Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07
Mathematisches Institut

Vorkurs Mathematik
(Allgemein)

Skript zur Vorlesung

PD Dr. Elena Berdysheva

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Vorwort

Dieses Skript ist entstanden aus der Vorlesung im Rahmen des Vorkurses Mathematik (Allgemein), welche ich seit dem Wintersemester 2016/2017 an der Justus-Liebig-Universität Gießen halte. Die Zielgruppe des Vorkurses sind Studienanfänger der Studiengänge Mathematik B.Sc. und Lehramt an Gymnasien, Physik B.Sc., Materialwissenschaften B.Sc., Physik und Technologie für Raumfahrtanwendungen B.Sc., Chemie B.Sc. und Lehramt an Gymnasien, Lebensmittelchemie B.Sc., Mathematik – Berufliche und Betriebliche Bildung B.Ed./M.Ed. sowie Bioinformatik und Systembiologie M.Sc.

Das Ziel dieses Vorkurses ist es, Studienanfängern den Einstieg in die Hochschulmathematik zu erleichtern. Im Vorkurs wird eine Auswahl von Themen behandelt. Dabei wird das Schulwissen wiederholt und vertieft, und andererseits werden die Teilnehmer an die Terminologie und die Arbeitsweise der Hochschulmathematik herangeführt.

Bei der Vorbereitung meiner Vorlesungen habe ich intensiv das Skript zum Vorkurs Mathematik an der Universität Hohenheim benutzt, welchen ich viele Jahre lang geleitet habe. Die Originalfassung jenes Skripts wurde von Frau Prof. Dr. Christine Bescherer und Herrn Rolf Springmann erstellt, später von Herrn Dr. Jens Höchsmann und dann von mir überarbeitet. Auch das Skript zur Vorlesung Mathematik für Biowissenschaften von Herrn Prof. Dr. Kurt Jetter an der Universität Hohenheim wurde von mir verwendet. Allen diesen Kollegen spreche ich an dieser Stelle einen Dank aus.

Des Weiteren danke ich Herrn Tibor Kovacs, der in früheren Jahren den Vorkurs Mathematik an der Universität Gießen — welcher allerdings nach einem anderen Konzept aufgebaut war — geleitet und mir seine Unterlagen zur Verfügung gestellt hat. Von Frau Prof. Dr. Margareta Heilmann bekam ich Aufgabensammlungen zu den mathematischen Vorkursen an der Universität Wuppertal; auch ihr gilt mein Dank.

Der Vorkurs wird durch Übungen in kleineren Gruppen begleitet. Ich bedanke mich bei Frau Rebekka Wünch für ihre Arbeit an den Dateien mit den Übungsaufgaben und deren Lösungen. Des Weiteren bedanke ich mich bei Frau Ariane Leger, die mir bei der Vorbereitung dieses Skripts geholfen hat.

Ich wünsche allen Vorkursteilnehmern viel Erfolg und viel Spaß beim Studium!

Elena Berdysheva

Gießen, im Herbst 2017

Version des Skriptes: 26.09.2019

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlen und Rechenregeln

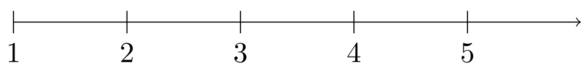
1.1 Der Aufbau des Zahlensystems

1.1.1 Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Die *natürlichen Zahlen* werden zum Zählen benutzt. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Die natürlichen Zahlen lassen sich auf einem Zahlenstrahl anordnen:



Manchmal betrachtet man auch die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit der Zahl Null:

$$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Wir listen nun die wichtigsten Eigenschaften der Menge $\mathbb{N}$ auf.

Eigenschaften:

1) Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ enthält unendlich viele Elemente.

2) Auf der Menge $\mathbb{N}$ hat man die Operationen Addition und Multiplikation. Addiert oder multipliziert man zwei natürliche Zahlen, so ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Man sagt: $\mathbb{N}$ ist *abgeschlossen* bezüglich der Addition und der Multiplikation.

3) Auf der Menge $\mathbb{N}$ hat man eine Ordnung $a < b$, welche der Anordnung am Zahlenstrahl entspricht. Wir schreiben weiter:

$$\begin{aligned} &a \leq b, \text{ wenn } a < b \text{ oder } a = b, \\ &a > b, \text{ wenn } b < a, \\ &a \geq b, \text{ wenn } a > b \text{ oder } a = b. \end{aligned}$$

1.1.2 Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Betrachten wir eine Gleichung der Form

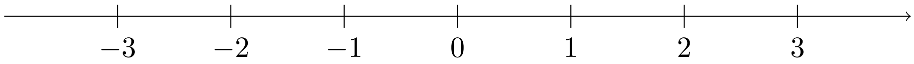
$$a + x = b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Eine solche Gleichung ist nicht immer in der Menge $\mathbb{N}$ lösbar. Zum Beispiel gibt es für $a = 5$, $b = 2$ kein $x \in \mathbb{N}$ mit $5 + x = 2$. Damit jede solche Gleichung lösbar ist, brauchen wir eine Erweiterung der Menge der natürlichen Zahlen, nämlich die negativen ganzen Zahlen und die Zahl Null.

Die durch diese Erweiterung entstandene Menge ist die Menge der *ganzen Zahlen*. Diese wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Der Zahlenstrahl wird durch die Hinzunahme der negativen Zahlen und der Zahl Null zur Zahlengeraden erweitert:



Die Menge $\mathbb{Z}$ erfüllt folgende Eigenschaften.

Eigenschaften:

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2) Addiert, subtrahiert oder multipliziert man zwei ganze Zahlen, so ist das Ergebnis wieder eine ganze Zahl. Die Menge $\mathbb{Z}$ ist also bezüglich der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation abgeschlossen.

3) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ hat man die „$<$"–Relation, welche der Anordnung an der Zahlengeraden entspricht.

Für die Multiplikation positiver und negativer Zahlen gelten folgende Rechenregeln.

Rechenregeln:

1) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab$.

2) $(-a) \cdot (-b) = ab$.

1.1.3 Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Betrachten wir eine Gleichung der Form

$$a \cdot x = b \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0.$$

Eine solche Gleichung ist nicht immer in der Menge $\mathbb{Z}$ lösbar. Zum Beispiel gibt es für $a = 2$, $b = 5$ kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $2 \cdot x = 5$. Damit jede solche Gleichung lösbar ist, brauchen wir eine Erweiterung der Menge der ganzen Zahlen: Brüche, d.h. Quotienten der ganzen Zahlen.

Die durch diese Erweiterung entstandene Menge nennt man die Menge der *rationalen Zahlen* und bezeichnet sie mit $\mathbb{Q}$. Die Menge $\mathbb{Q}$ besteht aus Quotienten zweier ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}.$$

Insbesondere ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, d.h. jede ganze Zahl ist auch eine rationale Zahl, da wir eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ als Bruch $n = \frac{n}{1}$ darstellen können.

Es ist anzumerken, dass jede rationale Zahl viele verschiedene Darstellungen hat (sogar unendlich viele). So gilt zum Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{7}{14} = \frac{-3}{-6}$ usw., $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{-6}{8}$ usw., $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ usw. Wir müssen also entscheiden können, welche Brüche dieselbe rationale Zahl darstellen.

Zwei Brüche $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, b_1, b_2 \neq 0$, sind *gleich*, wenn

$$a_1 b_2 = a_2 b_1.$$

Ein Übergang zwischen verschiedenen Darstellungen der gleichen Bruchzahl kann durch Erweitern oder Kürzen realisiert werden:

Erweitern: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad (a, b, k \in \mathbb{Z},\ b, k \neq 0).$

Kürzen: $\dfrac{a \cdot k}{b \cdot k} = \dfrac{a}{b} \quad (a, b, k \in \mathbb{Z},\ b, k \neq 0).$

Bemerkung: Bei der Darstellung rationaler Zahlen genügt es, die Nenner $q \in \mathbb{N}$ zu betrachten. D.h.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Für die Menge $\mathbb{Q}$ gelten folgende Eigenschaften.

Eigenschaften:

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
2) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen bezüglich der Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division). Dabei ist die Division durch Null nicht erlaubt.
3) Auf der Menge $\mathbb{Q}$ gilt die „<"–Relation:
$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}, \quad \text{wenn} \quad a_1 b_2 < a_2 b_1 \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, b_1, b_2 \in \mathbb{N}).$$
4) Zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.

Rechenregeln für Brüche:

Für beliebige Brüche $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z},\ b_1, b_2 \neq 0$, gilt:

1) $\dfrac{a_1}{b_1} \pm \dfrac{a_2}{b_1} = \dfrac{a_1 \pm a_2}{b_1}.$
2) $\dfrac{a_1}{b_1} \pm \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1 b_2 \pm a_2 b_1}{b_1 b_2}$. Dabei heißt der Ausdruck $b_1 b_2$ ein gemeinsamer Nenner der Brüche.
3) $\dfrac{a_1}{b_1} \cdot \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1 a_2}{b_1 b_2}.$
4) $\dfrac{a_1}{b_1} : \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1}{b_1} \cdot \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{a_1 b_2}{b_1 a_2}$, falls $a_2 \neq 0$.

Wir betrachten nun einige Beispiele hierzu.

Beispiele:

1) $\dfrac{2}{7} + \dfrac{5}{14} = \dfrac{2 \cdot 2 + 5}{14} = \dfrac{9}{14}.$
2) $\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{6}{14} = \dfrac{2 \cdot 6}{7 \cdot 14} = \dfrac{6}{49}.$
3) $\dfrac{2}{7} : \dfrac{6}{14} = \dfrac{2 \cdot 14}{7 \cdot 6} = \dfrac{2 \cdot 1}{3} = \dfrac{2}{3}.$
4) $1 - \dfrac{u}{1 - \frac{u}{u+1}} \quad (\text{mit } u \neq -1)$

$$= 1 - \frac{u}{1 - \frac{u}{u+1}} = 1 - \frac{u}{\left(\frac{u+1-u}{u+1}\right)} = 1 - \frac{u}{\left(\frac{1}{u+1}\right)} = 1 - u \cdot (u+1) = 1 - u^2 - u.$$

5) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}} \quad \left(\text{mit } a\neq -\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{b(a+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})}{a+\frac{1}{2}} = \frac{(b-\frac{1}{2})(a+\frac{1}{2})}{a+\frac{1}{2}} = b-\tfrac{1}{2}.$$

1.1.4 Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Auf der Zahlengeraden können Zahlen konstruiert werden, die keine rationalen Zahlen sind. Zum Beispiel ist die Länge der Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 nicht rational, d.h. sie lässt sich nicht in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p,q\in\mathbb{Z}$, $q\neq 0$, darstellen. (Diese Zahl kann man als $\sqrt{2}$ schreiben, was aus dem Satz des Pythagoras folgt.) Ein weiteres Beispiel ist die Kreiszahl π, der Halbumfang des Kreises mit Radius 1. Auch diese Zahl lässt sich nicht in Form eines Bruches schreiben.

Die Tatsache, dass die Menge der rationalen Zahlen nicht die gesamte Zahlengerade ausfüllt, kann man mathematisch so ausdrücken: Die Menge der rationalen Zahlen ist *nicht vollständig*.

Alle auf der Zahlengeraden darstellbaren Zahlen heißen *reelle Zahlen*. Die Menge aller reellen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}$.

Die genaue Konstruktion der Menge $\mathbb{R}$ ist sehr kompliziert, man benötigt Methoden der Analysis, welche nicht zum Schulstoff gehören. Auf diese Konstruktion wird hier verzichtet.

Eine reelle Zahl, welche nicht rational ist, heißt *irrational*.

Alle reellen Zahlen lassen sich als (endliche oder unendliche) Dezimalbrüche darstellen. Unter einem *Dezimalbruch* verstehen wir eine mit einem Vorzeichen $+$ oder $-$ versehene endliche oder unendliche Folge von Dezimalziffern $0,1,...,9$. Rationale Zahlen sind genau endliche oder unendliche periodische Dezimalbrüche (wobei man einen endlichen Dezimalbruch als einen unendlichen periodischen Dezimalbruch mit der Periode $\bar{0}$ auffassen kann). Irrationale Zahlen sind unendliche, nicht periodische Dezimalbrüche.

Darstellung von rationalen Zahlen als Dezimalbrüche

Der Übergang von einem Bruch zu einem Dezimalbruch wird durch schriftliche Division realisiert. Wir erläutern das Vorgehen anhand von Beispielen.

1) $\dfrac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}25\bar{0}$

$$\begin{array}{l} 1 \quad : 4 = 0{,}25 \\ \underline{0} \\ 10 \\ \ \underline{8} \\ \ \ 20 \\ \ \ \underline{20} \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

2) $\frac{1}{3} = 0{,}\bar{3}$

$$
\begin{array}{l}
1 \quad : 3 = 0{,}333\ldots \\
\underline{0} \\
10 \\
\;\underline{9} \\
\;\;10 \;\rightarrow \text{Beginn der Periode} \\
\;\;\;\underline{9} \\
\;\;\;1 \\
\;\;\;\vdots
\end{array}
$$

3) $\frac{3}{11} = 0,\overline{27}$

$$
\begin{array}{l}
3 \quad : 11 = 0{,}2727\ldots \\
\underline{0} \\
30 \\
\underline{22} \\
\;80 \\
\;\underline{77} \\
\;\;3 \;\rightarrow \text{Beginn der Periode} \\
\;\;\vdots
\end{array}
$$

Der Übergang von einem Dezimalbruch zu einem Bruch wird durch den folgenden Trick realisiert, welchen wir hier anhand von Beispielen vorstellen.

1) $0{,}\overline{7} = ?$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 0{,}77777... \\
10x & = & 7{,}77777... \\
\hline
9x & = & 7 \\
x & = & \frac{7}{9}
\end{array}
$$

2) $0,45\overline{36} = ?$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 0{,}45363636... \\
100x & = & 45{,}36363636... \\
\hline
99x & = & 44{,}91 \\
9900x & = & 4491 \\
x & = & \frac{4491}{9900} = \frac{499}{1100}
\end{array}
$$

3) $0{,}\overline{9} = ?$

$$
\begin{array}{rcl}
x & = & 0{,}9999... \\
10x & = & 9{,}9999... \\
\hline
9x & = & 9 \\
x & = & \frac{9}{9} = 1
\end{array}
$$

Bemerkung:

Wir haben oben gesehen, dass die Zahl 1 zwei verschiedene Darstellungen als Dezimalbruch besitzt: $1 = 0{,}\bar{9}$. Das gilt für alle endlichen Dezimalbrüche. So ist z.B. $0{,}3 = 0{,}2\bar{9}$. In der Tat,

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0{,}29999... \\ 10x & = & 2{,}99999... \\ \hline 9x & = & 2{,}7 \\ 90x & = & 27 \\ x & = & \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \end{array}$$

Eigenschaften der reellen Zahlen:

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2) Die Menge $\mathbb{R}$ füllt die gesamte Zahlengerade aus. Die Menge $\mathbb{R}$ kann nicht in aufzählender Form dargestellt werden.
3) Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen unendlich viele weitere reelle Zahlen.
4) Jede irrationale Zahl lässt sich durch rationale Zahlen beliebig gut approximieren (annähern). So gilt beispielsweise für die Zahl π:

$$\begin{gathered} 3 < \pi < 4 \\ 3{,}1 < \pi < 3{,}2 \\ 3{,}14 < \pi < 3{,}15 \\ 3{,}141 < \pi < 3{,}142 \end{gathered}$$

   und so weiter.
5) Die Menge $\mathbb{R}$ ist abgeschlossen bezüglich der Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division).
6) Auf der Menge $\mathbb{R}$ gilt die „$<$“– Relation.

Rechnen mit reellen Zahlen

Für alle reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und die Operationen Addition und Multiplikation gelten die folgenden Grundregeln:

1) $a + b = b + a$ (Kommutativität der Addition).
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität der Addition).
3) Für die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $0 + a = a$ (Nullelement).
4) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ (die Gegenzahl), so dass $a + (-a) = 0$ (inverses Element bzgl. der Addition).
5) $ab = ba$ (Kommutativität der Multiplikation).
6) $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativität der Multiplikation).
7) Für die Zahl $1 \in \mathbb{R}$ und jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gilt $1a = a$ (Einselement).
8) Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, gibt es eine Zahl $a^{-1} = \frac{1}{a}$ (den Kehrwert) mit $aa^{-1} = 1$ (inverses Element bzgl. der Multiplikation).
9) $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivität).

Diese Grundregeln heißen die *Körperaxiome* für den *Zahlenkörper der reellen Zahlen*.

Alle weiteren Rechenregeln lassen sich aus diesen Körperaxiomen herleiten. So gilt beispielsweise das zweite Distributivgesetz. Zur Herleitung werden das Distributivgesetz wie in 9) sowie dreimal die Kommutativität der Multiplikation benutzt:

$$(a+b)c = c(a+b) = ca + cb = ac + bc.$$

Die *Subtraktion* ist definiert als die Addition der Gegenzahl:

$$a - b = a + (-b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Die *Division* ist definiert als die Multiplikation mit dem Kehrwert:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Im Zahlensystem der reellen Zahlen sind die beiden Gleichungen

$$a + x = b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

und

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

lösbar.

Beispiele für das Rechnen mit Termen:

1) $21a(-4b) + (-9b)(-2a) = -84ab + 18ab = -66ab.$

2) $5[x + 2(x - y - 3(x - y)) + 4(x - y) - 2x]$
$= 5[x + 2x - 2y - 6x + 6y + 4x - 4y - 2x]$
$= 5[-x + 0y] = -5x.$

3) $\dfrac{2(x+y) + 3x + 4y - y}{5} = \dfrac{2x + 2y + 3x + 3y}{5} = \dfrac{5x + 5y}{5} = \dfrac{5(x+y)}{5} = x + y.$

Sehr nützlich sind die sogenannten **binomischen Formeln**:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$

Diese können insbesondere beim Faktorisieren nützlich sein, wie das unten angegebene Beispiel zeigt.

Beispiel:

$\dfrac{(a^2 - b^2)^2 (a+b)^3}{(a-b)^2 (ab + b^2)} \quad (\text{mit } b \neq 0, a \neq \pm b)$

$= \dfrac{[(a-b)(a+b)]^2 (a+b)^3}{(a-b)^2 b(a+b)} = \dfrac{(a-b)^2 (a+b)^5}{(a-b)^2 b(a+b)} = \dfrac{(a+b)^4}{b}.$

1.2 Elemente der Mengenlehre

1.2.1 Der Mengenbegriff

Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung von wohlunterscheidbaren, bestimmten Objekten (*Elementen*) unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Beispiele:

1) Die Menge aller im Hörsaal anwesenden Personen.

2) Die Menge aller natürlichen Zahlen.

3) Die Menge der Buchstaben des Wortes „Mathematik“.

Das Wort „wohlunterscheidbar“ bedeutet, dass geklärt wird, was als gleich und was als verschieden anzusehen ist. So sind z.B. 0,5 und $\frac{1}{2}$ gleich als Zahlen, aber unterschiedlich, wenn man Schreibweisen betrachtet. Ein anderes Beispiel ist die Beachtung bzw. die Nichtbeachtung der Groß- und Kleinschreibung: So sind M und m im ersten Fall verschieden und im zweiten Fall gleich.

Das Wort „bestimmt“ bedeutet, dass bei jedem Element eindeutig entscheidbar ist, ob es zur Menge gehört oder nicht.

Schreibweise:

Ist x ein Element der Menge M, so schreibt man: $x \in M$.

Ist x kein Element der Menge M, so schreibt man: $x \notin M$.

Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere Menge*. Die leere Menge wird als $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Man kann Mengen in *aufzählender Form* oder in *beschreibender Form* angeben. Dies erläutern wir anhand von folgenden Beispielen.

Beispiele:

1) Beschreibend: $\mathbb{N} = \{x : x$ ist eine natürliche Zahl$\}$. Aufzählend: $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \dots\}$.

2) Beschreibend: $M = \{x : x$ ist ein Buchstabe im Wort „Mathematik“$\}$.
   Aufzählend: $M = \{$m, a, t, h, e, i, k$\}$.

3) Beschreibend: $A = \{n \in \mathbb{Z} : n$ ist gerade$\} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$.
   Aufzählend: $A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.

Im letzten Beispiel ist $\mathbb{Z}$ die sog. *Grundmenge*. Eine Menge in beschreibender Form wird oft angegeben als die Menge aller Elemente einer Grundmenge, für die bestimmte Eigenschaften gelten.

1.2.2 Mengenrelationen

Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn jedes Element von A auch Element von B ist und jedes Element von B auch Element von A ist. Sind zwei Mengen A und B gleich, so schreiben wir $A = B$.

Beispiel:

$\{1, 7, 4, 3\} = \{1, 3, 4, 7\}$.

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. In diesem Fall werden die Schreibweise $A \subseteq B$ oder manchmal auch die Schreibweise $A \subset B$ verwendet.

Ist dabei $A \neq B$, so heißt A *echte Teilmenge* von B . Die Bezeichnung $A \subset B$ wird oft nur für echte Teilmengen verwendet.

Die leere Menge ist eine Teilmenge jeder Menge: $\emptyset \subseteq M$. Jede Menge ist eine Teilmenge seiner selbst: $M \subseteq M$.

Beispiele:

1) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,5,7\}$, das ist auch eine echte Teilmenge: $\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,5,7\}$.

2) $\{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3\}$.

3) $\{1,2,4\} \not\subseteq \{1,2,3,5,7\}$.

4) $\emptyset \subset \{1,2,3\}$.

1.2.3 Mengenoperationen

Die *Schnittmenge* $A \cap B$ zweier Mengen A, B besteht aus allen Elementen, die sowohl in A als auch in B liegen:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Die *Vereinigungsmenge* bzw. die *Vereinigung* $A \cup B$ zweier Mengen A, B besteht aus allen Elementen, die in A oder in B liegen:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

Dabei ist „oder“ ein einschließendes Oder in dem Sinne, dass x in A oder in B oder auch in beiden Mengen liegt.

Die *Komplementärmenge* bzw. das *Komplement* $\bar{A}$ einer Menge A bzgl. einer Grundmenge G ist die Menge aller Elemente der Grundmenge G, die nicht in A liegen:

$$\bar{A} = \{x \in G : x \notin A\}.$$

Die *Differenzmenge* bzw. die *Differenz* $A \setminus B$ der Mengen A, B besteht aus allen Elementen, die in A, aber nicht in B liegen:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}.$$

Mengen werden oft anhand von sog. *Venn-Diagrammen* veranschaulicht. Die Venn-Diagramme unten zeigen die vier oben besprochenen Mengenoperationen.

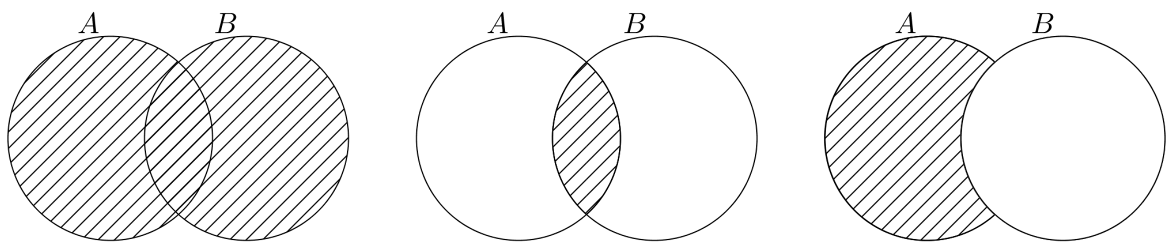


Abbildung 1.1: Von links nach rechts: $A \cup B$, $A \cap B, A \setminus B$.

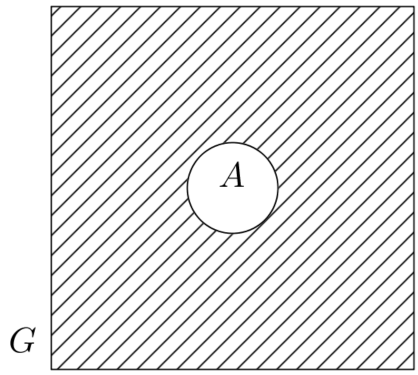


Abbildung 1.2: Komplementmenge $\overline{A}$ mit zugehöriger Grundmenge G.

Beispiel:

Wir betrachten die Mengen $A = \{1, 4, 7, 8\}$ und $B = \{1, 2, 7, 9\}$ in der Grundmenge $G = \{1, 2, ..., 9\}$. Es gilt:

$A \cap B = \{1, 7\}$, $\qquad A \cup B = \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$,

$\bar{A} = \{2, 3, 5, 6, 9\}$, $\qquad \bar{B} = \{3, 4, 5, 6, 8\}$,

$A \setminus B = \{4, 8\}$, $\qquad B \setminus A = \{2, 9\}$.

1.3 Intervalle

Intervalle sind spezielle Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Erst definieren wir *endliche Intervalle*. Diese haben verschiedene Typen:

abgeschlossen: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

offen: $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

halboffen: $(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ sowie
$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Ähnlich definiert man *unendliche Intervalle:*

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$,

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$,

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$,

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Dabei sind „$(-\infty$“ und „$\infty)$“ Symbole, die bedeuten, dass die Menge nach links bzw. nach rechts unbeschränkt ist.

Beispiele:

1) $[2,3] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 3\}, \quad [2,2] = \{2\}, \quad [3,2] = \emptyset.$

2) $(-2,4) = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 4\}.$

3) $[-1,3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\},$

4) $(-\infty,3] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}, \quad (-2,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}.$

Folgende Beispiele illustrieren Mengenoperationen, angewendet auf Intervalle.

