

Versuch 7 Stromkreise und Leitfähigkeit

Zusatz zur Klausurvorbereitung

Stromkreise

Physikalische Grundbegriffe:

- Elektrische Ladung, Coulombsches Gesetz,
- Elektrisches Feld, Potential, Spannung
- Elektrischer Widerstand, Ohmsches Gesetz
- Kirchhoffsche Gesetze

meßtechnische Grundlagen:

- Oszillograph,
- Strom und Spannungsmessung
- Messbereichserweiterung

weiterführende Literatur:

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 209-258
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 135-142, 153-162
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14.Aufl. p. 105-128

Erläuterung der wichtigsten physikalischen Begriffe:

• Elektrische Ladung

Es gibt positive und negative Ladungen. Die Ladung ist stets an Materie gebunden und hat Mengen- und Quantencharakter, d.h. es gibt eine kleinste, nicht weiter teilbare Ladungsmenge. Sie wird als **Elementarladung** e bezeichnet. Ihr Betrag ist:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As.}$$

Die SI-Einheit für die Ladung ist 1 As (Ampere mal Sekunde), 1 As wird auch als 1 C (Coulomb) bezeichnet.

Als **Elektron** (e^-) bezeichnet man ein Teilchen mit der Masse $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$, das eine negative Elementarladung trägt.

Als **Positron** (e^+) bezeichnet man ein Teilchen mit der gleichen Masse, das eine positive Elementarladung trägt.

Coulombsches Gesetz

Ruhende elektrische Ladungen können durch ihre Kraftwirkung, die sie aufeinander ausüben, nachgewiesen werden:

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.

Coulomb fand durch Experimente heraus, dass die Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen Q und Q' proportional dem Produkt der beiden Ladungen und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes a der Ladungen ist:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q'}{a^2} \quad (6.1)$$

Gl.6.1 ist das **Coulombsche Gesetz**. Es hat formale Ähnlichkeit mit dem Gravitationsgesetz (s. Seite 0/24). Die Konstante ϵ_0 heißt Influenzkonstante oder elektrische Feldkonstante. Ihr Wert ist:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm.}$$

Die Kraft wirkt immer in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungsschwerpunkte. Gl.6.1 gilt für das Vakuum. Befindet sich ein nichtleitendes Medium (Dielektrikum) zwischen den Ladungen, so ist die Kraft geringer. Luft zwischen den Ladungen bewirkt gegenüber Vakuum nur eine geringe Veränderung (vergl. Grundlagen zu Versuch 7).

• Elektrisches Feld

Die von einer elektrischen Ladung ausgehende Kraftwirkung auf eine andere Ladung kann auch mit dem Begriff des *elektrischen Feldes* beschrieben werden. Nach dieser Vorstellung ist z.B. die Ladung Q' von einem *Kraftfeld* umgeben, das auf die Ladung Q dann eine zu Q proportionale Kraft ausübt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} \cdot Q \quad (6.2)$$

Der Proportionalitätsfaktor \mathbf{E} heißt **elektrische Feldstärke**.

SI-Einheit für \mathbf{E} : 1 V/m.

Anmerkung: Die SI-Einheit für \mathbf{E} wäre nach Gl.6.2 zunächst 1 N/As. Weiter unten wird gezeigt, dass mit Einführung der elektrischen Spannung U , deren Einheit mit 1 Volt (V) bezeichnet wird, die Beziehung 1 V = 1 Nm/As gilt. Also ist 1 N/As = 1V/m.

Gl.6.2 ist die Definitionsgleichung für die elektrische Feldstärke. Eine elektrische Feldstärke von 1 V/m herrscht also dann, wenn z.B. auf eine Ladung von 1 C die Kraft von 1 N ausgeübt wird.

Für die Feldstärke \mathbf{E} , die von der Punktladung Q' erzeugt wird, erhält man durch Vergleich von Gl.6.2 mit Gl.6.1 den Ausdruck:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q'}{a^2} \quad (6.3)$$

\mathbf{E} ist die im Abstand a von der Ladung Q' hervorgerufene Feldstärke. Sie ist proportional zu Q' und nimmt quadratisch mit der Entfernung von Q' ab.

Kraft und Feldstärke sind **vektorielle** Größen, die Ladung ist ein Skalar (ungerichtete Größe). Gl.6.3 ist als Betragsgleichung zu verstehen.

Eine anschauliche Beschreibung des E-Feldes erfolgt mit Hilfe der **Kraftlinien** oder **Feldlinien**. Es sind dies Linien, entlang derer sich eine **positive** Probeladung von selbst bewegt, wenn diese in das Feld gebracht wird.

Der Verlauf einer Feldlinie ist also gleich der Bahn und die Richtung gleich der Bewegungsrichtung einer **positiven** Ladung, die sich im Feld frei bewegen kann.

Elektrische Feldlinien gehen also von positiven Ladungen aus und enden auf negativen Ladungen.

Die Abb. 6.1a und 6.1b zeigen die Feldlinienbilder einer positiven und einer negativen Punktladung. Es handelt sich um sog. radialsymmetrische Felder.

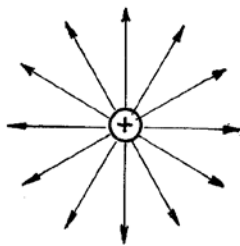


Abb. 6.1a
Feldlinienbild
einer positiven
Ladung

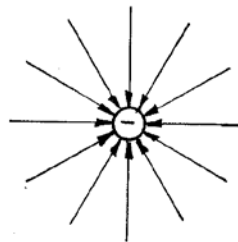


Abb. 6.1b
Feldlinienbild
einer negativen
Ladung

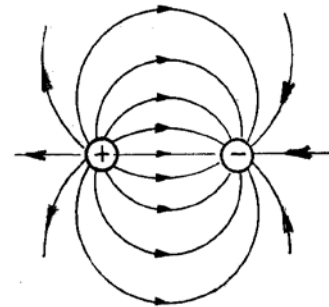


Abb. 6.1c
Feldlinienbild
eines Dipols

Befinden sich mehrere Punktladungen im Raum, so ergibt sich die Gesamtfeldstärke durch vektorielle Addition der von den einzelnen Ladungen hervorgerufenen Feldstärken. Abb. 6.1c zeigt das Feldlinienbild eines Dipols. Ein elektrischer Dipol besteht aus einer positiven und gleich großen negativen Ladung, die einen festen Abstand zueinander haben.

Die Stärke eines elektrischen Feldes kann anschaulich durch die Zahl der Feldlinien dargestellt werden, die die Flächeneinheit durchsetzen. Demnach liegen also in Gebieten größerer Feldstärke die Feldlinien dichter zusammen.

Man spricht von **homogenen** Feldern, wenn die Feldlinien parallel und äquidistant verlaufen. Dies gilt z.B. für das Feld im Innern eines Plattenkondensators (Abb. 6.1d).

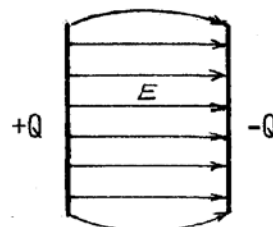


Abb. 6.1d: Homogenes Feld eines Plattenkondensators (am Rande inhomogen)

In homogenen Feldern ist die Feldstärke überall gleich groß (man sagt auch: Die Feldstärke ist konstant). Bei **inhomogenen** Feldern verlaufen die Feldlinien nicht parallel und die Feldstärke ist nicht konstant (Abb.6.1a-c).

Die elektrischen Feldlinien stehen immer **senkrecht** auf leitenden (metallischen) Oberflächen. Ein metallischer Hohlkörper ist im Innern immer **feldfrei** (Faraday-Käfig!).

• Elektrisches Potential, elektrische Spannung

Gegeben sei ein elektrisches Feld E . Wird eine Ladung Q im Feld verschoben, so ist Arbeit zu leisten, da im E -Feld gemäß Gl. 6.2 die Kraft $F = Q \cdot E$ auf die Ladung wirkt.

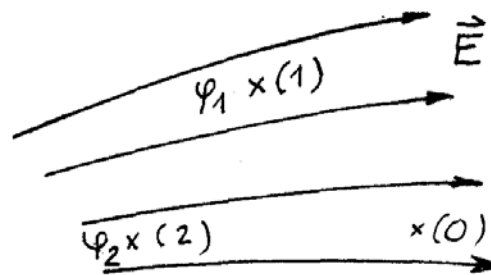


Abb.6.2

Wir markieren die drei Punkte (0), (1) und (2) im Feld (Abb.6.2). Verschieben wir nun eine Ladung Q z.B. von (0) nach (1), so ist folgende Arbeit erforderlich:

$$W_{01} = -\int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -Q \int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Diese Arbeit W_{01} ist nun in der Ladung Q als potentielle Energie im Punkt (1) gegenüber Punkt (0) gespeichert. Wir nennen sie $W_{\text{pot}}(1)$ und erhalten:

$$W_{\text{pot}}(1) = -Q \int_0^1 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Analoges gilt für $W_{\text{pot}}(2)$. Man kann so jedem Punkt eines elektrischen Feldes eine potentielle Energie gegenüber einem frei gewählten Bezugspunkt (0) zuordnen, die eine Ladung Q an diesem Punkt hat. Dividiert man die potentielle Energie durch die Ladung Q , so erhält man eine von Q unabhängige, nur noch von der Feldstärke abhängige Größe, die man als **elektrisches Potential ϕ** bezeichnet:

$$\phi = \frac{W_{\text{pot}}}{Q} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (6.4)$$

SI-Einheit für ϕ : 1 J/C oder 1 V (Volt),

da für 1 J/C der Einheitenname "Volt" (V) eingeführt wird.

Jedem Punkt eines elektrischen Feldes kann man so ein elektrisches Potential zuordnen, wenn man einen einheitlichen Bezugspunkt im Raum wählt. Im Punkt (1) der Abb.6.2 sei dann das Potential gleich ϕ_1 , im Punkt (2) sei es ϕ_2 . Wir fragen nun nach der Arbeit W_{12} , die nötig ist, um eine Ladung Q von Punkt (1) zu Punkt (2) im elektrischen Feld zu verschieben. Ohne Begründung sei gesagt, dass in einem elektrischen Feld die Verschiebungsarbeit unabhängig vom Weg ist. Man erhält also W_{12} einfach aus der Differenz der potentiellen Energien in den Punkten (1) und (2):

$$W_{12} = W_{\text{pot}}(2) - W_{\text{pot}}(1)$$

Nach Gl. 6.4 ist:

$$W_{\text{pot}}(1) = \varphi_1 \cdot Q \quad \text{und} \quad W_{\text{pot}}(2) = \varphi_2 \cdot Q$$

Somit ist:

$$W_{12} = \varphi_2 \cdot Q - \varphi_1 \cdot Q = Q \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = Q \cdot U_{12}, \quad (6.5)$$

mit $\varphi_2 - \varphi_1 = U_{12}$. Die Potentialdifferenz $\varphi_2 - \varphi_1$ wird als **elektrische Spannung** U_{12} , zwischen den Punkten (1) und (2) bezeichnet. Allgemein gilt daher:

$$W = Q \cdot U \quad (6.6)$$

Gl.6.6 stellt die Definitionsgleichung für die elektrische Spannung dar. **SI-Einheit für U: 1 V.**

Es gilt:

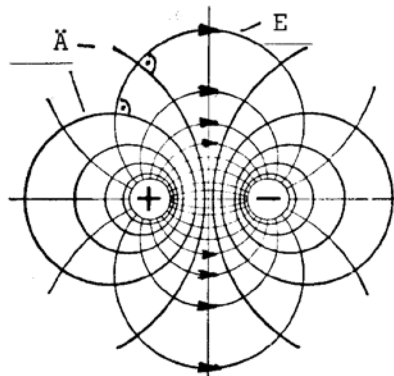
Eine positive Ladung bewegt sich von selbst von Orten höheren Potentials zu Orten niedrigeren Potentials.

Durchläuft also ein Körper mit der Ladung Q ohne Hindernis die Spannung U , so hat er am Ende der Strecke die kinetische Energie (s.Ü.6.4) :

$$W_{\text{kin}} = Q \cdot U$$

• Äquipotentiallinien, Äquipotentialflächen

Linien oder Flächen konstanten Potentials heißen **Äquipotentiallinien** oder **Äquipotentialflächen**. Die Äquipotentiallinien und -flächen stehen immer **senkrecht** auf den Feldlinien.



