser Strahl S' läuft nach der Linse parallel zur optischen Achse weiter. Sein Schnittpunkt mit der Brennebene, die durch F' geht, ist der gesuchte Fokussierungsort für alle zu S parallelen Strahlen. Der Strahl S muß also auch durch diesen Punkt laufen.

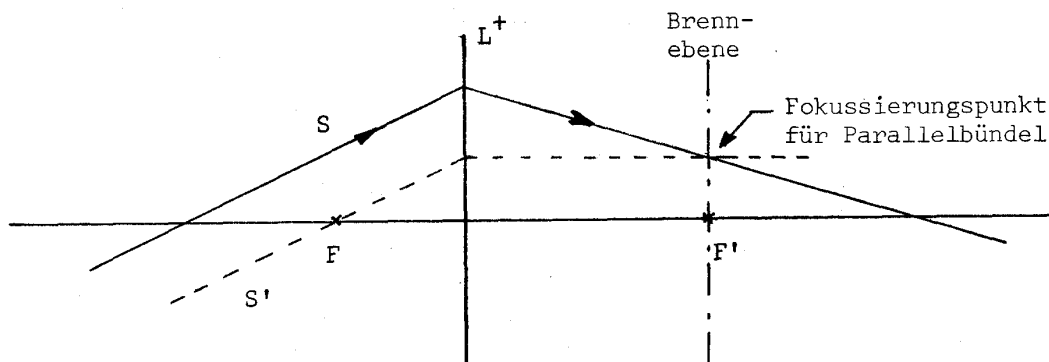


Abb. 4.17: Strahlengang eines Lichtstrahls durch eine Linse.

- **Abbildungsgleichung**

Lage und Größe des Bildes bei einer optischen Abbildung lassen sich auch berechnen. Die entsprechenden Gleichungen können leicht hergeleitet werden.

Als **Abbildungsmaßstab** oder **Lateralvergrößerung** bezeichnet man das Verhältnis  $V$  von Bildgröße  $B$  zu Gegenstandsgröße  $G$ :

$$\boxed{V = \frac{B}{G}} \quad (4.10)$$

$V$  ist für ein optisches System keine feste Zahl, sondern hängt von der Lage des Gegenstandes ab. Aus der Abb. 4.15 lassen sich aus ähnlichen Dreiecken folgende Proportionen ablesen:

$$\boxed{V = \frac{B}{G} = \frac{f}{g-f} \quad \text{und} \quad V = \frac{B}{G} = \frac{b-f'}{f'}} \quad (4.11)$$

Formt man diese Beziehung um, so erhält man zunächst:

$$f \cdot f' = bg - bf - gf' + ff' \quad \text{oder} \quad bf + gf' = bg$$

Durch Division der linken und rechten Seite mit  $bg$  ergibt sich dann die **Abbildungsgleichung** in der Form:

$$\boxed{\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}} + \frac{\mathbf{f}'}{\mathbf{b}} = 1} \quad (4.12)$$

Ersetzt man die Brennweiten  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{f}'$  durch die Brechkraft  $\mathbf{D}$  ( $\mathbf{f} = \mathbf{n}/\mathbf{D}$  und  $\mathbf{f}' = \mathbf{n}'/\mathbf{D}$ ), so nimmt die Abbildungsgleichung folgende Form an:

$$\boxed{\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{g}} + \frac{\mathbf{n}'}{\mathbf{b}} = \mathbf{D}} \quad (4.13)$$

Die Bildgröße  $\mathbf{B}$  lässt sich also aus Gl.4.11, die Bildentfernung  $\mathbf{b}$  aus Gl.4.12 oder Gl.4.13 berechnen.

Bei einer **Linse in Luft** sind die Brennweiten  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{f}'$  gleich groß. Die Abbildungsgleichung vereinfacht sich dann zu:

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{g}} + \frac{1}{\mathbf{b}} = \frac{1}{\mathbf{f}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\mathbf{g}} + \frac{1}{\mathbf{b}} = \mathbf{D}} \quad (4.14)$$

Für den Abbildungsmaßstab  $\mathbf{V}$  erhält man:

$$\boxed{\mathbf{V} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{G}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{g}}} \quad (4.15)$$

## Anhang I:

## Dicke Linsen

Bei dicken Linsen kann die zweimalige Brechung an den Grenzflächen der Linse nicht mehr durch eine Brechung **aller** Strahlen an **einer** Ebene ersetzt werden.

Läßt man ein Parallelbündel von links auf eine Linse fallen, so ist der Fokussierungspunkt der bildseitige Brennpunkt  $F'$ . Die zweimalige Brechung dieser Strahlen bei Ein- und Austritt kann durch **eine** Brechung an einer Ebene  $H'$  ersetzt werden (Abb. 4.A.1 links).

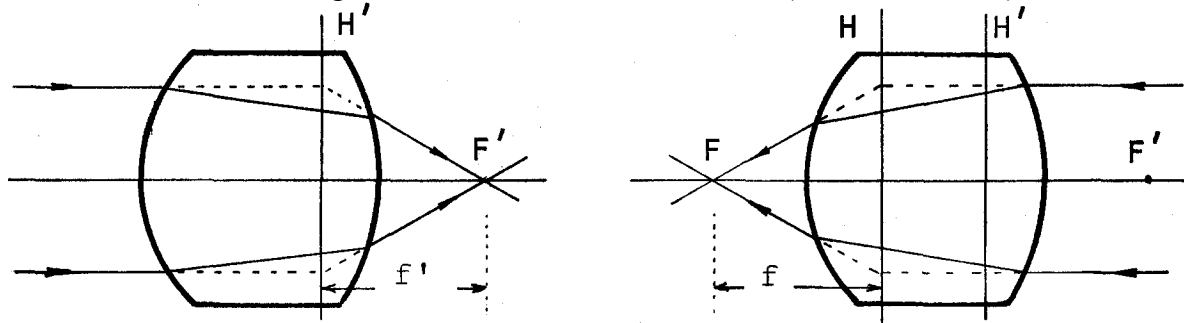


Abb. 4.A.1: Strahlengang in dicken Linsen

Bei der analogen Ermittlung des gegenstandsseitigen Brennpunkts  $F$  durch ein von rechts einfallendes Parallelbündel läßt sich eine Ebene  $H$  finden, an der wieder die einmalige Brechung erfolgen kann (Abb. 4.A.1 rechts). Nur bei dünnen Linsen fallen diese Ebenen  $H$  und  $H'$  näherungsweise zusammen. Bei dicken Linsen dagegen haben sie einen mehr oder weniger großen Abstand voneinander.

Definiert man den Abstand  $H'F'$  als Brennweite  $f'$  und den Abstand  $HF$  als Brennweite  $f$ , wird weiter die Gegenstandsweite  $g$  von  $H$  und die Bildweite  $b$  von  $H'$  ab gemessen, so gelten dieselben Abbildungsgleichungen und Konstruktionsverfahren wie bei den dünnen Linsen.

Die Schnittpunkte der Hauptebenen  $H$  und  $H'$  mit der optischen Achse heißen Hauptpunkte  $H$  und  $H'$ . Der Abstand der Knotenpunkte  $K$  und  $K'$  von den Hauptebenen  $H$  und  $H'$  ist - wie auch bei dünnen Linsen - gleich  $f' - f$ .

Die **Bildkonstruktion bei dicken Linsen** ist aus der Abb. 4.A.2 ersichtlich:

- 1) Der Parallelstrahl 1 läuft bis zur Hauptebene  $H'$  und von hier ab in Richtung  $F'$ .
- 2) Der Brennpunktstrahl geht durch  $F$  bis zur Hauptebene  $H$  und läuft von hier ab parallel zur optischen Achse.
- 3) Strahl 3 läuft auf  $K$  zu und dann parallel versetzt von  $K'$  weiter.