Beispiele:

1) $(1,5) \cap (4,6) = (4,5),$

2) $(1,5) \cap [4,6] = [4,5),$

3) $(1,5) \cap \{4,6\} = \{4\},$

4) $(1,5) \cup (4,6) = (1,6),$

5) $(1,5) \setminus (4,6) = (1,4],$

6) $(1,5) \setminus [3,7] = (1,3),$

7) $\overline{(1,5)} = (-\infty,1] \cup [5,\infty),$

8) $(1,5) \cap \mathbb{N} = \{2,3,4\},$

9) $\mathbb{R} \setminus (-1,\infty) = (-\infty,-1],$

10) $(-\infty,3) \cup [2,\infty) = \mathbb{R}.$

1.4 Betrag

Der *Absolutbetrag* bzw. der *Betrag* einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch die Formel

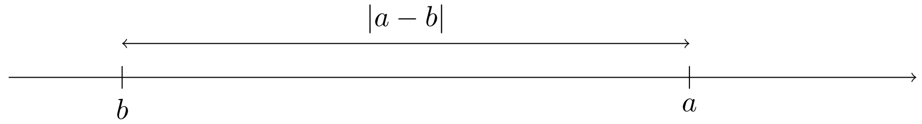
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Beispiele:

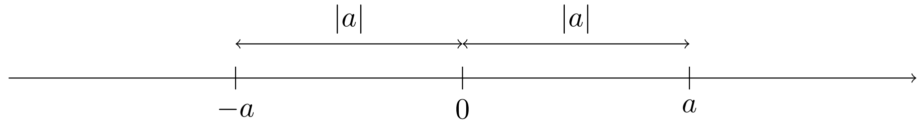
$|2| = 2, \ |-7| = 7, \ |0| = 0.$

Geometrische Interpretation des Betrags

Der Betrag $|a-b|$ ist der Abstand zwischen den Punkten a und b auf der Zahlengeraden:



Insbesondere ist $|a|$ der Abstand des Punktes a vom Nullpunkt:



Eigenschaften des Betrags:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $|a| \geq 0$ und $\big(|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0\big)$.

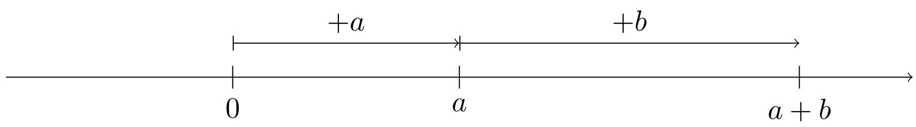
2) $|-a| = |a|$.

3) $|ab| = |a| \cdot |b|$.

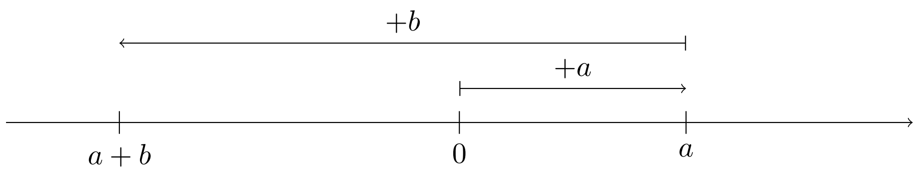
4) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung).

Die ersten drei Regeln dürfen klar sein. Wir erläutern nun die vierte Regel (die Dreiecksungleichung). Wir unterscheiden zwischen zwei Fällen.

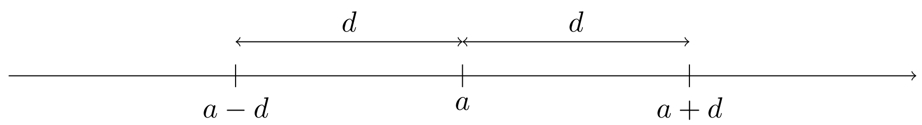
1. Fall: Haben a und b das gleiche Vorzeichen, so gilt $|a+b| = |a| + |b|$,
z.B. $|2+3| = |2| + |3|$ und $|-2-3| = |-2| + |-3|$.
Das folgende Bild illustriert diese Situation:



2. Fall: Haben a und b verschiedene Vorzeichen, so gilt $|a+b| < |a| + |b|$,
z.B. $|2-3| = |-1| = 1 < |2| + |3| = 5$.
Diese Situation wird auf folgendem Bild veranschaulicht:



Die Menge $M = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq d\}$ besteht aus allen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die von Punkt a höchstens den Abstand d haben:



Es gilt also

$$M = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| \leq d\} = [a-d, a+d].$$

Ungleichungen dieser Form kommen oft in den Naturwissenschaften und in der Statistik vor. Ungleichungen mit den Ungleichhietszeichen $<$, $\geq$ und $>$ können ähnlich betrachtet werden.

In folgenden Beispielen bezeichnet L jeweils die Lösungsmenge der jeweiligen Ungleichung.

Beispiele:

1) $|x| \leq 2, \quad L = [-2, 2]$.

2) $|x-3| \leq 1, \quad L = [2, 4]$.

3) $|x+4| < 2.$ Wir schreiben diese Ungleichung um als $|x-(-4)| < 2$. Es gilt also $L = (-6, -2)$.

4) $|x-3| \geq 7, \quad L = (-\infty, -4] \cup [10, \infty)$.

1.5 Das Summenzeichen

Das *Summenzeichen* ist eine Abkürzung für lange Summen oder eine Schreibweise für Summen, in denen die Anzahl der Summanden von Parametern abhängig ist. Als erstes Beispiel betrachten wir die Summe

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \sum_{k=1}^{10} k.$$

k heißt hier der *Summationsindex*. Auch andere Buchstaben wie z.B. i, j, ℓ, n, m usw. werden oft in der Rolle des Summationsindexes verwendet. Im unseren Beispiel sind 1 die *untere Summationsgrenze* und 10 die *obere Summationsgrenze*. Der Summationsindex k läuft über alle ganzen Zahlen beginnend mit der unteren Summationsrgenze bis zur oberen Summationsgrenze.

Beispiele:

1) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + ... + n.$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}.$

3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i = a_0 + a_1 + ... + a_k.$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} (2n) = 2 + 4 + 6 + 8.$

5) Die Summenzeichen kann man aneinander reihen:
$$\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=-i}^{i} 2^j = \sum_{j=0}^{0} 2^j + \sum_{j=-1}^{1} 2^j + \sum_{j=-2}^{2} 2^j + \sum_{j=-3}^{3} 2^j$$
$$= 2^0 + (2^{-1} + 2^0 + 2^2) + (2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2) + (2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3).$$

6) $$\sum_{k=-1}^{1} \sum_{j=0}^{|k|} \sin(kj) = \sum_{j=0}^{1} \sin(-j) + \sum_{j=0}^{0} \sin(0) + \sum_{j=0}^{1} \sin(j)$$
$$= \sin(0) + \sin(-1) + \sin(0) + \sin(0) + \sin(1) = 0.$$

7) Es kann auch passieren, dass alle Summanden gleich sind: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$

8) Allgemein gilt $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn.$

Rechenregeln für Summen:

1) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$

2) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (c \cdot a_i) = c \sum_{i=m}^{n} a_i.$

Diese Rechenregeln folgen aus den Rechenregeln für reelle Zahlen, insbesondere aus der Kommutativität und der Assoziativität der Addition sowie der Distributivität. Wir beweisen sie nun.

1) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n}(a_i+b_i) = (a_m+b_m)+(a_{m+1}+b_{m+1})+...+(a_n+b_n)$

$\displaystyle = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n + b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$

2) $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} ca_i = ca_m + ca_{m+1} + \cdots + ca_n = c(a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n) = c\sum_{i=m}^{n} a_i.$

Eine weitere nützliche Regel ist die **Indexverschiebung:**

$$\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i.$$

Diese kann man wie folgt nachweisen:

$$\sum_{i=m}^{n} a_{i+k} = a_{m+k} + a_{m+1+k} + ... + a_{n+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_i.$$

Beispiele:

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n+i}{n+i+1} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{k+1}.$

2) $\displaystyle\sum_{n=-5}^{5} \sin(5+n) = \sum_{n=0}^{10} \sin(n).$

Bemerkung:

Analog zu dem Summenzeichen wird auch das *Produktzeichen* verwendet:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Beispiel:

$\displaystyle\prod_{k=1}^{m} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot m = m!$

1.6 Quadratwurzel

Unter einer *Quadratwurzel* bzw. einer *Wurzel* $\sqrt{a}$ einer nichtnegativen reellen Zahl $a \geq 0$ versteht man die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Beispiele:

$\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{-2}$ ist nicht definiert.

Die *Definitionsmenge* eines Ausdrucks ist die Menge aller reellen Zahlen, die in die einzelnen Variablen eingesetzt werden können. In den Beispielen unten bestimmen wir die Definitionsmengen von Termen, die Wurzeln enthalten.

Beispiele:

1) $\sqrt{x+2}$.

   Die Definitionsmenge ist $D = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -2\} = [-2, \infty)$.

2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-3}}$.

   Die Definitionsmenge ist $D = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0,\ a-3 \geq 0,\ a \neq 3\} = (3, \infty)$.

Rechenregeln für Wurzeln:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad a, b \geq 0.$

2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \quad a \geq 0, b > 0.$

3) $\sqrt{a^2} = |a|, \quad a \in \mathbb{R}.$

Bemerkung:

Im Allgemeinen gilt $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \neq \sqrt{a \pm b}$.

Wir beweisen hier beispielsweise die erste Rechenregel. Seien $x = \sqrt{a}$ und $y = \sqrt{b}$. Das bedeutet, dass $x^2 = a$, $y^2 = b$ sowie zusätzlich $x \geq 0$, $y \geq 0$ gilt. Nun gilt aber $x^2y^2 = (xy)^2 = ab$ und auch ist $xy \geq 0$. Daraus folgt, dass xy die Wurzel aus ab ist, also $\sqrt{ab} = xy = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

Folgende zwei Beispiele illustrieren Rechnen mit Termen, welche Wurzeln enthalten.

Beispiele:

1) Wir betrachten den Term $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{y} - 2\sqrt{x})$ mit $x, y \geq 0$. Es gilt

   $(2\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{y} - 2\sqrt{x}) = -(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = -(4(\sqrt{x})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2)$

   $= -(4x - 4\sqrt{xy} + y) = -4x + 4\sqrt{xy} - y.$

2) Nun betrachten wir den Term $\dfrac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$. Als erstes bestimmen wir die Definitionsmenge dieses Terms. Es gilt

   $$D = \{x \in \mathbb{R} : 1 + 2x \geq 0 \text{ und } 1 - 4x^2 > 0\}.$$

   Die Lösungsmenge der ersten Ungleichung $1 + 2x \geq 0$ ist $x \geq -\frac{1}{2}$. Die zweite Ungleichung kann man z.B. wie folgt lösen:

   $$\begin{aligned} &1 - 4x^2 > 0 \\ &4x^2 < 1 \\ &x^2 < \tfrac{1}{4} \\ &|x| < \tfrac{1}{2} \\ &-\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

   Für $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ist die erste Bedingung $x \geq -\frac{1}{2}$ aber offensichtlich auch erfüllt. Die Definitionsmenge ist also $D = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

   Jetzt kann der Ausdruck folgendermaßen vereinfacht werden:

   $$\frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{(1+2x)(1-2x)}} = \sqrt{\frac{1+2x}{(1+2x)(1-2x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$$

   Beachten Sie, dass sich die Definitionsmenge durch die Umformung verändert hat!

1.7 Potenzen

In diesem Abschnitt werden wir Potenzen sowie die entsprechenden Rechenregeln betrachten. Die Einführung von Potenzen erfolgt schrittweise.

1.7.1 Potenzen mit ganzzahligem Exponenten

Auch diese werden schrittweise definiert: erst für den Exponenten $n \in \mathbb{N}$ als wiederholte Addition, dann für negative ganze n und schließlich für $n = 0$.

1) Seien $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Man definiert $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ mal}}$.

   a heißt *Basis*, n heißt *Exponent.*

   Beispiele: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9.$

2) Seien $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Man definiert $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

   Beispiele: $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01, \quad 2^{-4} = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{1}{16}.$

3) Sei $a \neq 0$. Man definiert $a^0 = 1$.

Wichtige Basen:

1) Basis 10.

   Die Zehnerpotenzen entsprechen der Dezimaldarstellung der Zahlen. Sie werden oft verwendet, um sehr große oder sehr kleine Zahlen übersichtlich darstellen zu können.

   Beispiele: $10^6 = 1000000, \quad 4{,}3 \cdot 10^{-4} = 0{,}00043.$

   Der Durchmesser eines H_2O-Moleküls ist $2{,}5 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$.

   Der Abstand der Erde zur Sonne ist $1{,}496 \cdot 10^8\,\text{km}$.

2) Basis (-1).

   Diese Basis wird genutzt, um das Vorzeichen zu modellieren:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ -1 & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

   Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n}.$

3) Basis e.

   Die Eulersche Zahl $e = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828...$ spielt eine große Rolle bei den in der Natur auftretenden Wachstums- und Zerfallsprozessen.

Reihenfolge der Operationen:

"Hoch vor Punkt vor Strich", d.h. erst potenzieren, dann multiplizieren/dividieren, dann addieren/subtrahieren. Wenn man eine andere Reihenfolge erzwingen will, so muss man Klammern benutzen.

Beispiele:

1) $2 \cdot 3^4 = 2 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 2 \cdot 81 = 162, \quad (2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1296.$

2) $-1^2 = -1, \quad (-1)^2 = 1.$

1.7.2 Potenzen mit rationalem Exponenten

Seien $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Die *n-te Wurzel* $\sqrt[n]{a}$ aus a ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Jetzt sind wir bereit, Potenzen mit rationalem Exponenten zu definieren. Auch das machen wir in mehreren Schritten.

1) Seien $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Man definiert $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
2) Seien $a \geq 0$, $n, m \in \mathbb{N}$. Man definiert $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
3) Seien $a > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$. Man definiert $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

Damit ist a^p für alle $p \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ definiert.

Rechenregeln für Potenzen:

Seien a, b, x, y so gewählt, dass alle Terme definiert sind. Es gelten folgende Rechenregeln:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
3) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
4) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$
5) $(a^x)^y = a^{xy}$

Diese Regeln können folgendermaßen begründet werden.

1) Für $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ folgen diese Regeln direkt aus der Definition. So gilt beispielsweise
   $2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} = 2^5$,
   $3^4 \cdot 3^{-2} = \dfrac{3^4}{3^2} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = 3^{4-2} = 3^2$,
   $2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$,
   $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5) = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$.
2) $a^0 = 1$ ist so definiert, damit die Regeln auch in diesem Fall gelten. So gilt z.B.
   $$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$
3) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ist so definiert, damit die Regeln auch in diesem Fall gelten. So gilt z.B.
   $$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$
   Daraus folgt, dass $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
4) Man kann die Regeln von ganzzahligen Exponenten auf rationale Exponenten übertragen. Wir betrachten hier exemplarisch drei Regeln.
   (a) Es gilt $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ bzw. $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.
   In der Tat, seien $x = \sqrt[n]{a}$, $y = \sqrt[n]{b}$. Dann gilt $x^n = a$, $y^n = b$. Aus Regel 3) für ganzzahlige Exponenten folgt, dass $x^n y^n = (xy)^n = ab$ ist. Also gilt $\sqrt[n]{ab} = xy = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

(b) Es gilt $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}}$.

Das zeigt insbesondere, dass a^p mit $p \in \mathbb{Q}$ wohldefiniert ist, d.h. a^p hängt nicht davon ab, welche Darstellung der Zahl $p \in \mathbb{Q}$ man wählt.

Um diese Formel zu beweisen, nehmen wir $x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Aus der Definition der Wurzel folgt, dass $x^n = a^m$. Wir nehmen nun die k-te Potenz von beiden Seiten dieser Gleichung: $(x^n)^k = (a^m)^k$. Nach Regel 5) für ganzzahlige Exponenten gilt dann $x^{nk} = a^{mk}$. Daraus folgt, dass $x = \sqrt[nk]{a^{mk}} = a^{\frac{mk}{nk}}$, was zu beweisen war.

(c) Nun sind wir bereit, Regel 1) für rationale Exponenten zu beweisen:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

Dies kann wie folgt erfolgen:

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{pn}{qn}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+nq}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

1.7.3 Potenzen mit reellem Exponenten

Sei $a > 0$. Um Potenzen a^x mit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zu definieren, braucht man Kenntnisse aus der Analysis. Das Vorgehen lässt sich etwa so zusammenfassen:

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Folge von rationalen Zahlen $r_n \to x$, $n \to \infty$, mit $r_n \in \mathbb{Q}$. Die Terme a^{r_n} sind nach dem vorherigen Abschnitt definiert. Man kann zeigen, dass die Folge a^{r_n} konvergiert. Den Grenzwert dieser Folge nennen wir nun a^x.

Man kann außerdem zeigen, dass a^x nur von x und nicht von der Wahl der konkreten Folge $\{r_n\}$ abhängt. Damit ist die Potenz a^x wohldefiniert. Auf die genaue Konstruktion verzichten wir.

Alle Rechenregeln für Potenzen gelten auch für Potenzen mit reellen Exponenten. Unten betrachten wir einige Beispiele hierzu.

Beispiele:

1) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}} = \sqrt[4]{\dfrac{4^2}{25^2}} = \sqrt[4]{\dfrac{2^4}{5^4}} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{2}{5}\right)^4} = \dfrac{2}{5}$

2) $\left(\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^{-3}}\right)^{12} = \left(2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{-3}{4}}\right)^{12} = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{12} \cdot \left(2^{\frac{-3}{4}}\right)^{12} = 2^{\frac{2\cdot 12}{3}} \cdot 2^{-\frac{3\cdot 12}{4}} = 2^8 \cdot 2^{-9} = 2^{8-9} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{2^4x^5y^7z^8}{4x^2y^5z^{10}} : \dfrac{2x^3z^2}{y^5z} = \dfrac{2^4x^5y^7z^8y^5z}{2^2x^2y^5z^{10}2x^3z^2} = \dfrac{2^4x^5y^{12}z^9}{2^3x^5y^5z^{12}} = \dfrac{2y^7}{z^3}$

1.8 Logarithmen

Seien $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$. Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ nennt man *Logarithmus* von b zur Basis a. Man schreibt $x = \log_a b$. Es gilt also

$$x = \log_a b \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b.$$

Beispiele:

1) $\log_{10} 100 = 2$, da $10^2 = 100$.

2) $\log_3 \dfrac{1}{27} = -3$, da $3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27}$.

3) $\log_2 \sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$, da $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$.

Spezialfälle:

1) $\log_a a = 1$, da $a^1 = a$.

2) $\log_a 1 = 0$, da $a^0 = 1$.

Bemerkungen:

1) Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert. Insbesondere ist der Logarithmus von Null nicht definiert, da $a^x \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

2) Der Logarithmus zur Basis 1 ist nicht definiert, da die Gleichung $1^x = b$ entweder keine Lösung (für $b \neq 1$) oder unendlich viele Lösungen (für $b = 1$) hat.

Wichtige Basen:

1) Basis 10.

   Der Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 heißt *dekadischer* oder *Zehnerlogartithmus*. Man schreibt: $\lg b$.

2) Basis e.

   Der Logarithmus $\log_e$ zur Basis e heißt *natürlicher Logarithmus*. Man schreibt: $\ln b$.

Rechenregeln für Logarithmen:

Seien a, b, u, v so gewählt, dass alle Terme definiert sind. Es gelten folgende Regeln:

1) $a^{\log_a b} = b$.

2) $\log_a(a^b) = b$.

3) $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$.

4) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$.

   Insbesondere, $\log_a \left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$.

5) $\log_a u^v = v \cdot \log_a u$.

Diese Regeln können folgendermaßen begründet werden.

Regeln 1) und 2) folgen direkt aus der Definition. Für die erste Regel schreiben wir $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$. Die Formel $a^{\log_a b} = b$ folgt daraus sofort.

Um die zweite Regel zu beweisen, betrachten wir die Gleichung $a^x = a^b$ mit der Lösung $x = b$. Also gilt $\log_a(a^b) = b$.

Regeln 3) – 6) folgen aus den entsprechenden Regeln für Potenzen. Wir beweisen exemplarisch Regel 3), nämlich $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$. Seien $x = \log_a u$, $y = \log_a v$. Darauf folgt, dass $a^x = u$ und $a^y = v$. Dann gilt aber auch $uv = a^x a^y = a^{x+y}$, und damit $\log_a(uv) = x + y = \log_a u + \log_a v$.

Die anderen Regeln können ähnlich hergeleitet werden.

Wir betrachten nun einige Beispiele für das Rechnen mit Logarithmen.

Beispiele:

1) $\log_5 \frac{5a}{x} = \log_5(5a) - \log_5 x = \log_5 5 + \log_5 a - \log_5 x = 1 + \log_5 a - \log_5 x$

2) $\ln(e \cdot \sqrt[3]{e}) = \ln e + \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \ln e + \frac{1}{3}\ln e = 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$

3) $\lg\left(\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right)^{10}\right) = 10\lg\left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt[10]{c}}\right) = 10(\lg(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}) - \lg(\sqrt[10]{c}))$
$= 10\lg(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}) - 10\lg c^{\frac{1}{10}} = 10\lg(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}) - 10\cdot\frac{1}{10}\lg c = 10\lg(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b}) - \lg c$

4) $2\ln u + 3\ln v = \ln u^2 + \ln v^3 = \ln(u^2v^3)$

5) $\frac{1}{5}\lg x + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\lg x + \frac{3}{5}\lg 10 = \lg x^{\frac{1}{5}} + \lg 10^{\frac{3}{5}} = \lg\left(x^{\frac{1}{5}}10^{\frac{3}{5}}\right) = \lg(\sqrt[5]{1000x})$

Logarithmen zu verschiedenen Basen

Wir betrachten erst ein einleitendes Beispiel. Betrachten wir die Gleichung $3^x = 5$ mit der Lösung $x = \log_3 5$. Diese Lösung kann auch durch Logarithmieren der beiden Seiten der Gleichung z.B. mit dem natürlichen Logarithmus erfolgen: $\ln 3^x = \ln 5 \iff x\ln 3 = \ln 5 \iff x = \frac{\ln 5}{\ln 3}$. Es gilt also $\log_3 5 = \frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Diese Vorgehensweise kann auch im allgemeinen Fall genutzt werden. Es gilt:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Insbesondere, $\log_b a = \dfrac{\lg a}{\lg b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Beispiel:

$$\log_{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{\lg\frac{1}{100}}{\lg\sqrt{10}} = \frac{\lg 10^{-2}}{\lg 10^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{(1/2)} = -4.$$

Kapitel 2

Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Lineare Gleichungen, Äquivalenzumformungen

2.1.1 Begriff der Gleichung

Eine *Gleichung* ist eine Aussage über die Gleichheit zweier Terme:

$$T_1 = T_2.$$

T_1 bezeichnet die linke Seite, T_2 die rechte Seite.

Die Terme T_1 und T_2 können von einer oder mehreren Variablen abhängig sein. Wir betrachten hier Gleichungen, in denen die Terme von einer Variablen (x, y, z, t, u, usw.) abhängig sind: $T_1(x) = T_2(x)$.

Die *Definitionsmenge* einer Gleichung ist die Menge aller reellen Zahlen, die in die Terme eingesetzt werden können.

Die *Lösungsmenge* einer Gleichung ist die Menge aller Werte der Variable, für die die Gleichung erfüllt ist, d.h. die Aussage $T_1(x) = T_2(x)$ wahr ist.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung $2x + 3 = 3x - 7$. Ihre Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R}$ und ihre Lösungsmenge ist $L = \{10\}$.

Die Gleichung oben ist ein Beispiel einer *linearen Gleichung*: Beide Terme hier sind lineare Funktionen. Die *allgemeine Form* der linearen Gleichung lautet:

$$ax + b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 Lösen von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen

Um die Lösungsmenge einer Gleichung zu bestimmen, formt man diese so lange um, bis die gesuchte Variable isoliert ist. Man muss bei diesen Umformungen aufpassen, dass sich die Lösungsmenge nicht ändert. Das wird durch Äquivalenzumformungen gewährleistet.

Zwei Gleichungen heißen *äquivalent*, wenn ihre Definitionsmengen und ihre Lösungsmengen gleich sind.

Eine Umformung heißt *Äquivalenzumformung*, wenn die daraus entstandene Gleichung äquivalent zu der ursprünglichen Gleichung ist, d.h. die Definitionsmenge und die Lösungsmenge haben sich bei der Umformung nicht verändert.

Wichtigste Äquivalenzumformungen:

1) Addition einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ zu den beiden Seiten der Gleichung:

$$T_1 = T_2 \;\Leftrightarrow\; T_1 + c = T_2 + c \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R}.$$

2) Multiplikation der beiden Seiten der Gleichung mit einer Zahl $c \neq 0$:

$$T_1 = T_2 \;\Leftrightarrow\; T_1 \cdot c = T_2 \cdot c \quad \text{für} \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Beide o.g. Umformungen können durch Addieren von $-c$ bzw. durch Multiplizieren mit $\frac{1}{c}$ rückgängig gemacht werden. Die Definitions- und die Lösungsmenge bleiben also bei diesen Umformungen erhalten.

Bemerkung:

Multiplikation mit der Zahl Null ist keine Äquivalenzumformung. Wenn man eine Gleichung mit einem Term multipliziert, muss man beachten, für welche Werte der Variable der Term Null wird.

Lösen von Gleichungen mittels Äquivalenzumformungen demonstrieren wir unten anhand von drei Beispielen von linearen Gleichungen.

Beispiele:

1)

$$\begin{aligned}
&2x + 3 = 3x - 7 && \mid +(-3x - 3)\\
&2x + 3 - 3x - 3 = 3x - 7 - 3x - 3 &&\\
&-x = -10 && \mid \cdot (-1) \neq 0\\
&x = 10 &&\\
&L = \{10\} &&
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}(6x - 4) + 8 = 2x + \tfrac{20}{3} &&\\
&2x - \tfrac{4}{3} + 8 = 2x + \tfrac{20}{3} &&\\
&2x + \tfrac{20}{3} = 2x + \tfrac{20}{3} && \Big| -2x - \tfrac{20}{3}\\
&0 = 0 &&\\
&L = \mathbb{R} &&
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
&6(2x - 7) + 3 = 12x - 48 &&\\
&12x - 42 + 3 = 12x - 48 &&\\
&12x - 39 = 12x - 48 && \mid -12x + 39\\
&0 = -9 &&\\
&L = \emptyset &&
\end{aligned}$$

Wir haben in diesen Beispielen drei verschiedene Situationen erlebt: Im ersten Beispiel hat die Gleichung genau eine Lösung, im zweiten Beispiel unendlich viele Lösungen und im dritten Beispiel keine Lösung. Das sind genau die Fälle, die beim Lösen einer linearen Gleichung eintreten können.