Die obenstehende Abbildung zeigt den Äquipotentiallinienverlauf im Dipolfeld. Zur Verschiebung einer Ladung auf einer Äquipotentialfläche oder entlang einer Äquipotentiallinie ist **keine Arbeit** erforderlich. Wir halten fest:

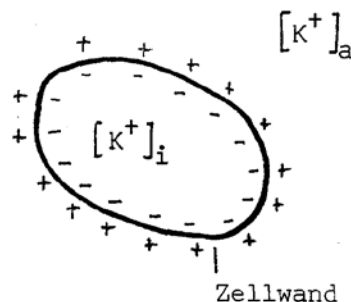
In einem elektrischen Feld herrscht also zwischen zwei Punkten, die nicht auf ein und derselben Äquipotentialfläche liegen, immer eine Spannung.

Die Spannung zwischen zwei raumfesten Punkten in einem elektrischen Feld ändert sich, wenn sich die Feldverteilung ändert. Dies tritt z.B. dann ein, wenn sich die felderzeugenden Ladungen verschieben. Sind diese Verschiebungen periodischer Art, so entsteht eine periodische Spannung. Diese Zusammenhänge sind grundsätzlich für das Verständnis der Entstehung eines Elektrokardiogramms von Bedeutung. Die elektrische Erregung des Herzens kann beschrieben werden durch einen sich drehenden und seine Stärke ändernden elektrischen Dipol. Der rotierende Dipol bewirkt ein sich veränderndes elektrisches Feld im Körper. Zwischen zwei Punkten (z.B. zwischen Hand und Fuß) kann dann eine im Rhythmus der Herzfrequenz auftretende zeitabhängige Spannung — das EKG — registriert werden. Wir fassen zusammen:

Elektrische Spannung und elektrisches Feld sind eng miteinander verknüpft. Voraussetzung für eine Spannung ist ein elektrisches Feld. Dieses wiederum wird von Ladungen hervorgerufen, so dass die Ursache für die Spannung letztlich im Vorhandensein von getrennten positiven und negativen Ladungen besteht. In den "Spannungsquellen" ist daher immer ein Mechanismus wirksam, der zur Ladungstrennung führt, wobei natürlich Energie aufzuwenden ist.

Als Beispiel für eine Spannungsquelle aus dem Bereich der Biologie sei auf die Entstehung der "Ruhemembran Spannung" (bioelektrische Spannung) hingewiesen:

Zwischen dem Inneren und dem Äußeren einer tierischen oder menschlichen Zelle besteht eine Potentialdifferenz von etwa 90 mV. Diese Spannung entsteht durch einen Diffusionsvorgang durch die Zellwand.



Die Zellwand (Zellmembran) besteht aus einer biomolekularen Lipoprotein-Schicht von der Dicke $0,007\mu\text{m}$ bis $0,008\mu\text{m}$. Sie verfügt über selektive Permeabilitäten und aktive Transportmechanismen. Die Membran kann einerseits den spontanen, diffusionsbedingten Übertritt bestimmter Stoffe - wie etwa der Na^+ , Ca^{++} , Mg^{++} , Cl^- -Ionen - stark hemmen, andererseits die aktive Überführung von Ionen gegen ein vorhandenes Diffusionsgefälle erzwingen. Im Zellinneren ist die Konzentration der K^+ -Ionen etwa 20 bis 40 mal größer als im extrazellulären Raum. Die Permeabilität der Membran ist für die K^+ -Ionen sehr viel höher als für die anderen in der Zellflüssigkeit vorhandenen Ionen, so dass auf Grund des Konzentrationsgefälles K^+ -Ionen solange vom Zellinneren in den extrazellulären Raum diffundieren, bis durch die zunehmende negative Aufladung des Zellinneren der Diffusionsvorgang in ein stationäres Gleichgewicht übergeht.

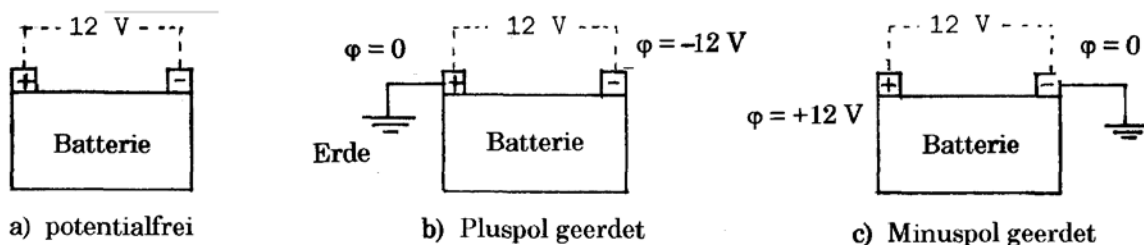
Der Außenraum ist dann positiv, der Innenraum negativ geladen, d.h. zwischen dem Inneren und dem Äußeren einer Zelle besteht eine Potentialdifferenz, die Zelle ist "polarisiert". Die Potentialdifferenz zwischen dem Innen- und dem Außenraum lässt sich mit der von NERNST angegebenen Gleichung berechnen:

$$U = \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \cdot \ln \frac{|K^+|_i}{|K^+|_a}$$

R = universelle Gaskonstante; F = Faraday-Konstante;
 T = Kelvintemperatur; z = Wertigkeit der Ionen;
 $[K^+]_i$ = Konz. der K^+ -Ionen im Inneren;
 $[K^+]_a$ = Konz. der K^+ -Ionen im Außenraum.

• **Potentialfestlegung, „Erdpotential“**

Es gibt Gleichspannungs- und Wechselspannungsquellen. Bei den Gleichspannungsquellen (z.B. Batterie) ist die Spannung zeitlich konstant, bei den Wechselspannungsquellen (z.B. Steckdose des öffentlichen Stromnetzes) ändert sie sich periodisch.



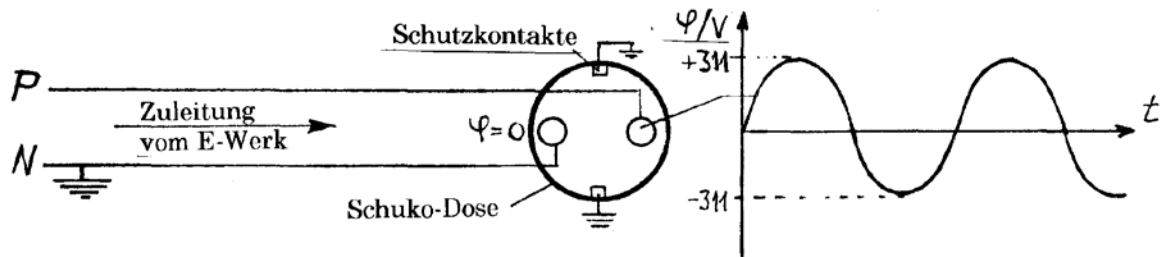
Wir betrachten eine Gleichspannungsquelle (Batterie) mit der Spannung von z.B. 12 V (Autoakku). Zwischen dem Pluspol und dem Minuspol besteht also eine Potentialdifferenz von 12 V. Der Pluspol besitzt grundsätzlich das höhere Potential, der Minuspol das niedrigere. Wie groß das Potential des Plus- oder des Minuspols ist, lässt sich nicht angeben. Man sagt, die Spannungsquelle ist **potentialfrei** (Abb. a). Verbindet man aber z.B. den Pluspol durch einen guten elektrischen Leiter mit der Erde, so hat der Pluspol dasselbe Potential wie die Erde, das willkürlich gleich Null gesetzt wird. Der Minuspol hat dann das Potential $\phi = -12 \text{ V}$ (Abb. b). Die Batterie ist nun nicht mehr potentialfrei. Erdet man den Minuspol, so erhält der Pluspol das Potential $\phi = +12 \text{ V}$ (Abb. c). An der Spannung zwischen den Polen ändert sich durch das "Erden" nichts.

In der Elektrotechnik wird aus praktischen Gründen das Potential der Erde als Bezugspunkt gewählt. Es wird einfach *gleich Null* gesetzt.

Das Symbol für „Erde“ ist : oder

Will man einen Punkt in einer elektrischen Schaltung „erden“, so muss man eine elektrisch gut leitende Verbindung zur Erde herstellen.

Bei der Wechselspannung des öffentlichen Stromnetzes liegen folgende Verhältnisse vor: Die Zuleitung vom E-Werk zur Steckdose erfolgt beim Einphasenwechselstrom über zwei Leitungen N (= Nullleiter) und P (= Phase). Die Leitung N ist bereits im E-Werk geerdet. Der eine Pol der Steckdose hat also das Potential $\phi = 0$ (Erdpotential).



Am anderen Pol ändert sich das Potential sinusförmig zwischen den Extremwerten $+311\text{ V}$ und -311 V . Der als Spannung zwischen den Polen angegebene Wert von 220 V ist der sog. Effektivwert (siehe Grundlagen zu Versuch 8). Die an der Dose noch vorhandenen Schutzkontakte (in der Abb. oben und unten) sind **direkt** mit der Erde verbunden. An diese Kontakte wird über den Schuko-Stecker die im Gerätekabel vorhandene **gelb-grüne** Leitung angeschlossen. Sie ist ihrerseits am Gerät mit dem Gehäuse verbunden, das auf diese Weise zum Schutz immer das Potential Null hat (Schuko = Schutzkontakt).

Übungsaufgaben:

Ü 6.1

Welche Anziehungskraft herrscht zwischen dem Wasserstoffkern und dem Elektron der K-Schale (Radius der K-Schale = $0,05\text{ nm}$)?

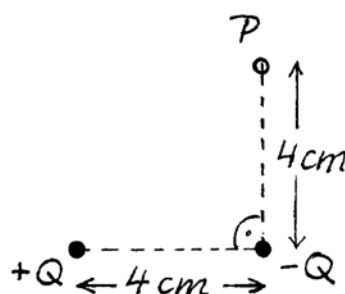
Ü 6.2

Ein Elektron und ein Positron ziehen sich im Abstand a mit der Kraft $F = 2 \cdot 10^{-22}\text{ N}$ an. Wie groß ist die Kraft im Abstand $2a$?

Welche Kraft erfährt ein He-Kern, wenn dieser sich genau in der Mitte zwischen Elektron und Positron befindet?

Ü 6.3

Gegeben sind zwei Punktladungen $+Q$ und $-Q$ im Abstand 4 cm . Der Punkt P befindet sich 4 cm über der Ladung $-Q$ (s. Skizze). Welche Feldstärke erzeugt die Ladung $+Q$ in P, wenn die Ladung $-Q$ dort eine Feldstärke von 1 V/m hervorruft.



Ü 6.4

Welche kinetische Energie haben die Elektronen in einer Röntgenröhre (in der Röntgenröhre ist Vakuum) beim Auftreffen auf die Anode, wenn zwischen Kathode und Anode eine Spannung von 100 kV liegt?

Welche Geschwindigkeit erreichen die Elektronen (ohne Beachtung relativistischer Effekte)?

- **Elektrischer Strom**

Eine **bewegte** elektrische Ladung stellt einen elektrischen Strom dar. Fließt durch einen Leiterquerschnitt in der Zeit Δt (dt) die Ladungsmenge ΔQ (dQ), so ist die **elektrische Stromstärke I** definiert als :

Definition der Stromstärke I:

$$\mathbf{I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}} \quad (6.7)$$

Die Maßzahl für den elektrischen Strom ist also gleich der Ladung, die pro Sekunde durch den Leiterquerschnitt fließt.

SI-Einheit für I: 1 A (Ampere)

Die elektrische Stromstärke gehört zu den Basisgrößen (s. S. 0/6).

Für die Bestimmung der Ladung aus dem Strom gilt:

$$\mathbf{dQ = I \cdot dt \quad bzw. \quad Q = \int I \cdot dt} \quad (6.7a)$$

SI-Einheit für Q: 1 As = 1C (Coulomb)

Ein elektrischer Strom kann nachgewiesen werden durch seine

a) Magnetische Wirkung:

Ein elektrischer Strom ist immer von einem Magnetfeld begleitet.

b) Chemische Wirkung:

In Elektrolyten kommt es bei Stromfluss zu chemischen Veränderungen an den Elektroden.

c) Wärmewirkung:

Ein stromdurchflossener Leiter erwärmt sich (Supraleiter ausgenommen).