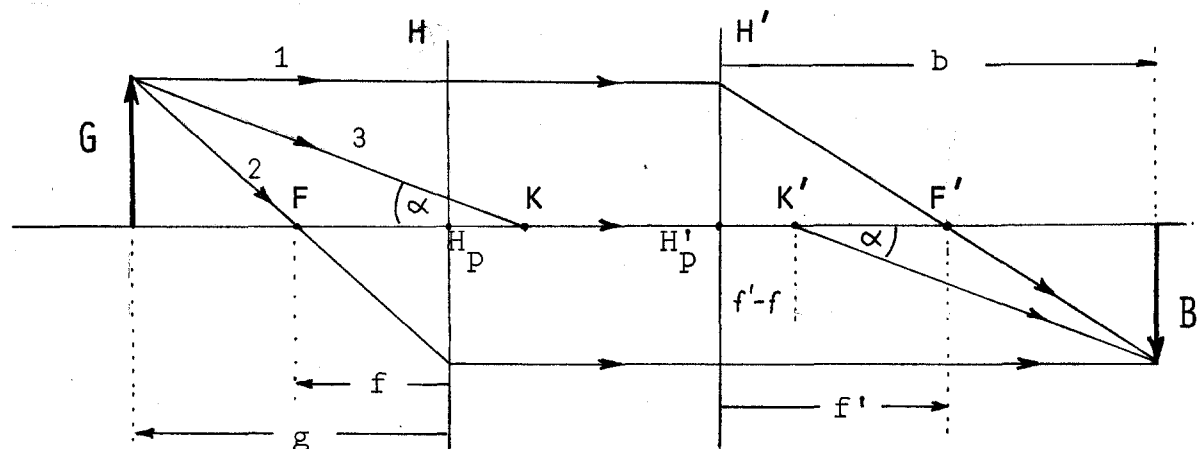


Abb. 4.A.2: Bildkonstruktion im Falle einer dicken Linse.

Die Abb. 4.A.3 zeigt die Querschnitte einiger sphärischer Sammell- und Zerstreuungslinsen mit der Lage der Hauptebenen. Am Beispiel c) und f) sieht man, daß die Hauptebenen auch außerhalb der Linse liegen können. Ein Fall, bei dem die Hauptebenen weit vor der Linse liegen, ist das Teleobjektiv.

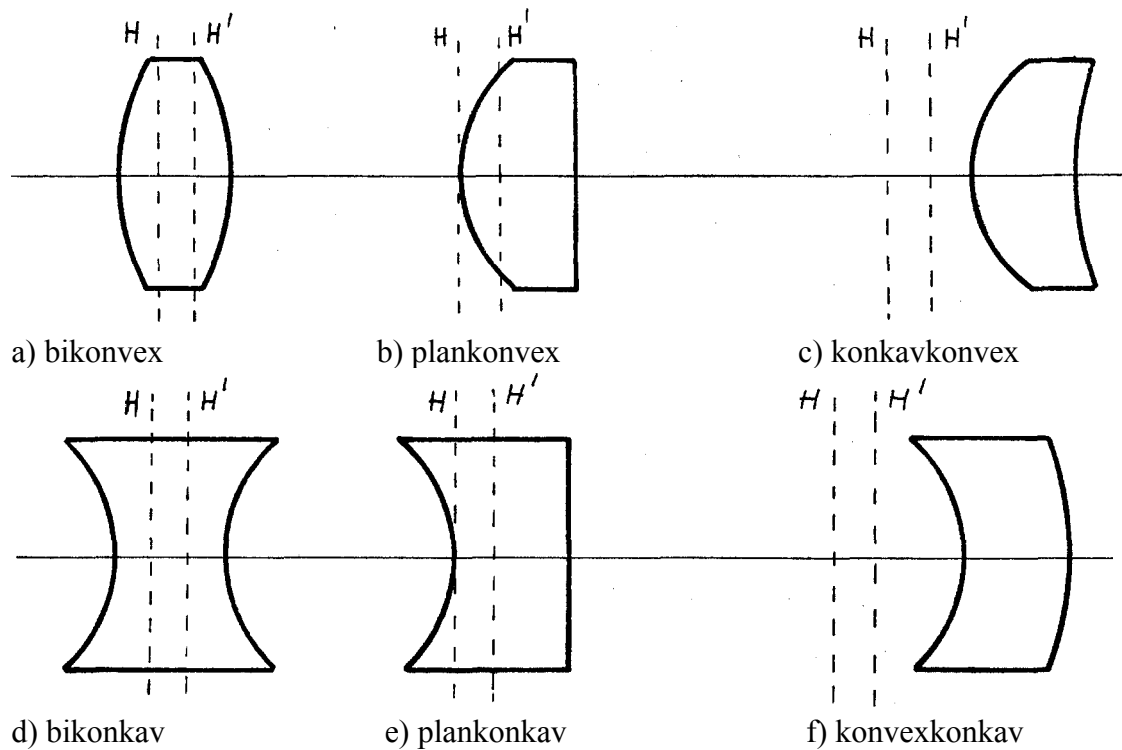


Abb. 4.A.3: Beispiele verschiedener Linsentypen.

- **Das Auge als optischer Apparat**

Abb. 4.19 zeigt im Schnittbild schematisch den Aufbau des menschlichen Auges bei Akkomodation auf Unendlich. Das abbildende System des Auges besteht aus vier brechenden Flächen. Von außen nach innen fortschreitend sind dies die Grenzflächen zwischen

- Luft und Hornhaut
- Hornhaut und Kammerwasser
- Kammerwasser und vorderer Linsenfläche
- Hinterer Linsenfläche und Glaskörper.

Die brechenden Flächen sind keine exakten Kugelflächen. Sie sind nicht zentriert (Krümmungsmittelpunkte liegen nicht auf einer Geraden). Für eine modellhafte Betrachtung wird das System jedoch als aus zentrierten Kugelflächen bestehend angesehen, so daß die für die Brechung an Kugelflächen geltenden Abbildungsgesetze angewendet werden können.

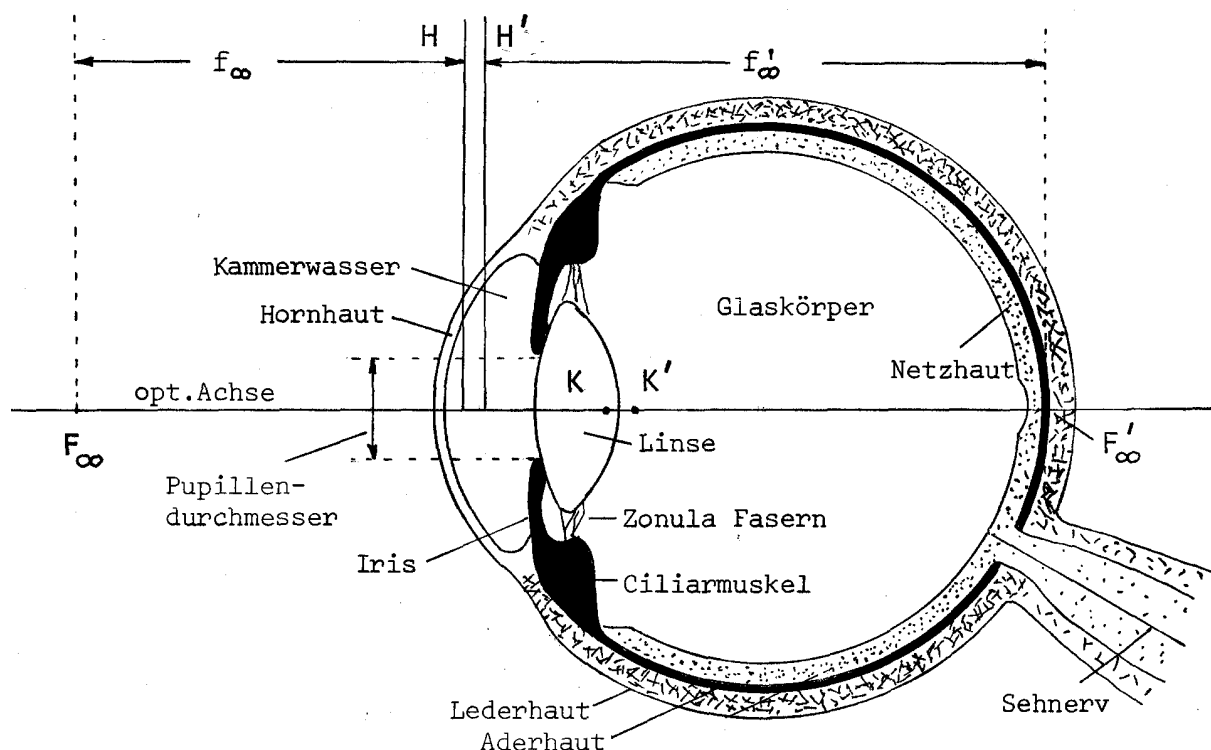


Abb. 4.19: Das menschliche Auge.