2.1.3 Lösungsmenge einer linearen Gleichung

Satz.

Die lineare Gleichung $ax + b = 0$ hat die folgende Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}
L &= \left\{-\tfrac{b}{a}\right\}, && \text{falls } a \neq 0,\\
L &= \mathbb{R}, && \text{falls } a = 0 \text{ und } b = 0,\\
L &= \emptyset, && \text{falls } a = 0 \text{ und } b \neq 0.
\end{aligned}$$

Beweis:

Wir lösen die Gleichung $ax + b = 0$ mittels Äquivalenzumformungen. Durch Addieren von $-b$ zu den beiden Seiten bekommt man die äquivalente Gleichung

$$ax = -b.$$

Nun müssen wir eine Fallunterscheidung machen.

Ist $a \neq 0$, so können wir die beiden Seiten der Gleichung mit der Zahl $\frac{1}{a} \neq 0$ multiplizieren und erhalten so die eindeutige Lösung $x = -\frac{b}{a}$.

Ist $a = 0$, so ist dieses Vorgehen nicht mehr möglich, da a keinen Kehrwert besitzt. In diesem Fall kommt es darauf an, ob die rechte Seite gleich Null ist oder nicht.

Ist $b = 0$, so lautet die Gleichung $0 \cdot x = 0$. Diese ist für alle reellen Zahlen x erfüllt, d.h. die Lösungsmenge ist die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Ist aber $b \neq 0$, so erhalten wir die Gleichung $0 \cdot x = -b$, in der die linke Seite immer Null ist und die rechte nicht Null. Das ist ein Widerspruch, und die Gleichung hat keine Lösungen. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall also die leere Menge.

2.2 Quadratische Gleichungen

2.2.1 Reinquadratische Gleichungen

Die *reinquadratische Gleichung*

$$x^2 = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

besitzt die folgende Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} L &= \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}, && \text{falls } a > 0, \\ L &= \{0\}, && \text{falls } a = 0, \\ L &= \emptyset, && \text{falls } a < 0. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} &4x^2 = 64 \quad |\cdot \tfrac{1}{4} \\ &x^2 = 16 \\ &x = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ &L = \{-4, 4\} \end{aligned}$$

2.2.2 Allgemeine quadratische Gleichung

Die allgemeine Form einer quadratischen Gleichung lautet

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Wir werden hier mehrere Verfahren zum Lösen dieser Gleichung besprechen. Wir beginnen mit einer Methode, die uns später erlauben wird, eine Formel für die Lösungen einer allgemeinen quadratischen Gleichung herzuleiten.

Lösen durch quadratische Ergänzung

Bei der *quadratischen Ergänzung* fasst man Terme mit x^2 und x zu einem vollen Quadrat zusammen. Dies erfolgt durch die Anwendung der binomischen Formeln. Wir erläutern dieses Verfahren anhand von Beispielen.

Beispiele:

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

   Die quadratische Ergänzung in diesem Fall erfolgt folgendermaßen:

   $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 3 = (x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2) - 1 - 3 = (x + 1)^2 - 4 = 0.$

Durch Addieren der Zahl -4 zu den beiden Seiten bekommt man die Gleichung

$(x+1)^2 = 4$.

Dies ist eine reinquadratische Gleichung. Die Lösungen können nun wie im vorherigen Abschnitt bestimmt werden:

$x_1 + 1 = 2, \quad x_2 + 1 = -2$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -3$

Die Lösungsmenge ist also $L = \{-3, 1\}$.

2) $2x^2 - 10x + \frac{13}{2} = 0$

Die quadratische Ergänzung lautet:

$2x^2 - 10x + \frac{13}{2} = 2(x^2 - 5x) + \frac{13}{2} = 2\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + \frac{13}{2}$

$= 2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] + \frac{13}{2} = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{2} + \frac{13}{2} = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 6 = 0.$

Wir setzen wie folgt fort:

$$
\begin{aligned}
&2\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 6 \\
&\left(x - \tfrac{5}{2}\right)^2 = 3 \\
&x_{1,2} - \tfrac{5}{2} = \pm\sqrt{3} \\
&x_1 = \tfrac{5}{2} - \sqrt{3}, \quad x_2 = \tfrac{5}{2} + \sqrt{3} \\
&L = \left\{\tfrac{5}{2} - \sqrt{3}, \tfrac{5}{2} + \sqrt{3}\right\}
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
&3x^2 + 12x + 16 = 0 \\
&3(x^2 + 4x) + 16 = 0 \\
&3(x^2 + 2 \cdot 2x + 4 - 4) + 16 = 0 \\
&3[(x+2)^2 - 4] + 16 = 0 \\
&3(x+2)^2 - 12 + 16 = 0 \\
&3(x+2)^2 + 4 = 0 \\
&3(x+2)^2 = -4 \\
&(x+2)^2 = -\frac{4}{3} \\
&L = \emptyset
\end{aligned}
$$

4)

$$
\begin{aligned}
&36x^2 + 12x + 1 = 0 \\
&(6x+1)^2 = 0 \\
&6x + 1 = 0 \\
&x = -\tfrac{1}{6} \\
&L = \left\{-\tfrac{1}{6}\right\}
\end{aligned}
$$

Formeln für die Lösung der allgemeinen quadratischen Gleichung

Das im vorherigen Abschnitt besprochene Vorgehen wenden wir nun auf die quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ an. Unser Ziel ist, eine Formel für die Lösungen dieser Gleichung herzuleiten.

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0 \\
&a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c = 0 \\
&a\left[x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = 0 \\
&a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = 0 \\
&a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0 \\
&a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \\
&a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}
$$

Das ist eine reinquadratische Gleichung. Die Anzahl ihrer Lösungen hängt von dem Vorzeichen der rechten Seite $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ ab. Da $4a^2 > 0$, müssen wir das Vorzeichen des Terms $b^2 - 4ac$ untersuchen.

Der Ausdruck $d = b^2 - 4ac$ heißt die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung. In Abhängigkeit von ihrem Vorzeichen betrachten wir verschiedene Fälle.

1. Fall: $d > 0$.

In diesem Fall hat die Gleichung genau zwei Lösungen:

$$
\begin{aligned}
&x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&L = \left\{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}
\end{aligned}
$$

Die Formel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ist die berühmte *Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung*, manchmal auch *abc-Formel* oder *Mitternachtsformel* genannt.

2. Fall: $d = 0$.

In diesem Fall hat die Gleichung genau eine Lösung:

$$
\begin{aligned}
&\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\
&x + \frac{b}{2a} = 0 \\
&x = -\frac{b}{2a} \\
&L = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}
\end{aligned}
$$

3. Fall: $d < 0$.

In diesem Fall hat die Gleichung keine Lösung, $L = \emptyset$.

Die oben hergeleiteten Ergebnisse fassen wir als einen Satz zusammen.

Satz.

Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, mit der Diskriminante $d = b^2 - 4ac$ hat die folgende Lösungsmenge:

$$\begin{aligned}
&L = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}, && \text{falls } d = b^2 - 4ac > 0, \\
&L = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}, && \text{falls } d = b^2 - 4ac = 0, \\
&L = \emptyset, && \text{falls } d = b^2 - 4ac < 0.
\end{aligned}$$

Beispiele:

1)

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = 0 \\
&x^2 - 6x + 4 = 0 \\
&x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm \sqrt{5} \\
&L = \left\{ 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5} \right\}
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&3x^2 + 12x + 16 = 0 \\
&x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 3 \cdot 4 \cdot 16}}{6} = \frac{-12 \pm \sqrt{-48}}{6} \\
&L = \emptyset
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
&36x^2 + 12x + 1 = 0 \\
&x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 36}}{2 \cdot 36} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 36} \\
&x = \tfrac{-12}{2 \cdot 36} = -\tfrac{1}{6} \\
&L = \left\{ -\tfrac{1}{6} \right\}
\end{aligned}$$

Spezialfall:

Im Falle, wenn $a = 1$ ist, nimmt die Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung eine besonders einfache Gestalt an. Traditionell betrachtet man die quadratische Gleichung in der Form

$$x^2 + px + q = 0.$$

Für ihre Lösungen gilt die sog. *p-q-Formel*:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beweis:

Die p-q-Formel folgt aus der Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung, indem man in sie $a = 1$, $b = p$, $c = q$ einsetzt und das Ergebnis vereinfacht:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{\sqrt{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Beispiel:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm \sqrt{4} = -1 \pm 2$$
$$L = \{-3, 1\}$$

Lösen durch Faktorisieren

In manchen Fällen kommt man auf die Lösung einer quadratischen Gleichung am einfachsten, indem man den quadratischen Term faktorisiert. Ist das Produkt gleich Null, so muss einer der Faktoren gleich Null sein. Dies folgt aus der folgenden Eigenschaft von reellen Zahlen: Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Beispiele:

1)

$$2x^2 + 3x = 0$$
$$x(2x + 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 2x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{3}{2}$$
$$L = \left\{0, -\tfrac{3}{2}\right\}$$

2)

$$25x^2 - 16 = 0$$
$$(5x - 4)(5x + 4) = 0$$
$$5x - 4 = 0 \quad \text{oder} \quad 5x + 4 = 0$$
$$L = \left\{-\tfrac{4}{5}, \tfrac{4}{5}\right\}$$

Interessant ist auch folgender Satz, der einen weiteren Zusammenhang zwischen den Lösungen und den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung herstellt.

Satz von Vieta.

Sei $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung mit den Lösungen x_1, x_2. (Wenn die Gleichung genau eine Lösung hat, nehmen wir $x_1 = x_2$.) Es gilt:

$$x_1 \cdot x_2 = q \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Beweis:

Wir faktorisieren die Gleichung und schreiben sie in der Form

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen kommt man auf die Form

$$x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1x_2 = 0,$$

und der Koeffizientenvergleich liefert: $p = -x_1 - x_2$, $q = x_1x_2$.

Beispiele:

1) $x^2 - x - 20 = 0$

   Nach dem Satz von Vieta gilt $x_1x_2 = -20$ und $x_1 + x_2 = 1$. Daraus findet man die Lösungen $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. Die Lösungsmenge ist also $L = \{-4, 5\}$.

2) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   Nach dem Satz von Vieta gilt $x_1x_2 = 6$ und $x_1 + x_2 = 5$. Daraus findet man die Lösungen $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Die Lösungsmenge ist also $L = \{2, 3\}$.

2.2.3 Bruchgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Bruchgleichungen, welche auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können. Die Vorgehensweise beim Lösen solcher Gleichungen wird anhand von Beispielen erläutert.

Beispiele:

1) $\dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{4}{4x^2+2x}$

   Als Erstes bestimmen wir die Definitionsmenge dieser Gleichung. Diese ist die Menge aller reellen Zahlen, für die keiner der beiden Nenner Null wird. Der Nenner der linken Seite ist $2x + 1$, und dieser wird bei $x = -\frac{1}{2}$ Null. Um die Nullstellen des Nenners der rechten Seite zu bestimmen, lösen wir die quadratische Gleichung $4x^2 + 2x = 0$. Dies erfolgt am einfachsten durch Faktorisieren:

   $2x(2x + 1) = 0,$

   $x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -\frac{1}{2}.$

   Damit ist die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$.

   Nun bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung. Als Erstes multiplizieren wir diese mit dem gemeinsamen Nenner der beiden Brüche:

   $\dfrac{x-1}{2x+1} = \dfrac{4}{2x(2x+1)} \qquad | \cdot 2x(2x+1)$

   Achtung: Multiplikation mit $2x(2x + 1)$ ist keine Äquivalenzumformung, da dieser Term Null werden kann. Die Definitionsmenge verändert sich dabei. Es können Lösungen entstehen, die nicht im Definitionsbereich der ursprünglichen Gleichung liegen und deswegen keine Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind. Bei der Ausgabe der Lösungsmenge sind solche Lösungen zu eliminieren.

   Wir setzen wie folgt fort:

   $(x - 1) \cdot 2x = 4$

   $2x^2 - 2x - 4 = 0$

   $x^2 - x - 2 = 0$

   $x_1x_2 = -2$ und $x_1 + x_2 = 1$

   $x_1 = -2 \in D, \quad x_2 = -1 \in D$

   $L = \{-1, 2\}$

2) In diesem Beispiel wird tatsächlich eine Situation vorkommen, in der eine der Lösungen der Gleichung, welche nach der Multiplikation mit dem Nenner entsteht, nicht in der Definitionsmenge der ursprünglichen Gleichung liegt.

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x^2-2x-1}{1-x} = 8, \qquad\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1\}\\
&3x^2-2x-1 = 8(1-x)\\
&3x^2-2x-1 = 8-8x\\
&3x^2-2x-1-8+8x = 0\\
&3x^2+6x-9 = 0\\
&x^2+2x-3 = 0\\
&x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2\\
&x_1 = -3 \in D, \quad x_2 = 1 \notin D\\
&L = \{-3\}
\end{aligned}
$$

2.2.4 Wurzelgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Wurzelgleichungen, welche auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können. Auch hier werden wir uns auf die Vorstellung mehrerer Beispiele einschränken.

Beispiele:

1)

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+1} - 2x = 0, \qquad\qquad D = \mathbb{R}\\
&\sqrt{x^2+1} = 2x
\end{aligned}
$$

Als nächsten Schritt werden wir die beiden Seiten der Gleichung quadrieren.

Achtung: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung! Zwei Probleme können dabei auftreten: 1) Die Definitionsmenge kann sich verändern. 2) Durch Quadrieren können Lösungen entstehen, die keine Lösungen der ursprünglichen Gleichungen sind.

Die zweite Möglichkeit illustrieren wir anhand von folgendem einfachen Beispiel: Die Gleichung $x = 1$ hat eine Lösung $x = 1$. Die quadrierte Gleichung $x^2 = 1$ hat aber zwei Lösungen $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Um durch das Quadrieren entstandene „falsche“ Lösungen zu eliminieren, führt man am Ende eine Probe durch.

In unserem Beispiel gehen wir wie folgt vor:

$$
\begin{aligned}
&x^2+1 = 4x^2\\
&1 = 3x^2\\
&x^2 = \tfrac{1}{3}\\
&x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Probe:

1) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}:\qquad \sqrt{\frac{1}{3}+1} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$

2) $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}:\qquad \sqrt{\frac{1}{3}+1} - 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \neq 0.$

Diese Lösung ist keine Lösung der ursprünglichen Gleichung und muss eliminiert werden.

$L = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$

2) $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$

Als Erstes bestimmen wir die Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0 \text{ und } x^2 - x + 1 \geq 0\}$. Beide Bedingungen sind quadratische Ungleichungen. Diese werden später in diesem Kapitel systematisch behandelt. Die erste Ungleichung kann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} &x^2 - 1 \geq 0 \\ &x^2 \geq 1 \\ &|x| \geq 1 \\ &x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \end{aligned}$$

Zur Untersuchung der zweiten Ungleichung merken wir an, dass das Schaubild des Terms $x^2 - x + 1$ eine nach oben geöffnete Parabel ist. Die Formel für die Lösungen einer quadratischen Gleichung liefert uns für ihre Nullstellen: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$, es gibt also keine reellen Nullstellen. Das bedeutet, dass $x^2 - x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Eine alternative Überlegung zu dieser Tatsache ist folgende. Mit Hilfe von quadratischer Ergänzung schreiben wir den Term wie folgt um:

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2x \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + 1 = \left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4} \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also $D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Nun bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung durch Quadrieren.

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} \\ &x^2 - 1 = x^2 - x + 1 \\ &x = 2 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 - 1} &= \sqrt{4 - 2 + 1} \\ \sqrt{3} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also $L = \{2\}$.

3) $\dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \dfrac{3}{5}$

Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 5 > 0\}$. Mit der quadratischen Ergänzung bekommen wir für diesen Term:

$$x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x \cdot 1 + 1 - 1 + 5 = (x - 1)^2 + 4 > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt also $D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &\frac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \frac{3}{5} \\ &5(1 - x) = 3\sqrt{x^2 - 2x + 5} \\ &25(1 - 2x + x^2) = 9(x^2 - 2x + 5) \\ &25 - 50x + 25x^2 - 9x^2 + 18x - 45 = 0 \\ &16x^2 - 32x - 20 = 0 \\ &4x^2 - 8x - 5 = 0 \\ &x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{8 \pm 12}{8} \\ &x_1 = \tfrac{20}{8} = \tfrac{5}{2}, \quad x_2 = \tfrac{-4}{8} = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Probe:

$x_1 = \frac{5}{2}:$ $\qquad \dfrac{1-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{25}{4}-5+5}} = \dfrac{\left(\frac{-3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)} = -\dfrac{3}{5} \neq \dfrac{3}{5}$

$x_2 = -\frac{1}{2}:$ $\qquad \dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+5}} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\frac{25}{4}}} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)} = \dfrac{3}{5}$

Die Lösungsmenge ist $L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2.2.5 Biquadratische Gleichungen

Biquadratische Gleichungen sind Gleichungen der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Mithilfe der Substitution $t = x^2$ kann eine solche Gleichung auf die quadratische Gleichung

$$at^2 + bt + c = 0$$

zurückgeführt werden. Man bestimmt die Lösung also in zwei Schritten: erst $t_{1,2}$ aus der quadratischen Gleichung und dann die Lösungen der ursprünglichen Gleichung aus den reinquadratischen Gleichungen $x^2 = t_{1,2}$.

Beispiele:

1) $4x^4 - 19x^2 + 12 = 0$

   Mit der Substitution $t = x^2$ bekommt man:

   $$\begin{aligned}
   &4t^2 - 19t + 12 = 0\\
   &t_{1,2} = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8}\\
   &t_1 = \tfrac{19+13}{8} = \tfrac{32}{8} = 4, \quad t_2 = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4}\\
   &x_{1,2} = \pm 2, \quad x_{3,4} = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
   &L = \left\{-2, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}, 2\right\}
   \end{aligned}$$

2) $2x^4 - 13x^2 - 45 = 0$

   Substitution: $t = x^2$.

   $$\begin{aligned}
   &t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169+360}}{4} = \frac{13 \pm \sqrt{529}}{4} = \frac{13 \pm 23}{4}\\
   &t_1 = \tfrac{13+23}{4} = \tfrac{36}{4} = 9, \quad t_2 = \tfrac{13-23}{4} = -\tfrac{10}{4}\\
   &x_{1,2} = \pm 3
   \end{aligned}$$

   Die Gleichung $x^2 = t_2 = -\frac{10}{4}$ hat keine Lösung.

   $L = \{-3, 3\}$

2.3 Gleichungen höheren Grades, Polynome

2.3.1 Gleichungen des Typs $x^n = a$

In diesem Abschnitt betrachten wir Gleichungen der Form

$$x^n = a, \quad a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Lösungsmenge hängt davon ab, ob n gerade oder ungerade ist. Wir haben folgendes Ergebnis:

1. Fall: n gerade.

Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{array}{ll} L = \{ \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a} \}, & \text{falls } a > 0, \\ L = \{0\}, & \text{falls } a = 0, \\ L = \emptyset, & \text{falls } a < 0. \end{array}$$

2.Fall: n ungerade.

Die Lösungsmenge ist:

$$\begin{array}{ll} L = \{ \sqrt[n]{a} \}, & \text{falls } a > 0, \\ L = \{0\}, & \text{falls } a = 0, \\ L = \left\{ -\sqrt[n]{|a|} \right\}, & \text{falls } a < 0. \end{array}$$

Beispiele:

1) $x^4 = 16$
   $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2, \qquad L = \{-2, 2\}$

2) $x^6 = -64, \qquad L = \emptyset$

3) $x^3 = 27$
   $x = \sqrt[3]{27} = 3, \qquad L = \{3\}$

4) $x^3 = -64$
   $x = -\sqrt[3]{64} = -4, \qquad L = \{-4\}$

2.3.2 Polynome, Polynomdivision

Eine Funktion der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

heißt *Polynom vom Grad n*. Die Zahlen $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen *Koeffizienten* des Polynoms.

Ein Polynom mit $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ heißt *Nullpolynom*: $p(x) \equiv 0$. Dem Nullpolynom wird kein Grad zugeordnet.

Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$ heißt *Nullstelle* von p. Eine Gleichung der Form

$$p(x) = 0$$

heißt *algebraische Gleichung n-ten Grades*. In den Abschnitten oben haben wir schon zwei Spezialfälle betrachtet: $n = 1$ (lineare Gleichungen) und $n = 2$ (quadratische Gleichungen).

Wir sagen, dass zwei Polynome $p(x)$ und $q(x)$ *gleich* sind, wenn $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz (Koeffizientenvergleich).

Zwei Polynome

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

und

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0,$$

sind genau dann gleich, wenn $n = m$ und ihre Koeffizienten übereinstimmen:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \ldots, \quad a_n = b_n.$$

Beweis:

Es gelte $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Insbesondere können wir in diese Gleichung $x = 0$ einsetzten und bekommen so $a_0 = b_0$.

Es gilt also für alle x:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x.$$

Für $x \neq 0$ können wir x kürzen und bekommen so die Gleichung

$$a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 = b_m x^{m-1} + \cdots + b_2 x + b_1.$$

Aus der Stetigkeit der beiden Seiten folgt aber, dass diese Gleichung auch für $x = 0$ gilt, also gilt $a_1 = b_1$.

Man geht wie oben vor, bis man alle Koeffizienten bearbeitet hat.

Polynomdivision mit Rest

Seien $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n und $q_m(x)$ ein Polynom vom Grad m, $\;n \geq m \geq 0$. Dann existieren ein Polynom $f_{n-m}(x)$ vom Grad $n-m$ und ein weiteres Polynom $r(x)$, wobei $r(x)$ vom Grad kleiner als m ist oder $r(x) \equiv 0$, so dass

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = f_{n-m}(x) + \frac{r(x)}{q_m(x)}$$

bzw.

$$p_n(x) = f_{n-m}(x) q_m(x) + r(x).$$

Die Polynome $f_{n-m}(x)$ und $r(x)$ sind eindeutig bestimmt.

Die beiden Polynome f_{n-m} und r werden durch den Algorithmus der schriftlichen Division bestimmt. Dieses Verfahren wird anhand von Beispielen erläutert.

Beispiele:

1) $(x^3 - 3x^2 - 10x + 25) : (x - 2) = \,?$

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 10x + 25) : (x-2) = x^2 - x - 12 = f_2(x) \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad - \;\; x^2 - 10x \\
\quad - \;\; \underline{x^2 + \;\; 2x} \\
\qquad\qquad - 12x + 25 \\
\qquad\qquad - \underline{12x + 24} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1 = r(x)
\end{array}$$

Es gilt: $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x + 25}{x - 2} = x^2 - x - 12 + \dfrac{1}{x-2}.$

2) $(6x^3 + 5x^2 + 1) : (3x^2 - 2) = \,?$

$$\begin{array}{l}
(6x^3 + 5x^2 + 0x + 1) : (3x^2 + 0x - 2) = 2x + \frac{5}{3} = f_1(x) \\
\underline{6x^3 + 0x^2 - 4x} \\
\qquad\quad 5x^2 + 4x + 1 \\
\qquad\quad \underline{5x^2 + 0x - \tfrac{10}{3}} \\
\qquad\qquad\quad 4x + \tfrac{13}{3} = r(x)
\end{array}$$

Es gilt: $\dfrac{6x^3+5x^2+1}{3x^2-2} = 2x + \frac{5}{3} + \dfrac{4x+\frac{13}{3}}{3x^2-2}.$

3) $(5x^3 + x + 6) : (x+1) = ?$

$$
\begin{array}{l}
(5x^3 + 0x^2 + \ \ x + 6) : (x+1) = 5x^2 - 5x + 6 = f_2(x) \\
\underline{5x^3 + 5x^2} \\
\quad - 5x^2 + \ \ x \\
\quad - \underline{5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad 6x + 6 \\
\qquad\qquad \underline{6x + 6} \\
\qquad\qquad\quad 0 = r(x)
\end{array}
$$

In diesem Fall ist Division ohne Rest möglich und es gilt: $\dfrac{5x^3+x+6}{x+1} = 5x^2 - 5x + 6.$

Bemerkung:

Seien

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

und

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0, \quad m \leq n,$$

zwei Polynome. Dann gilt für den Quotienten

$$f_{n-m}(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \cdots .$$

Insbesondere hat f_{n-m} den Grad $n-m$.

Satz.

Sei $p_n(x)$ ein Polynom von Grad $n \geq 1$ und sei x_0 eine Nullstelle von $p_n(x)$. Dann gilt:

$$p_n(x) = (x - x_0) f_{n-1}(x),$$

wobei $f_{n-1}(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Beweis:

Wir dividieren $p_n(x)$ durch $(x - x_0)$ mit Rest:

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = f_{n-1}(x) + \frac{r(x)}{x - x_0},$$

wobei $f_{n-1}(x)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist und $r(x) \equiv 0$ oder $r(x)$ ein Polynom vom Grad kleiner 1 ist, also in jeden Fall $r(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = f_{n-1}(x) + \frac{c}{x - x_0}$$

bzw.

$$p_n(x) = (x - x_0) f_{n-1}(x) + c.$$

Nun setzten wir in die letzte Formel $x = x_0$ ein:

$$0 = p(x_0) = (x_0 - x_0) f_{n-1}(x_0) + c = c.$$

Daraus folgt, dass $c = 0$ und folglich $r \equiv 0$. Man kann $p_n(x)$ durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilen.

Durch die Faktorisierung $p_n(x) = (x - x_0) f_{n-1}(x)$ wird eine Nullstelle von p_n als linearer Faktor abgespalten.

Satz.

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweis:

Es kann passieren, dass p_n keine Nullstellen hat. In diesem Fall ist der Satz bewiesen.

Hat p_n eine Nullstelle x_1, so gilt

$$p_n(x) = (x - x_1)f_{n-1}(x)$$

mit einem Polynom f_{n-1} vom Grad $n-1$. Hat p_n keine weiteren Nullstellen außer x_1, so ist x_1 die einzige Nullstelle von p_n und der Satz ist bewiesen.