- **Elektrischer Widerstand**

Ein Strom fließt in einem Leiter nur dann, wenn an den Leiter eine elektrische Spannung angelegt wird. Leiter sind Substanzen, die frei bewegliche Ladungsträger enthalten. Entsteht bei einer angelegten Spannung U ein Strom I in einem Leiter, so ist sein **Widerstand R** definiert als:

Definition des elektrischen Widerstandes R:

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}} \quad (6.8)$$

SI-Einheit für R: $1 \text{ V/A} = 1 \Omega$ (Ohm).

Der reziproke Widerstand heißt **Leitwert G**: $\mathbf{G} = 1/\mathbf{R}$ (6.8a)

SI-Einheit für G: $1 \Omega^{-1} = 1 \text{ S}$ (Siemens).

Schreibt man Gl.6.8 in der Form $U = I \cdot R$, so kann man die Spannung zwischen den Enden eines Leiterstücks auch als Folge des Stroms im Leiter betrachten. Man spricht dann vom **Spannungsabfall** an einem Leiter oder Widerstand.

Das Wort "Widerstand" beschreibt eigentlich die Eigenschaft eines elektrischen Leiters gegenüber dem Ladungsfluss. Es wird aber in nicht korrekter Weise auch für den Leiter selbst benutzt. Man spricht von "einem Widerstand" und meint damit in erster Linie den Leiter selbst.

- **Spezifischer Widerstand (Resistivität)**

Der Widerstand eines Leiters hängt vom Material, von seinen geometrischen Abmessungen und von der Temperatur ab. Bei konstanter Temperatur ist R proportional zur Länge l und umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A des Leiters:

$$\mathbf{R} = \rho \cdot \frac{\mathbf{l}}{\mathbf{A}} \quad (6.9)$$

Der Proportionalitätsfaktor ρ ist eine Materialkonstante und heißt **spezifischer Widerstand oder Resistivität**.

SI-Einheit für ρ : $1 \Omega \text{m}$.

Der Reziprokwert von ρ heißt **spezifische Leitfähigkeit σ** :

$$\mathbf{\sigma} = \frac{1}{\mathbf{\rho}} \quad (6.10)$$

SI-Einheit für σ : $1 \Omega^{-1} \text{m}^{-1} = 1 \text{ S/m}$.

Der spezifische Widerstand hängt von der Temperatur ab. Mit genügender Genauigkeit kann die Temperaturabhängigkeit durch eine lineare Beziehung dargestellt werden:

$$\rho(\vartheta) = \rho(1 + \alpha \cdot \vartheta)$$

ρ_0 ist der spezifische Widerstand bei $0 \text{ }^\circ\text{C}$. ϑ = Temperatur in $^\circ\text{C}$. α ist der Temperaturkoeffizient. Er ist für Metalle und viele Metalllegierungen positiv, d.h. der Widerstand nimmt

mit zunehmender Temperatur zu. Man spricht von PTC-Widerständen (Positiv-Temperatur-Coefficient). Für einige spezielle Legierungen ist α nahezu gleich Null. Für Elektrolyte, für Halbleiter (z.B. Germanium, Silizium), für Kohle und für gewisse Oxide ist der Temperaturkoeffizient negativ: Man spricht von NTC-Widerständen (Negativ-Temperatur-Coefficient) oder von "Heißleitern".

• Ohmsches Gesetz

Es gibt Leiter, bei denen die Stromstärke I **proportional** mit der angelegten Spannung U zunimmt, wenn man die Temperatur des Leiters konstant hält. Nach Gl.6.8 bedeutet dies, dass der Widerstand des Leiters dann **konstant** ist, d.h. nicht von der Größe des Stromes und der Spannung abhängt. Solche Leiter werden **ohmsche Leiter** genannt.

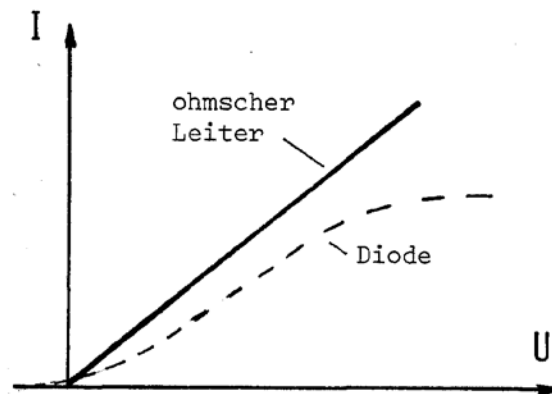


Abb.6.3.

Ohmsches Gesetz:

Der Widerstand eines Leiters ist bei konstanter Temperatur konstant, d.h. er hängt **nicht** von der Stromstärke oder der Spannung ab.

Für ohmsche Leiter gilt also: $I \sim U$. Zu den ohmschen Leitern gehören die Metalle und - mit gewissen Einschränkungen - auch die Elektrolyte. Für leitende Gase (Glimmentladung, Lichtbogen) und kompliziertere Schaltelemente (z.B. Elektronenröhren, Gleichrichter ... usw.) gilt das Ohmsche Gesetz nicht. Abb.6.3 zeigt die Strom-Spannungskennlinie eines ohmschen Leiters (ausgezogene Linie) und die einer Diode (gestrichelt). Die I-U-Kennlinie eines ohmschen Leiters ist also eine **Gerade**. Bei nicht-ohmschen Leitern ist sie gekrümmt.

• Elektrische Arbeit

Nach Gl.6.6 war für die Verschiebung einer Ladung Q um die Potentialdifferenz U die Arbeit $W = Q \cdot U$ erforderlich. Die Ladungsverschiebung stellt einen elektrischen Strom dar, so dass für Q das Produkt $I \cdot t$ gesetzt werden kann, wenn es sich um einen stationären (d.h. zeitlich unveränderlichen) Strom handelt. Man erhält so für die elektrische Arbeit (Stromarbeit):

$$\boxed{W = U \cdot I \cdot t} \quad (6.11)$$

Fließt also während der Zeit t durch einen Leiter bei einer angelegten Spannung U der Strom I , so berechnet sich die im Leiter umgesetzte elektrische Energie nach Gl.6.11. Wird die elektrische Energie im Leiter in Wärme umgesetzt, so spricht man von **Joulescher Wärme**.

SI-Einheit für W : $1 \text{ VAs} = 1 \text{ Ws}$, mit $1 \text{ VA} = 1 \text{ W (Watt)}$.

Die Wattsekunde (Ws) ist eine sehr kleine Einheit. In der Praxis wird die Kilowattstunde (kWh) verwendet. Es gilt: $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}$

Der Zusammenhang mit den mechanischen Energieeinheiten ist gegeben durch:

$$1 \text{ Ws} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$$

- **Elektrische Leistung**

Allgemein ist die Leistung P definiert als die pro Sekunde geleistete Arbeit: $P = dW/dt$. Für die elektrische Leistung erhält man somit aus Gl.6.11:

Definition der elektrischen Leistung P :

$$\boxed{P = U \cdot I} \quad (6.12)$$

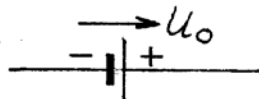
SI-Einheit für P : $1 \text{ VA} = 1 \text{ W (Watt)}$.

Ersetzt man in Gl.6.12 den Strom I bzw. die Spannung U durch $I = U/R$ bzw. $U = I \cdot R$, so erhält man:

$$P = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R \quad (6.12a)$$

- **Symbole, Vorzeichendefinitionen für Strom und Spannung**

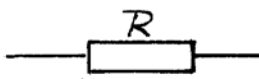
1) Urspannung:



Symbol für Gleichspannungsquelle

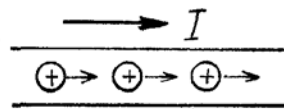
Die Potentialdifferenz einer Gleichspannungsquelle wird als Urspannung U_0 bezeichnet. Die positive Urspannungsrichtung weist in Richtung des Potentialanstiegs in der Batterie — also von minus nach plus — und kennzeichnet die Antriebsrichtung auf positive Ladungsträger .

2) Widerstand:



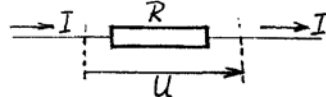
Symbol für Leiter mit Widerstand R

3) Stromrichtung:



Die positive Stromrichtung ist die Bewegungsrichtung, die positive Ladungsträger im Leiter hätten (konventionelle Stromrichtung). In den Metallen sind Elektronen die Ladungsträger; sie bewegen sich also gegen die Stromrichtung.

4) Spannungsabfall:



Die positive Richtung des Spannungsabfalls weist in Richtung des Stromes und damit in Richtung des Potentialgefälles.

Bei der Verwendung von Strom- und Spannungsmessgeräten für Gleichstrom und Gleichspannung ist auf die Polarität zu achten. Die Angaben (+) und (-) an den Buchsen eines Amperemeters bedeuten, dass das Gerät so in den Stromkreis geschaltet werden muss, dass der Strom bei (-) in das Amperemeter **hineinfließt** und bei (+) **herausfließt**.

Spannungsmesser (Voltmeter) sind so zu schalten, dass die mit (+) bezeichnete Buchse an den Punkt mit dem **höheren** Potential und die mit (-) bezeichnete Buchse an den Punkt mit dem **niedrigeren** Potential angeschlossen ist.

• **Kirchhoffsche Gesetze**

Will man in verzweigten Stromkreisen Stromstärken und Spannungsabfälle berechnen, so bedient man sich der Kirchhoffsehen Gesetze. Abb.6.4 zeigt einen Stromkreis mit 5 Verzweigungspunkten A,B,C,D und E an die sich weitere Kreise anschließen.

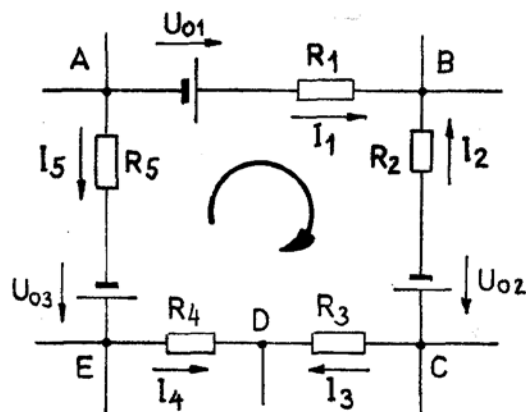


Abb.6.4

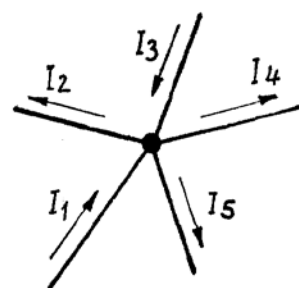


Abb.6.5

1. Kirchhoffsches Gesetz (Knotenpunktsatz)

In einem Knoten (Verzweigungspunkt) ist die Summe aller zufließenden Ströme gleich der Summe aller wegfließenden Ströme:

$$\sum \mathbf{I}_{\text{zu}} = \sum \mathbf{I}_{\text{ab}} \quad (6.13)$$

Für das Beispiel in Abb.6.5 gilt also: $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5$.

2. Kirchhoffsches Gesetz (Maschensatz)

Als *Masche* bezeichnet man einen in sich geschlossenen Stromkreis. Man legt zunächst einen Umlaufsinn in der Masche fest (in Abb.6.4 z.B. im Uhrzeigersinn). Dann gilt:

In einer Masche ist die Summe der Urspannungen gleich der Summe der Spannungsabfälle.

$$\sum_{\mu=1}^m U_{0\mu} = \sum_{v=1}^n \mathbf{I}_v \cdot \mathbf{R}_v \quad (6.14)$$

Für die in Abb.6.4 dargestellte Masche gilt dann:

$$U_{01} + U_{02} - U_{03} = \mathbf{I}_1 \mathbf{R}_1 - \mathbf{I}_2 \mathbf{R}_2 + \mathbf{I}_3 \mathbf{R}_3 - \mathbf{I}_4 \mathbf{R}_4 - \mathbf{I}_5 \mathbf{R}_5$$

• Spannungsquelle mit innerem Widerstand im Stromkreis

Schließt man an eine Spannungsquelle einen Verbraucher mit dem Widerstand R_a an, so entsteht der einfachste Stromkreis.