Die wichtigsten Daten des auf Unendlich akkomodierten Auges sind:

Bulbuslänge:	ca. 24 mm
Vordere Brennweite:	$f_\infty = 17,06$ mm
Hintere Brennweite:	$f'_\infty = 22,78$ mm
Abstand der Hauptebene H von Hornhautscheitel:	ca. 1,35 mm
Abstand der Hauptebenen voneinander:	ca. 0,25 mm
Abstand der Knotenpunkte voneinander:	ca. 0,25 mm
Krümmungsradius der Hornhaut:	ca. 7,8 mm
Krümmungsradius der vorderen Linsenfläche:	10 mm
Krümmungsradius der hinteren Linsenfläche:	6 mm
Brechzahl der Hornhaut:	1,376
Brechzahl des Kammerwassers:	1,336

Brechzahl des Glaskörpers: 1,336  
 Brechzahl des Linsenmaterials von vorn nach hinten zunehmend vom Wert 1,37 bis 1,40. Dies führt zu einem Effektivwert von 1,415.  
 Änderung des Pupillendurchmessers von 2 mm bis 8 mm je nach Lichtintensität.

Das Auge entwirft auf der Netzhaut (= lichtempfindliche Schicht) reelle, umgekehrte und verkleinerte Bilder.

Damit das Auge Gegenstände in verschiedenen Entfernungen immer scharf auf der Netzhaut abbilden kann, muß die Brechkraft der Augenlinse veränderlich sein, da die Bildweite (= Abstand der Hauptebene H' von der Netzhaut) nicht variiert werden kann. Die Brechkraft einer Linse hängt von den Krümmungsradien der Linsenflächen und von den Brechzahlen des Linsenmaterials und des Materials vor und hinter der Linse ab. Beim Sehen in die Ferne ist die Augenlinse am flachsten und dementsprechend die Brechkraft am geringsten. Beim Nahsehen muß sich die Brechkraft der Linse erhöhen, d.h. die Linsenflächen müssen stärker gekrümmt werden, da sonst die Bilder hinter der Netzhaut liegen würden. Die Linse ist aus elastischem Material. Beim Nahsehen kontrahiert sich nun der Ciliarmuskel, so daß der Zug über die Zonula Fasern auf die Linse nachläßt und die Linse sich von selbst stärker krümmt, wodurch deren Brechkraft zunimmt. Wegen der Inhomogenität des Linsenmaterials (Brechzahl nimmt von vorn nach hinten zu) kommt es bei der Krümmung auch zu einer geringfügigen Änderung der effektiven Brechzahl. Beim Blick in die Ferne erschlafft der Ciliarmuskel und die elastische Aderhaut zieht die Linse wieder flach.

Diese Anpassung der Brechkraft des Auges an die Entfernung der Gegenstände durch Veränderung der Krümmung der Linse heißt **Akkommodation**. Das Auge ist nur beschränkt akkommodationsfähig. Unter der **Akkommodationsbreite** versteht man die Brechkraftzunahme in Dioptrien beim Übergang von der völligen Akkommodationsruhe zu maximaler Naheinstellung. Sie ist ein Maß für die Leistungsfähigkeit des Auges. Sie beträgt für den Jugendlichen im Mittel 12 dpt und nimmt im Alter bis auf eine Dioptrie ab. Der Nahpunkt liegt je nach Alter zwischen 7 cm und 200 cm (für einen 30-jährigen im Mittel bei 15 cm). Die Abnahme der Akkommodationsbreite mit zunehmendem Alter ist eine Folge der Abnahme der Elastizität des Linsenmaterials.

Zwischen der Entfernung  $g_N$  des Nahpunktes, der Entfernung  $g_F$  des Fernpunktes und der Akkommodationsbreite  $\Delta D$  besteht folgende Beziehung:

$$\frac{1}{g_N} - \frac{1}{g_F} = \Delta D \quad (4.16)$$

Unter dem **Fernpunkt** versteht man den Punkt, auf dem das Auge bei völliger Akkommodationsruhe eingestellt ist. Der **Nahpunkt** ist dann entsprechend der Punkt, auf dem das Auge bei stärkster Akkommodation eingestellt ist. Beim **emmetropen** (normalsichtigen) Auge ist  $g_F = \infty$ , d.h. es gilt:

$$\frac{1}{g_N} = \Delta D \quad (4.17)$$

**in Worten:** Beim normalsichtigen Auge ist der Reziprokwert der Nahpunktentfernung gleich der Akkommodationsbreite.

Die obige Beziehung kann aus der Abbildungsgleichung hergeleitet werden.

Für Ferneinstellung gilt:

$$\frac{n}{g_F} + \frac{n'}{b} = D_F \quad (1)$$

Für Naheinstellung gilt:

$$\frac{n}{g_N} + \frac{n'}{b} = D_N \quad (2)$$

Subtrahiert man Gl.(1) von Gl.(2), so erhält man die obenstehende Beziehung, da die Bildweite  $b$  beim Auge unveränderlich ist, und die Brechzahl  $n$  für Luft gleich 1 ist.  $D_N - D_F = \Delta D$  ist die Akkommodationsbreite.

• **Kurz- und Weitsichtigkeit (Myopie und Hypermetropie)**

Bei einem normalsichtigen (**emmetropen**) Auge liegt der hintere Brennpunkt  $F'$  bei Akkommodationsruhe auf der Netzhaut (Abb. 4.20). Bei einem fehlsichtigen (**ametropen**) Auge ist dies nicht der Fall. Beim kurzsichtigen Auge liegt  $F'$  vor der Netzhaut (Abb. 4.21 links). Hier ist der Augapfel zu lang oder die Brechkraft der Hornhaut zu groß. Beim weitsichtigen Auge liegt  $F'$  hinter der Netzhaut (Abb.4.22 links).

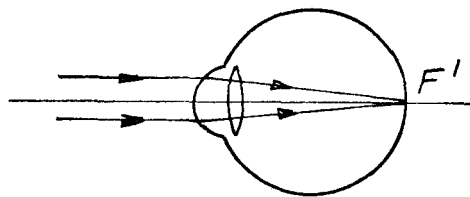


Abb. 4.20: Strahlengang in einem normalsichtigen Auge.



Abb. 4.21: Strahlengang in einem kurzsichtigen Auge (links) und nach Korrektur durch eine Zerstreuungslinse (rechts).

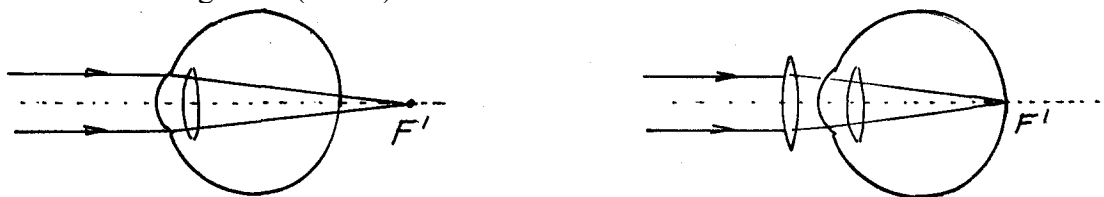


Abb. 4.22: Strahlengang in einem weitsichtigen Auge (links) und nach Korrektur durch eine Sammellinse (rechts).

Zur Korrektur dienen Brillen bzw. Kontaktlinsen mit negativer Brechkraft bei der Kurzsichtigkeit und mit positiver Brechkraft bei der Weitsichtigkeit (Abb. 4.21 rechts und Abb. 4.22 rechts).

Als **Alterssichtigkeit** (Presbyopie) bezeichnet man die Erscheinung, daß aufgrund der abnehmenden Elastizität des Linsenmaterials im Alter, der Nahpunkt immer weiter wegrückt vom Auge, die Akkommodationsbreite des Auges also abnimmt. Die Korrektur erfolgt durch Sammellinsen (Lesebrille).