Nun betrachten wir den Fall, wenn p_n eine weitere Nullstelle $x_2 \neq x_1$ besitzt. Für ein $x_2 \neq x_1$ gilt $p_n(x_2) = 0$ genau dann, wenn $f_{n-1}(x_2) = 0$, also muss x_2 auch eine Nullstelle von f_{n-1} sein. In diesem Fall gilt

$$f_{n-1}(x) = (x - x_2)g_{n-2}(x)$$

und somit

$$p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)g_{n-2}(x).$$

Seien nun $x_1, \ldots, x_k$ Nullstellen von p_n. Durch die Wiederholung des oben beschriebenen Prozesses bekommen wir für p_n die Faktorisierung

$$p_n = (x - x_1) \cdots (x - x_k)g_{n-k}(x)$$

mit einem Polynom g_{n-k}. Da höchstens n lineare Faktoren möglich sind (sonst wäre der Grad des Produktes der linearen Faktoren größer n), folgt daraus, dass p_n höchstens n Nullstellen haben kann.

2.3.3 Bestimmung von Lösungen algebraischer Gleichungen

Die Fälle $n = 1$, $n = 2$ haben wir schon in vorherigen Abschnitten betrachtet; in diesen beiden Fällen gibt es Formeln und Verfahren, mit welchen man die Lösungen von linearen bzw. quadratischen Gleichungen bestimmen kann. Es gibt Lösungsformeln auch für Gleichungen vom Grad 3 und 4 (Cardano, XVI Jhd.); diese werden aber wegen ihrer Komplexität selten benutzt. Für Gleichungen höheren Grades gibt es solche Lösungsformeln nicht. Es kann sogar bewiesen werden (Abel), dass es für Gleichungen des Grades 5 oder höher keine allgemeinen Formeln geben kann.

Praktisch benutzt man zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms von Grad 3 und höher numerische Verfahren. Ist eine Nullstelle gefunden, so kann diese als linearer Faktor abgespalten werden. Man betrachtet weiter ein Polynom vom Grad $n-1$. Diese Prozedur wird wiederholt, bis man auf eine quadratische Gleichung kommt, zu deren Lösung die bekannten Formeln herangezogen werden können.

In günstigen Fällen kann man eine Nullstelle raten. Dabei hilft folgender Satz.

Satz.

Ist x_0 eine ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten, so ist x_0 ein Teiler des Absolutgliedes a_0.

Beweis:

Wir betrachten ein Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten. Sein x_0 eine Nullstelle von p_n. Es gilt

$$p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0.$$

Folglich,

$$a_0 = -a_n x_0^n - a_{n-1}x_0^{n-1} - \cdots - a_1 x_0,$$

und a_0 ist durch x_0 teilbar.

Beispiele:

1) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

Als ganzzahlige Nullstellen kommen $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12$ oder ±24 in Frage.

Probe:
$x = 1: \quad 1 - 3 - 10 + 24 \neq 0$
$x = -1: \quad -1 - 3 + 10 + 24 \neq 0$
$x = 2: \quad 8 - 12 - 20 + 24 = 0$

Damit haben wir eine Nullstelle $x_1 = 2$ gefunden. Nun spalten wir den linearen Faktor $x - 2$ ab:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 10x + 24) : (x - 2) = x^2 - x - 12 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad - \; x^2 - 10x \\
\quad - \; \underline{x^2 + \;\, 2x} \\
\qquad\qquad - 12x + 24 \\
\qquad\qquad - \underline{12x + 24} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Insbesondere gilt: $x^3-3x^2-10x+24 = (x-2)(x^2-x-12)$. Um weitere Nullstellen zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$x_2 = -3, \quad x_3 = 4$

Damit gilt $L = \{2, -3, 4\}$ und $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(x + 3)(x - 4)$.

2) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

Als ganzzahlige Nullstellen kommen nur ±1 in Frage.
Probe:
$x = 1: \quad 1 + 4 + 4 - 1 \neq 0$
$x = -1: \quad 1 - 4 + 4 - 1 = 0$

Damit haben wir eine Nullstelle $x_1 = -1$ gefunden. Der lineare Faktor $x + 1$ wird abgespalten:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x - 1) : (x + 1) = x^3 + 3x^2 + x - 1 \\
\underline{x^4 + \;\, x^3} \\
\qquad 3x^3 + 4x^2 \\
\qquad \underline{3x^3 + 3x^3} \\
\qquad\qquad\quad x^2 + 0x \\
\qquad\qquad\quad \underline{x^2 + \;\, x} \\
\qquad\qquad\qquad - \;\, x - 1 \\
\qquad\qquad\qquad - \;\, \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

Damit gilt $x^4+4x^3+4x^2+0x-1 = (x+1)(x^3+3x^2+x-1)$. Als nächstes lösen wir die Gleichung $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$.

Wieder versuchen wir, eine Nullstelle durch Raten zu finden. $x = 1$ braucht man nicht zu betrachten, da wir wissen, dass das keine Nullstelle ist. Wir probieren also $x = -1$:

$-1 + 3 - 1 - 1 = 0.$

Damit ist $x_2 = -1$ eine Nullstelle von $x^3 + 3x^2 + x - 1$. Wieder können wir den linearen Faktor $x + 1$ abspalten:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 + x - 1) : (x+1) = x^2 + 2x - 1 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
\qquad\;\; 2x^2 + x \\
\qquad\;\; \underline{x^2 + 2x} \\
\qquad\qquad - x - 1 \\
\qquad\qquad - \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

Damit gilt $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 0x - 1 = (x+1)(x+1)(x^2 + 2x - 1)$. Nun lösen wir die quadratische Gleichung:

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Die Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung ist $L = \left\{-1, -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right\}$ und die Faktorisierung lautet:

$x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x+1)^2 \left(x + 1 - \sqrt{2}\right)\left(x + 1 + \sqrt{2}\right)$.

2.4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Beispiele von Exponential- und Logarithmusgleichungen.

Beispiele:

1) $2^x = 3$
   Es folgt sofort aus der Definition des Logarithmus, dass $x = \log_2 3 \approx 1{,}58$ ist.
   $L = \{\log_2 3\}$

2) $2^{x-2} = 2^{x+1} - 14$
   $2^{-2} \cdot 2^x = 2^1 \cdot 2^x - 14$
   $\frac{1}{4} \cdot 2^x = 2 \cdot 2^x - 14$
   $\left(\frac{1}{4} - 2\right) \cdot 2^x = -14$
   $-\frac{7}{4} \cdot 2^x = -14$
   $2^x = 14 \cdot \frac{4}{7} = 8 = 2^3$
   $x = 3$
   $L = \{3\}$

3) $5^x = 3 \cdot 2^x$
   $\left(\frac{5}{2}\right)^x = 3$
   $x = \log_{5/2} 3 = \frac{\ln 3}{\ln 5/2} = \frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 2}$
   $L = \left\{\frac{\ln 3}{\ln 5 - \ln 2}\right\}$

4) $2e^{2x} - 3e^x - 2 = 0$

   Substitution: $t = e^x$:

   $2t^2 - 3t - 2 = 0$

   $t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4}$

$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = 2$
Die Gleichung $e^x = -\frac{1}{2}$ hat keine Lösung.
Die Gleichung $e^x = 2$ hat Lösung $x = \ln 2$.
$L = \{\ln 2\}$.

5) $\lg x = \frac{1}{2}$
Die Definitionsmenge ist $D = (0, +\infty)$.
Aus der Definition des Logarithmus folgt sofort, dass$x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$.
$L = \left\{\sqrt{10}\right\}$

6) $\ln x - \ln \sqrt{x} = 2 \ln 2$
Die Definitionsmenge ist $D = (0, \infty)$.
$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(2^2\right)$
$\ln \sqrt{x} = \ln 4$
$\sqrt{x} = 4$
$x = 16$
$L = \{16\}$

7) $\log_2 x = \log_2(x^2 - 3) + 1$
Als erstes bestimmen wir die Definitionsmenge: $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 - 3 > 0\}$.
Die Lösung der zweiten Ungleichung $x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 3$ ist
$|x| > \sqrt{3}$ bzw. $x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$.
Unter Berücksichtigung der ersten Bedingung $x > 0$ bekommen wir $D = \left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

Jetzt bestimmen wir die Lösungsmenge der Gleichung.
$\log_2 x = \log_2(x^2 - 3) + \log_2 2$
$\log_2 x = \log_2(2(x^2 - 3))$
$x = 2(x^2 - 3)$
Achtung: Das ist keine Äquivalenzumformung! Die Definitionsmenge hat sich verändert.
$x = 2x^2 - 6$
$2x^2 - x - 6 = 0$
$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$
$x_1 = -\frac{3}{2} \notin D, \quad x_2 = 2 \in D$
$L = \{2\}$

2.5 Lineare Ungleichungen, Äquivalenzumformungen

Eine *Ungleichung* ist eine Aussage über die $\leq$, $<$, $\geq$ oder $>$–Relation zwischen zwei Termen:

$$T_1 \leq T_2 \qquad (<,\ \geq,\ >).$$

Wir betrachten hier Ungleichungen, in denen die Terme von einer Variablen abhängen:

$$T_1(x) \leq T_2(x) \qquad (<,\ \geq,\ >).$$

Die *Definitionsmenge* einer Ungleichung ist die Menge aller reellen Zahlen, für die die Terme definiert sind.

Die *Lösungsmenge* einer Ungleichung ist die Menge aller Werte der Variablen, für die die Ungleichung erfüllt ist.

Zwei Ungleichungen heißen *äquivalent*, wenn ihre Definitionsmengen und ihre Lösungsmengen gleich sind. Unten geben wir drei wichtige Äquivalenzumformungen an. Wir formulieren sie für die $\leq$–Relation; für die anderen drei Relationen müssen sie entsprechend umformuliert werden.

Wichtigste Äquivalenzumformungen:

1) $T_1 \leq T_2 \;\Leftrightarrow\; T_1 + c \leq T_2 + c$ für $c \in \mathbb{R}$.

2) $T_1 \leq T_2 \;\Leftrightarrow\; cT_1 \leq cT_2$ für $c > 0$.

3) $T_1 \leq T_2 \;\Leftrightarrow\; cT_1 \geq cT_2$ für $c < 0$.

Wir betrachten nun zwei Beispiele linearer Ungleichungen, welche wir mithilfe von Äquivalenzumformungen lösen.

Beispiele:

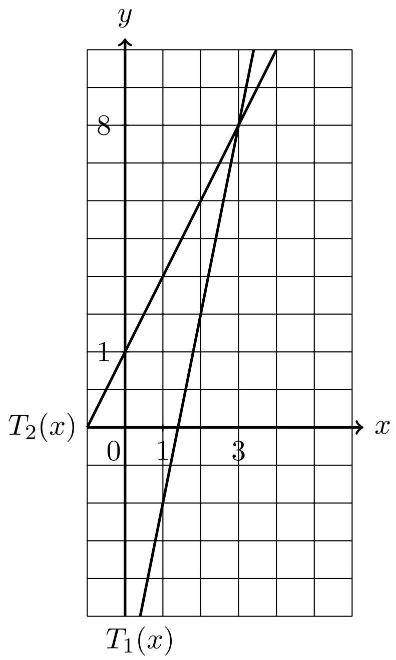
1)

$$\begin{aligned}
&5x - 7 \leq 2x + 2 && \mid + (-2x + 7)\\
&3x \leq 9 && \mid \cdot \tfrac{1}{3} > 0\\
&x \leq 3 &&\\
&L = (-\infty, 3] &&
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
&2x + 8 < 5x - 4 && \mid + (-5x - 8)\\
&-3x < -12 && \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) < 0\\
&x > 4 &&\\
&L = (4, \infty) &&
\end{aligned}$$

Man kann eine Ungleichung prinzipiell graphisch lösen. Beispielweise ist die Lösungsmenge einer Ungleichung der Form $T_1(x) \leq T_2(x)$ die Menge der Werte der Variable x, für die das Schaubild der Funktion $y = T_1(x)$ unterhalb des Schaubildes der Funktion $y = T_2(x)$ liegt bzw. wo sich die Schaubilder schneiden. Für die Ungleichung $5x - 7 \leq 2x + 2$ aus unserem 1. Beispiel erhalten wir die Skizze



Die Lösungsmenge kann man ablesen: $L = (-\infty, 3]$.

2.6 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen sind Ungleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (> 0,\ \leq 0,\ < 0), \quad a \neq 0.$$

Wir lösen eine solche Ungleichung graphisch. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ist eine Parabel, welche

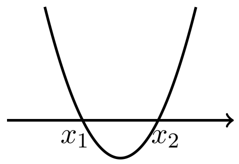
- nach oben geöffnet ist, falls $a > 0$,
- nach unten geöffnet ist, falls $a < 0$.

Als erstes betrachten wir die Ungleichung

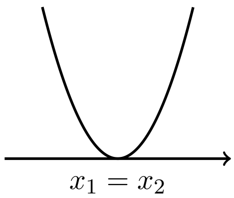
$$ax^2 + bx + c \geq 0, \quad a \neq 0.$$

Die Lösungsmenge ist die folgende:

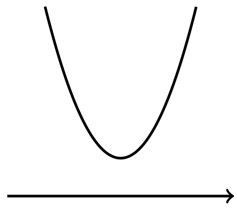
1. Fall: $a > 0$



$L = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$

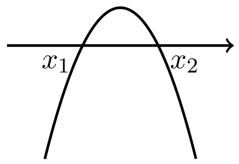


$L = \mathbb{R}$

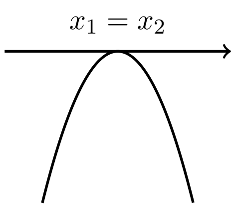


$L = \mathbb{R}$

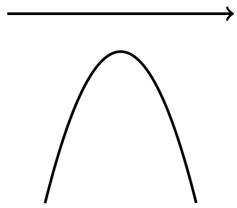
2. Fall: $a < 0$



$L = [x_1, x_2]$



$L = \{x_1\}$



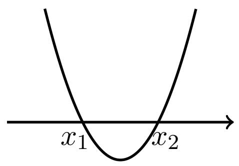
$L = \emptyset$

Für die Ungleichung

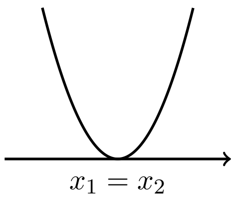
$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a \neq 0,$$

sieht die Lösungsmenge wie folgt aus:

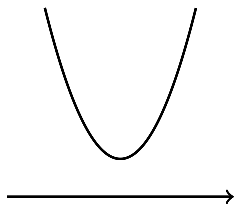
1. Fall: $a > 0$



$L = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

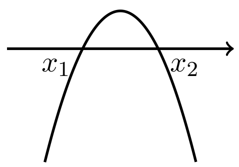


$L = \mathbb{R} \setminus \{x_1\}$

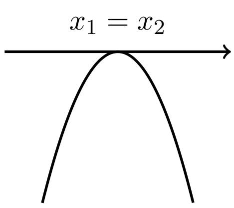


$L = \mathbb{R}$

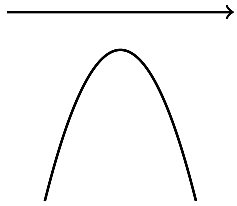
2. Fall: $a < 0$



$L = (x_1, x_2)$



$L = \emptyset$

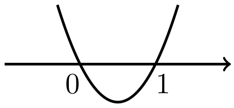


$L = \emptyset$

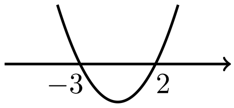
Eine Ungleichung der Form $ax^2 + bx + c \leq 0$ (< 0) kann durch Multiplikation mit -1 auf eine Ungleichung der Form $ax^2 + bx + c \geq 0$ (> 0) zurückgeführt werden.

Beispiele:

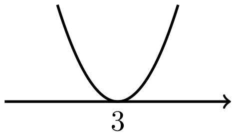
1) $x < x^2$
$x^2 - x > 0$
$x(x-1) > 0$
$x_1 = 0,\ x_2 = 1$
$L = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$



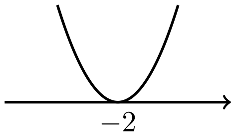
2) $x^2 + x - 6 \leq 0$
$x_1 = -3,\ x_2 = 2$
$L = [-3, 2]$



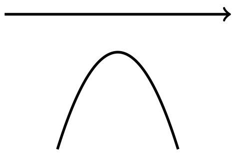
3) $x^2 - 6x + 9 > 0$
$(x-3)^2 > 0$
$L = \mathbb{R} \setminus \{3\}$



4) $(x^2 + 2)^2 \leq 0$
$L = \{-2\}$



5) $-x^2 + 4x - 7 > 0$
$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-7}$
Keine Nullstellen
$L = \emptyset$



2.7 Bruchungleichungen: Fallunterscheidung

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Bruchungleichungen. Wir lösen sie durch eine Fallunterscheidung. Wir erklären dieses Vorgehen anhand von Beispielen.

Beispiele:

1) $\dfrac{3-x}{x-5} < 2$

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Um die Ungleichung zu lösen, wollen wir die Terme mit dem Nenner $x - 5$ multiplizieren. Man muss dabei unterscheiden, ob der Nenner positiv oder negativ ist. Ist der Nenner positiv, so bleibt das Ungleichheitszeichen $<$ stehen. Ist der Nenner negativ, muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen.

1. Fall: $x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

$$\frac{3-x}{x-5} < 2 \qquad | \cdot (x-5) > 0$$
$$3 - x < 2(x-5)$$
$$3 - x < 2x - 10$$
$$-3x < -13$$
$$x > \tfrac{13}{3}$$

Die Lösungsmenge im ersten Fall ist $L_1 = \left\{x \in \mathbb{R} : x > 5 \text{ und } x > \frac{13}{3}\right\} = (5, \infty)$.

2. Fall: $x-5<0 \Leftrightarrow x<5$

$$\frac{3-x}{x-5}<2 \qquad | \cdot (x-5)<0$$
$$3-x>2(x-5)$$
$$3-x>\ 2x-10$$
$$-3x>13$$
$$x<\tfrac{13}{3}$$

Die Lösungsmenge im zweiten Fall ist $L_2=\left\{x\in\mathbb{R} : x<5 \text{ und } x<\tfrac{13}{3}\right\}=\left(-\infty,\tfrac{13}{3}\right)$.

Die Gesamtlösungsmenge ist $L=L_1\cup L_2=\left(-\infty,\tfrac{13}{3}\right)\cup(5,\infty)$.

2) $\dfrac{x+3}{x^2-3x-10}\geq 1$

Die Definitionsmenge ist $D=\{x\in\mathbb{R} : x^2-3x-10\neq 0\}$.

$$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}$$
$x_1=-2,\ x_2=5$

$D=\mathbb{R}\setminus\{-2,5\}$.

Auch in diesem Fall führen wir eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x^2-3x-10>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(5,\infty)$

$$\frac{x+3}{x^2-3x-10}\geq 1 \qquad | \cdot (x^2-3x-10)>0$$
$$x+3\geq\ x^2-3x-10$$
$$x^2-3x-10-x-3\leq 0$$
$$x^2-4x-13\leq\ 0$$
$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+13}=2\pm\sqrt{17}$$
$$x\in\left[2-\sqrt{17},2+\sqrt{17}\right]$$

Die Lösungsmenge im ersten Fall ist

$L_1=\left[2-\sqrt{17},2+\sqrt{17}\right]\cap\big((-\infty,-2)\cup(5,\infty)\big)=\left[2-\sqrt{17},-2\right]\cup\left(5,2+\sqrt{17}\right)$.

2: Fall: $x^2-3x-10<0 \Leftrightarrow x\in(-2,5)$

$$\frac{x+3}{x^2-3x-10}\geq 1 \qquad | \cdot (x^2-3x-10)<0$$
$$x+3\leq\ x^2-3x-10$$
$$0\leq x^2-3x-10-x-3$$
$$x^2-4x-13\leq 0$$
$$x\in\left(-\infty,2-\sqrt{17}\right]\cup\left[2+\sqrt{17},\infty\right)$$

Die Lösungsmenge im zweiten Fall ist

$L_2=\big(\left(-\infty,2-\sqrt{17}\right]\cup\left[2+\sqrt{17},\infty\right)\big)\cap(-2,5)=\emptyset$.

Die Gesamtlösungsmenge ist $L=L_1\cup L_2=L_1=\left[2-\sqrt{17},-2\right)\cup\left(5,2+\sqrt{17}\right]$.

2.8 Lösen von Ungleichungen durch Faktorisieren

In diesem Abschnitt betrachten wir Ungleichungen, in denen die rechte Seite Null ist. Ist es gelungen, die linke Seite in ein Produkt linearer Faktoren zu zerlegen, weiß man, wo der Term das Vorzeichen wechselt. Die Lösungsmenge kann dann sofort bestimmt werden.

Wir erläutern dieses Vorgehen anhand von Beispielen.

Beispiele:

1) $x^3 - 3x^2 - 10x - 6 > 0$

Als erstes bestimmen wir die Nullstellen der linken Seite $x^3 - 3x^2 - 10x - 6 = 0$. Wir finden eine Nullstelle durch Raten:
$x = 1 : \quad 1 - 3 - 10 - 6 \neq 0$
$x = -1 : \quad -1 - 3 + 10 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1$

Als nächstes spalten wir den linearen Faktor $x + 1$ ab.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 - 10x - 6) : (x + 1) = x^2 - 4x - 6 \\
\underline{x^3 + x^2} \\
 - 4x^2 - 10x \\
 - \underline{4x^2 - 4x} \\
 - 6x - 6 \\
 - \underline{6x - 6} \\
 0
\end{array}
$$

Um die restlichen Nullstellen zu bestimmen, lösen wir die quadratische Gleichung $x^2 - 4x - 6 = 0$:
$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4 + 6} = 2 \pm \sqrt{10}$.

Wir können die linke Seite wie folgt faktorisieren:

$\left(x - 2 - \sqrt{10}\right)\left(x - 2 + \sqrt{10}\right)(x + 1) > 0.$

Dieser Ausdruck wechselt das Vorzeichen in den Punkten $2 \pm \sqrt{10}, -1$. Für große positive x ist der Ausdruck offensichtlich positiv. Das Vorzeichenschema sieht also folgendermaßen aus:

Die Lösungsmenge ist $L = (2 - \sqrt{10}, -1) \cup (2 + \sqrt{10}, \infty)$.

2) $6x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 2 \leq 0$

Bestimmung der Nullstellen:
$x_1 = 1 : \quad 6 - 13 + 6 + 3 - 2 = 15 - 15 = 0$

$$
\begin{array}{l}
(6x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 3x - 2) : (x - 1) = 6x^3 - 7x^2 - x + 2 \\
\underline{6x^4 - 6x^3} \\
 - 7x^3 + 6x^2 \\
 - \underline{7x^3 + 7x^2} \\
 - x^2 + 3x \\
 - \underline{x^2 + x} \\
 2x - 2 \\
 \underline{2x - 2} \\
 0
\end{array}
$$

Wir lösen die Gleichung $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$.

$x_2 = 1: \quad 6 - 7 - 1 + 2 = 0$

$$
\begin{array}{l}
(6x^3 - 7x^2 - \ \ x + 2) : (x+1) = 6x^2 - x - 2 \\
\underline{6x^3 - 6x^2} \\
\qquad - \ x^2 - \ x \\
\qquad - \ \underline{x^2 + \ x} \\
\qquad\qquad - 2x + 2 \\
\qquad\qquad - \underline{2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Es bleibt noch, die quadratische Gleichung $6x^2 - x - 2 = 0$ zu lösen.

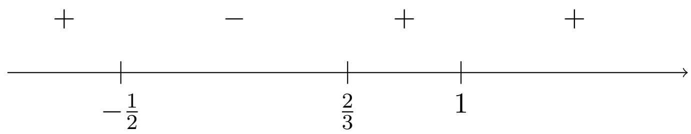
$x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \dfrac{1 \pm 7}{12}$

$x_3 = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

Die Ungleichung in faktorisierter Form lautet:

$6(x-1)^2 \left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0.$

Achtung: $x = 1$ ist eine doppelte Nullstelle! Bei $x = 1$ erfolgt kein Vorzeichenwechsel. Das Vorzeichen wechselt sich in den Punkten $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{2}{3}$.



Die Lösungsmenge ist $L = \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \cup \{1\}$.

3)

$$
\begin{aligned}
&\frac{3-x}{x-5} < 2, \qquad\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{5\} \\
&\frac{3-x}{x-5} - 2 < 0 \\
&\frac{3 - x - 2(x-5)}{x-5} < 0 \\
&\frac{3 - x - 2x + 10}{x-5} < 0 \\
&\frac{-3x + 13}{x-5} < 0 \\
&\frac{-3\left(x - \frac{13}{3}\right)}{x-5} < 0 \qquad \left| \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) < 0 \right. \\
&\frac{x - \frac{13}{3}}{x-5} > 0
\end{aligned}
$$

Die Lösungsmenge ist $L = \left(-\infty, \frac{13}{3}\right) \cup (5, \infty)$.

4)

$$\frac{x+3}{x^2-3x-10} \geq 1, \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$$

$$\frac{x+3}{x^2-3x-10} - 1 \geq 0$$

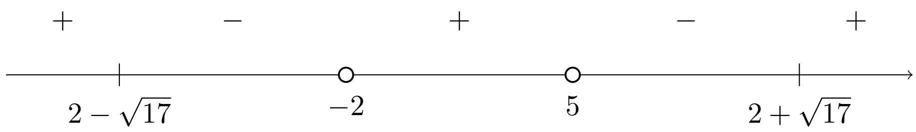
$$\frac{x+3-(x^2-3x-10)}{x^2-3x-10} \geq 0$$

$$\frac{x+3-x^2+3x+10}{x^2-3x-10} \geq 0$$

$$\frac{-x^2+4x+13}{x^2-3x-10} \geq 0 \qquad | \cdot (-1) < 0$$

$$\frac{x^2-4x-13}{x^2-3x-10} \leq 0$$

$$\frac{\left(x-\left(2-\sqrt{17}\right)\right)\left(x-\left(2+\sqrt{17}\right)\right)}{(x+2)(x-5)} \leq 0$$



Beachte, dass $-2, 5 \notin D$.

Die Lösungsmenge ist $L = \left[2-\sqrt{17}, -2\right) \cup \left(5, 2+\sqrt{17}\right]$.

Kapitel 3

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

3.1 Systeme zweier linearer Gleichungen mit zwei Unbekannten

Wir beginnen diesen Abschnitt mit drei einführenden Beispielen.