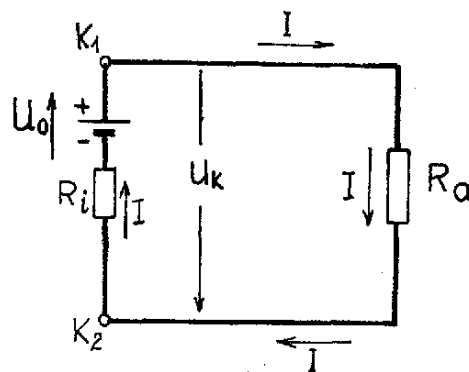


Abb.6.6.

Abb.6.6 zeigt einen solchen Stromkreis unter Berücksichtigung, dass jede Spannungsquelle grundsätzlich selbst einen Widerstand, den sog. **inneren Widerstand R_i** besitzt. K_1 und K_2 stellen die Klemmen (Pole) der Spannungsquelle dar. Schließt man einen Verbraucher mit dem Widerstand R_a (oft auch als "Außenwiderstand" bezeichnet) an die Klemmen an, so fließt ein Strom I von K_1 über R_a zu K_2 und weiter durch die Spannungsquelle zu K_1 (Stromkreise müssen immer geschlossen sein!). Die Anwendung des Maschensatzes liefert dann:

$$U_0 = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_a + \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_i \quad (6.15)$$

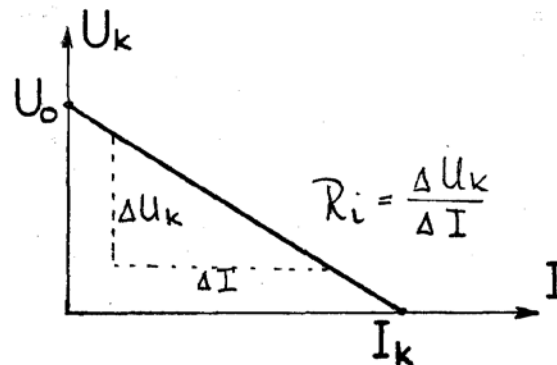
Das Produkt $\mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_a$ stellt den äußeren Spannungsabfall U_k zwischen den Klemmen K_1 und K_2 dar und wird als **Klemmenspannung** bezeichnet.

$$U_k = \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_a$$

Für U_k erhält man aus Gl.6.15 somit folgende Beziehung:

$$U_k = U_0 - I \cdot R_i \quad (6.16)$$

Man sieht, dass die Klemmenspannung U_k , umso kleiner wird, je größer der entnommene Strom ist. Die Klemmenspannung ist um den **inneren Spannungsabfall** gegenüber der Urspannung U_0 verkleinert. Trägt man in einem Diagramm U_k gegen I auf, so erhält man eine Gerade, deren **Steigung** betragsmäßig **gleich R_i** ist. Wählt man $R_a = \infty$ (offener Kreis), so wird kein Strom entnommen ($I = 0$).



Man spricht dann vom **Leerlauf**. Nach Gl.6.16 ist dann $U_k = U_0$, d.h. im Leerlauf ist die Klemmenspannung gleich der Urspannung. Als **Leerlaufspannung** bezeichnet man die Klemmenspannung, wenn der Spannungsquelle kein Strom entnommen wird. Für den Strom I im Kreis erhält man aus Gl.6.15:

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a}$$

Den größtmöglichen Strom aus einer Spannungsquelle erhält man, wenn man den Außenwiderstand R_a gleich Null macht, d.h. die Klemmen "kurzschließt". Dieser als **Kurzschlussstrom I_k** bezeichnete Wert berechnet sich aus:

$$I_k = \frac{U_0}{R_i}$$

Für $I=I_k$ ist die Klemmenspannung U_k gleich Null.

Ohne Beweisführung sei vermerkt, dass man die **größtmögliche Leistung** aus einer Spannungsquelle dann herausholt, wenn man $R_a = R_i$ wählt.

Anmerkung:

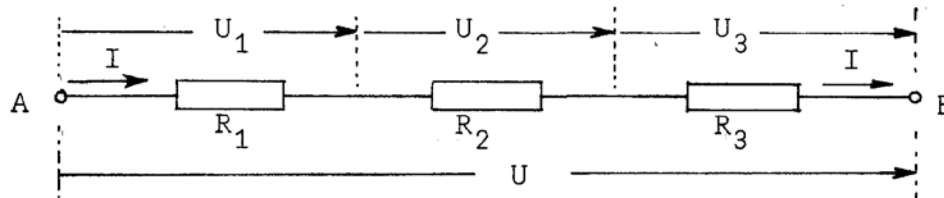
Der Beweis, dass für die maximale Leistungsentnahme aus der Quelle $R_a = R_i$ sein muss, kann aus folgender Überlegung erbracht werden: Die der Spannungsquelle entnommene Leistung P berechnet sich nach

$$P = I^2 R_a = \frac{U_0^2}{(R_i + R_a)^2} R_a$$

Differenziert man dies nach R_a und setzt das Ergebnis gleich Null, so erhält man die gesuchte Bedingung.

- **Kombination von Widerständen**

- a) **Serien- oder Reihenschaltung**



Bei einer Reihenschaltung ist die Summe aller Spannungsabfälle gleich dem Gesamtspannungsabfall:

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

Außerdem ist der Strom \$I\$ bei einer Serienschaltung in allen Widerständen gleich groß. Daraus lässt sich nun ableiten, dass bei einer Reihenschaltung der Gesamtwiderstand \$R\$ gleich der Summe der Einzelwiderstände ist:

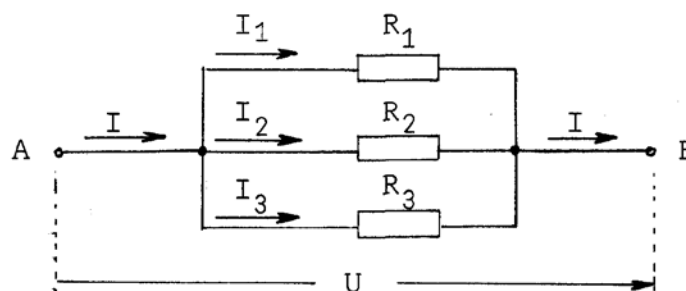
$$R = R_1 + R_2 + R_3 \quad (6.17)$$

- **Spannungsteiler:**

Die Spannungen \$U_1\$, \$U_2\$, \$U_3\$ usw. an den Widerständen \$R_1\$, \$R_2\$, \$R_3\$ verhalten sich wie die Widerstände:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \frac{U_2}{U_3} = \frac{R_2}{R_3} \quad \frac{U}{U_1} = \frac{R}{R_1} \quad (6.18)$$

- **Parallelschaltung**



Für den Verzweigungspunkt einer Parallelschaltung gilt zunächst der Knotenpunktsatz:

$$I = I_1 + I_2 + I_3.$$

Außerdem tritt bei parallel geschalteten Widerständen an den Einzelwiderständen jeweils der gleiche Spannungsabfall \$U\$ auf. Daraus lässt sich wieder ableiten, dass bei einer Parallelschaltung die Summe der reziproken Einzelwiderstände gleich dem Reziprokwert des Gesamtwiderstandes ist:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad (6.19)$$

Da die Spannungen an parallel geschalteten Widerständen gleich groß sind, gilt: $I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3$. Daraus folgt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{oder} \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{R_3}{R_2} \quad \text{oder} \quad \frac{I}{I_1} = \frac{R_1}{R} \quad (6.20)$$

In Worten:

Bei einer Parallelschaltung verhalten sich die Einzelströme umgekehrt wie die Widerstände.

Beispiel für eine Widerstandskombination:

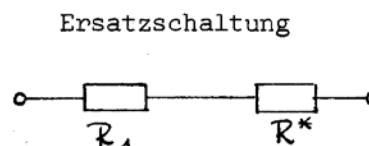
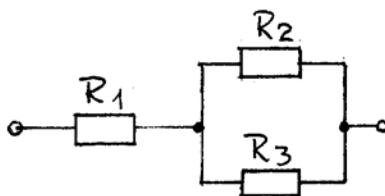
Um den Gesamtwiderstand der nebenstehenden Widerstandsschaltung aus 3 Widerständen zu berechnen, stellt man zunächst eine **Ersatzschaltung** her, die grundsätzlich entweder eine reine Serien- oder eine reine Parallelschaltung ist. In diesem Fall ist es eine Serienschaltung. Es ist dann: $R = R_1 + R^*$.

R^* berechnet sich aus

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Ergebnis:

$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$$



• Ladungsträger in elektrischen Leitern

Metalle:

Neben den für Bindungszwecke benötigten und an die Ionen des Kristallgitters gebundenen Elektronen, gibt es in Metallen auch noch frei bewegliche Elektronen (freie Elektronen), die allein für den Ladungstransport in Frage kommen (bei guten Leitern, wie Kupfer, etwa ein freies Elektron pro Gitterbaustein). Normalerweise befinden sich diese freien Elektronen in einer ungeordneten Bewegung ohne Vorzugsrichtung (ähnlich wie die Moleküle eines Gases). Legt man an den Leiter eine Spannung an, so dass also ein elektrisches Feld vorhanden ist, so wird eine Kraft auf die Elektronen ausgeübt, die den freien Elektronen eine gerichtete Geschwindigkeit erteilt. Der ungeordneten Bewegung des "Elektronengases" überlagert sich so eine der Feldrichtung entgegengesetzte Driftgeschwindigkeit (Elektronen sind negativ!). Wegen der auftretenden Reibung - hervorgerufen durch die Zusammenstöße der Elektronen

mit den um ihre Ruhelage schwingenden Gitterbausteinen - ist die Geschwindigkeit der Elektronen konstant und etwa von der Größenordnung einige Millimeter pro Sekunde.

Halbleiter:

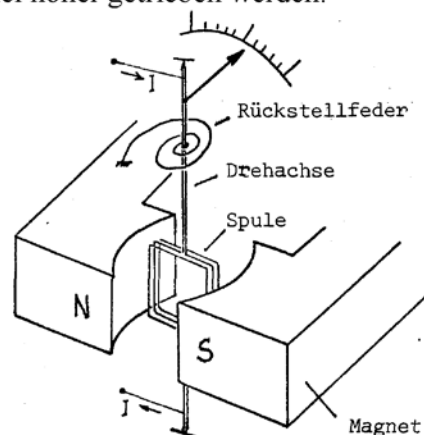
In Halbleitern geschieht der Ladungstransport durch Elektronen und "Defektelektronen" (Löcherleitung), in Gasen durch positive Ionen und Elektronen, in Elektrolyten durch positive und negative Ionen.

• Strom- und Spannungsmessung

Instrumente zur Messung von Stromstärken heißen **Amperemeter**. Die am häufigsten verwendeten Amperemeter sind die **Dreheisen-** und die **Drehspulinstrumente**. Mit Dreheiseninstrumenten kann man Gleich- und Wechselströme messen. Ihr Zeigerausschlag ist proportional zum Quadrat der Stromstärke, also unabhängig von der Stromrichtung. Die Skala ist nicht linear.

Mit Drehspulinstrumenten können nur Gleichströme gemessen werden. Ihr Zeigerausschlag ist proportional zur Stromstärke, d.h. die Skala ist linear unterteilt und die Ausschlagsrichtung ist abhängig von der Stromrichtung.

Zur Messung von Wechselströmen mit Drehspulinstrumenten wird ein Gleichrichter vorgeschaltet. Drehspulinstrumente sind in der Regel sehr viel genauer und ihre Empfindlichkeit kann sehr viel höher getrieben werden.



Den prinzipiellen Aufbau eines Drehspulamperemeters zeigt die obenstehende Skizze. Zwischen den kreisförmig ausgefrästen Polen eines Hufeisenmagneten befindet sich drehbar gelagert eine Rechteckspule. Fließt Strom durch die Spule, so wird ein Drehmoment auf die Spule ausgeübt, das um so größer ist, je größer der Strom ist. An der Achse, an der sich auch ein Zeiger befindet, ist eine Spiralfeder angebracht, die bei Verdrehung ein Gegenmoment hervorruft. Die Drehung der Spule kommt dann zum Stillstand, wenn die beiden einander entgegenwirkenden Drehmomente durch Strom und Federkraft betragsmäßig gleich sind.