**Übungsaufgabe:** Bei einem Auge sei der Augapfel 2 mm länger als normal. Die Brennweiten des Auges bei Akkommodationsruhe seien:  $f_\infty = 17 \text{ mm}$  und  $f'_\infty =$

23 mm.

a) Wie weit ist der Fernpunkt vom Auge entfernt?

b) Welchen Brechwert muß eine Kontaktlinse haben, um diesen Augenfehler zu korrigieren?

**Lösung:**

a) Auge bildet Gegenstände in der Fernpunktsentfernung ( $g_F$ ) bei Akkommodationsruhe auf der Netzhaut ab. Anwendung der Abbildungsgleichung liefert:

$$\frac{n}{g_F} + \frac{n'}{b} = D_\infty; n = 1; n' = f'_\infty / f_\infty = 23/17; b = f'_\infty + 2\text{mm} = 25\text{mm}; D_\infty = 1/f_\infty = 58,8\text{dpt};$$

**Auflösung der Abbildungsgleichung nach  $g_F$  :  $g_F = 21,2\text{cm}$**

b)  $D_{\text{korr}}$  sei die Brechkraft der erforderlichen Kontaktlinse. Mit Kontaktlinse muß  $g_F$  Unendlich sein. Es gilt dann:

$$\text{Ohne Kontaktlinse : } \frac{1}{g_F} + \frac{n'}{b} = D_\infty \quad (1), \quad \text{mit Kontaktlinse : } \frac{1}{\infty} + \frac{n'}{b} = D_\infty + D_{\text{korr}} \quad (2)$$

$$\text{Gl.2 min us Gl.1 ergibt : } D_{\text{korr}} = -\frac{1}{g_F} = -4,7\text{dpt}$$

- **Schwinkel**

Als **Schwinkel** bezeichnet man den Winkel  $\epsilon$ , unter dem ein Gegenstand  $PP_1$  vom Auge gesehen wird (s. Abb. 4.23). Die Größe des Bildes  $P'P'_1$  auf der Netzhaut hängt nur vom Schwinkel  $\epsilon$  ab, da die Entfernung Knotenpunkt-Netzhaut beim Auge konstant ist.

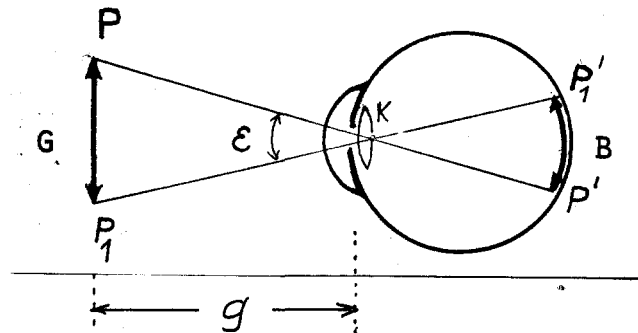


Abb. 4.23: Zur Definition des Schwinkels.

Für nicht zu große Schwinkel läßt sich die Bildgröße auf der Netzhaut bei gegebenem Schwinkel aus der Beziehung berechnen:

$$B = \overline{P'P'_1} = f \cdot \tan \epsilon \quad (4.18)$$

f (= vordere Brennweite) ist die Entfernung des Knotenpunktes von der Netzhaut.

Der Schwinkel  $\epsilon$  seinerseits ist abhängig von der Größe und der Entfernung des Gegenstandes. Ist g die Entfernung, so gilt:

$$\tan \epsilon = \frac{\overline{PP_1}}{g} = \frac{G}{g} \quad (4.19)$$

mit G = Gegenstandsgröße.

- **Auflösungsvermögen des Auges: Physiologischer Grenzwinkel, Visus**

Wir betrachten in der Abb. 4.23 P und  $P_1$  als zwei getrennte Gegenstandspunkte, deren Bilder auf der Netzhaut dann  $P'$  und  $P'_1$  sind. Der Abstand B der Bildpunkte auf der Netzhaut - und

damit auch der Abstand der Gegenstandspunkte - darf einen bestimmten Minimalwert  $B_{\min}$  nicht unterschreiten. Dieser Wert  $B_{\min}$  ist der mittlere Abstand zweier Sehzellen auf der Netzhaut. Er beträgt ca.  $5\mu\text{m}$ . Fallen nämlich **beide** Bilder  $\mathbf{P}'$  und  $\mathbf{P}'_1$  auf **eine** Sehzelle, dann entsteht der Eindruck, als ob nur **ein** Bildpunkt, d.h. also auch nur **ein** Gegenstandspunkt vorhanden wäre. Bei zu kleinem Winkelabstand der Punkte kann das Auge die Gegenstandspunkte nicht mehr unterscheiden. Man sagt: Das Auge kann die Punkte nicht mehr auflösen. Es gibt also einen kleinsten vom Auge gerade noch auflösbaren Winkelabstand zweier Punkte. Dieser Winkel wird als **physiologischer Grenzwinkel**  $\epsilon_{\min}$  bezeichnet. Sein Wert kann mithilfe der Gl.4.18 abgeschätzt werden.

Für das normalsichtige Auge ist:

$$\epsilon_{\min} \approx 1' \quad (1 \text{ Winkelminute})$$

Bei vermindertem Sehvermögen ist  $\epsilon_{\min} > 1'$ .

Man definiert als **Sehschärfe** oder **Visus** den Reziprokwert des physiologischen Grenzwinkels mit der Bezeichnung Winkelminute<sup>-1</sup>:

$$\boxed{\text{Visus} = \frac{1}{\epsilon_{\min}}} \quad (4.19a)$$

Die Sehschärfe ist eine wesentliche Größe zur Beurteilung des Sehvermögens. Sie wird mithilfe von Sehtafeln mit verschiedenen großen Buchstaben bzw. Ringen (Landolt-Ringe) bestimmt.

Die oben gegebene physiologische Erklärung für das begrenzte Auflösungsvermögen des Auges aus der Netzhautstruktur kann natürlich auch durch eine physikalische Theorie - nämlich der **Beugungstheorie** des Lichts an Öffnungen - geliefert werden, wie dies bei sämtlichen optischen Instrumenten (Mikroskop, Fernrohr) zur Ermittlung des Auflösungsvermögens der Fall ist. Die Beugungstheorie liefert beim Auge für den physiologischen Grenzwinkel ebenfalls den Wert von ca. 1 Winkelminute.

### • Optische Vergrößerung (Angularvergrößerung)

Je kleiner der Sehwinkel ist, unter dem uns ein Gegenstand erscheint, umso kleiner ist auch das Bild auf der Netzhaut. Deutliches Sehen ist daher nur möglich, wenn der Sehwinkel eines Gegenstandes ausreichend groß ist. Um bei kleinen Gegenständen den Sehwinkel zu vergrößern, kann man zunächst versuchen, den Gegenstand näher ans Auge zu bringen. Durch den Nahpunkt des Auges ist aber dieser Methode der Sehwinkelvergrößerung eine frühe Grenze gesetzt. Eine Steigerung des Sehwinkels ist dann nur noch mit geeigneten optischen Instrumenten erreichbar, nämlich mit Lupe und Mikroskop für nahe, mit Fernrohr für weit entfernte Gegenstände.

Man definiert nun als die **optische Vergrößerung**  $v$  eines Instruments den Quotienten aus dem Tangens des Sehwinkels  $\epsilon$ , der mit Instrument erreicht wird, und dem Tangens des Sehwinkels  $\epsilon_0$ , unter dem der Gegenstand ohne Instrument gesehen wird:

$$v = \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0} \quad \text{oder} \quad v = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (4.20)$$

Da es sich hier bei den Sehwinkeln um kleine Winkel handelt, kann  $\tan \epsilon$  durch  $\epsilon$  ersetzt werden.

$v$  wird auch **Angularvergrößerung** genannt. Sie darf nicht verwechselt werden mit der Lateralvergrößerung  $V = B/G$ . Da der Sehwinkel von der Entfernung des Gegenstandes abhängt, muß für die Berechnung des Sehwinkels  $\epsilon_0$  ohne Instrument eine bestimmte

Entfernung  $s_0$  vom Auge vereinbart werden, da sonst Vergleiche der Vergrößerungswerte nicht möglich sind. Man hat die Entfernung  $s_0 = 25$  cm gewählt und bezeichnet sie als **deutliche Sehweite**. Der Winkel  $\epsilon_0$  berechnet sich dann aus der Beziehung:  $\tan \epsilon_0 = G/s_0$ .