Beispiele:

1)

$$\begin{aligned} -2x + y &= 1 \\ 4x + y &= 4 \end{aligned}$$

Es gibt mehrere verschiedene Lösungsansätze. Zum Beispiel kann man eine Gleichung nach einer Variablen lösen und das Ergebnis in die andere einsetzten, beispielsweise

$y = 1 + 2x$

$4x + 1 + 2x = 4$

$6x = 3$

$x = \frac{1}{2}, \quad y = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Ein weiterer Lösungsweg basiert auf dem sog. Gaußschen Algorithmus. Man kombiniert die Gleichungen dabei so, dass in einer Gleichung nur eine Variable vorhanden ist. In unserem Beispiel kann man zu der zweiten Gleichung das Doppelte der ersten Gleichung addieren:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 1 \\ 3y &= 6 \end{aligned}$$

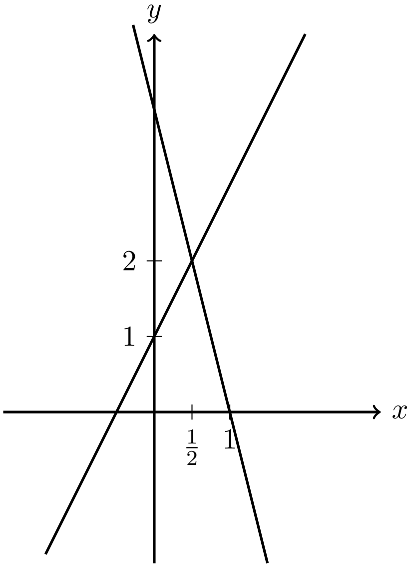
Aus der zweiten Gleichung erhalten wir $y = 2$, und das Einsetzten in die erste Gleichung liefert uns:

$-2x + 2 = 1$

$-2x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

Man kann ein solches Gleichungssystem auch graphisch lösen. Man zeichnet dafür die beiden Geraden, deren Gleichungen die erste bzw. die zweite Gleichung ist, in ein Koordinatensystem ein. Die Lösungsmenge ist die Schnittmenge der beiden Geraden.



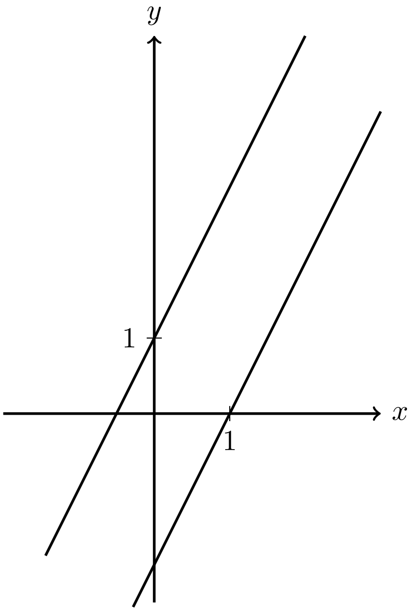
2)

$$-2x + y = 1$$
$$4x - 2y = 4$$

Durch Addieren des Doppelten der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung erhält man die Gleichung

$0 = 6$,

welche niemals erfüllt werden kann. Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, also ist $L = \emptyset$.



Die Geraden sind parallel.

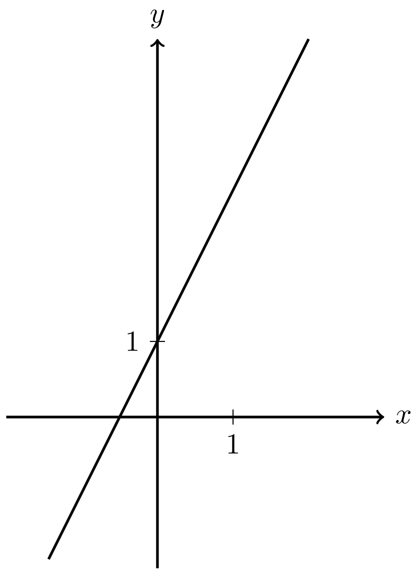
3)

$$-2x + y = 1$$
$$4x - 2y = -2$$

Durch Addieren des Doppelten der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung erhält man die Gleichung

$0 = 0$,

welche immer erfüllt ist. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Das sind alle Punkte auf der Geraden mit der Gleichung $-2x + y = 1$.



Die Geraden sind identisch. Alle Punkte auf der Geraden sind Lösungen.

Ein *lineares Gleichungssystem* von m Gleichungen mit n Unbekannten ist ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Die Zahlen $a_{11}, ..., a_{mn}$ heißen die *Koeffizienten* des Gleichungssystems, $x_1, ..., x_n$ die *Unbekannten* und $b_1, ..., b_m$ die Koeffizienten der *rechten Seite*.

Eine *Lösung* des linearen Gleichungssystems ist ein n-Tupel $x_1, ..., x_n$ mit der Eigenschaft, dass beim Einsetzen von $x_1, ..., x_n$ ins Gleichungssystem alle Gleichungen erfüllt sind.

Wir haben in den Beispielen oben gesehen, dass ein lineares Gleichungssystem genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung haben kann. Das sind alle möglichen Fälle, die beim Lösen eines linearen Gleichungssystems auftreten können. Wir formulieren diesen Sachverhalt als ein Satz, welchen wir später für den Fall eines Systems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten beweisen werden.

Satz.

Ein lineares Gleichungssystem hat genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

Wir werden im folgenden nur Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten betrachten:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Die rechte Seite sowie die beiden Unbekannten fassen wir jeweils zu Vektoren $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zusammen.

Ein *Vektor* ist ein n-Tupel von reellen Zahlen. Wir unterscheiden zwischen Spaltenvektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

und Zeilenvektoren

$$\vec{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n).$$

Die Menge aller Vektoren mit n Komponenten bezeichnen wir $\mathbb{R}^n$.

Die Koeffizienten des Gleichungssystems fassen wir zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Eine *Matrix* ist ein rechteckiges Schema von reellen Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten bezeichnen wir $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Vektoren sind Sonderfälle von Matrizen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\vec{x} = (x_1\ \dots\ x_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix. Der Ausdruck

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

heißt *Determinante* der Matrix A.

Bemerkung:

Determinanten sind auch für Matrizen mit n Zeilen und n Spalten definiert. Die allgemeine Definition ist allerdings viel komplizierter.

Eine Matrix A heißt *regulär*, wenn $\det A \neq 0$, und *singulär*, wenn $\det A = 0$.

Satz.

Ist die Matrix A regulär, so hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung.
Ist die Matrix A singulär, so hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen oder keine Lösung, und das hängt von der rechten Seite ab.

Wir geben hier einen Beweis speziell für lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten an:

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Beweis:

1. Fall: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix A ist offensichtlich singulär. Das Gleichungssystem nimmt in diesem Fall die Form

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & b_1 \\ 0 & = & b_2 \end{array}$$

an. Gilt $b_1 = b_2 = 0$, so sind alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ Lösungen. Insbesondere hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Gilt $b_1 \neq 0$ oder $b_2 \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

2. Fall: $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist mindestens eine Komponente der Matrix nicht Null. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_{11} \neq 0$. Wir nehmen $c = \frac{a_{21}}{a_{11}}$ und subtrahieren aus der zweiten Gleichung das c-Fache der ersten Gleichung:

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ & & \tilde{a}_{22}x_2 & = & \tilde{b}_2 \end{array}$$

mit $\tilde{a}_{22} = a_{22} - ca_{12} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}} = \frac{\det A}{a_{11}}$ und $\tilde{b}_2 = b_2 - cb_1$.

Ist A regulär, d.h. $\det A \neq 0$, so ist $\tilde{a}_{22} \neq 0$. In diesem Fall kann man aus der zweiten Gleichung x_2 eindeutig bestimmen: $x_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}}$. Danach wird auch x_1 eindeutig aus der ersten Gleichung bestimmt. Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

Ist A singulär, d.h. $\det A = 0$, so ist $\tilde{a}_{22} = 0$. Das Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ & & 0 & = & \tilde{b}_2 \end{array}$$

Ist $\tilde{b}_2 = 0$, so hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen: alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ sind Lösungen. Ist $\tilde{b}_2 \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung.

Abschließend betrachten wir noch ein Beispiel.

Beispiel:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 5y & = & 7 \\ 4x & + & ay & = & b \end{array}$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Gleichung aus der zweiten Gleichung:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & 5y & = & 7 \\ & & (a-10)y & = & b-14 \end{array}$$

1. Fall: $a - 10 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a \neq 10$.

In diesem Fall hat das Gleichungssystem genau eine Lösung: $y = \frac{b-14}{a-10}$, und aus $2x = 7 - 5y$ folgt $x = \frac{7}{2} - \frac{5}{2}y = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{b-14}{a-10}$. Also gilt

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \cdot \frac{b-14}{a-10} \\ \frac{b-14}{a-10} \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Fall: $a - 10 = 0$ und $b - 14 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 10$ und $b = 14$.

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x + 5y = 7 \right\}.$$

3. Fall: $a - 10 = 0$ und $b - 14 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a = 10$ und $b \neq 14$.

In diesem Fall hat das Gleichungssystem keine Lösung: $L = \emptyset$.

3.2 Vektoren in $\mathbb{R}^2$

In diesem Abschnitt betrachten wir Vektoren in $\mathbb{R}^2$. Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren folgende Operationen:

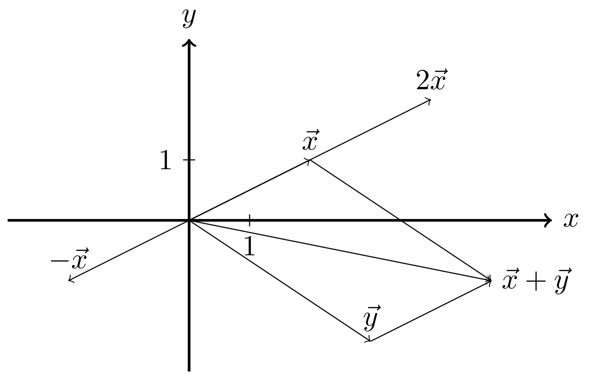
Vektoraddition: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$.

Multiplikation mit Skalar: $c\vec{x} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$.

Die beiden Operationen haben eine graphische Interpretation, welche wir anhand eines Beispiels illustrieren.

Beispiel:

Gegeben seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Es gilt: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $2\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Rechenregeln für die Vektorrechnung:

Für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$, $c, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (Kommutativität)
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (Assoziativität)
3) Für den Vektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$.
4) Zu jedem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gibt es einen Vektor (den Gegenvektor) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$ mit $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
5) $c(\vec{x} + \vec{y}) = c\vec{x} + c\vec{y}$
6) $(c + b)\vec{x} = c\vec{x} + b\vec{x}$
7) $c(b\vec{x}) = (cb)\vec{x}$
8) $1\vec{x} = \vec{x}$

Diese Rechenregeln bilden die sog. *Vektorraumaxiome* für den *Vektorraum* $\mathbb{R}^2$.
Die *Subtraktion* wird definiert als die Addition des Gegenvektors: $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$.

Skalarprodukt und die Länge eines Vektors

Das *Skalarprodukt* (das *innere Produkt*) zweier Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist definiert als

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \in \mathbb{R}.$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt:

1) $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \langle \vec{y} | \vec{x} \rangle$ (Symmetrie)
2) $\langle c\vec{x} | \vec{y} \rangle = c \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$ (Homogenität)
3) $\langle \vec{x} | \vec{y} + \vec{z} \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} | \vec{z} \rangle$ (Distributivität)

Die *Länge* eines Vektors ist definiert durch die Formel

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

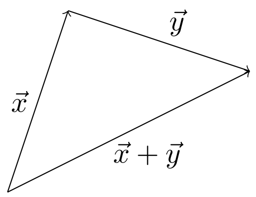
Es gilt offensichtlich : $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle$.

Rechenregeln für die Länge:

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $\|\vec{x}\| \geq 0$ und $\big(\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0\big)$.
2) $\|c\vec{x}\| = |c| \cdot \|\vec{x}\|$ (Homogenität)
3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

Graphische Interpretation der Dreiecksungleichung: Eine Seite im Dreieck ist kleiner als die Summe der beiden anderen Seiten.



Die erste Regel darf offensichtlich sein. Die zweite Regel kann wie folgt bewiesen werden:

$$\|c\vec{x}\| = \sqrt{(cx_1)^2 + (cx_2)^2} = \sqrt{c^2 x_1^2 + c^2 x_2^2} = \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |c| \cdot \|\vec{x}\|.$$

Die dritte Regel werden wir etwas später beweisen.

Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Bevor wir diese Aussage beweisen, verdeutlichen wir sie anhand eines Beispiels.

Beispiel:

Seien $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$. Es gilt

$\|\vec{x}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$

$\|\vec{y}\| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13,$

$\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = 3 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 36 + 20 = 56 \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = 5 \cdot 13 = 65.$

Beweis:

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zu beweisen Wir geben hier einen direkten Beweis an, welcher speziell in unserem Fall funktioniert:

$$
\begin{aligned}
& |\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \\
\Leftrightarrow\ & \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + x_2^2 y_2^2 \leq x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & x_1^2 y_2^2 - 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Beweis der Dreiecksungleichung:

Jetzt sind wir in der Lage, die Dreiecksungleichung zu beweisen. Der Beweis erfolgt folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}|\vec{x} + \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} + \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x} + \vec{y}\rangle + \langle \vec{y} + \vec{y}\rangle \\
&\leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2,
\end{aligned}
$$

bei der Abschätzung haben wir die Ungleichung von Cauchy-Schwarz benutzt. Daraus folgt, dass $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Winkel zwischen zwei Vektoren

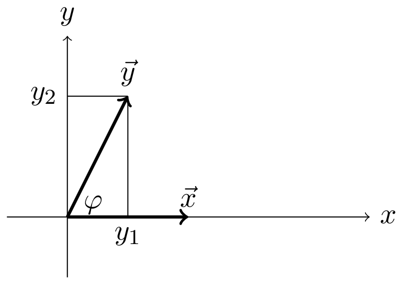
Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\varphi,$$

wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gegen den Uhrzeigersinn gebildet wird.



Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Vektor $\vec{x}$ an der positiven x-Achse liegt. Dann gilt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \|\vec{x}\| = x_1.$$

Sei $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Der Winkel φ ist der Winkel zwischen der x-Achse und $\vec{y}$. Folglich gilt

$$y_1 = \|\vec{y}\| \cos\varphi, \quad y_2 = \|\vec{y}\| \sin\varphi.$$

Insbesondere gilt für das Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = x_1 y_1 + 0 y_2 = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cos\varphi.$$

Sind zwei Vektoren gegeben, kann der Winkel zwischen denen mit der Formel

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$$

berechnet werden.

Beispiele:

1) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ gilt:
$\|\vec{x}\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$, $\quad \|\vec{y}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\quad \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) = 5$,
$\cos\varphi = \dfrac{\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} = \dfrac{5}{\sqrt{2}\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,
$\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$.

2) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$ gilt:
$\|\vec{x}\| = 2$, $\quad \|\vec{y}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$, $\quad \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = -1$,
$\cos\varphi = \frac{-1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$,
$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$.

Zwei Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ heißen *orthogonal*, wenn sie einen Winkel von 90° einschließen. Für orthogonale Vektoren schreiben wir $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Da $\cos(90°) = 0$, gilt offensichtlich

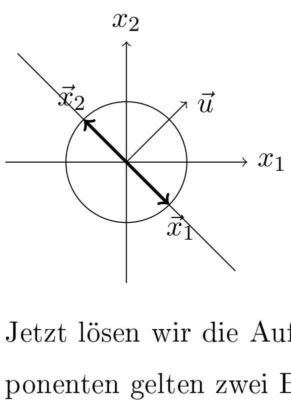
$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 0.$$

Beispiele:

1) Die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ sind orthogonal, da $\langle \vec{x}|\vec{y}\rangle = 3\cdot(-2) + 2\cdot 3 = 0$.

2) Finde alle Vektoren der Länge 1, die zu dem Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Wir lösen die Aufgabe erst graphisch:



Jetzt lösen wir die Aufgabe rechnerisch. Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ der unbekannte Vektor. Für seine Komponenten gelten zwei Bedingungen:

1) $\vec{x} \perp \vec{u} \iff \langle \vec{x}|\vec{u}\rangle = 0 \iff x_1 + x_2 = 0$. Alle Endpunkte der Vektoren, die dieser Bedingung genügen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $x_1 + x_2 = 0$.
2) $\|\vec{x}\| = 1 \quad\Leftrightarrow\quad x_1^2 + x_2^2 = 1$. Alle Endpunkte der Vektoren, die dieser Bedingung genügen, liegen auf der Kreislinie mit Radius 1 um den Ursprung.

Aus der ersten Gleichung finden wir $x_2 = -x_1$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert
$x_1^2 + x_1^2 = 1$
$2x_1^2 = 1$
$x_1^2 = \frac{1}{2}$
Das Gleichungssystem hat also zwei Lösungen:
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = -x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = -x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Das sind die Vektoren $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

3.3 Matrizen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Matrizen der Dimension 2×2. Wie im Fall der Vektoren definieren wir folgende zwei Operationen:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $c \in \mathbb{R}$.

Addition: $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$.

Multiplikation mit Skalar: $cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{pmatrix}$.

Rechenregeln für Matrizen:

Für $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $c, b \in \mathbb{R}$ gilt:

1) $A + B = B + A$
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) Für die Matrix $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und jede Matrix A gilt : $O + A = A$.
4) Zu jeder Matrix A gibt es eine Matrix (die Gegenmatrix) $-A$ mit $A + (-A) = O$.
5) $c(A + B) = cA + cB$
6) $(c + b)A = cA + bA$
7) $c(bA) = (cb)A$
8) $1 \cdot A = A$

Die Matrizen in $\mathbb{R}^{2x2}$ bilden also einen Vektorraum.

Die *Substraktion* ist definiert als die Addition der Gegenmatrix: $A - B = A + (-B)$.

Matrix-Vektor-Produkt:

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist das Produkt $A\vec{x}$ definiert durch die Formel

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere kann das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

als $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

Matrixmultiplikation:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Wir schreiben $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2)$ mit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}$. Das Produkt AB ist definiert durch

$$AB = (A\vec{b}_1\ A\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

1) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ gilt:

$$AB = \begin{pmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Im Allgemeinen gilt : $AB \neq BA$.

2) Für $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$CD = \begin{pmatrix} -2+2 & 4-4 \\ -4+4 & 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Aus $CD = O$ folgt nicht $C = O$ oder $D = O$.

Rechenregeln für die Matrixmultiplikation:

Für $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

1) $A(BC) = (AB)C$ (Assoziativität)
2) $A(B + C) = AB + AC$ (Links-Distributivität)
3) $(A + B)C = AC + BC$ (Rechts-Distributivität)

Da das Matrixprodukt nicht kommutativ ist, brauchen wir beide Regeln 2) und 3).

Die Rolle einer Eins bezüglich der Matrixmultiplikation spielt die *Einheitsmatrix* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

$$AI = IA = A.$$

Ferner definieren wir noch eine Operation für Matrizen:
Die *Transponierte* einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist die Matrix $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.
Das Transponieren einer Matrix entspricht der Spiegelung an der Diagonalen.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Für Vektoren gilt: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T = (x_1\ x_2)$ und $(y_1\ y_2)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.
Insbesondere gilt $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \vec{y}$.

Rechenregeln für das Transponieren:

1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(cA)^T = cA^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$ (Beachte die Reihenfolge der Faktoren!)

Beispiel zu 4): Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ gilt: $AB = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,
$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = (AB)^T$.

Für das Skalraprodukt gilt

$$\langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle = \langle A^T \vec{x} | \vec{y} \rangle.$$

In der Tat,

$$\langle A^T \vec{x} | \vec{y} \rangle = (A^T \vec{x})^T \vec{y} = \vec{x}^T (A^T)^T \vec{y} = \vec{x}^T (A\vec{y}) = \langle \vec{x} | A\vec{y} \rangle.$$

Als nächstes beschäftigen wir uns mit folgender Frage: Gibt es für eine Matrix A eine inverse Matrix, so wie es für Zahlen ein inverses Element bezüglich der Multiplikation, also den Kehrwert, gibt?
Sei A eine Matrix. Die *Inverse* von A ist eine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Es gibt solche Matrizen, für die A^{-1} existiert, und solche, für die A^{-1} nicht existiert. Wir untersuchen nun speziell für 2×2-Matrizen die Frage, unter welchen Bedingungen eine Matrix A invertierbar ist.
Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Wir suchen erst eine Matrix $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ mit $AX = I$, d.h.

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem für $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ lautet:

$$\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} &= 1 \qquad & a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} &= 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} &= 0 \qquad & a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Das sind zwei lineare Gleichungssysteme mit jeweils zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Wir wissen, dass ein solches Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar ist, wenn A regulär ist, d.h. $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Ist A singulär, so hat mindestens eines dieser Gleichungssysteme keine Lösung (der Fall, dass ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, kann nicht gleichzeitig für die beiden rechten Seiten auftreten). Das gesamte Gleichungssystem aus vier Gleichungen hat also keine Lösung. Folglich ist A nicht invertierbar.

Nun widmen wir uns dem Fall, wenn A regulär ist, und bestimmen X. Wir betrachten erst das Gleichungssystem für x_{11}, x_{21}. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a_{21}, die zweite Gleichung mit a_{11} und subtrahieren anschließend die erste Gleichung aus der zweiten:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}a_{21}x_{11} & + & a_{12}a_{21}x_{21} & = & a_{21} \\ a_{11}a_{21}x_{11} & + & a_{11}a_{22}x_{21} & = & 0 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}a_{21}x_{11} & + & a_{12}a_{21}x_{21} & = & a_{21} \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{21} & = & -a_{21} \end{array}$$

Die letzte Gleichung lautet $\det A \cdot x_{21} = -a_{21}$. Da $\det A \neq 0$, bestimmen wir

$$x_{21} = -\frac{a_{21}}{\det A}.$$

Aus $a_{21}x_{11} = -a_{22}x_{21} = a_{22}\frac{a_{21}}{\det A}$ folgt

$$x_{11} = \frac{a_{22}}{\det A}.$$

Das Gleichungssystem für x_{12}, x_{22} behandelt wir analog:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}a_{21}x_{12} & + & a_{12}a_{21}x_{22} & = & 0 \\ a_{11}a_{21}x_{12} & + & a_{11}a_{22}x_{22} & = & a_{11} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}a_{21}x_{12} & + & a_{12}a_{21}x_{22} & = & 0 \\ & & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_{22} & = & a_{11} \end{array}$$

Wir finden

$$x_{22} = \frac{a_{11}}{\det A}$$

und aus $a_{11}x_{12} = -a_{12}x_{22} = -a_{12}\frac{a_{11}}{\det A}$

$$x_{12} = -\frac{a_{12}}{\det A}.$$

Wir haben gezeigt, dass es für eine reguläre Matrix A genau eine Matrix X gibt mit $AX = I$. Diese Matrix ist $X = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Es bleibt zu zeigen, dass auch $XA = I$. Wir zeigen erst, dass X regulär ist. In der Tat,

$$\det X = \frac{a_{22}}{\det A} \cdot \frac{a_{11}}{\det A} - \frac{a_{12}}{\det A} \cdot \frac{a_{21}}{\det A} = \frac{\det A}{(\det A)^2} = \frac{1}{\det A} \neq 0.$$

Nach dem schon Bewiesenen gibt es genau eine Matrix Y mit $XY = I$. Wir zeigen, dass $Y = A$. Dazu berechnen wir AXY auf zwei Arten:

$$AXY = A(XY) = AI = A$$

und

$$AXY = (AX)Y = IY = Y.$$

Da die linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten gleich sein. Daraus folgt $Y = A$.

Es gilt also $AX = XA = I$. Folglich ist A invertierbar und $A^{-1} = X$.

Wir fassen das Ergebnis in einem Satz zusammen.

Satz.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist, d.h. $\det A \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Beispiele:

1) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Es gilt $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$. Die Matrix A ist invertierbar. Die inverse Matrix ist

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

   Wir rechnen eine Probe nach: $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Als unser zweites Beispiel betrachten wir die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Es gilt $\det B = 1\cdot 6 - 2\cdot 3 = 0$. Die Matrix B ist nicht invertierbar.

Rechenregeln für die Inverse:

1) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}, \;\; c \neq 0$
2) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$
3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (Beachte die Reihenfolge der Faktoren!)

Wir beweisen exemplarisch die Rechenregel 3). Es gilt

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Daraus folgt, dass $B^{-1}A^{-1}$ die inverse Matrix von AB ist, also $(AB)^{-1}$.

Sei

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ein lineares Gleichungssystem und sei A regulär. Für die Lösung $\vec{x}$ gilt:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Beispiel:

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -8 \\ x_1 & + & 5x_2 & = & 9 \end{array}$$

Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ist regulär, da $\det A = 2\cdot 5 - 1\cdot(-3) = 13 \neq 0$. Ihre inverse Matrix ist $A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Für die Lösung des Gleichungssystems gilt

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -13 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3.4 Lineare Abbildungen der Ebene

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix. Wir betrachten die Abbildung $\vec{y} = T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Für diese Abbildung gilt:

$$T_A(\vec{x}+\vec{y}) = A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = T_A(\vec{x}) + T_A(\vec{y})$$

und

$$T_A(c\vec{x}) = A(c\vec{x}) = cA\vec{x} = cT_A(\vec{x}).$$

Eine Abbildung T heißt *linear*, wenn folgende zwei Eigenschaften gelten:

1) $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$ (Additivität),

2) $T(c\vec{x}) = cT(\vec{x})$ (Homogenität).

Wir betrachten hier lineare Abbildungen der Ebene, d.h. $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{y} = T(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$.

Beispiel:

Wir betrachten die Abbildung $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = T\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ x_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

und

$$T(c\vec{x}) = T\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_2 \\ cx_1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = cT(\vec{x}).$$

Diese Abbildung ist linear. Die geometrische Interpretation dieser Abbildung ist die Spiegelung an der Geraden mit der Gleichung $x_2 = x_1$.

Im einführenden Beispiel haben wir gesehen, dass Multiplikation mit einer Matrix eine lineare Abbildung der Ebene ist. Wie der folgende Satz besagt, sind damit auch alle linearen Abbildungen der Ebene beschrieben.