Instrumente zur Messung von Spannungen heißen **Voltmeter**. Meist sind es Amperemeter, die umgeeicht zur Spannungsmessung verwendet werden; denn fließt durch die Spule ein Strom I , so tritt an den Anschlussbuchsen ein Spannungsabfall von $U = I \cdot R_i$ auf, wenn R_i der

Innenwiderstand (= Widerstand der Spule) ist. Um der Spannungsquelle möglichst wenig Strom für die Spannungsmessung zu entnehmen, und um das Amperemeter nicht zu überlasten, muss der Innenwiderstand des Gerätes entsprechend groß gemacht werden. Dies geht durch Vorschalten von Widerständen zum Spulenwiderstand.

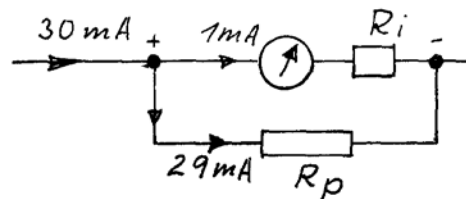
Voltmeter haben immer einen hohen Innenwiderstand, Amperemeter einen möglichst kleinen.

Die Messbereiche von Amperemeter und Voltmeter können erweitert werden durch Parallelschalten von Widerständen beim Amperemeter und durch Vorschalten von Widerständen beim Voltmeter.

• **Messbereichserweiterung von Volt- und Amperemeter**

Gegeben ist ein Messwerk mit dem Innenwiderstand $R_i = 50 \Omega$. Der maximal zulässige Strom durch das Messwerk ist mit 1 mA angegeben. Es darf also höchstens eine Spannung von 50 mV angelegt werden.

(a) Dieses Gerät soll nun im Messbereich so erweitert werden, dass es als Amperemeter bis maximal 30 mA einsetzbar ist. Welcher Widerstand R_p muss dann parallel zum Messwerk geschaltet werden?



Aus der Schaltskizze geht hervor, dass der Strom durch R_p 29 mA betragen muss. Es gilt also:

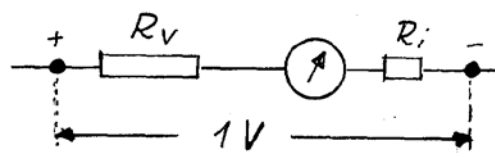
$$\frac{R_p}{R_i} = \frac{1 \text{ mA}}{29 \text{ mA}}$$

Daraus erhält man: $R_p = 1,724 \Omega$.

Der Innenwiderstand R'_i des erweiterten Gerätes ist dann:

$$R'_i = \frac{R_i R_p}{R_i + R_p} = 1,667 \Omega$$

(b) Das gleiche Messwerk wie oben soll nun als Voltmeter bis maximal 1 V dienen. Welchen Widerstand R_v muss man vorschalten?



Der durch das Messwerk fließende Strom darf 1 mA nicht überschreiten. Dieser Strom fließt auch durch R_v . Es gilt also:

$$R_v + R_i = \frac{1 \text{ V}}{10^{-3} \text{ A}} = 10^3 \Omega$$

$$R_v = 950 \Omega$$

Man kann das Problem auch anders lösen: Am Messwerk dürfen höchstens 50 mV abfallen. Dann müssen also an R_v 950 mV abfallen. Gemäß dem Spannungsteiler gilt dann:

$$\frac{R_v}{R_i} = \frac{950 \text{ mV}}{50 \text{ mV}}; \quad \text{daraus: } R_v = 950 \Omega$$

$$\frac{R_v}{R_i} = \frac{950 \text{ mV}}{50 \text{ mV}}; \quad \text{daraus: } R_v = 950 \Omega$$

Der Innenwiderstand R_i' des erweiterten Voltmeters ist somit: $R_i' = 1000 \Omega$.

Fazit:

Wird der Messbereich eines Amperemeters um den Faktor x erweitert, so sinkt der Innenwiderstand auf den x -ten Teil. Bei einem Voltmeter wird R_i x -mal größer.

• Fehlergrenzen der elektrischen Messinstrumente (Klassenziffer)

Elektrische Messinstrumente, die den Regeln des VDE entsprechen, werden - je nach Güte - in **Genauigkeitsklassen** (auch Güteklassen genannt) eingeteilt, für die bestimmte Einstelltoleranzen gelten.

Die Einteilung erfolgt in folgende Klassen:

$$\left. \begin{array}{l} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,5 \end{array} \right\} \text{ als Feinmessinstrumente} \qquad \left. \begin{array}{l} 1 \\ 1,5 \\ 2,5 \\ 5 \end{array} \right\} \text{ als Betriebsmessinstrumente}$$

Diese auf dem Gerät angegebene **Klassenziffer** entspricht dem Anzeigefehler **in Prozent des jeweiligen Messbereichsendwerts**.

Beispiel:

Die Klassenziffer eines Amperemeters sei gleich 1,5. Das Instrument habe eine lineare Skala von 0 - 50 Skt (Skalenteile). Ist z.B. der Messbereich 100 mA, so beträgt also der Anzeigefehler $\pm 1,5$ mA. Bei einem Zeigerausschlag von z.B. 40

Skt (entsprechend einem Strom von 80 mA) ist dann der Sollwert wie folgt anzugeben:

$$I = (80,0 \pm 1,5) \text{ mA.}$$

Wählt man für denselben Strom den Messbereich 500 mA, so gilt:

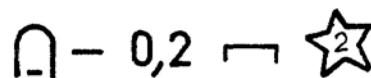
$$I = (80,0 \pm 7,5) \text{ mA.}$$

Im zweiten Fall ist also der Anzeigefehler größer.

Die genaueste Messung ergibt sich also beim **kleinsten möglichen** Messbereich, d.h. der Fehler wird bei einem bestimmten Sollwert um so kleiner, je **näher der Zeiger am Messbereichsendwert** steht.

Liegt der Nullpunkt innerhalb der Skala, so zählt als Messbereichsendwert die Summe beider Skalenwerte. Bei Instrumenten für nicht elektrische Größen oder bei Instrumenten mit stark nichtlinearer Skala ist dagegen der Fehler in Prozent der Skalenlänge zu rechnen. Die Klassenziffer ist - neben einer Reihe anderer Symbole - auf der Skala angegeben.

Beispiel für eine Skalenbeschriftung:



Bedeutung (von links):

- Drehspultyp;
- Gleichstrominstrument;
- Klassenziffer 0,2;
- waagrechte Gebrauchslage;
- 2 kV Prüfspannung.

Was man unbedingt wissen sollte:

- **Wie wirken gleichnamige und ungleichnamige Ladungen aufeinander?**
- **Welches Gesetz beschreibt quantitativ diese Kraftwirkung?**
- **Wie ist das elektrische Feld einer Punktladung gerichtet und wie ist die Stärke des Feldes vom Abstand abhängig?**
- **Was sind Äquipotentiallinien und was ist Spannung?**
- **Was ändert sich bei einer Wechselspannung?**
- **Welche Eigenschaft eines elektrischen Leiters beschreibt der elektrische Widerstand und wie ist er definiert?**
- **Was ist ein ohmscher Leiter?**
- **Was ist der Unterschied zwischen elektrischen und spezifischen Widerstand?**
- **Wie sind elektrische Arbeit und elektrische Leistung definiert?**
- **Welche physikalischen Größen addieren sich bei einer Reihenschaltung, bzw. bei einer Parallelschaltung von Widerständen?**

• Übungsaufgaben:

Ü 6.5)

Wie groß ist die Membranspannung bei Körpertemperatur an einer Zellwand, wenn im Innern der Zelle die K^+ -Ionenkonzentration 30 mal größer ist als außen?

Ü 6.6)

Was kostet der Betrieb einer 60 W Glühlampe pro Tag, wenn 1 kWh 0,30 DM kostet?

Ü 6.7)

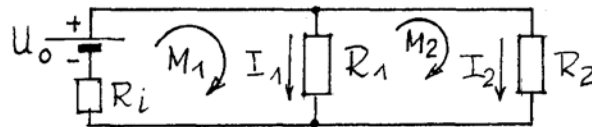
Was sind ohmsche Leiter?

Ü 6.8)

Aus einer Batterie werden 8 A Strom gezogen, wobei die Klemmenspannung 12,2 V beträgt. Bei Steigerung der Stromstärke auf 14 A sinkt die Klemmenspannung auf 11,9 V. Berechnen Sie Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und den inneren Widerstand der Batterie.

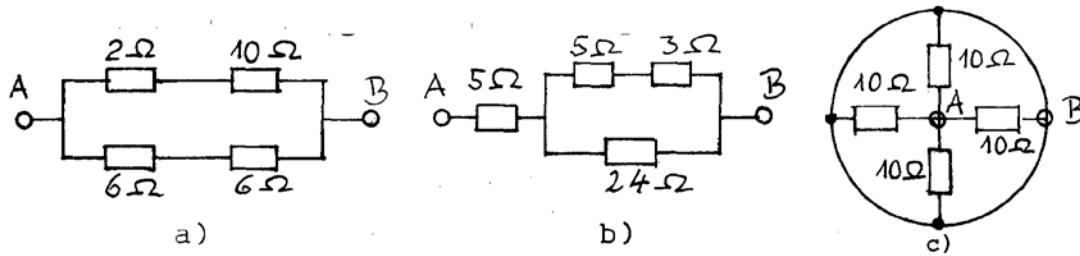
Ü 6.9)

Stellen Sie für die beiden Maschen M_1 und M_2 in der nebenstehenden Schaltung jeweils die Maschengleichung auf.



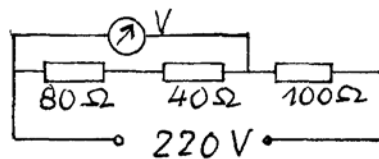
Ü 6.10)

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand zwischen den Punkten A und B in den folgenden Schaltungen:



Ü 6.11)

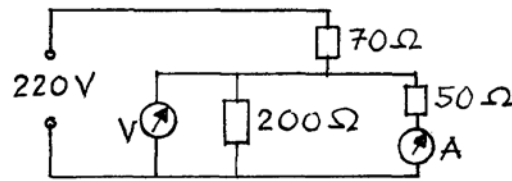
Welche Spannung zeigt das Voltmeter V in der untenstehenden Schaltung an?



Ü 6.12)

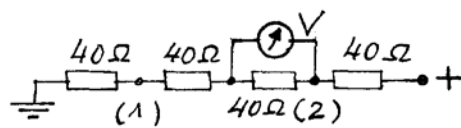
Welchen Strom zeigt in der untenstehenden Schaltung das Amperemeter A an?

Welche Spannung zeigt das Voltmeter V an?



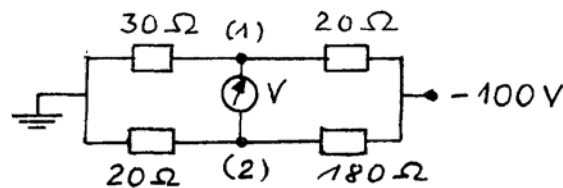
Ü 6.13)

Welche Potentialwerte herrschen in den Punkten (1) und (2) vor, wenn das Voltmeter V eine Spannung von 50 V anzeigt?



Ü 6.14)

Welche Spannung zeigt das Voltmeter in der nebenstehenden Schaltung an? Welcher der Punkte (1) oder (2) liegt am Minuspol des Voltmeters?



Ü 6.15)

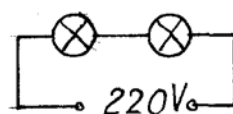
Ein Tauchsieder für Netzspannung (220 V) hat eine Leistung von 1000 W. Welcher Strom fließt durch ihn? Welchen Widerstand hat er?

Ü 6.16)

Die Netzspannung schwanke um 3 %. Um wie viel % schwankt dann die Leistung eines angeschlossenen Gerätes?

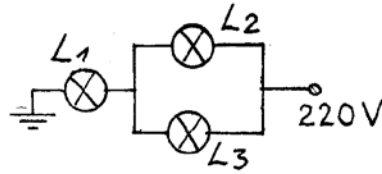
Ü 6.17)

Zwei Glühlampen mit den Nennwerten 220 V/100 W werden in Serie geschaltet und an das Netz angeschlossen. Welche Leistung nimmt jetzt jede Lampe auf?



Ü 6.18)

Drei gleiche Glühlampen mit den Nennwerten 220 V/60 W sind so zusammengeschaltet, wie es die nebenstehende Skizze zeigt. Welche Lampe leuchtet am hellsten? Welche Gesamtleistung nehmen die Lampen auf?



Ü 6.19)

Zwei Glühlämpchen von je 6 V/5 W und zwei von je 12 V/5 W sollen gleichzeitig an eine 12 V Batterie angeschlossen werden, so dass jedes Lämpchen 5 W aufnimmt. Fertigen Sie ein Schaltbild an.