- **Lupe**

Eine Lupe besteht aus einer Sammellinse. Der zu betrachtende Gegenstand wird so weit an die Lupe herangebracht, daß er sich **innerhalb der einfachen Brennweite** oder gerade in der Brennebene befindet. Die Bildkonstruktion für den Fall, daß  $g < f$  ist, zeigt Abb. 4.24. Das Auge sieht also - von rechts durch die Lupe blickend - ein aufrechtes, vergrößertes und virtuelles Bild. Durch die Brechkraft des Auges werden die divergent ins Auge fallenden Strahlen auf der Netzhaut zu einem reellen Bild vereinigt. Die Vergrößerung  $v_L$  der Lupe läßt sich wie folgt bestimmen:

Ist  $G$  die Gegenstandsgröße, so ist der Sehwinkel ohne Instrument (bzw. der Tangens) gleich:  $\tan \epsilon_0 = G/s_0$ . Das Bild  $B$  erscheint, wie die nebenstehende Abbildung verdeutlicht, unter dem Sehwinkel  $\epsilon$ :  $\tan \epsilon = B/b = G/g$ . Ohne Lupe erscheint der Gegenstand also unter dem Sehwinkel  $\epsilon_0 = G/s_0$ , mit Lupe unter dem Winkel  $\epsilon = G/g$ . Somit ist die Vergrößerung der Lupe  $v_L$  zu berechnen nach:  $v_L = \epsilon/\epsilon_0 = s_0/g$ .

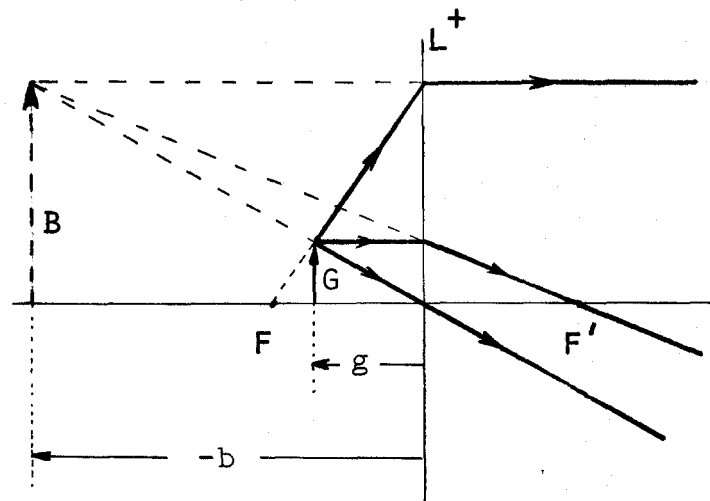


Abb. 4.24: Bildkonstruktion bei der Verwendung einer Lupe.

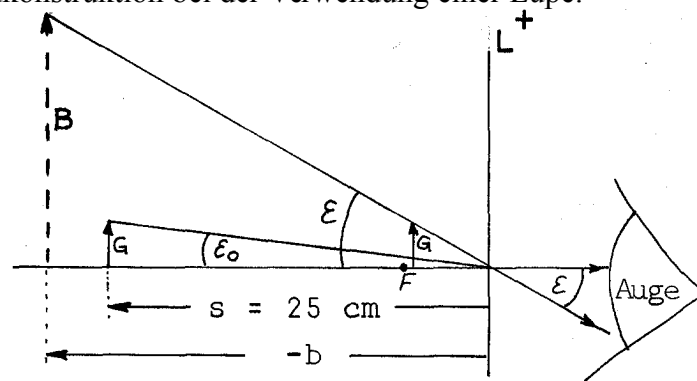


Abb. 4.25: Zur Definition der Vergrößerung einer Lupe.

Eliminiert man  $g$  mithilfe der Abbildungsgleichung, so erhält man:

$$v_L = \frac{s_0}{f} - \frac{s_0}{b} \quad (4.21)$$

In der Praxis spielen zwei Fälle eine Rolle:

a) Das Bild entsteht im Unendlichen ( $\mathbf{b} = -\infty$ ); dann ist:

$$v_L = s_0 / f \quad (4.22)$$

b) Das Bild entsteht in der deutlichen Sehweite ( $b = -s_0$ );

$$v_L = s_0 / f + 1$$

## • Mikroskop

Mit dem Mikroskop wird eine zweistufige Abbildung durchgeführt. Es enthält zwei Sammellinsen (bzw. zwei Linsensysteme): Das **O b j e k t i v** und das **O k u l a r**. Die Objektivbrennweite  $f_{ob}$ , beträgt einige Millimeter, die Okularbrennweite  $f_{ok}$  einige Zentimeter.

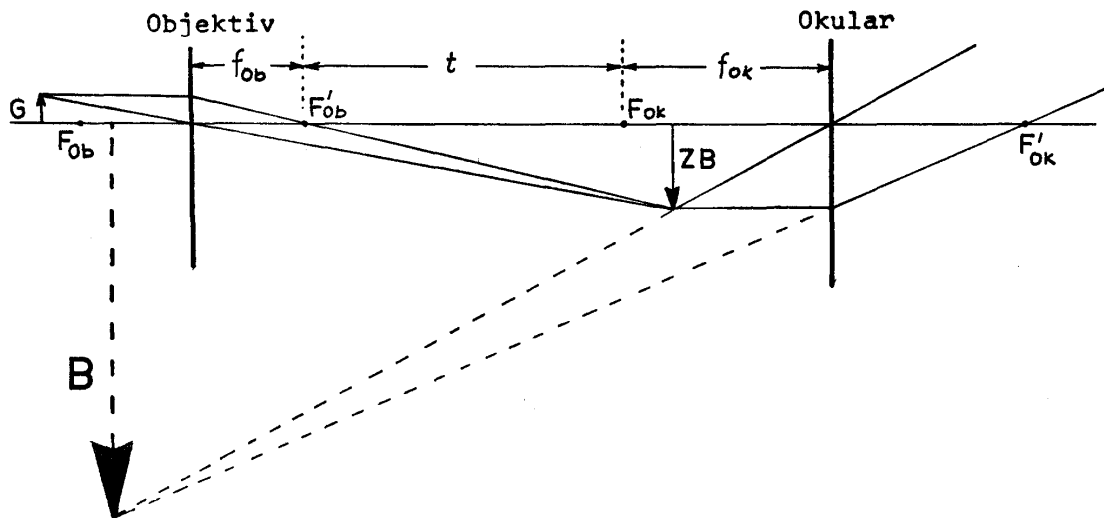


Abb. 4.25: Bildkonstruktion im Mikroskop.

Das Objektiv entwirft vom Gegenstand ein reelles, vergrößertes, umgekehrtes Bild (Zwischenbild ZB in Abb.4.25). Dieses Zwischenbild wird mit dem Okular betrachtet, wobei das Okular die Funktion einer Lupe übernimmt. Das Gesamtbild B ist nun virtuell und - verglichen mit dem Gegenstand G - umgekehrt. Die Gesamtvergrößerung  $v$  des Mikroskops ist das Produkt aus Objektiv- und Okularvergrößerung. Der Gegenstand muß zwischen einfacher und doppelter Objektivbrennweite liegen (nahe an  $F_{ob}$ ).

Im praktischen Fall wird der Gegenstand (Objekt) so justiert, daß das Zwischenbild in der Brennebene des Okulars liegt. Das Bild B liegt dann im Unendlichen, so daß mit entspanntem, d.h. mit auf Unendlich akkommodiertem Auge mikroskopiert werden kann. Für diesen - in der Abb.4.25 nicht dargestellten Fall - erhält man für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops:

$$v_M = v_{ob} \cdot v_{ok} = \frac{t}{f_{ob}} \cdot \frac{s_0}{f_{ok}} \quad (4.23)$$

$t$  = "Tubuslänge" = Abstand der inneren Brennpunkte (ungefähr Mikroskoplänge).  $t$  beträgt ca. 15 cm.