Satz.

Für jede lineare Abbildung T der Ebene existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. Die Matrix A ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, wobei $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die kanonischen Einheitsvektoren sind. Wegen der Linearität der Abbildung gilt

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2).$$

Seien nun $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Betrachte die Matrix $A = (T(\vec{e}_1)\ T(\vec{e}_2)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Für diese Matrix gilt

$$T(\vec{x}) = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x},$$

was zu beweisen war.

Beispiel:

Wir betrachten die Abbildung $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$T(\vec{e}_1) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad T(\vec{e}_2) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

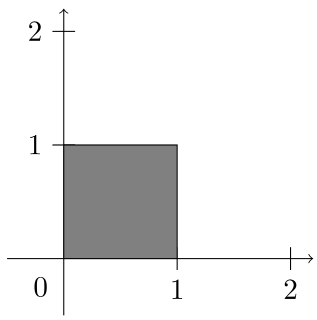
Wir haben also

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

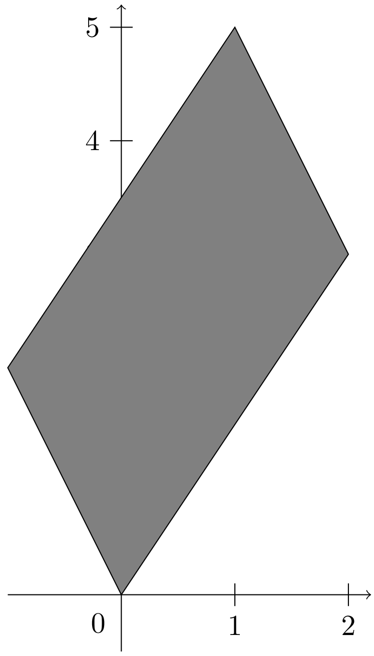
Die Koeffizienten von A kann man in der Tat an den Formeln ablesen.

Die geometrische Interpretation dieser Abbildung veranschaulichen wir anhand folgender Skizze, welche die Bilder der beiden kanonischen Einheitsvektoren sowie des darauf aufgespannten Quadrats unter der Abbildung T zeigen.

$[0,1]^2$:



$T([0,1]^2)$:



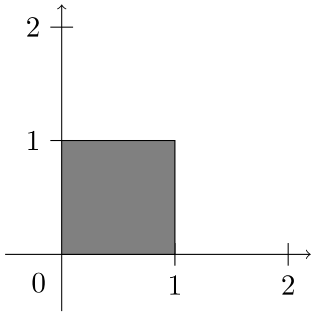
Spezielle lineare Abbildungen der Ebene

In diesem Abschnitt betrachten wir einige wichtige lineare Abbildungen der Ebene, welche eine klare geometrische Interpretation haben.

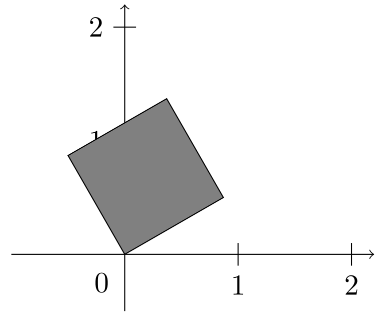
1) **Drehung um den Nullpunkt**

Die Abbildung ist die Drehung um den Winkel φ um den Nullpunkt gegen den Uhrzeigersinn.

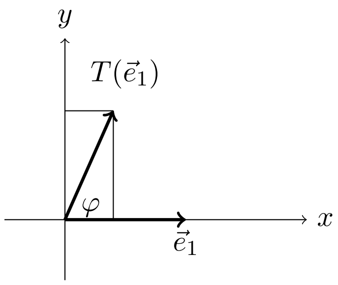
$[0,1]^2$:

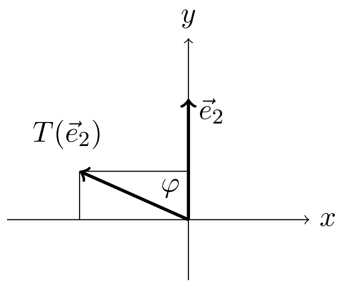


$T([0,1]^2)$:



Um die Matrix dieser Abbildung aufzustellen, betrachten wir die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$:





Es gilt $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi + 90°) \\ \sin(\varphi + 90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Die Matrix dieser Abbildung – die sog. *Drehmatrix* zum Winkel φ – hat also die Form

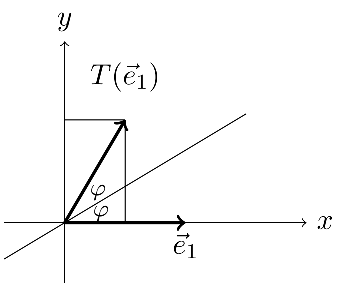
$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

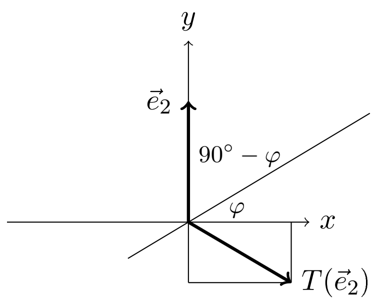
Beispiel: Drehung um 45°. Die Drehmatrix ist $D_{45°} = \begin{pmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

2) **Spiegelung an einer Geraden durch den Nullpunkt**

Diese Abbildung ist die Spiegelung an einer Geraden, welche den Winkel φ mit der positiven x-Achse bildet. Die Gleichung dieser Geraden lautet $y = \tan\varphi \cdot x$.

Wieder bestimmen wir die Bilder der Einheitsvektoren unter dieser Abbildung:





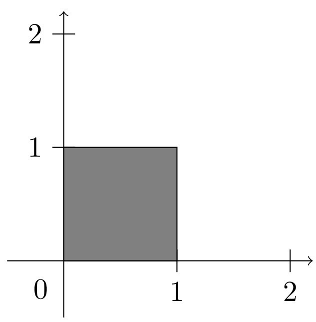
Es gilt also $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}$ und $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi - 90°) \\ \sin(2\varphi - 90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2\varphi \\ -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

Die Matrix der Abbildung lautet A=$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}$.

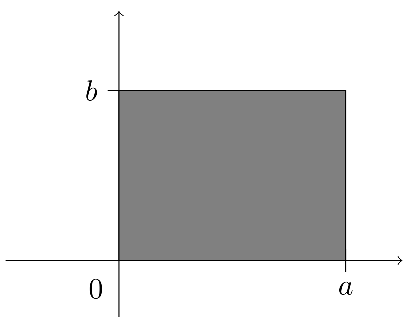
3) **Skalierung**

Diese Abbildung ist eine Skalierung um den Faktor a in die x_1-Richtung und um den Faktor b in die x_2-Richtung:

$[0,1]^2$:



$T([0,1]^2)$:

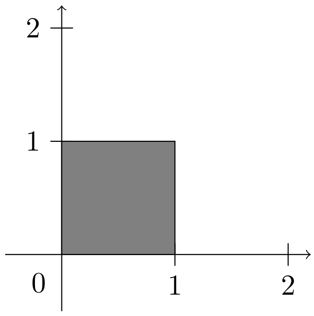


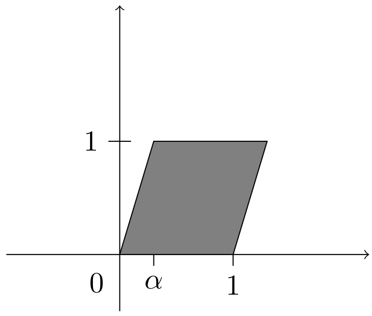
Die Matrix der Abbildung ist offensichtlich $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

4) **Scherung**

Diese Abbildung ist auf der Skizze unten veranschaulicht:

$[0,1]^2$: $T([0,1]^2)$:





Es gilt $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ und damit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hintereinanderausführung linearer Abbildungen

Gegeben seien zwei Abbildungen $\vec{y} = T_1(\vec{x})$ und $\vec{z} = T_2(\vec{y})$. Die *Komposition* (die *Hintereinanderausführung*) zweier Abbildungen $\vec{y} = T_1(\vec{x})$ und $\vec{z} = T_2(\vec{y})$ ist die Abbildung

$$\vec{z} = (T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x})).$$

Die Komposition zweier linearer Abbildungen ist linear. In der Tat,

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x} + \vec{u}) = T_2(T_1(\vec{x} + \vec{u})) = T_2(T_1(\vec{x}) + T_1(\vec{u})) = T_2(T_1(\vec{x})) + T_2(T_1(\vec{u})) = (T_2 \circ T_1)(\vec{x}) + (T_2 \circ T_1)(\vec{u})$$

und

$$(T_2 \circ T_1)(c\vec{x}) = T_2(T_1(c\vec{x})) = T_2(cT_1(\vec{x})) = cT_2(T_1(\vec{x})) = c(T_2 \circ T_1)(\vec{x}).$$

Wir können auch die Matrix der Komposition $T_2 \circ T_1$ bestimmen. Seien $T_1(\vec{x}) = A_1\vec{x}$ und $T_2(\vec{y}) = A_2\vec{y}$. Dann gilt

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x})) = T_2(A_1\vec{x}) = A_2 A_1 \vec{x}.$$

Die Matrix der Abbildung $T_2 \circ T_1$ ist also $A_2 A_1$.

Beispiele:

1) Seien T_1 die Drehung um 30° und T_2 die Drehung um 60°. Die Komposition $T_2 \circ T_1$ ist offensichtlich die Drehung um 90°. Die Matrizen dieser Abbildungen sind

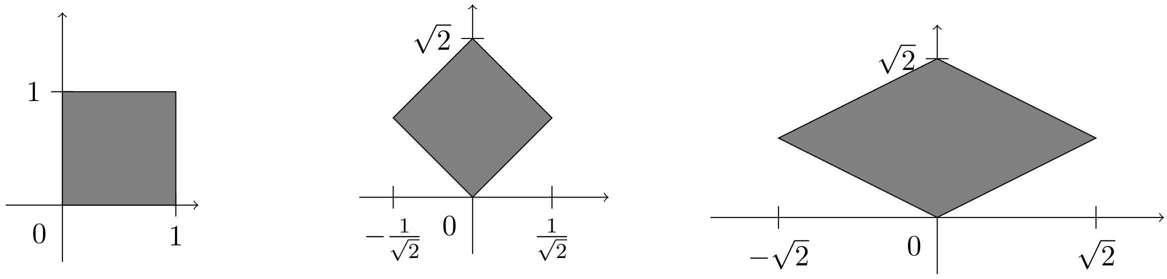
$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{pmatrix}.$$

2) Seien T_1 die Drehung um 45° und T_2 die Skalierung um den Faktor 2 in die x_1-Richtung und um den Faktor 1 in die x_2-Richtung. Wir veranschaulichen die beiden Kompositionen $T_2 \circ T_1$ und $T_1 \circ T_2$ und berechnen ihre Abbildungsmatrizen.

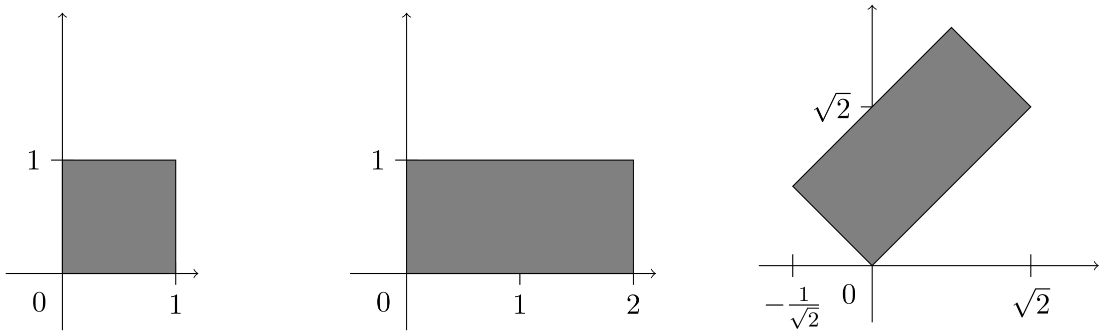
$[0,1]^2$: $T_1([0,1]^2)$: $T_2(T_1([0,1]^2))$:



Die Matrix der Abbildung $T_2 \circ T_1$ ist

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

$[0,1]^2$: $T_2([0,1]^2)$: $T_1(T_2([0,1]^2))$:



Die Matrix der Abbildung $T_1 \circ T_2$ ist

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung:

Im Allgemeinen gilt $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$.

Eine spezielle Abbildung ist die *Identität* (bzw. die *identische Abbildung*)

$$I(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Ihre Matrix ist die Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die identische Abbildung spielt die Rolle der Eins bezüglich der Komposition. Für jede lineare Abbildung T gilt:

$$T \circ I = I \circ T = T.$$

Die inverse lineare Abbildung

Sei $\vec{y} = T(\vec{x})$ eine lineare Abbildung. Unter Umständen existiert die *inverse Abbildung* T^{-1} mit

$$T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I.$$

D.h.

$$\vec{y} = T(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = T^{-1}(\vec{y}).$$

Sei X die Matrix der inversen Abbildung T^{-1}. Aus $AX = XA = I$ folgt, dass $X = A^{-1}$ sein soll. Folglich existiert die inverse Abbildung genau dann, wenn A invertierbar ist. Ihre Matrix ist A^{-1}.

Beispiele:

1) Sei T die Skalierung um den Faktor 3:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Die inverse Abbildung T^{-1} ist Skalierung um den Faktor $\frac{1}{3}$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \vec{y}.$$

2) Sei T die Drehung um $30°$: $\vec{y} = D_{30°}\vec{x}$ mit

$$D_{30°} = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}.$$

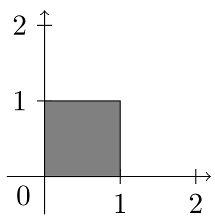
Es gilt $\det D_{30°} = \cos^2 30° + \sin^2 30° = 1$. Die Matrix der inversen Abbildung T^{-1} ist

$$(D_{30°})^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 30° & \sin 30° \\ -\sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{pmatrix} = D_{(-30°)}.$$

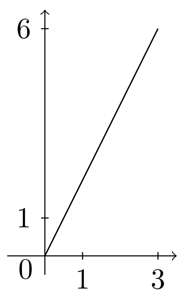
Die inverse Abbildung ist die Drehung um $-30°$, d.h. die Drehung um $30°$ in die andere Richtung.

3) Als unser letztes Beispiel betrachten wir die Abbildung $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ mit der Abbildungsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Es gilt $\det A = 4 - 4 = 0$. Die Matrix A ist singulär und damit ist die Abbildung T nicht invertierbar. Was dabei geometrisch passiert, wird aus der Skizze klar, die das Bild des Quadrats unter dieser Abbildung zeigt:

$[0,1]^2$:



$T([0,1]^2)$:



Die Bilder der Einheitsvektoren sind $T(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und diese sind parallel. Das ganze Quadrat wird auf die Strecke mit den Randpunkten $(0,0)$ und $(3,6)$ abgebildet.

Die Abbildung ist nicht invertierbar. Verschiedene Vektoren $\vec{x}$ werden auf den gleichen Vektor $\vec{y}$ abgebildet. Beispielsweise gilt für $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ z.B. $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $T\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man kann also ein $\vec{x}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = T(\vec{x})$ nicht eindeutig bestimmen.

Kapitel 4

Elementare Funktionen

4.1 Funktionsbegriff

Eine *Funktion* (*Abbildung*) f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ eindeutig ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Das dem Element $x \in X$ zugeordnete Element $y \in Y$ bezeichnet man mit $f(x)$ und nennt man den *Wert der Funktion* f an der Stelle x.

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* (die *Definitionsmenge*) von f und Y heißt der *Wertebereich* (die *Zielmenge*) von f.

Ferner heißt x die *unabhängige Variable* und y die *abhängige Variable*. Die Zuordnung $y = f(x)$ heißt *Funktionsvorschrift*.

Für die oben beschriebene Funktion$f$ schreiben wir:

$$f : X \to Y,\ x \mapsto f(x) \text{ bzw. } y = f(x).$$

Zu jeder Funktion gehören also drei Elemente: Der Definitionsbereich X, der Wertebereich Y und die Funktionsvorschrift.

Beispiele:

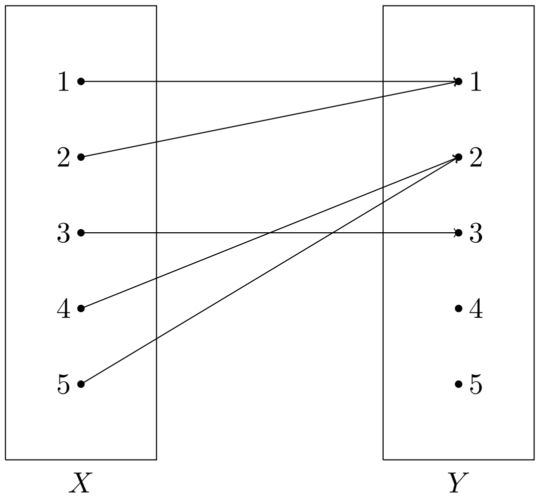
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$

3) Jedem Studierenden an der JLU Gießen wird eine Matrikelnummer zugeordnet. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller Studierenden an der JLU Gießen. Der Wertebereich ist die Menge aller als Matrikelnummer in Frage kommenden Zahlenkombinationen.

4) Lineare Abbildungen aus Kapitel III sind Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$.

5) $u : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $u(1) = 1,\ u(2) = 1,\ u(3) = 3,\ u(4) = 2,\ u(5) = 2$. Diese Abbildung kann man wie folgt visualisieren:



Zwei Funktionen sind *gleich*, wenn ihre Definitionsbereiche, ihre Wertebereiche und ihre Funktionsvorschrifte übereinstimmen.

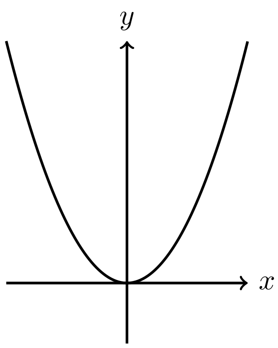
So sind beispielsweise f und g in den Beispielen oben nicht gleich.

Der *Graph* einer Funktion $f : X \to Y$ ist die Menge aller Paare $(x, f(x))$ mit $x \in X$. Sind $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, so kann man den Graph in einem Koordinatensystem veranschaulichen.

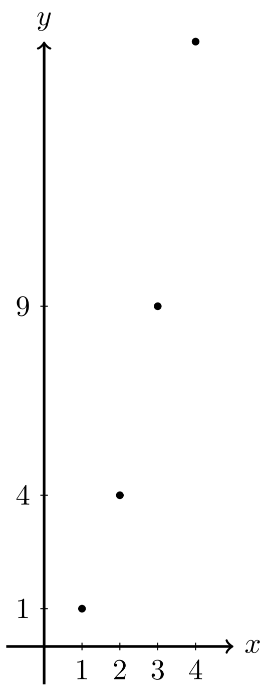
Beispiele:

Wir skizzieren hier die Graphen der Funktionen aus der Beispielen 1), 2) und 5) oben.

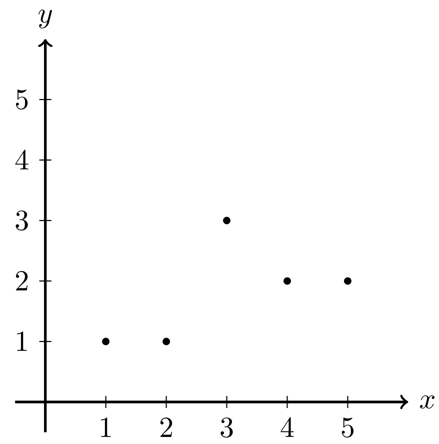
1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$



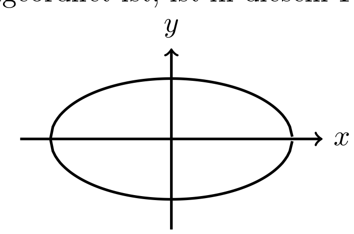
2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n^2$



5) Der Graph der Funktion u aus Beispiel 5) ist



Nicht jede Kurve in einem Koordinatensystem ist der Graph einer Funktion. So ist die Kurve auf dem Bild unten kein Graph einer Funktion. Die Eigenschaft, dass jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zugeordnet ist, ist in diesem Fall nicht erfüllt.



Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *injektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ höchstens ein Element $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. Eine äquivalente Formulierung ist

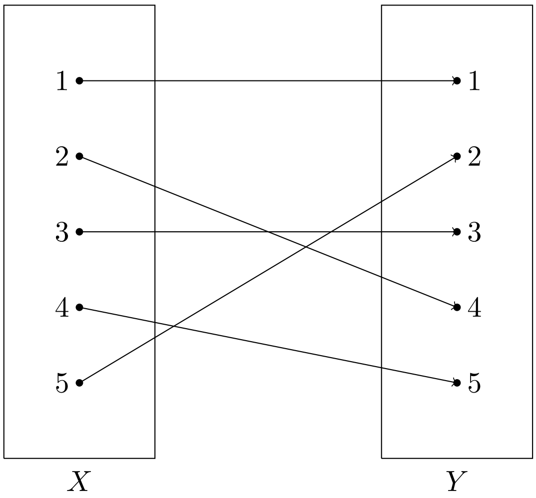
$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

Eine weitere äquivalente Formulierung ist

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

In den obigen Beispielen ist die Funktion g injektiv. Die Funktionen f und u sind dagegen nicht injektiv. So ist z.B. $1 \neq -1$, aber $f(1) = f(-1)$.

Wir betrachten noch ein weiteres **Beispiel:**
$v : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ mit $v(1) = 1$, $v(2) = 4$, $v(3) = 3$, $v(4) = 5$, $v(5) = 2$.
Diese Funktion ist injektiv.



Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. D.h. alle Werte $y \in Y$ kommen als Funktionswerte für entsprechende $x \in X$ vor.

In unseren Beispielen sind die Funktionen f, g und u nicht surjektiv, die Funktion v dagegen ist surjektiv.

Durch die Einschränkung des Wertebereiches kann eine Funktion surjektiv gemacht werden. Wir betrachten wieder das Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$. Wir schränken den Wertebereich auf die Menge $[0, \infty)$ ein. Die neue Funktion

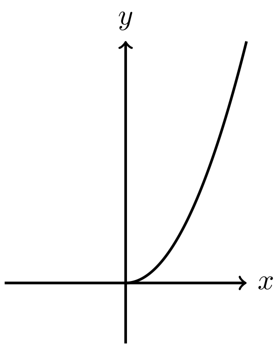
$$f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$$

ist surjektiv.

In diesem Beispiel kann man auch den Definitionsbereich so einschränken, dass die neue Funktion injektiv ist. Wir betrachten z.B.

$$f_2 : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2.$$

Die Funktion f_2 ist injektiv und surjektiv. Ihr Graph ist unten gedruckt.



Eine Funktion, die injektiv und surjektiv ist, heißt *bijektiv*. Bijektivität bedeutet, dass es für jedes $y \in Y$ genau ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$. In anderen Worten ist die Gleichung $f(x) = y$ ist für jedes $y \in Y$ eindeutig lösbar.

In den obigen Beispielen sind die Funktionen v und f_2 bijektiv.

Ist eine Funktion $f : X \to Y$ bijektiv, so kann man sie umkehren. Die *Umkehrfunktion* (die *inverse Abbildung*) von f ist die Funktion

$$f^{-1} : Y \to X,\ y \mapsto x \text{ mit } f(x) = y.$$

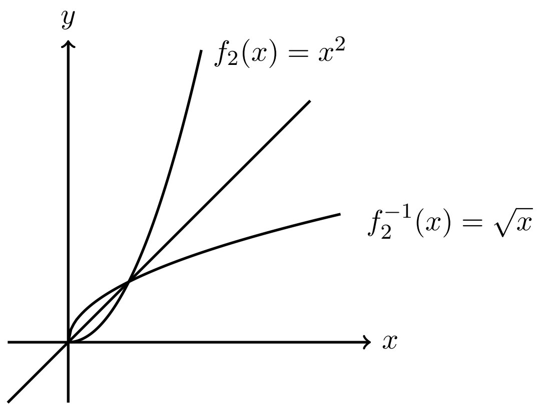
Wir geben nun die Umkehrfunktionen der Funktionen v und f_2 aus den obigen Beispielen an.

$v : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ mit $v(1) = 1$, $v(2) = 4$, $v(3) = 3$, $v(4) = 5$, $v(5) = 2$.
Die Umkehrfunktion ist $v^{-1} : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ mit $v^{-1}(1) = 1$, $v^{-1}(2) = 5$, $v^{-1}(3) = 3$, $v^{-1}(4) = 2$, $v^{-1}(5) = 4$.

$f_2 : [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto x^2.$
Die Umkehrfunktion ist $f_2^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty),\ y \mapsto \sqrt{y}.$

Sind X, Y Teilmengen von $\mathbb{R}$, so kann man die Graphen der Funktionen f und f^{-1} in einem Koordinatensystem zeichnen. Der Graph von f^{-1} entsteht dabei aus dem Graphen von f durch die Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden $y = x$. (Dies entspricht der Vertauschung von x und y, siehe Kapitel III).

Das Bild unten zeigt die Graphen der Funktionen f_2 und f_2^{-1}.



Bei elementaren Funktionen kann man in der Regel den Definitionsbereich und den Wertebereich so einschränken, dass die neue Funktion bijektiv und damit invertierbar ist.

Wir widmen uns jetzt konkreten elementaren Funktionen.

4.2 Lineare Funktionen

Eine *lineare Funktion* ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einer Funktionsvorschrift der Form

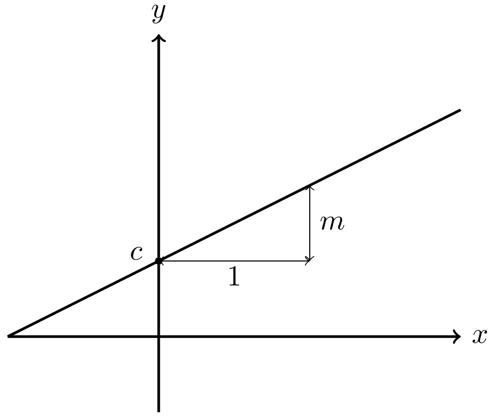
$$f(x) = mx + c, \quad m, c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel:

Ein Händler auf dem Markt verkauft Trauben zum Preis von 1,80 Euro/kg. Die Tragetasche kostet 0,10 Euro. Der Preis beim Kauf von der Menge x (in kg) Trauben mit der Tragetasche ist eine lineare Funktion $P : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit

$$P(x) = 1{,}80x + 0{,}10, \quad x \geq 0.$$

Das Schaubild einer linearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + c$ ist eine Gerade.



m ist die *Steigung*, c ist der *y-Achsenabschnitt*.