Ü 6.20)

Ein Voltmeter (Messbereich 30 V) mit der Klassenziffer 2,5 zeigt 10 V an. Berechnen Sie den absoluten und prozentualen Anzeigefehler für die gemessene Spannung.

Zusatz zur Klausurvorbereitung

Elektrische Leitfähigkeit

Physikalische Grundbegriffe

- Leitfähigkeit, Widerstand
- Elektrolyse, Elektrolyt
- Faradaysche Gesetze
- Coulombsches Gesetz

Messtechnische Grundlagen

- Wheatstonesche Brücke

Weiterführende Literatur

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 292-297
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 157, 169-171
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 156-159, 125-126

Erläuterung der wichtigsten Physikalischen Begriffe

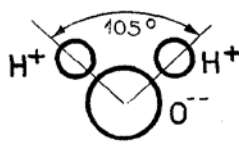
• Leitfähigkeit von Elektrolyten

Eine Vielzahl von chemischen Verbindungen besteht aus einem Ionengitter. Bringt man solche Stoffe in Wasser (oder andere geeignete Lösungsmittel), so erfolgt eine Aufspaltung der Verbindung in frei bewegliche Ionen. Dieser Vorgang heißt **elektrolytische Dissoziation**. Die zwischen den Ionen im Kristall wirksamen Kräfte sind elektrostatischer Natur, für die das **Coulombsche Gesetz** gilt:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{a^2}$$

e_1 und e_2 sind die Ionenladungen verschiedenen Vorzeichens, a ist der Abstand der beiden Ionenmittelpunkte, ϵ_r ist die Dielektrizitätszahl (Definition s.Vers.8, Gl.8.8) des Mediums zwischen den Ionen. Für Wasser z.B. ist $\epsilon_r = 81$, für Vakuum ist $\epsilon_r = 1$ für Luft ist $\epsilon_r = 1,0006$.

Bringt man einen Kristall in Wasser, so werden die Dipolmoleküle des Wassers auf Grund ihrer Polarität von den Ionen des Kristalls in das Kristallgitter hineingezogen. Durch das geringe Volumen des Wassermoleküls wird dieser Vorgang noch begünstigt. Die Anziehungskräfte zwischen den Ionen werden nun durch das Dielektrikum Wasser gegenüber Vakuum um den Faktor $\epsilon_r = 81$ vermindert. Es genügen nun "Wärmestöße" von Wassermolekülen (thermische Molekularbewegung!), um das Gitter zu zerstören, d.h. der Kristall löst sich auf, die Ionen sind jetzt frei beweglich.

H₂O-Molekül

Die Ladungsschwerpunkte der H⁺- und O⁻⁻-Ionen fallen auf Grund der gewinkelten Anordnung nicht zusammen.

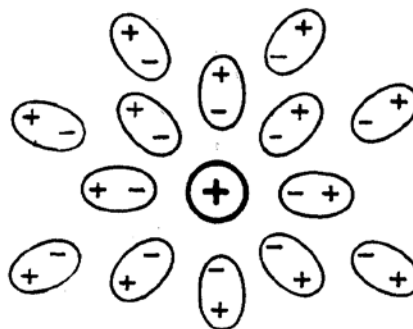


Symbol für Dipolmolekül

Flüssigkeiten, die durch Dissoziation entstandene Ionen enthalten, heißen **Elektrolyte**. In einem Elektrolyten kommt es zum Stromfluss, wenn man zwei Elektroden in diesen eintaucht und eine Spannung an die Elektroden legt. In dem so entstandenen elektrischen Feld wandern dann die im Elektrolyten vorhandenen Ionen beiderlei Vorzeichens jeweils zu den gegenpoligen Elektroden.

Es sei noch einmal betont, dass das Entstehen der Ionen bei der elektrolytischen Dissoziation nicht an das Vorhandensein eines elektrischen Feldes gebunden ist, sondern allein durch physikalisch-chemische Vorgänge beim Lösen bewirkt wird.

Da die Wassermoleküle Dipole sind, lagern sie sich an die Ionen an. Diesen Vorgang nennt man Hydratation. Mit dem Ion wandert dann gleichzeitig die an das Ion gebundene Hydrathülle durch den Elektrolyten.

Hydrathülle
eines Kations

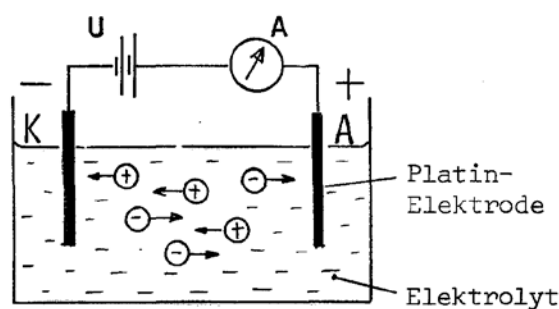
Es kommt zu Reibung zwischen der Hydrathülle und dem Lösungsmittel (Viskosität, Stokesches Reibungsgesetz, s. S. Versuch 1 / 26). Diese Reibungskräfte sind den durch das elektrische Feld hervorgerufenen "Antriebskräften" entgegengerichtet und steigen mit zunehmender Geschwindigkeit an. Sobald Reibungskräfte und elektrische Kräfte (die elektrische Kraft ist konstant!) betragsmäßig einander gleich sind, erfolgt keine weitere Zunahme der Geschwindigkeit mehr: Die Ionen bewegen sich gleichförmig unbeschleunigt.

Es sei erwähnt, dass auch ungeladene feinverteilte Schwebeteilchen (Kolloide) in einer Flüssigkeit unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes wandern. Dieser Vorgang heißt **Elektrophorese** (oder Kataphorese). Die Ursache hierfür ist das Auftreten einer **elektrischen Doppelschicht** (Berührungsspannung) an der Grenzfläche zwischen fester und flüssiger Phase.

- **Elektrolyse**

Im Gegensatz zu den Metallen ist bei den Elektrolyten der Stromdurchgang mit einer chemischen Zersetzung des Elektrolyten an den Elektroden verbunden. Diese Zersetzung heißt Elektrolyse. Wir betrachten kurz die Elektrolyse von angesäuertem Wasser. In ein Gefäß mit angesäuertem Wasser (z.B. mit H_2SO_4) werden zwei Elektroden aus Platin getaucht, die über ein Amperemeter mit einer Gleichspannungsquelle U verbunden sind. Die positive Elektrode heißt **Anode (A)**, die negative heißt **Katode (K)**. Die Schwefelsäure (H_2SO_4) dissoziiert in Wasser in positive- H^+ -Ionen und negative SO_4^- -Ionen.

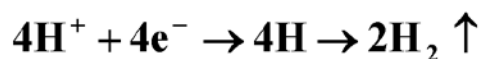
Die H^+ -Ionen wandern zur Katode, die SO_4^- -Ionen zur Anode. Die positiven Ionen im Elektrolyten werden **Kationen**, die negativen **Anionen** genannt.



Bei der Elektrolyse von angesäuertem Wasser entsteht an der Katode Wasserstoff und an der Anode Sauerstoff. Es spielen sich folgende Vorgänge ab:

Kathode:

Die H^+ -Ionen bewegen sich unter der Wirkung des elektrischen Feldes zur Katode, nehmen dort je ein Elektron auf, so dass atomarer Wasserstoff entsteht. Der atomare Wasserstoff verbindet sich zu H_2 -Molekülen und entweicht als gasförmiger Wasserstoff

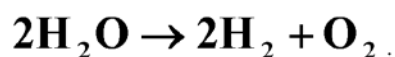


Genau betrachtet wandert nicht ein H^+ -Ion, sondern ein H_3O^+ -Ion (Hydroniumion). Das H^+ -Ion lagert sich nämlich an ein H_2O -Molekül an.

Die Reaktionen der entladenen Teilchen an den Elektroden hängen von vielen Faktoren ab: Natur der abgeschiedenen Stoffe, Stromdichte, Art der Elektroden, Lösungsmittel, Elektrolyt, Konzentration, Temperatur usw.

Anode:

Die SO_4^- -Ionen wandern zur Anode und geben dort Elektronen ab. Im Verlaufe der weiteren Reaktionen entsteht Sauerstoff. Mengenmäßig entstehen bei der Elektrolyse von angesäuertem Wasser an der Katode 2 Volumenteile H_2 , und an der Anode 1 Volumenteil O_2 , was also letztlich einer bloßen Zersetzung des Wassers entspricht:



Verwendet man z.B. Kupferelektroden in einer Kupfersulfatlösung, so scheidet sich an der Katode Kupfer ab und die Katode wird schwerer. An der Anode reagieren die entladenen SO_4 -Radikale mit der Kupfer-Elektrode, wodurch ständig Kupfer der Anode in Lösung geht, so dass die Anode leichter wird. Die Zusammenhänge zwischen abgeschiedener Menge und transportierter elektrischer Ladung hat Faraday genauer untersucht. Die Ergebnisse lassen sich in den beiden Faradayschen Gesetzen zusammenfassen:

- **1.Faradaysches Gesetz:**

Die an der Elektrode abgeschiedene Masse ist proportional zu der durch den Elektrolyten hindurchgegangenen Ladungsmenge:

$$m = k \cdot Q = k \cdot I \cdot t$$

Der Proportionalitätsfaktor k heißt elektrochemisches Äquivalent. k gibt an, wie viel Gramm eines Stoffes von der Ladungsmenge 1 C abgeschieden werden.

Bei der elektrolytischen Leitung wird also im Gegensatz zur metallischen Leitung Ladung und Masse transportiert.

- **2.Faradaysches Gesetz:**

Bei gleicher Ladungsmenge verhalten sich die abgeschiedenen Massen verschiedener Elektrolyte wie die äquivalenten molaren Massen der Stoffe.

Unter der äquivalenten molaren Masse eines Stoffes versteht man den Bruchteil $1/z$ der Molmasse M , wenn z die Wertigkeit der betreffenden Ionenart ist. Ein Beispiel: Die äquivalente molare Masse von Wasserstoff ist 1,008 g/val, die von Sauerstoff 8 g/val.

Zur elektrolytischen Abscheidung von 1 mol 1-wertiger oder 1/2 mol 2-wertiger Ionen (also jeweils von 1 Äquivalent) wird - unabhängig von der Art der Ionen - jeweils die Ladungsmenge $F = N_A \cdot e$ Coulomb benötigt ($N_A = \text{Avogadrozahl} = \text{Zahl der Ionen im Mol}$; $e = \text{Elementarladung}$). F heißt **Faraday-Konstante**. Ihr Wert beträgt:

$$F = N_A \cdot e = 96500 \text{ As/mol}$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

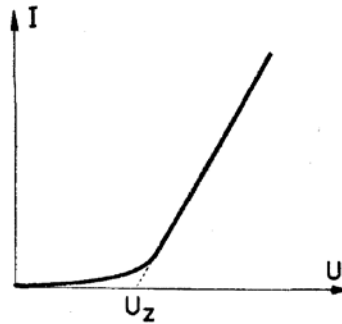
$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

- **Polarisationsspannung**

Im allgemeinen kann die Elektrolyse nicht bei beliebig kleinen Spannungen ausgeführt werden. Fließt ein Strom durch einen Elektrolyten, so kommt es nicht nur zur Ionenwanderung, sondern auch zu Veränderungen an den Grenzflächen (Phasengrenzen) zwischen Elektroden und Elektrolyt (z.B. Belegung der Pt-Elektroden mit Wasserstoff und Sauerstoff bei der Elektrolyse von angesäuertem Wasser). Dadurch wird eine galvanische Spannung bedingt, die der Elektrolysespannung entgegenwirkt. Diese Erscheinung heißt all-

gemein **galvanische Polarisation**, die auftretende Gegenspannung wird als **Polarisationsspannung** bezeichnet.

Vom Auftreten der Polarisationsspannung kann man sich überzeugen, wenn man die Elektrolyse unterbricht und an die Elektroden ein Spannungsmessgerät anschließt. Das Voltmeter zeigt dann eine der Elektrolysespannung entgegengerichtete Spannung an. Sie ist kleiner als die Elektrolysespannung und nimmt zeitlich ab, wenn das Voltmeter Strom zieht. Liegt die von außen angelegte Elektrolysespannung unter der Polarisationsspannung, so kommt es zu keiner Zersetzung. Man nennt die von außen angelegte Spannung, bei der gerade die Zersetzung des Elektrolyten beginnt, die Zersetzungsspannung U_Z . Die Zersetzungsspannungen liegen in der Größenordnung von etwa einem Volt. Steigert man also die Elektrolysespannung U von Null an, so kommt es erst für $U = U_Z$ zu einem merklichen Stromfluss.