- **Auflösungsvermögen des Mikroskops, numerische Apertur**

Mit dem Lichtmikroskop können nicht beliebig kleine Objekte (z.B. ein Atom oder ein Molekül) betrachtet werden. Es existiert eine untere Grenze. Objekte, die kleiner sind, werden nicht mehr aufgelöst, d.h. man kann ihre Struktur nicht mehr erkennen. Der Grund für das begrenzte Auflösungsvermögen liegt, wie bei allen optischen Instrumenten, in der Wellennatur des Lichts und in der damit verbundenen Erscheinung der **Beugung**. Wie bei Versuch 5A näher ausgeführt wird, entstehen bei einer optischen Abbildung durch die Strahlenbegrenzung an den Linsenöffnungen (hier: Objektivdurchmesser; beim Auge Pupillendurchmesser) statt idealer scharfer Bildpunkte kleine ausgedehnte Lichtflecke, die sog. **Beugungsscheibchen**. Die Größe der Beugungsscheibchen hängt von der Wellenlänge des Lichts und vom Durchmesser der Objektivöffnung ab. Die Beugungsscheibchen sind um so größer, je kleiner die Objektivöffnung und je größer die Wellenlänge des Lichts ist. Liegen die Objektpunkte nahe beieinander, so liegen auch die Beugungsscheibchen der Bilder nahe zusammen und können sich bei zu geringem Abstand so weit überlappen, daß eine Unterscheidung, ob es sich um einen oder zwei Lichtflecke handelt, nicht mehr möglich ist. Die folgende Abbildung verdeutlicht dies.

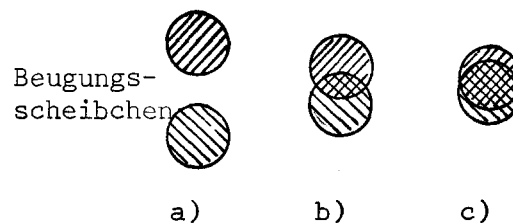


Abb. 4.26.: Auflösungsvermögen verdeutlicht an Hand der Überlappung von Beugungsscheibchen. Die Beispiele zeigen den Fall guter Auflösung (a), den Grenzfall der gerade noch vorhandenen Auflösung (b) und unzureichende Auflösung (c).

Es stellt sich nun die Frage, welchen kleinsten Abstand  $d$  zwei Gegenstandspunkte für ein gegebenes Objektiv haben dürfen, damit die Beugungsscheibchen ihrer Bilder in der Zwischenbildebene gerade noch als zwei, sich aber bereits überlappende, Lichtflecke wahrnehmbar sind (Fall (b) in Abb.4.26). Der Reziprokwert von  $d$  wird dann als **Auflösungsvermögen** bezeichnet. Die Theorie liefert für den kleinsten gerade noch auflösbaren Abstand  $d$  zweier Objektpunkte folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{d = \frac{\lambda}{n \cdot \sin \alpha} = \frac{\lambda}{A}} \quad (4.24)$$

$n \sin \alpha = A$  heißt **numerische Apertur** des Objektivs.  $\lambda$  ist die Wellenlänge des zur Abbildung verwendeten Lichts. Sichtbares Licht hat Wellenlängen von ca. 400 bis 750 nm. Grünes Licht hat die Wellenlänge 550 nm, gelbes etwa 600 nm.  $n$  ist die Brechzahl des Mediums zwischen Objekt und Objektiv.  $\alpha$  ist der halbe Öffnungswinkel, unter dem die Objektivöffnung vom Gegenstand aus erscheint (Abb. 4.27).

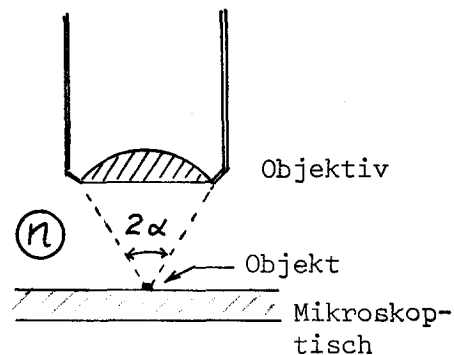


Abb. 4.27: Zur Herleitung des Auflösungsvermögens eines Mikroskops.

- **Immersionssysteme**

Normalerweise ist zwischen Objekt und Objektiv Luft ( $n = 1$ ). Bringt man in den Zwischenraum ein durchsichtiges Medium höherer Brechzahl - am günstigsten eines mit der Brechzahl von Glas, z.B. Zedernholzöl mit  $n = 1,5$  -, so wird nach Gl.4.24 ein kleinerer Wert für  $d$ , also ein höheres Auflösungsvermögen erreicht. Man spricht dann von einem **Immersionssystem**.

Eine weitere Steigerung des Auflösungsvermögens kann durch Verwendung von ultraviolettem Licht (UV) erreicht werden. Man benötigt dann allerdings eine teure Quarzoptik und ist auf fotografische Aufnahmen bzw. Bildwandler bei der Betrachtung angewiesen. Normales Glas läßt keine UV-Strahlung durch.

**Was man unbedingt wissen sollte:**

- Welche Eigenschaft beschreibt der Brechungsindex eines Mediums?
- Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und in einem Medium?
- Wie lauten Reflexions- und Brechungsgesetz?
- Warum kann Totalreflexion nur vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium auftreten?
- Wie erzeugt man paralleles Licht?
- Was versteht man anschaulich unter dem Begriff Brennweite?
- In welche Beziehung stehen Brechkraft und Brennweite?

- **Wie viele Grenzflächen hat jede Linse?**
- **Wie berechnet sich die Brennweite von Linsensystemen?**
- **Wie lautet die Abbildungsgleichung (allgemeine Form und die vereinfachte Form für eine Linse in Luft)?**
- **Welche physikalische Erscheinung beschränkt das Auflösungsvermögen eines Mikroskops?**
- **Welche Linsen werden in einem Mikroskop kombiniert? Wie sind sie angeordnet?**
- **Was beschreibt die numerische Apertur?**

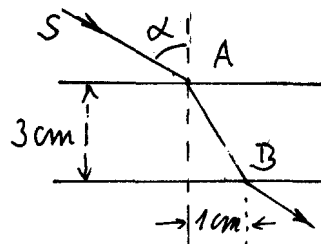
## Übungen:

Ü 4.1

Warum wird Licht gebrochen? Wie ist die Brechzahl definiert? Welche Brechzahlen haben Luft und Glas?

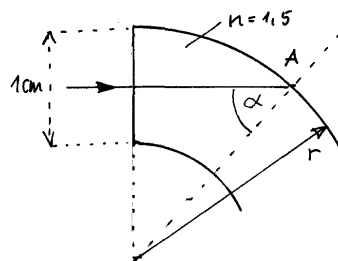
Ü 4.2

Ein Lichtstrahl  $S$ , der auf eine 3 cm dicke Glasplatte fällt, soll auf der Unterseite 1 cm versetzt bei  $B$  wieder austreten. Welchen Einfallswinkel muß der Strahl haben?



Ü 4.3

In eine gebogene Glasplatte (Dicke 1 cm) tritt senkrecht zur Stirnseite und in der Mitte ein Lichtstrahl ein. Tritt der Lichtstrahl bei  $A$  aus der Glasoberfläche aus oder wird er totalreflektiert, wenn der Krümmungsradius  $r$  der äußeren Plattenfläche 2 cm beträgt?

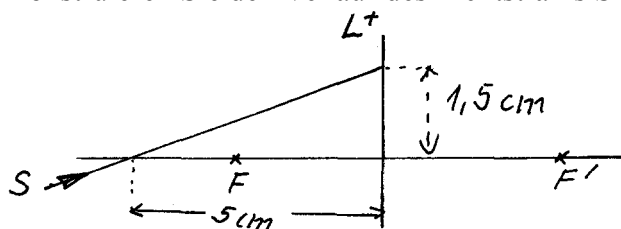


U 4.4

Wie groß sind in der Aufg. 4.2 die geometrische und die optische Weglänge zwischen  $A$  und  $B$ ?