Satz.

Jede Gerade ist durch zwei auf den Geraden liegenden Punkten eindeutig bestimmt. Genauer gesagt, sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$ gegeben, so gibt es genau eine lineare Funktion der Form

$$y = f(x) = mx + c$$

mit $f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2$.

Beweis:

Durch Einsetzten der Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) in die Funktionsgleichung erhält man ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} mx_1 + c &= y_1 \\ mx_2 + c &= y_2 \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

mit den Unbekannten m und c. Für die Matrix $X = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\det X = x_1 - x_2 \neq 0$. Also ist X ist regulär und damit hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.

Es gilt insbesondere $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Beispiel:

Wir bestimmen die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $(-2, 5)$ und $(3, 1)$ geht. Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von m und c lautet

$$\begin{array}{rcccl} -2m & + & c & = & 5 \\ 3m & + & c & = & 1 \end{array}$$

Subtrahieren der ersten Gleichung aus der zweiten liefert die Gleichung $5m = -4$, woraus wir $m = -\frac{4}{5}$ bestimmen. Durch Einsetzten in die erste Gleichung finden wir dann auch c:

$-2 \cdot (-\frac{4}{5}) + c = 5$

$\frac{8}{5} + c = 5$

$c = 5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$

Die Gleichung der gesuchten Geraden ist also $y = -\frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$.

Schnittpunkt zweier Geraden

Beispiel:

Wir bestimmen den Schnittpunkt der Geraden mit den Gleichungen $y = 2x - 3$ und $y = -\frac{1}{3}x + \frac{15}{2}$. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{15}{2} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} &2x - 3 = -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{15}{2} \\ &\left(2 + \tfrac{1}{3}\right)x = \tfrac{15}{2} + 3 \\ &\tfrac{7}{3}x = \tfrac{21}{2} \\ &x = \tfrac{21}{2} \cdot \tfrac{3}{7} = \tfrac{9}{2} \\ &y = 2x - 3 = 2 \cdot \tfrac{9}{2} - 3 = 6 \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $\left(\frac{9}{2}, 6\right)$.

Bemerkung:

Für die Lage zweier Geraden in der Ebene ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Die Geraden schneiden sich.
- Die Geraden sind parallel.
- Die Geraden sind identisch.

Die Umkehrfunktion

Ist $m \neq 0$, so ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = mx + c$ bijektiv. Die Umkehrfunktion ist auch eine lineare Funktion, welche folgendermaßen bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ mx &= y - c \\ x &= \tfrac{1}{m}y - \tfrac{c}{m} \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{1}{m}x - \tfrac{c}{m}.$$

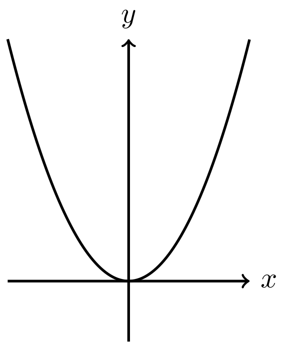
Für $m = 0$ ist $f(x) = c$ die konstante Funktion. Sie ist weder injektiv noch surjektiv und damit auch nicht bijektiv. Es existiert keine Umkehrfunktion.

4.3 Quadratische Funktionen

Die allgemeine Form einer *quadratischen Funktion* ist

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Das Schaubild der Funktion $f(x) = x^2$ ist die Normalparabel:



Der Punkt $S(0,0)$ heißt der *Scheitel* der Parabel.

Jede quadratische Funktion kann mithilfe der quadratischen Ergänzung in der *Scheitelform* angegeben werden:

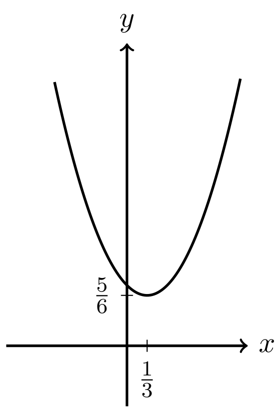
$$f(x) = a(x-d)^2 + u, \quad a, d, u \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Der Scheitel dieser Parabel ist $S(d, u)$. Das Schaubild entsteht aus der Normalparabel folgendermaßen:

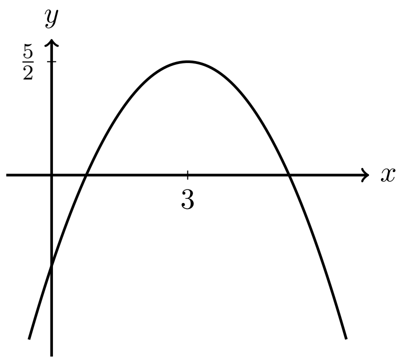
- Streckung bzw. Stauchung um den Faktor $|a|$ in die y-Richtung,
- für $a < 0$ zusätzlich die Spiegelung an der x-Achse,
- Verschiebung um d Einheiten nach rechts, wenn $d > 0$ bzw. nach links, wenn $d < 0$ und um u Einheiten nach oben, wenn $u > 0$ bzw. nach unten, wenn $u < 0$.

Beispiele:

1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 1 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 1 = \frac{3}{2}\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 1 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{9} + 1$
$= \frac{3}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6}$
Der Scheitel hat die Koordinaten $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$, die Parabel ist nach oben geöffnet.



2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 6x) - 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9) - 2 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2} - 2$
$= -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{2}$
Der Scheitel hat die Koordinaten $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, die Parabel ist nach unten geöffnet.



Die inverse Funktion

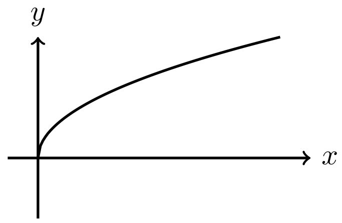
Wie wir oben gesehen haben, ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ weder injektiv noch surjektiv. Man muss den Definitionsbereich und den Wertebereich einschränken, damit die Funktion umgekehrt werden kann. Die übliche Einschränkung ist

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$$

Diese Funktion ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die *Wurzelfunktion*

$$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Das Bild unten zeigt ihr Schaubild:



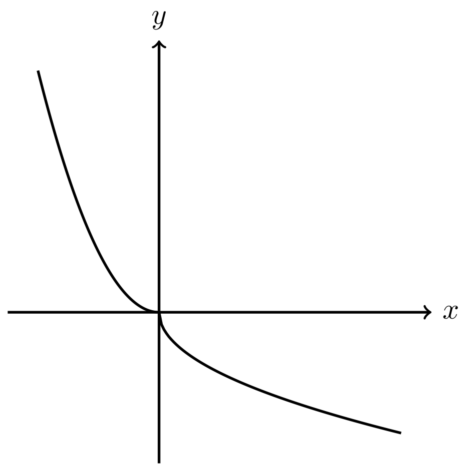
Es sind aber auch andere Einschränkungen möglich, z.B.

$$f : (-\infty, 0] \to [0, \infty),\ f(x) = x^2.$$

Die Umkehrfunktion dieser Funktion ist

$$f^{-1} : [0, \infty) \to (-\infty, 0],\ f^{-1}(x) = -\sqrt{x}.$$

Das Bild unten zeigt die Schaubilder der beiden Funktionen:



4.4 Ganzrationale Funktionen

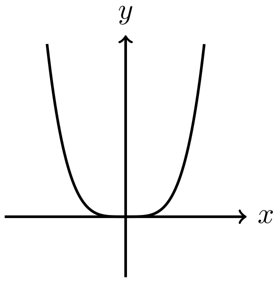
Eine *ganzrationale Funktion* n-ten Grades ist die Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

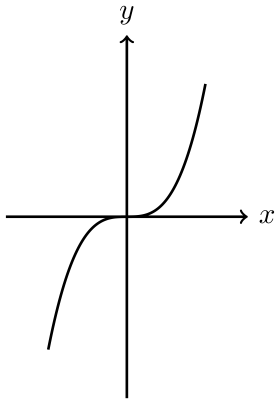
Der Funktionsterm ist ein Polynom von Grad n.

Die Schaubilder der einfachsten ganzrationalen Funktion $y = x^n$ sind unten gedruckt. Man muss zwischen den Fällen n gerade und n ungerade unterscheiden.

$y = x^n$, n gerade:



$y = x^n$, n ungerade:



Ein Polynom vom Grad n kann bis zu n Nullstellen haben. Zur Erstellung des Schaubildes braucht man die Kurvendiskussion.

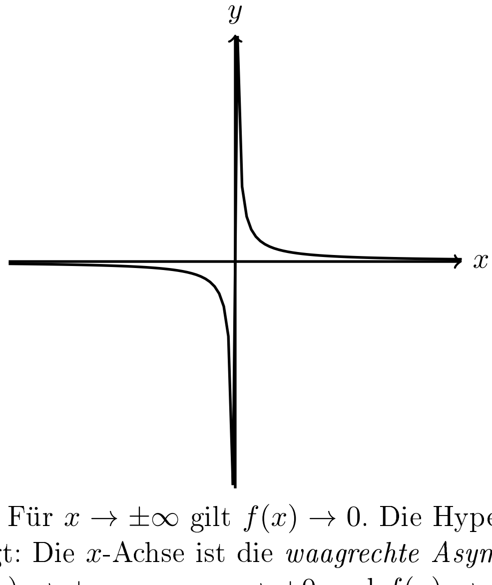
4.5 Gebrochenrationale Funktionen

Eine *gebrochenrationale Funktion* ist die Funktion der Form

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \qquad g, h \quad \text{sind Polynome.}$$

Der Term einer gebrochenrationalen Funktion ist der Quotient zweier Polynome.
Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $D = \{x \in \mathbb{R} : h(x) \neq 0\}$.

Die einfachste gebrochenrationale Funktion ist $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Das Schaubild dieser Funktion ist eine Hyperbel.



Für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to 0$. Die Hyperbel nähert sich der x-Achse, ohne diese zu erreichen. Man sagt: Die x-Achse ist die *waagrechte Asymptote*. Für $x \to 0$ gilt $f(x) \to \pm\infty$. Genauer gesagt, gilt es $f(x) \to +\infty$, wenn $x \to +0$ und $f(x) \to -\infty$, wenn $x \to -0$. Die Hyperbel nähert sich der y-Achse, ohne diese zu erreichen. Man sagt: Die y-Achse ist die *senkrechte Asymptote*.

Unter einer *Asymptote* versteht man eine Gerade, der sich eine ins Unendliche verlaufende Kurve beliebig nähert.

Null- und Polstellen gebrochenrationaler Funktionen

Wir betrachten eine gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Ist $h(x_0) = 0$, so ist f im Punkt x_0 nicht definiert. Wir nennen x_0 eine *Definitionslücke*. Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. Fall: $g(x_0) \neq 0$.

   In diesem Fall gilt $f(x) \to \pm\infty$, $x \to x_0$. Die Stelle x_0 ist eine *Polstelle* der Funktion f. Die Gerade $x = x_0$ ist eine senkrechte Asymptote von f.

2. Fall: $g(x_0) = 0$.

   Die Stelle x_0 ist eine gemeinsame Nullstelle der beiden Polynome g und h. In diesem Fall kann man g und h faktorisieren: $g(x) = (x-x_0)g_1(x)$, $h(x) = (x-x_0)h_1(x)$, wobei g_1, h_1 zwei Polynome vom niedrigeren Grad sind. Für alle $x \neq x_0$ gilt

$$f(x) = \frac{(x-x_0)g_1(x)}{(x-x_0)h_1(x)} = \frac{g_1(x)}{h_1(x)} = f_1(x).$$

   Ist $h_1(x_0) \neq 0$, so ist die neue Funktion $f_1(x)$ auch im Punkt x_0 definiert. Die Stelle x_0 ist eine *hebbare Definitionslücke* der Funktion f. Man kann die Definition der Funktion f erweitern, indem man sie im Punkt x_0 durch den Term $\frac{g_1(x_0)}{h_1(x_0)}$ definiert. Die neu definierte Funktion ist im Punkt x_0 stetig.

   Ist $h_1(x_0) = 0$, muss man den Term $\frac{g_1(x)}{h_1(x)}$ weiter untersuchen. Die Stelle kann eine Polstelle, aber auch eine hebbare Definitionslücke sein.

Eine Stelle x_0 ist eine *Nullstelle* von f, wenn $f(x_0) = 0$. Das ist genau dann der Fall, wenn $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) \neq 0$.

Beispiele:

1) Wir betrachten die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$ mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$. Die Funktion f hat keine Definitionslücken und insbesondere keine Polstellen. Zur Bestimmung von Nullstellen lösen wir die Gleichung
   $x^2 - 2x + 1 = 0$
   $(x-1)^2 = 0$
   $x = 1$
   Die Stelle $x = 1$ ist die einzige Nullstelle der Funktion f.

2) Nun betrachten wir die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$.
   Zur Bestimmung ihres Definitionsbereichs lösen wir die Gleichung
   $x^2 + x - 2 = 0$
   $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$
   Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}$.
   Für den Zähler gilt $x^2 - x = x(x-1) = 0$ für $x = 0$ und $x = 1$.

Die Stelle $x = 0$ ist eine Nullstelle von f.

Die Stelle $x = -2$ ist eine Polstelle von f.

Die Stelle $x = 1$ muss genauer untersucht werden. Es gilt

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}.$$

Also ist $x = 1$ eine hebbare Definitionslücke. Die stetige Fortsetzung der Funktion ist

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}, & x \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}, \\ \frac{1}{3}, & x = 1. \end{cases}$$

Verhalten gebrochenrationaler Funktionen für $|x| \to \infty$

Das Verhalten hängt davon ab, wie der Grad des Zählerpolynoms und der Grad des Nennerpolynoms zueinander stehen.

1. Fall: Grad Zähler < Grad Nenner.

In diesem Fall wächst das Nennerpolynom für $x \to \pm\infty$ schneller als das Zählerpolynom. Es gilt $f(x) \to 0$, $x \to \pm\infty$, und die Gerade $y = 0$ ist die waagrechte Asymptote.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{8x^2 - 5}{x^3 + 8x - 1} = \frac{\frac{8}{x} - \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \to 0,\ x \to \pm\infty.$$

Die Gerade $y = 0$ ist die waagrechte Asymptote.

2. Fall: Grad Zähler = Grad Nenner.

Die Funktion f habe die Form

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}, \quad a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0.$$

Es gilt

$$f(x) = \frac{a_n + a_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + a_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{x^n}}{b_n + b_{n-1} \cdot \frac{1}{x} + \cdots + b_1 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + b_0 \cdot \frac{1}{x^n}} \to \frac{a_n}{b_n}, \quad x \to \pm\infty.$$

Die Gerade $y = \frac{a_n}{b_n}$ ist die waagrechte Asymptote.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \to 1,\ x \to \pm\infty.$$

Die Gerade $y = 1$ ist die waagrechte Asymptote.

3. Fall: Grad Zähler > Grad Nenner.

In diesem Fall wächst das Nennerpolynom für $x \to \pm\infty$ langsamer als das Zählerpolynom. Es gilt $f(x) \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Man kann g durch h mit Rest teilen. Auf diesem Wege bekommt man die Darstellung

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)},$$

wobei $q(x)$ und $r(x)$ Polynome sind.

Ist Grad $g = n$, Grad $h = m$ mit $n > m$, so ist Grad $q = n - m > 0$, Grad $r < m$ oder $r \equiv 0$.

Für $x \to \pm\infty$ nähert sich das Schaubild der Funktion f dem Schaubild des Polynoms q.

Im Sonderfall, wenn $m = n-1$, ist q ein Polynom vom Grad 1. Die Gerade $y = q(x)$ ist in diesem Fall die *schiefe Asymptote* von f.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 + x - 2}{x^2 + 2x + 3}$$

Mit Hilfe der Polynomdivision mit Rest bestimmt man die Darstellung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - 1 + \frac{\frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 2x + 3}.$$

Die Gerade $y = \frac{1}{2}x - 1$ ist die schiefe Asymptote.

4.6 Exponentialfunktion

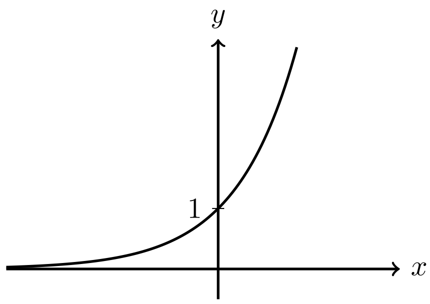
Die Funktion $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, nennt man *Exponentialfunktion* zur Basis a.

Bemerkung:

Für $a = 1$ ist die Funktion $f(x) = 1^x \equiv 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und stellt die konstante Funktion dar. Ihr Verhalten unterscheidet sich von dem Fall $a > 0$, $a \neq 1$.

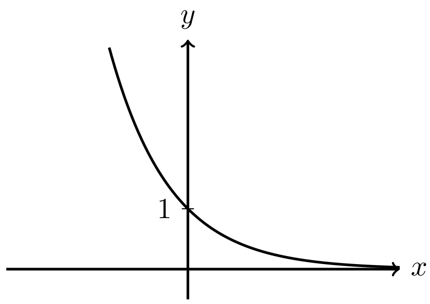
Es gilt $f(0) = a^0 = 1$ für alle $a > 0$, $a \neq 0$. Ferner gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f(x) = a^x$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$. Die Abbildungen unten zeigen die typischen Schaubilder in beiden Fällen:

$a > 1$:



Es gilt $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$ und $f(x) \to 0$, $x \to -\infty$.

$a < 0 < 1$:



Es gilt $f(x) \to 0$, $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Exponentialfunktionen finden eine große Anwendung in den Naturwissenschaften, z.B. bei der Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsprozessen.

Beispiel:

Wir betrachten eine Bakterienkolonie in einer Petrischale. Die Größe einer solchen Bakterienkolonie zu Beginn des Wachstums wird durch eine Funktion der Form

$$f(t) = c \cdot a^t, \quad c > 0, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

beschrieben. Es liegen folgende Daten vor:

$t = 30$ min $\quad f(t) = 329$ Bakterien
$t = 60$ min $\quad f(t) = 2684$ Bakterien

Zur Bestimmung der Parameter a und c setzen wir die beiden Datenpunkte in die Funktion ein. Es entsteht ein (nichtlineares) Gleichungssystem

$$c \cdot a^{30} = 329$$
$$c \cdot a^{60} = 2684$$

Aus der ersten Gleichung bestimmen wir $c = a^{-30} \cdot 329$. Einsetzten in die zweite Gleichung ergibt
$329 \cdot a^{30} = 2684$
$a^{30} = \frac{2684}{329} = 8{,}1581$
$a = (8{,}1581)^{\frac{1}{30}} = 1{,}072$
Weiter bestimmen wir $c = \frac{329}{a^{30}} = \frac{329}{8{,}1581} = 40{,}3$. Die Gleichung der Funktion ist also

$$f(t) = 40{,}3 \cdot (1{,}072)^t.$$

Man kann diese Funktion in einer anderen Form angeben, indem man zur Basis e wechselt. Es gilt $1{,}072 = e^{\ln 1{,}072} = e^{0{,}07}$. Daraus folgt die Darstellung

$$f(t) = 40{,}3\, e^{0{,}07t}.$$

Um die Größe der Bakterienkolonie zu Beginn des Experiments zu berechnen, setzten wir $t = 0$ ein:

$f(0) = 40{,}3\, e^0 = 40{,}3 \approx 40$ Bakterien waren zu Beginn des Experiments vorhanden.

Als nächstes fragen wir uns, nach welcher Zeitdauer die Größe der Population 10^6 Bakterien beträgt. Dazu müssen wir eine Gleichung lösen:
$f(t) = 40{,}3\, e^{0{,}07t} = 10^6$
$e^{0{,}07t} = \frac{10^6}{40{,}3}$
$0{,}07t = \ln\left(\frac{10^6}{40{,}3}\right)$
$t = \dfrac{\ln\left(\frac{10^6}{40{,}3}\right)}{0{,}07} = 145 \text{ min} = 2 \text{ h } 25 \text{ min}$

Schließlich beantworten wir die Frage, in welcher Zeitspanne sich die Zahl der Bakterien verdoppelt. Eine Eigenschaft der Exponentialfunktion ist, dass sich diese Zeitspanne mit der Zeit nicht ändert. Dazu betrachten wir die Gleichung

$$f(t + T) = 2f(t),$$

wobei T die gesuchte Zeitspanne und t die Zeit zu Beginn der Betrachtung bezeichnet. In unserem speziellen Fall nimmt diese Gleichung die Form

$$40{,}3\, e^{0{,}07(t+T)} = 2 \cdot 40{,}3\, e^{0{,}07t}$$

an. Dabei lassen sich die Terme 40,3 und $e^{0{,}07t}$ kürzen, und wir bekommen die Gleichung

$$e^{0{,}07T} = 2.$$

Wir sehen insbesondere, dass T nicht von t anhängt. Schließlich berechnen wir

$$T = \tfrac{\ln 2}{0{,}07} \approx 10 \text{ min}.$$

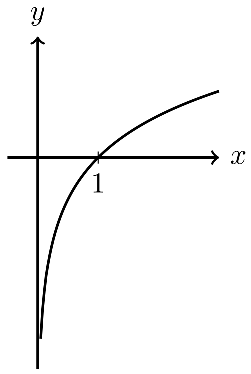
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ x \mapsto a^x$ mit $a > 0,\ a \neq 1$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist die *Logarithmusfunktion*

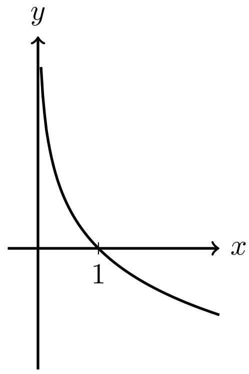
$$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x.$$

Die typischen Schaubilder dieser Funktion sind unten gedruckt.

$a > 1$:



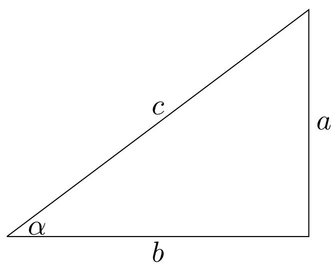
$0 < a < 1$:



4.7 Trigonometrische Funktionen

4.7.1 Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck

Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten a, b und c, wobei c die Hypotenuse ist. Sei α der Winkel zwischen b und c.



Der *Sinus* des Winkels α ist der Quotient aus der Gegenkathete und der Hypotenuse:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Der *Kosinus* des Winkels α ist der Quotient aus der Ankathete und der Hypotenuse:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Der *Tangens* ist der Quotient aus der Gegenkathete und der Ankathete:

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

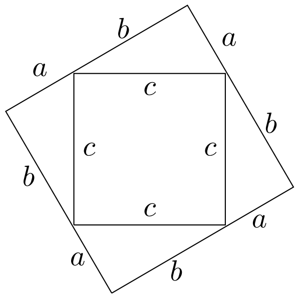
Es gibt offensichtlich

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Im rechtwinkligen Dreieck gilt außerdem der **Satz des Pythagoras:**

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Graphischer Beweis für den Satz des Pythagoras:



Da sich die Winkel im Dreieck zu 180° summieren, liegen die Seiten a und b auf einer Geraden.
Wir schreiben die Fläche des großen Quadrats auf zwei Arten auf:

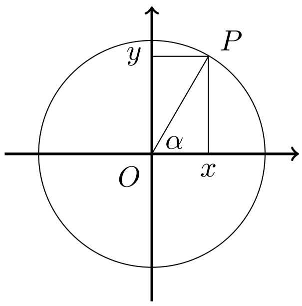
$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$

4.7.2 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

Die vorherigen Definitionen von Sinus, Kosinus und Tangens gelten nur für $0 < \alpha < 90°$. Wir erweitern sie für beliebige Winkel α mit Hilfe des Einheitskreises. Dabei wird der Winkel α gemessen von der positiven x-Achse gegen den Uhrzeigersinn. Sei $P(x, y)$ der Punkt auf dem Einheitskreis mit der Eingenschaft, dass die Strecke OP, wobei O den Ursprung bezeichnet, den Winkel α mit der positiven x-Achse bildet.



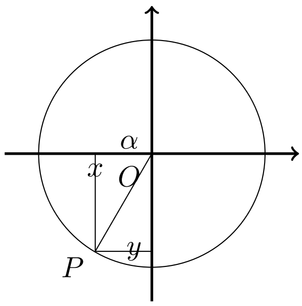
Ist $0 < \alpha < 90°$, so gilt nach der Definition im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x$$

sowie

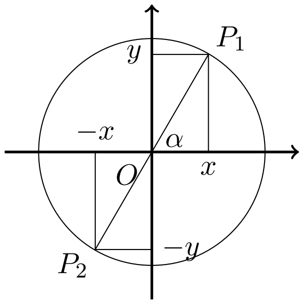
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}, \quad \alpha \neq 90° + 180° \cdot k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Beziehungen definieren Sinus, Kosinus und Tangens auch für beliebige Winkel α.



Da die Koordinaten des Punktes P nach dem Umlaufen des vollen Kreises die gleichen werden, gilt

$$\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha, \quad \sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha.$$



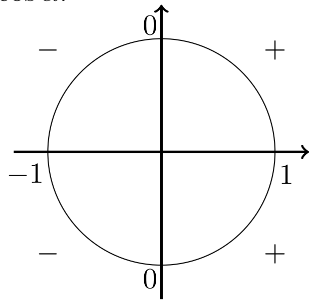
Für den Tangens gilt sogar

$$\tan(\alpha + 180^\circ) = \tan\alpha.$$

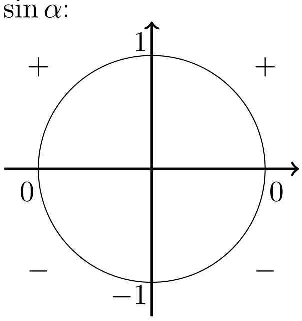
In der Tat, $\tan(\alpha + 180^\circ) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$ (s. die Skizze).