Die obenstehende Abbildung zeigt die Strom-Spannungs-Funktion. Da die Elektrolyte weitgehend dem Ohmschen Gesetz gehorchen, steigt der Strom nun weiter **linear** mit der Spannung an. Die Verlängerung des geradlinigen Teils des Kurvenverlaufs bis zum Schnittpunkt mit der U-Achse liefert die Zersetzungsspannung U_Z .

Die Ionenbeweglichkeit

Durch die an den Elektroden anliegende Spannung U besteht im Innern des Elektrolyten ein elektrisches Feld E . Ist der Elektrodenabstand l , so ist - von den Randzonen abgesehen, wo das Feld inhomogen ist - die Feldstärke im Elektrolyten gleich $E = U / l$.

Diese Beziehung kann man sich folgendermaßen klarmachen: Nach den Ausführungen zu den Grundlagen für Versuch 6 auf den Seiten 6/4 und 6/5 ist die Arbeit W , die aufzuwenden ist, um die Ladung e im konstanten elektrischen Feld E um die Strecke l gegen die Feldrichtung zu verschieben gleich $W = e \cdot E \cdot l$. Andererseits ist $W = e \cdot U$. Durch Gleichsetzen erhält man den obigen Ausdruck für die Feldstärke zwischen zwei Platten (Elektroden) mit dem Abstand l , wenn die Spannung U anliegt. Durch die Feldstärke wird auf die im Elektrolyten befindlichen Ionen eine Kraft ausgeübt, was schließlich - wie weiter oben ausgeführt - zu einer konstanten Geschwindigkeit v der Ionen im Elektrolyten führt. Die Geschwindigkeit ist umso größer, je größer die Feldstärke ist. Für nicht zu hohe Feldstärken ist die Ionengeschwindigkeit proportional zur Feldstärke:

$$\boxed{v = u \cdot E} \quad (7.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor u heißt **Ionenbeweglichkeit**.
SI-Einheit für u : $1 \text{ m}^2 / \text{Vs}$.

In der folgenden Tabelle sind die Ionenbeweglichkeiten einiger Kationen und Anionen in wässriger Lösung bei 18 °C aufgeführt. Besonders große Werte der Ionenbeweglichkeit haben H^+ -Ionen und OH^- -Ionen.

Kation			Anion		
H^+	$32,7 \cdot 10^{-8}$	m^2/Vs	OH^-	$18,0 \cdot 10^{-8}$	m^2/Vs
Na^+	$4,5 \cdot 10^{-8}$	“	Cl^-	$6,8 \cdot 10^{-8}$	“
K^+	$6,7 \cdot 10^{-8}$	“	Br^-	$7,0 \cdot 10^{-8}$	“
Ag^+	$5,6 \cdot 10^{-8}$	“	SO^-	$7,1 \cdot 10^{-8}$	“

Tab.7.1 Ionenbeweglichkeiten bei 18 °C

Die Ionenbeweglichkeit eines bestimmten Ions hängt von der Art des Lösungsmittels, der Konzentration und besonders von der Temperatur ab. Die starke Abhängigkeit von der Temperatur erklärt sich aus der ebenfalls starken Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur (s. Grundlagen zu Versuch 1). Mit steigender Temperatur nimmt die Viskosität ab und somit nehmen auch die Stokesschen Reibungskräfte ab, so dass bei gegebener Feldstärke bzw. Spannung die Geschwindigkeit der Ionen und damit natürlich auch die Ionenbeweglichkeit ansteigt.

• Spezifische Leitfähigkeit

Der Widerstand einer leitenden Flüssigkeit hängt - wie auch der Widerstand eines festen Stoffes - von der Geometrie ab. Für einen Leiter der Länge l mit der Querschnittsfläche A ist der Widerstand gegeben durch:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A} \quad (6.9 \text{ und } 6.10)$$

σ ist die **spezifische Leitfähigkeit**.

SI-Einheit von σ : $1 \Omega^{-1}m^{-1}$ oder: $1 Sm^{-1}$.

1 S (Siemens) = $1 \Omega^{-1}$.

Die Messung von σ erstreckt sich also auf die Bestimmung des Widerstandes und die Ermittlung der geometrischen Größen l und A für Abstand und Fläche der Elektroden. Die Messung erfolgt in sog. Leitfähigkeitsgefäßen oder mit Leitfähigkeitsmesszellen. Da der Feldlinienverlauf zwischen den Elektroden nicht über die ganze Elektrodenfläche homogen ist (Streufeld am Rande), kann der Quotient l/A nicht aus der Geometrie der Elektrodenanordnung der Messzelle errechnet werden. Man ersetzt daher den Quotienten l/A durch einen "Formfaktor" k (= Zellenkonstante) und bestimmt k empirisch mittels Eichlösungen. Es ist also:

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot k \quad (7.2)$$

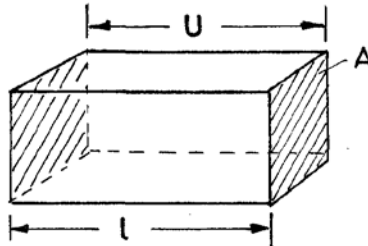
Bei bekannter Zellenkonstante k kann σ dann durch eine Widerstandsmessung ermittelt

werden.

Diese Widerstandsbestimmung darf aber nicht mit Gleichspannung durchgeführt werden, da es dabei zur Ausbildung einer Polarisationsspannung käme, die der angelegten Spannung entgegen wirkt. Es würde dadurch ein höherer Widerstand als der tatsächliche gemessen.

• **Zur spezifischen Leitfähigkeit verdünnter Lösungen**

Gegeben sei eine verdünnte Elektrolytlösung in einem Gefäß der Länge l mit der Querschnittsfläche A . Legt man eine Spannung U an, so herrscht im Innern des Elektrolyten die Feldstärke $E = U/l$ (vgl. S. 7/6).



In der Volumeneinheit seien n z -wertige Ionen vorhanden, die sich im Feld E mit der Geschwindigkeit v bewegen. Die im Volumenelement dV , vorhandene Ladung dQ ist dann: $dQ = z \cdot e \cdot n \cdot dV = z \cdot e \cdot n \cdot A \cdot ds$ (s = Wegstrecke). Die pro Zeiteinheit durch den Leiter strömende Ladung - also der Strom I - ist dann:

$$\mathbf{I = \frac{dQ}{dt} = z \cdot e \cdot n \cdot A \cdot \frac{ds}{dt} = z \cdot e \cdot n \cdot A \cdot v \quad \text{mit } v = \frac{ds}{dt}}$$

Wegen $v = u \cdot E = u \cdot \frac{U}{l}$ gilt: $I = z \cdot e \cdot n \cdot u \cdot \frac{A}{l} \cdot U$.

Ein Vergleich mit der Widerstandsdefinition $R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\sigma \cdot A}$ ergibt:

$$\sigma = z \cdot e \cdot n \cdot u \quad \text{oder} \quad \sigma = F \cdot c \cdot u \cdot z$$

mit $F = N_A \cdot e$ (F = Faraday-Konstante, N_A = Avogadrozahl) und $c = n / N_A$ = Konzentration (in mol/Volumeneinheit).

In einem Elektrolyten sind wegen der Elektroneutralität immer Ionen beiderlei Vorzeichens vorhanden, wobei $z_+ c_+ = z_- c_-$ ist. Beide Ionenarten tragen gleichermaßen zur Leitfähigkeit bei, so dass für die Leitfähigkeit einer verdünnten Lösung gilt:

$$\sigma = F \cdot z_+ c_+ (u_+ + u_-) = F \cdot z_- c_- (u_+ + u_-)$$

bzw.:

$$\sigma = F \cdot z \cdot c \cdot (u_+ + u_-) \quad (7.3)$$

oder:

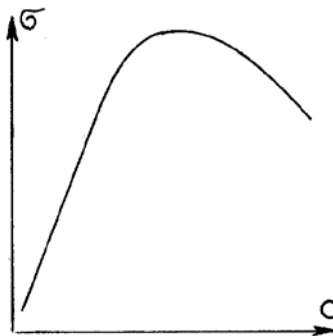
$$\sigma = N_A \cdot e \cdot z \cdot c \cdot (u_+ + u_-).$$

u_+ = Beweglichkeit des Kations; u_- = Beweglichkeit des Anions;
 c = Konzentration in mol/m³; z = Wertigkeit.

Nach Gl.7.3 hängt die spezifische Leitfähigkeit im wesentlichen von der Konzentration und von der Beweglichkeit der Ionen ab. Da die Beweglichkeit von der Art der Ionen, vom Lösungsmittel und der Temperatur abhängt, lässt sich zusammenfassend feststellen, dass die spezifische Leitfähigkeit von Elektrolyten von folgenden Faktoren abhängt:

- a) Art des Lösungsmittels
- b) Art des gelösten Stoffes
- c) Temperatur
- d) Konzentration

Für eine gegebene Elektrolytlösung hängt σ also von der Temperatur und der Konzentration ab. Mit zunehmender Temperatur steigt die Leitfähigkeit an, da die Viskosität der Lösung abnimmt. Bei Konzentrationsänderungen sind die Verhältnisse etwas verwickelter. Die untenstehende Abbildung zeigt qualitativ den Verlauf der spezifischen Leitfähigkeit σ als Funktion der Konzentration c .



Ausgehend von kleinen Konzentrationswerten beobachtet man zunächst einen Anstieg der Leitfähigkeit, da mit steigender Konzentration zunächst auch die Zahl der freien Ionen ansteigt. Für verdünnte Lösungen ist die Leitfähigkeit proportional zur Konzentration: $\sigma \sim c$ (vergl. Gl.7.3). Da nun bei höheren Konzentrationen der **Dissoziationsgrad** (das ist der Quotient aus der Anzahl der dissoziierten Moleküle und der Gesamtzahl der Moleküle vor der Dissoziation) abnimmt, steigt die Zahl der freien Ionen unterproportional weiter. Mit dem Anstieg der Ionenkonzentration steigt aber auch die gegenseitige Behinderung der Ionen (interionische Wechselwirkung aufgrund ihrer elektrischen Ladung), die eine Herabsetzung der Ionenbeweglichkeit und damit eine weitere Verringerung der Leitfähigkeit zur Folge hat. Beide Effekte bewirken, dass die Leitfähigkeit ein Maximum durchläuft, d.h. von einer bestimmten Konzentration ab trotz weiterer Konzentrationserhöhung nun abnimmt.

- **Das Ionenprodukt des Wassers**

Destilliertes Wasser besitzt eine äußerst geringe, aber noch deutlich feststellbare elektrische Leitfähigkeit. Auch chemisch reines Wasser, sog. Leitfähigkeitswasser, leitet

den elektrischen Strom. Dies kommt daher, daß ein Teil der Wassermoleküle dissoziiert, also in Ionen aufgespalten ist:



(genau genommen liegt statt des H^+ -Ions ein H_3O^+ - Ion vor).

Umgekehrt können H^+ -Ionen und OH^- -Ionen wieder zu H_2O -Molekülen zusammentreten:



Diese Reaktion wird als Neutralisation bezeichnet. Im Gleichgewicht (dynamisches Gleichgewicht!) dissoziieren genau so viele Moleküle pro Zeiteinheit, wie durch Neutralisation wieder entstehen. Die Gleichgewichtsreaktion lautet dann:



Für diese Dissoziationsreaktion lautet das **Massenwirkungsgesetz** (MWG):

$$\frac{c_{\text{H}^+} \cdot c_{\text{OH}^-}}{c_{\text{H}_2\text{O}}} = k_{\text{H}_2\text{O}}$$

c_{H^+} = Konzentration der H^+ -Ionen; c_{OH^-} = Konzentration der OH^- -Ionen; $c_{\text{H}_2\text{O}}$ = Konzentration des Wassers (jeweils in mol/l).