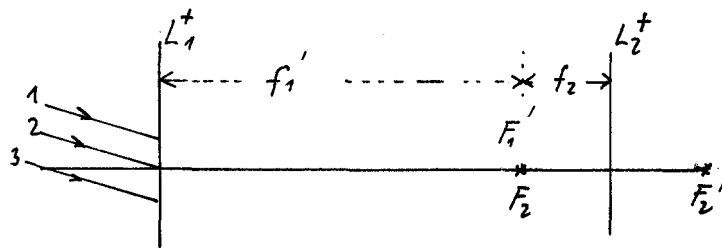
Ü 4.5

Konstruieren Sie den Verlauf des Lichtstrahls  $S$  nach der Linse mit  $f = 3$  cm und  $f = 4$  cm.



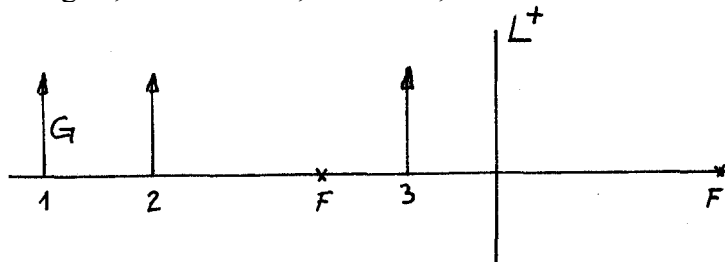
Ü 4.6

Gegeben ist ein konfokales Linsensystem aus zwei Sammellinsen  $L_1^+$  und  $L_2^+$  im Abstand  $f_1 + f_2$  in Luft (astronomisches Fernrohr). Konstruieren Sie den Verlauf der drei parallelen Lichtstrahlen 1, 2, 3 durch das Linsensystem. Welche Bilder entwirft dieses Fernrohr?



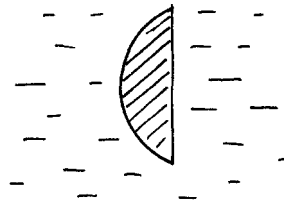
Ü 4.7

Konstruieren Sie jeweils das Bild des Gegenstandes G, wenn dieser sich in den Positionen  $g_1=8\text{ cm}$ ,  $g_2=6\text{ cm}$  und  $g_3=1,5\text{ cm}$  befindet,  $f=3\text{ cm}$ ;  $f'=4\text{ cm}$ .



Ü 4.8

Welche Brennweiten und welche Brechkraft hat eine Plankonvexlinse in Wasser, wenn der Krümmungsradius  $5\text{ cm}$  und die Brechzahl des Glases  $1,6$  ist?



Ü 4.9

Berechnen Sie die Brechkraft des emmetropen Auges aus den Brennweiten bei Akkommodationsruhe.

Ü 4.10

Welche Brennweiten und welche Brechkraft hat das aphake (linsenlose) Auge, wenn der Krümmungsradius der Hornhaut  $7,8\text{ mm}$  und deren Dicke  $0,6\text{ mm}$  beträgt?

Ü 4.11

Wie groß ist das Bild eines  $30\text{ m}$  hohen und  $90\text{ m}$  entfernten Turmes auf dem Negativ, wenn das Objektiv des Photoapparates eine Brennweite von  $42\text{ mm}$  hat?

Ü 4.12

Welche Brennweite hat ein System aus zwei Linsen mit je  $f=5\text{ cm}$ , wenn

- der Abstand der Linsen vernachlässigbar klein ist,
- der Abstand  $10\text{ cm}$  beträgt,
- der Abstand  $50\text{ cm}$  beträgt?

Ü 4.13

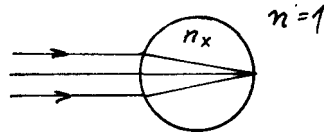
Welche Akkommodationsbreite hat ein emmetropes Auge, wenn der Nahpunkt  $17\text{ cm}$  entfernt ist vom Auge?

Ü 4.14

Der Fernpunkt eines Auges sei 2 m entfernt. Die Akkommodationsbreite sei 2 dpi. Wie groß ist die Nahpunktsentfernung?

Ü 4.15

Welche Brechzahl müßte das Material einer Kugel haben, damit ein Parallelbündel (s. Skizze) auf der Rückseite fokussiert wird?



Ü 4.16

Wie groß ist das Bild eines 5 cm großen und 80 cm entfernten Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges? Unter welchem Sehwinkel erscheint der Gegenstand? Welche Brechkraft hat bei dieser Abbildung das Auge?

Ü 4.17

Welchen Abstand  $d$  haben zwei Punkte, wenn sie dem Auge in 5 m Entfernung unter dem physiologischen Grenzwinkel erscheinen?

Ü 4.18

Ein Mensch kann zwei Punkte im Abstand von 2 mm in 3,5 m Entfernung gerade noch unterscheiden. Wie groß ist die Sehschärfe seines Auges?

Ü 4.19

Durch welche Maßnahmen läßt sich das Auflösungsvermögen eines Mikroskops verbessern?

Ü 4.20

Zur Korrektur eines weitsichtigen Auges (Brennweiten bei Akkommodationsruhe  $f_\infty = 17\text{mm}$  und  $f'_\infty = 23\text{ mm}$ ) ist ein Brillenglas der Stärke 3 dpi erforderlich. Um wie viele mm ist der Augapfel kürzer oder länger als normal?

Ü 4.21

Wo befindet sich im Mikroskop das Zwischenbild, wenn man mit auf Unendlich akkommodiertem Auge mikroskopiert?

## Anhang II: Das Brechungsgesetz von Snellius

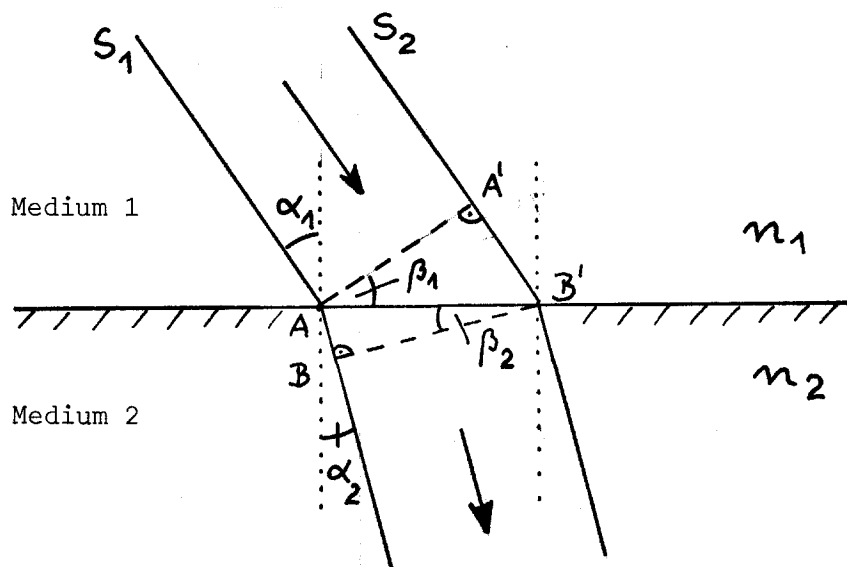


Abb. 4.A.4: Zur Herleitung des Brechungsgesetzes nach Snellius.

Ein paralleles Lichtbündel mit den Randstrahlen  $S_1$  und  $S_2$  treffe aus dem Medium 1 kommend unter dem Winkel  $\alpha_1$  (zum Lot hin gemessen) auf die Grenzfläche zwischen Medium 1 und Medium 2, deren Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$  seien (s. Abb. 4.A.4). Die Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichts im Medium 1 und 2 seien  $c_1$  und  $c_2$ . Es werde angenommen, daß  $c_2 < c_1$  ist, d.h. dann auch, daß  $n_2 > n_1$  ist.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  treffe der Randstrahl  $S_1$  des Bündels bei A auf die Grenzfläche. Den entsprechenden phasengleichen Punkt  $A'$  des Randstrahls  $S_2$  erhält man, wenn man von A aus eine Senkrechte auf  $S_2$  zeichnet.  $AA'$  stellt dann eine Wellenfläche dar (Wellenflächen stehen immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung).

