Verschiebungssatz der Varianz

Es gilt:

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}(x_\nu-\overline{x})^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\right)-\overline{x}^2$$

mit $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu$

<u>Beweis</u>:

$$\frac{1}{n}\sum(x_\nu-\overline{x})^2= \qquad \text{(2. binomische Formel)}$$

$$=\frac{1}{n}\sum(x_\nu^2-2x_\nu\overline{x}+\overline{x}^2)= \qquad \sum(a+b)=\sum a+\sum b$$

$$=\frac{1}{n}\sum x_\nu^2-\frac{1}{n}\sum(2x_\nu\overline{x})+\frac{1}{n}\sum\overline{x}^2= \qquad \sum cx_\nu=c\sum x_\nu \text{ und } \sum c=n\cdot c$$

$$=\frac{1}{n}\sum x_\nu^2-2\overline{x}\cdot\frac{1}{n}\sum x_\nu+\frac{1}{n}\cdot n\cdot\overline{x}^2= \qquad \overline{x}=\tfrac{1}{n}\sum x_\nu$$

$$=\frac{1}{n}\sum x_\nu^2-2\overline{x}\cdot\overline{x}+\overline{x}^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum x_\nu^2-2\overline{x}^2+\overline{x}^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum x_\nu^2-\overline{x}^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

Für klassierte Daten gilt entsprechend

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2n_i=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i^2n_i\right)-\overline{x}^2 \qquad \text{mit} \quad \overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_in_i$$

Analog kann man zeigen, dass für die verschiedenen Varianzschätzer S_n^{*2}, S_n^2 und

$\tilde{S}_n^2$ mit

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Folgendes gilt:

$$S_n^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$$

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\mu\overline{X}_n + \mu^2 \neq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \mu^2$$