Die Dissoziationskonstante $k_{\text{H}_2\text{O}}$ hat für Wasser den außerordentlich kleinen Wert von

$$c_{\text{H}^+} \cdot c_{\text{OH}^-} = c_{\text{H}_2\text{O}} \cdot k_{\text{H}_2\text{O}} = k_{\text{w}} = 10^{-14} \frac{\text{mol}^2}{\text{l}^2}$$

$1,8 \cdot 10^{-16}$ mol/l, d.h. $c_{\text{H}_2\text{O}}$ ist im Vergleich zu c_{H^+} und c_{OH^-} sehr groß, das Gleichgewicht liegt also praktisch auf der Seite des undissoziierten Wassers. Man kann somit für $c_{\text{H}_2\text{O}}$ den Wert der Gesamtkonzentration an Wasser, nämlich den Wert 55,5 mol/l setzen. Es ist dann:

$$k_{\text{w}} = c_{\text{H}^+} \cdot c_{\text{OH}^-} \text{ heißt Ionenprodukt des Wassers.}$$

Da bei reinem Wasser genau so viele H^+ - wie OH^- -Ionen vorhanden sind, gilt:

$$c_{\text{H}^+} = c_{\text{OH}^-} = 10^{-7} \frac{\text{mol}}{\text{l}} \text{ (bei } 25^\circ\text{C)}$$

k_{w} ist von der Temperatur abhängig!

• **Die Wheatstonesche Brücke**

Die Bestimmung der spezifischen Leitfähigkeit wird nach Gl. 7.2 über eine Widerstandsmessung durchgeführt. Genaue Widerstandsmessungen werden mit der **Wheatstoneschen Brücke** erzielt.

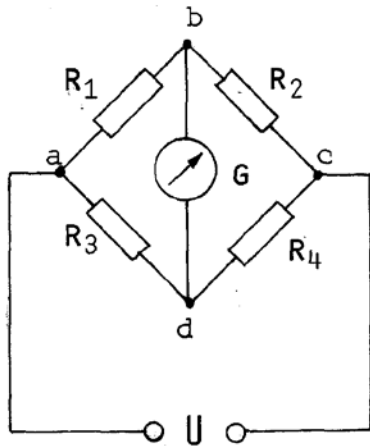


Abb. 7.1.:
Wheatstonesche Brücke

Vier Widerstände $R_1 \dots R_4$ sind so zusammengeschaltet, wie es die Abb. 7.1. zeigt. An die Punkte a und c wird eine Spannungsquelle angeschlossen, zwischen b und d liegt ein Strom- oder Spannungsmessgerät G. Sind die vier Widerstände beliebig gewählt, so zeigt G im allgemeinen einen Ausschlag, d.h. die Punkte b und d haben verschiedenes Potential. Wählt man aber die Widerstände so, dass die Beziehung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \tag{7.4}$$

erfüllt ist, so haben die Punkte b und d gleiches Potential, und das Instrument G zeigt keinen Ausschlag: Man sagt: „**Die Brücke ist abgeglichen**“. G wird hier „Nullinstrument“ genannt.

Ist z.B. R_3 ein zu messender unbekannter Widerstand, so läßt sich dieser nach Gl. 7.4. berechnen, wenn er sich zusammen mit drei bekannten Widerständen $R_1, R_2,$ und R_4 in einer abgeglichenen Brücke befindet.

Der Abgleich der Brücke erfolgt durch Verändern eines Widerstandes, z.B. durch R_4 . Sind R_1 und R_2) Festwiderstände, so wird R_4 solange verändert, bis G keinen Ausschlag zeigt. Gl. 7.4. ist dann erfüllt. Als veränderbare Widerstände werden häufig sog. Widerstandsdekaden benutzt: Es sind dies mehrere in Serie geschaltete Widerstände, die alle in 10 Stufen veränderlich sind und sich untereinander jeweils um den Faktor 10 unterscheiden.

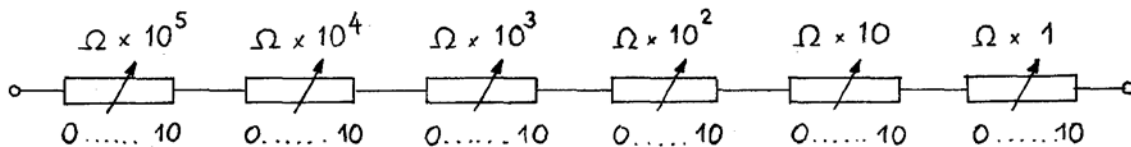



Abb.7.2.: zeigt eine 6-stellige Dekade. Das Zeichen  bedeutet veränderlicher Widerstand.

Die Bedingung für den Brückenabgleich (Gl.7.4) kann man auf verschiedene Weise herleiten. Die wohl einfachste erfolgt unter Anwendung des **Spannungsteilers**.

Die Brücke gilt als abgeglichen, wenn das Instrument G keinen Ausschlag zeigt. Das bedeutet, dass die Punkte b und d gleiches Potential haben müssen. Somit müssen auch die Potentialdifferenzen $\varphi_b - \varphi_a = U_1$ und $\varphi_d - \varphi_a = U_3$ einander gleich sein. Außerdem ist $U_1+U_2 = U_3+U_4= U$. Für den oberen Zweig (abc) gilt dann:

$$\frac{U}{U_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Für den unteren Zweig (adc) gilt:

$$\frac{U}{U_3} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_4}{R_3} .$$

Da $U_1 = U_3$ ist, müssen die rechten Seiten der beiden Gleichungen einander gleich sein:

$$1 + \frac{R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_4}{R_3} \quad \text{bzw.} \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} .$$

Was man unbedingt wissen sollte:

- Welcher chemische Vorgang findet statt, wenn sie Kochsalz in Wasser lösen?
- Was versteht man unter Hydratation?
- Welcher chemische Vorgang findet bei der Elektrolyse an den Elektroden statt?
- Was unterscheidet den Stromfluss bei einem Elektrolyten von dem Stromfluss bei Metallen?
- Was besagen die beiden Faradayschen Gesetze?
- Von welchen Faktoren ist die Ionenbeweglichkeit abhängig?
- Wie sind spezifischer Widerstand und spezifische Leitfähigkeit definiert?
- Was beschreibt die Zellenkonstante k einer Messzelle?
- Wie lässt sich die spezifische Leitfähigkeit von verdünnten Lösungen berechnen, welche Parameter der Elektrolytflüssigkeit sind von Bedeutung?
- Von welchen Faktoren ist die spezifische Leitfähigkeit von Elektrolyten abhängig?
- Leitet destilliertes Wasser bzw. chemisch reines Wasser den elektrischen Strom?
- In welcher Beziehung stehen das Ionenprodukt des Wassers und der pH-Wert einer Lösung?
- Was versteht man unter dem 'Abgleichen' einer Wheatstoneschen Brückenschaltung?
- Was bedeutet gleiches Potential?
- Was kann man mit einer Wheatstoneschen Brückenschaltung bestimmen?
- Wie unterscheiden sich die Widerstandsbestimmungen in Versuch 6 und Versuch 7?
Was sind die Vorteile der Brückenschaltung?
- Wovon hängt die Geschwindigkeit ab, mit der sich Ionen bewegen?

Übungsaufgaben:

Ü 7.1

Leiten Sie Gl.7.4 mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze (siehe Versuch 6) ab. Hinweis: Stellen Sie die Maschengleichungen für die Maschen abda und bcdB in der obigen Schaltung auf.

Ü 7.2

Was versteht man unter Dissoziation?

Warum werden die Coulomb-Kräfte zwischen den Ionen eines Kristalls stark herabgesetzt, wenn dieser sich in Wasser befindet?

Ü 7.3

Wie lange müßte durch angesäuertes Wasser ein Strom von 5A fließen, damit 1 mol H_2 (= 2,016 g) abgeschieden wird?

Welches Volumen würde das Gas unter Normalbedingungen (STPD) einnehmen?

Ü 7.4

Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die Na^+ -Ionen in einer verdünnten wässrigen Kochsalzlösung (18 °C), wenn zwei Elektroden im Abstand von 3 cm in diese eintauchen und eine Spannung von 20 V angelegt wird (homogenes Feld zwischen den Elektroden angenommen)?

Ü 7.5

Wovon ist die Ionenbeweglichkeit abhängig?

Ü 7.6

Wie ist die spezifische Leitfähigkeit definiert? Welche SI-Einheit hat sie?

Ü 7.7

Welche spezifische Leitfähigkeit hat eine 0,01 molare Schwefelsäure bei 18 °C? (Molarität: Eine n-molare Lösung enthält n Mole pro 1 Liter Lösung).

Ü 7.8

Wie verändert sich die Leitfähigkeit einer Lösung mit zunehmender Konzentration des gelösten Stoffes?

Ü 7.9

Warum nimmt die Leitfähigkeit eines Elektrolyten mit steigender Temperatur zu?

Ü 7.10

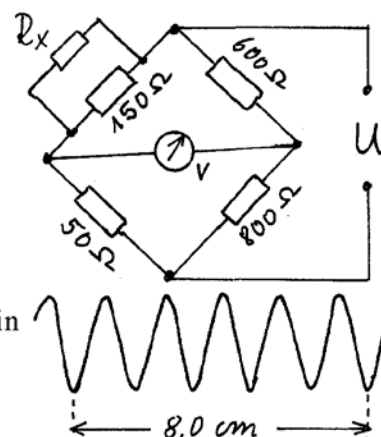
Was versteht man unter dem Ionenprodukt des Wassers?

Wieviele H^+ -Ionen sind in 1 Liter reinen Wassers bei 25 °C?

Ü 7.11

Wieviel Ohm müßte R_x in der nebenstehenden Brückenschaltung haben, damit das Voltmeter keinen Ausschlag zeigt, wenn an der Brücke die Spannung U liegt?

Ü 7.12 Auf dem Oszillografenschirm erscheint das Bild einer Sinusspannung. Welche Frequenz hat diese, wenn ein Time-Base-Wert von 50 $\mu s/cm$ eingestellt ist?

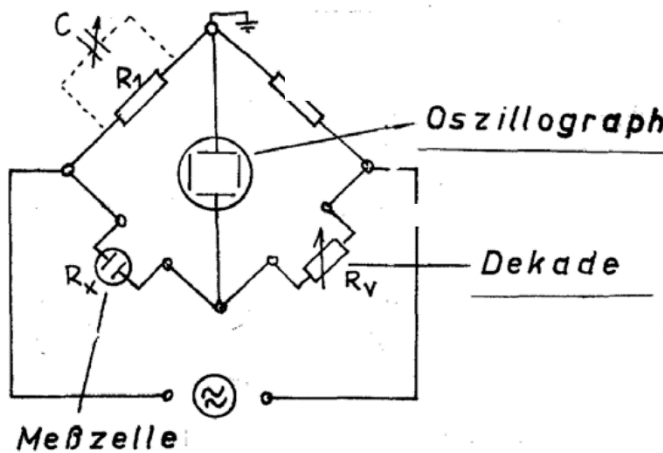


• Leitfähigkeitsmessung und Meßzelle



Als Leitfähigkeitsgefäß wird eine geeichte *Glaseintauchmeßzelle* mit Platin-Elektroden verwendet. Die Messzelle besteht aus einem Glasrohr, in dem sich am offenen unteren Ende zwei Pt-Elektroden gegenüberstehen. Sie wird in die zu messende Flüssigkeit eingetaucht.

Abb.7.3. zeigt die elektrische Schaltung. Als Nullinstrument dient ein Oszillograph. Als Wechselspannungsquelle wird ein Frequenzgenerator verwendet. Die Brücke ist abgeglichen, wenn die Amplitude der Wechselspannung auf dem Schirm ein Minimum wird.



Für genaue Messungen müßte noch parallel zu R_1 ein veränderlicher Kondensator geschaltet werden, um auftretende Phasenverschiebungen zwischen Strom und Spannung, die durch die Kapazität der Meßzelle auftreten, kompensieren zu können. Für den unbekanntem Widerstand R_x der Meßzelle gilt nach Gl.7.4:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_v \quad (7.5.)$$

Abb. 7.3. Wheatstonesche Brückenschaltung

R_v = Vergleichswiderstand (Widerstandswert, der an der Dekade abgelesen wird), R_1 und

R_2 sind am Arbeitsplatz angegeben. Die spezifische Leitfähigkeit berechnet sich nach Gl. (7.2.) zu

$$\sigma = \frac{k}{R_x} \quad (7.6.)$$

Die Zellenkonstante k ist auf der Meßzelle angegeben.