Es sei nun  $t$  die Zeit, in der der Lichtstrahl  $S_2$  von  $A'$  bis  $B'$  läuft. In der **gleichen Zeit**  $t$  hat der Lichtstrahl  $S_1$  sich von A bis B weiterbewegt. Die Wellenfläche  $AA'$  ist also in die neue Lage  $BB'$  übergegangen. Man sieht, daß  $BB'$  eine andere Richtung hat als  $AA'$ , da die Strecke  $AB = c_2 \cdot t$  kleiner ist als die Strecke  $A'B' = c_1 \cdot t$ . Da die Ausbreitung des Bündels im Medium 2 wieder senkrecht zur Wellenfläche  $BB'$  erfolgen muß, hat also das Lichtbündel an der Grenzfläche eine Richtungsänderung erfahren. Aus der Abb. 4.A.4 kann man folgende Beziehungen ablesen:

$$\sin \beta_1 = \frac{A'B'}{AB'} \quad \text{und} \quad \sin \beta_2 = \frac{AB}{AB'}$$

$$\text{Da } \beta_1 = \alpha_1 \text{ und } \beta_2 = \alpha_2 \text{ ist, gilt dann } \sin \alpha_1 = \frac{c_1 \cdot t}{AB'} \text{ und } \sin \alpha_2 = \frac{c_2 \cdot t}{AB'}$$

$$\text{bzw. } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{oder} \quad n_1 \cdot \sin \alpha_1 = n_2 \cdot \sin \alpha_2 \quad \text{da} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{ist.}$$

## Anhang III:

## Abbildungsfehler bei Linsen

Die weiter oben dargestellten Abbildungsgesetze gelten näherungsweise nur für Paraxialstrahlen und auch nur für monochromatisches (einfarbiges) Licht. In der Praxis sind diese Bedingungen jedoch selten erfüllt, so daß bei der optischen Abbildung eine Reihe von Mängeln auftreten, die als **Abbildungsfehler** bezeichnet werden. Die hauptsächlichsten sind:

- **Chromatische Aberration (Farbfehler)**
- **Sphärische Aberration (Öffnungsfehler)**
- **Astigmatismus**
- **Bildfeldwölbung**
- **Kissen- und tonnenförmige Verzeichnung**

Es seien hier nur die ersten drei kurz erläutert.

### • Chromatische Aberration

Die Brechzahl  $n$  von Glas hängt von der Frequenz bzw. der Wellenlänge des Lichts ab, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  des Lichts im Glas von der Frequenz abhängt. Diese Erscheinung heißt allgemein **Dispersion**.  $n$  ist für blaues (kurzwelliges) Licht um einige Prozente größer als für rotes (langwelliges). Blaues Licht wird daher stärker gebrochen als rotes, so daß für "weißes" Licht (als Gemisch aus farbigem Licht) keine einheitliche Brennweite für eine Linse existiert. Die Brennweite für nur rotes Licht ist größer als die für nur blaues Licht. Die Folge ist, daß die Bilder **Farbränder** aufweisen. Durch Kombination einer Sammellinse mit einer Zerstreuungslinse anderer Brennweite und anderer Glassorte (d.h. anderer Dispersionskurve) kann der Farbfehler für zwei oder drei Farben korrigiert werden. Solche Systeme heißen **Achromate**.

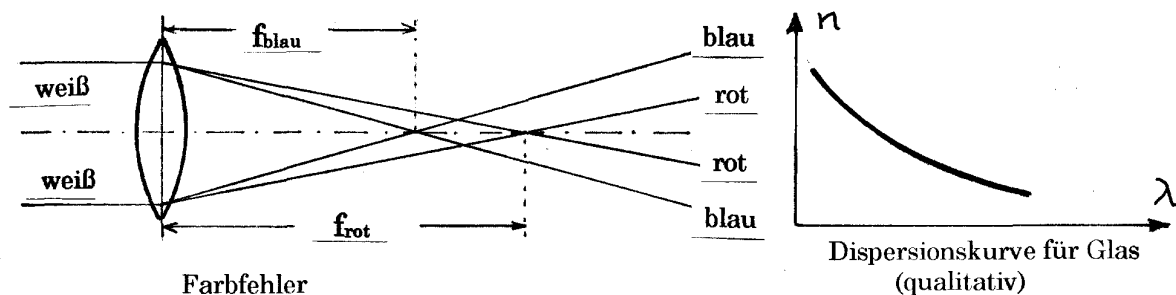


Abb. 4.A.5: Zur Erklärung der chromatischen Aberration.

### • Sphärische Aberration

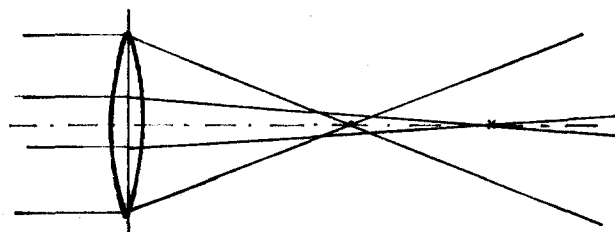


Abb. 4.A.6: Zur Erklärung der sphärischen Aberration (Öffnungsfehler).

Bei "voller Ausleuchtung" einer sphärischen Linse werden die achsenfernen Strahlen

(Randstrahlen) stärker gebrochen als die achsennahen (Paraxialstrahlen). So ergibt sich also für ein breites achsenparalleles Bündel auch bei einfarbigem Licht kein exakter Brennpunkt, sondern ein mehr oder minder großer Lichtfleck (Zerstreuungskreis). Die Bilder verlieren dadurch an "Schärfe".

Auch die sphärische Aberration (Öffnungsfehler) kann zumindest für bestimmte Gegenstands- und Bildweiten durch Kombination mit Zerstreuungslinsen behoben werden.

- **Astigmatismus**

**Astigmatisch** bedeutet nichtpunktförmig. Astigmatismus tritt auf, wenn Gegenstandspunkte weit außerhalb der optischen Achse liegen oder wenn die Linsenflächen keine einheitliche Krümmung aufweisen.

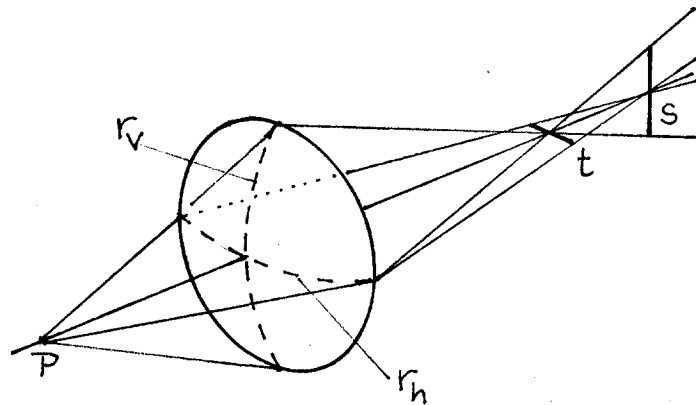


Abb. 4.A.7: Zur Erläuterung des Astigmatismus.

Bei einer Linse sei z.B. der Krümmungsradius  $r_h$  im Horizontalschnitt größer als der Krümmungsradius  $r_v$  im Vertikalschnitt. Licht, das von einem Gegenstandspunkt P ausgeht, wird dann nicht in einem Bildpunkt, sondern in zwei Linien s und t fokussiert, die verschiedene Entfernungen von der Linse haben und die sowohl senkrecht zueinander als auch senkrecht zur optischen Achse orientiert sind. Korrigierte Systeme heißen **Anastigmat**. Der Ausgleich einer ungenügenden Krümmung in einer Richtung kann durch Kombination mit einer Zylinderlinse erfolgen. Zylinderlinsen fokussieren nur in einer Richtung.

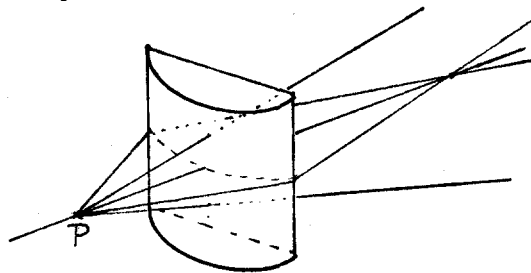


Abb. 4.A.8: Abbildungseigenschaften einer Zylinderlinse.

Astigmatismus ist ein häufiger Augenfehler. Die Hornhaut des Auges weist nämlich oft eine uneinheitliche Krümmung auf. Man spricht von **Hornhautverkrümmung**. Ein entsprechender Zylinderschliff in den Brillengläsern kann diesen Fehler beheben oder mindern.