Die Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen können am Einheitskreis abgelesen werden (n.d. steht für nicht definiert):

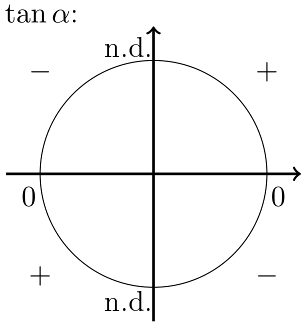
$\cos\alpha$:



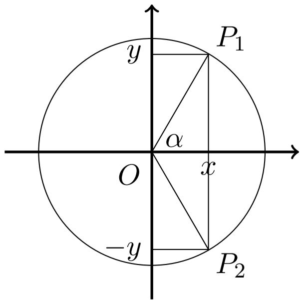
$\sin\alpha$:



$\tan\alpha$:



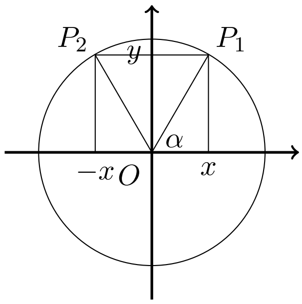
Unter Ausnutzung von Symmetrien am Einheitskreis bekommt man eine Reihe von Beziehungen zwischen verschiedenen Werten von Sinus, Kosinus und Tangens.



Der Punkt $P_1(x, y)$ entspricht dem Winkel α, der Punkt $P_2(x, -y)$ entspricht dem Winkel $-\alpha$:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

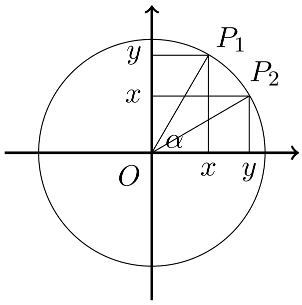
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$



Der Punkt $P_1(x, y)$ entspricht dem Winkel α, der Punkt $P_2(-x, y)$ entspricht dem Winkel $180^\circ - \alpha$:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$

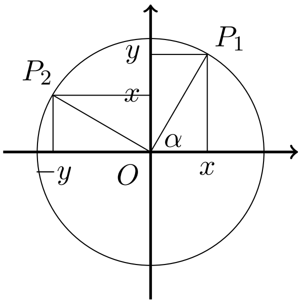
$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha.$$



Der Punkt $P_1(x, y)$ entspricht dem Winkel α, der Punkt $P_2(y, x)$ entspricht dem Winkel $90^\circ - \alpha$:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}.$$



Der Punkt $P_1(x, y)$ entspricht dem Winkel α, der Punkt $P_2(-y, x)$ entspricht dem Winkel $90^\circ + \alpha$:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\tan(90^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Rechenregeln für Sinus und Kosinus:

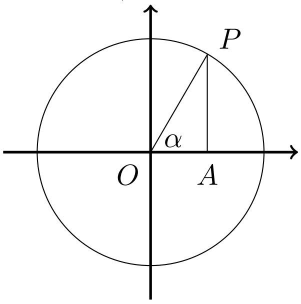
1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

2) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

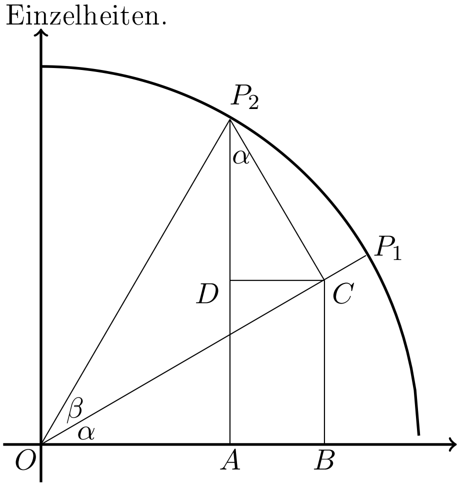
Beweise:

Die Formel 1) folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras für das Dreieck OPA:



Es gilt $OP = 1$, $OA = |\cos\alpha|$, $PA = |\sin\alpha|$ und nach dem Satz des Pythagoras $OA^2 + PA^2 = OP^2$, also $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Nun beweisen wir die Formeln 2) und 3) im Fall, wenn $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$, $\alpha + \beta < 90^\circ$. Der Beweis erfolgt mit Hilfe einer geometrischen Konstruktion. Die Ergebnisse können dann unter Ausnutzung von Symmetrien am Einheitskreis auf weitere Werte von α und β übertragen werden, wir verzichten hier auf Einzelheiten.



Wir beweisen erst die Formel 2).
Aus dem Dreieck OAP_2 mit dem rechten Winkel A und $OP_2 = 1$ folgt $\sin(\alpha + \beta) = AP_2$.
Aus dem Dreieck OP_2C mit dem rechten Winkel C und $OP_2 = 1$ folgt $\sin\beta = P_2C$ und $\cos\beta = OC$.
Aus dem Dreieck OBC mit dem rechten Winkel B folgt $\sin\alpha = \frac{BC}{OC}$, und wir berechnen daraus $BC = \sin\alpha \cdot OC = \sin\alpha\cos\beta$.
Aus dem Dreieck CDP_2 mit dem rechten Winkel D folgt $\cos\alpha = \frac{DP_2}{P_2C}$, und wir berechnen daraus

$DP_2 = \cos\alpha \cdot P_2C = \cos\alpha \sin\beta$.

Des Weiteren gilt offensichtlich $AD = BC = \sin\alpha \cos\beta$.

Der Beweis kann folgendermaßen vollendet werden:

$$\sin(\alpha+\beta) = AP_2 = AD + DP_2 = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Die Formel 3) kann ähnlich bewiesen werden.
Aus dem Dreieck OAP_2 mit dem rechten Winkel A und $OP_2 = 1$ folgt $\cos(\alpha+\beta) = OA$.

Aus dem Dreieck OBC mit dem rechten Winkel B folgt $\cos\alpha = \frac{OB}{OC}$, und wir berechnen daraus $OB = \cos\alpha \cdot OC = \cos\alpha\cos\beta$.

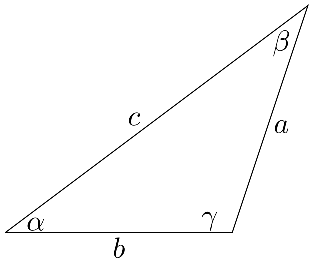
Aus dem Dreieck CDP_2 mit dem rechten Winkel D folgt $\sin\alpha = \frac{DC}{P_2C}$, und wir berechnen daraus $DC = \sin\alpha \cdot P_2C = \sin\alpha\sin\beta$.

Des Weiteren gilt offensichtlich $AB = DC = \sin\alpha\sin\beta$.

Der Beweis kann folgendermaßen vollendet werden:

$$\cos(\alpha+\beta) = OA = OB - AB = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

4.7.3 Geometrie des allgemeinen Dreiecks



Im allgemeinen Dreieck gelten der **Sinussatz**

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

sowie der **Kosinussatz**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Sind drei Elemente in einem Dreieck gegeben, kann man die restlichen drei Elemente berechnen (mit einer Ausnahme: Sind die drei Winkel gegeben, so ist die Form des Dreiecks bestimmt, aber nicht die Größe). Die Lösung ist im Allgemeinen nicht eindeutig, wie das Beispiel unten zeigt.

Beispiel:

Im Dreieck wie auf dem Bild oben seien $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 30°$. Wir wollen die Seite c sowie die Winkel β und γ bestimmen.

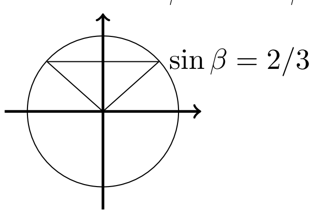
Nach dem Sinussatz gilt

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}.$$

Daraus folgt

$$\sin\beta = \sin\alpha \cdot \frac{b}{a} = \sin 30° \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Wir suchen also β mit $\sin\beta = \frac{2}{3}$, $0° < \beta < 180°$.



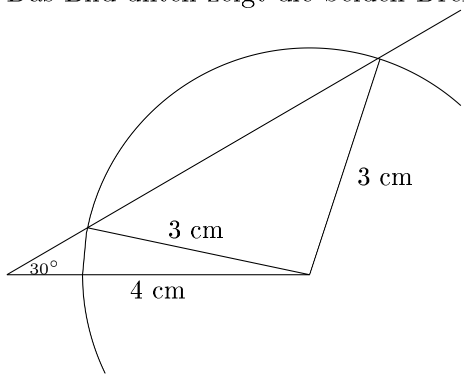
Es gibt zwei solche Winkel: $\beta_1 = 42°$ und $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 138°$. Es gibt also zwei Dreiecke, bei denen $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 30°$ sind.

Wir bestimmen nun den restlichen Winkel γ und die Seite c. Da die Summe der Winkel in einem Dreieck 180° ist, gilt $\gamma = 180° - \alpha - \beta$. Die Seite c kann mit Hilfe des Sinussatzes berechnet werden: $c = a \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$.

Im ersten Dreieck mit $\beta_1 = 42°$ gilt $\gamma_1 = 180° - 30° - 42° = 108°$ und $c_1 = 3 \cdot \frac{\sin(108°)}{\sin(30°)} = 5{,}7$ cm.

Im zweiten Dreieck hat man $\gamma_2 = 180° - 30° - 138° = 12°$ und $c_2 = 3 \cdot \frac{\sin(12°)}{\sin(30°)} = 1{,}2$ cm.

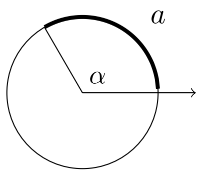
Das Bild unten zeigt die beiden Dreiecke.



4.7.4 Das Bogenmaß

Bis jetzt haben wir Winkel in Grad gemessen. Es gibt eine andere Möglichkeit, welche z.B in der Analysis benutzt wird:

Das *Bogenmaß* eines Winkels ist die Länge des zugehörigen Kreisbogens am Einheitskreis.



Die Länge des Halbkreises des Einheitskreises ist $\pi \approx 3{,}14$, das ist eine irrationale Zahl. Wenn α das Gradmaß und a das Bogenmaß eines Winkels bezeichnen, gilt nach dem Dreisatz:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{\pi}{180°}.$$

Insbesondere hat man die Umrechnungsformeln

$$a = \alpha \cdot \frac{\pi}{180°} \qquad \text{und} \qquad \alpha = a \cdot \frac{180°}{\pi}.$$

Beispiele:

1) $30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$

2) $225° = 225° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5}{4}\pi$

3) $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{4} = 45°$

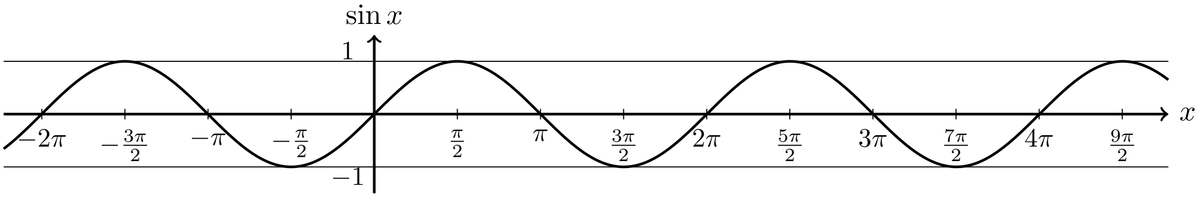
4) $\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot 180° = 270°$

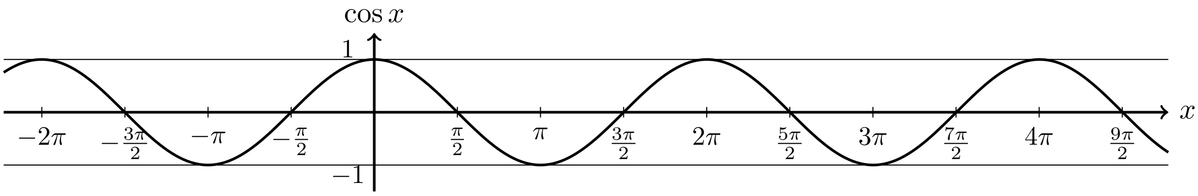
In der Analysis werden Winkel immer im Bogenmaß angegeben.

4.7.5 Die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktionen

Die *Sinusfunktion* ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x$.
Die *Kosinusfunktion* ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos x$.

Die Schaubilder der beiden Funktionen sind unten gedruckt.





Eigenschaften:

1) Die beiden Funktionen nehmen Werte im Bereich $[-1, 1]$ an.

2) Die beiden Funktionen sind 2π-periodisch:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

3) Die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$ hat

   Nullstellen $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
   Maxima mit dem Wert 1 an den Stellen $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
   Minima mit dem Wert -1 an den Stellen $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Die Kosinusfunktion $f(x) = \cos x$ hat

   Nullstellen $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
   Maxima mit dem Wert 1 an den Stellen $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$,
   Minima mit dem Wert -1 an den Stellen $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4) Die Schaubilder der Sinus- und der Kosinusfunktion können durch die Verschiebung entlang der x-Achse auseinander gewonnen werden:

$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad \sin x = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Die *allgemeine Sinusfunktion* hat die Form

$$f(\varphi) = A \sin(B(\varphi - \varphi_0)) + C.$$

Hier sind: φ_0 die Phasenverschiebung,

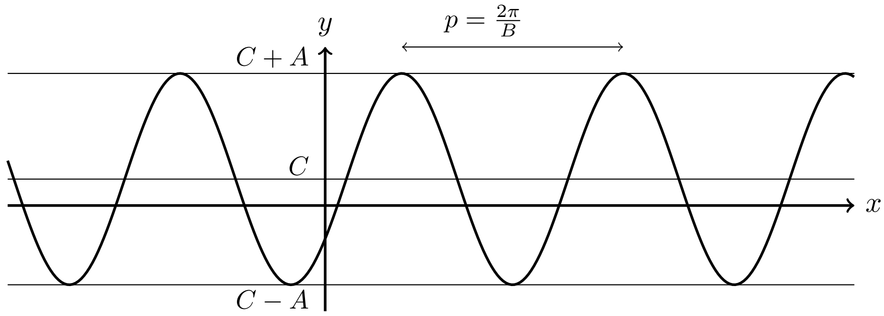
B die Frequenz,

A die Amplitude,

C der Mittelwert.

Die Periode dieser Funktion ist $p = \dfrac{2\pi}{B}$.

Die allgemeine Sinusfunktion wird oft zur Modellierung von Wellen in den Naturwissenschaften benutzt.



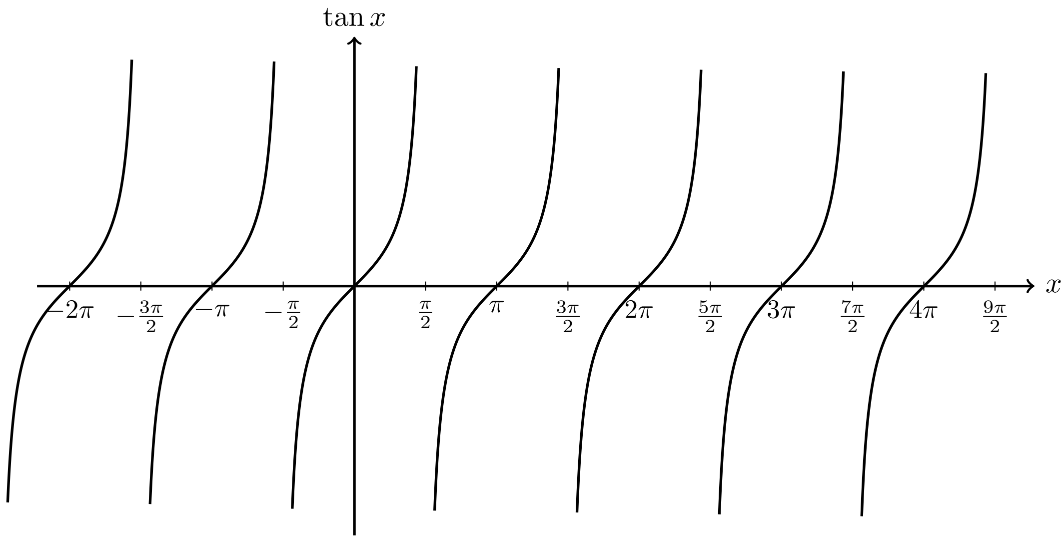
Die *Tangensfunktion* ist die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

mit dem Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

An den Stellen $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, hat die Tangensfunktion jeweils eine senkrechte Asymptote.



Eigenschaften:

1) Die Tangensfunktion nimmt alle Wert in $\mathbb{R}$ an.

2) Die Tangensfunktion ist periodisch mit der Periode π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x.$$

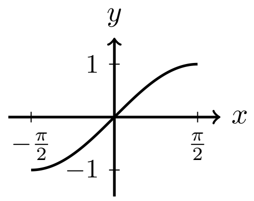
3) Die Nullstelen der Tangensfunktion sind πk, $k \in \mathbb{Z}$.

4) Es gilt $\tan x \to +\infty$, $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k - 0$ und $\tan x \to -\infty$, $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k + 0$.

4.7.6 Die inversen trigonometrischen Funktionen

Um die Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktionen invertieren zu können, muss man ihre Definitionsbereiche einschränken.

Sinus: $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Die Funktion

$$f : \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \quad x \mapsto \sin x$$

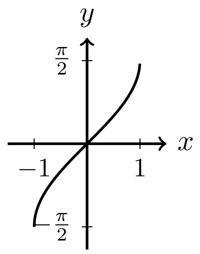
ist bijektiv.

Die inverse Funktion ist *Arkussinus*:

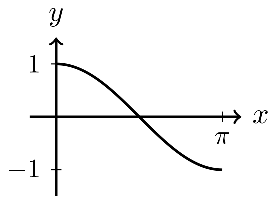
$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin x,$$

wobei

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y.$$



Kosinus: $D = [0, \pi]$.



Die Funktion

$$f : [0,\pi] \to [-1,1], \quad x \mapsto \cos x$$

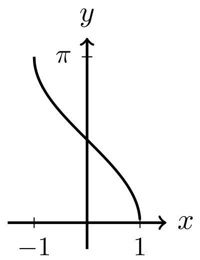
ist bijektiv.

Die inverse Funktion ist *Arkuskosinus*:

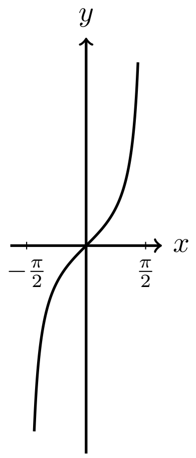
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi], \quad x \mapsto \arccos x,$$

wobei

$$y = \arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y.$$



Tangens: $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Die Funktion

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan x$$

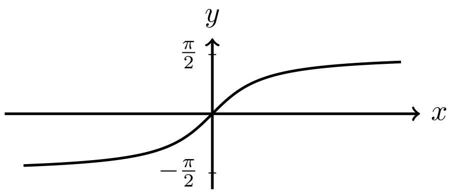
ist bijektiv.

Die inverse Funktion ist *Arkustangens*:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan x,$$

wobei

$$y = \arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x = \tan y.$$



Kapitel 5

Punktmengen in der Ebene

In diesem Kapitel betrachten wir Gleichungen zu geometrischen Objekten. Wir beschränken uns auf Kurven in der Ebene.

Jede Funktion $y = f(x)$ gibt eine Kurve an; das ist die Menge $\{(x, y) : y = f(x)\}$. Andererseits ist nicht jede Kurve das Schaubild einer Funktion.

Für viele geometrische Objekte kann man eine Gleichung angeben, die x und y verbindet. Die Kurve ist in diesem Fall beschrieben als die Menge $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ mit einem geeignetem Term $F(x, y)$.

Wir werden in diesem Kapitel Kurven betrachten, bei denen $F(x, y)$ ein Polynom in x und in y vom Grad jeweils kleiner oder gleich 2 ist.

5.1 Geraden

Wir haben schon gesehen, dass alle Geraden, die nicht parallel zu der y-Achse sind, als Graphen einer linearen Funktion $y = mx + c$ beschrieben werden können. Geraden, die parallel zu der y-Achse sind, haben eine Gleichung der Form $x = x_0$.

Die *Geradengleichung* in der allgemeinen Form lautet

$$ax + by + c = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \quad \text{oder} \quad b \neq 0.$$

Eine Gerade ist dann die Menge $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ mit $F(x, y) = ax + by + c$. Abhängig davon, ob a oder b gleich Null wird, kann man drei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $a \neq 0$, $b \neq 0$.

   Man kann die Gleichung nach y auflösen: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + \tilde{c}$ mit $m = -\frac{a}{b} \neq 0$, $\tilde{c} = -\frac{c}{b}$. Das ist eine Gerade, die zu keiner der Koordinatenachsen parallel ist.

   Im Sonderfall, wenn $c \neq 0$, kann man die Geradengleichung auch wie folgt umformen:

   $ax + by = -c$

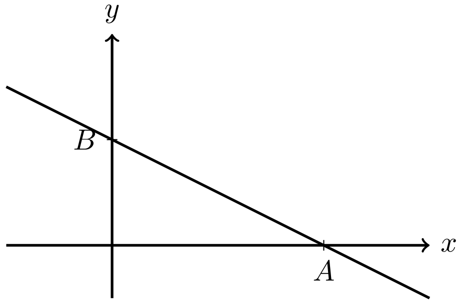
   $\frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$

   $\frac{x}{(-\frac{c}{a})} + \frac{y}{(-\frac{c}{b})} = 1$

   Man kommt auf eine Geradengleichung in der sog. *Achsenabschnittform*:

   $$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1.$$

   Dabei sind $(A, 0)$ und $(0, B)$ die Schnittpunkte der Geraden mit der x- bzw. der y-Achse. In der Tat liegen die beiden Punkte $(A, 0)$ und $(0, B)$ auf der Geraden, was durch Einsetzten in die Gleichung leicht geprüft werden kann: $\frac{A}{A} + \frac{0}{B} = 1$ bzw. $\frac{0}{A} + \frac{B}{B} = 1$.



2. Fall: $a = 0$, $b \neq 0$.

Die Gleichung lässt sich umformen in die Form $y = -\frac{c}{b} = \tilde{c}$. Das ist eine Gerade, die zur x-Achse parallel ist.

3. Fall: $a \neq 0$, $b = 0$.

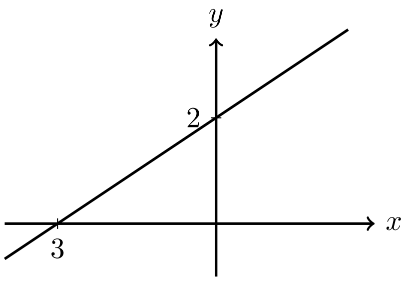
Die Gleichung lässt sich umformen in die Form $x = -\frac{c}{a} = x_0$. Das ist eine Gerade, die zu der y-Achse parallel ist.

Beispiel:

Wir betrachten die Gerade mit der Gleichung $2x - 3y + 6 = 0$. Diese lässt sich wie folgt umformen:

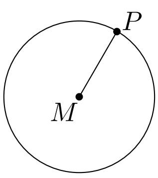
$$2x - 3y = -6$$
$$\frac{x}{(-3)} + \frac{y}{2} = 1$$

Das ist die Gerade, die die Achsen in den Punkten $(-3, 0)$ und $(0, 2)$ schneidet:



5.2 Kreise

Ein *Kreis* ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Punkt (*Mittelpunkt*) denselben Abstand haben. Dieser Abstand heißt *Radius*.

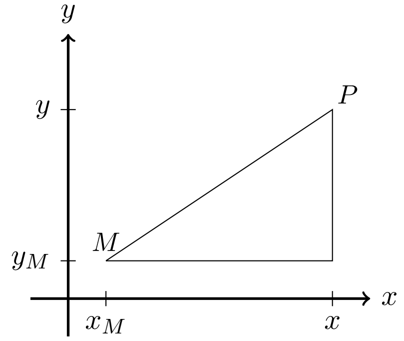


Wir leiten nun die Gleichung des Kreises um den Mittelpunkt M mit dem Radius r her. Sei $M(x_M, y_M)$ der Mittelpunkt und $P(x, y)$ ein Punkt auf dem Kreis. Es gilt

$$PM = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2} = r.$$

Bemerkung:

Die Formel für den Abstand zwischen zwei Punkten folgt aus dem Satz des Pythagoras:



$$PM^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2$$

Die Gleichung des Kreises um den Mittelpunkt M mit dem Radius r lautet also

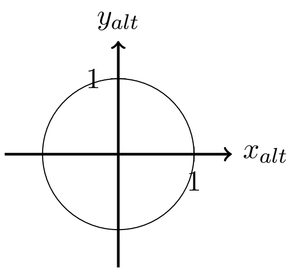
$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2.$$

Beispiel:

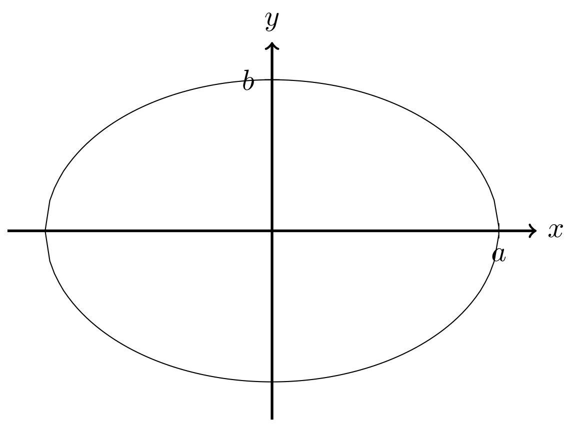
$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$ ist die Gleichung des Kreises um den Punkt $(-1, 4)$ mit Radius 3.
Der Punkt $(-1, 1)$ liegt auf dem Kreis: $(-1+1)^2 + (1-4)^2 = 9$ bzw. $0^2 + (-3)^2 = 9$.
Der Punkt $(-2, 3)$ liegt nicht auf dem Kreis: $(-2+1)^2 + (3-4)^2 \neq 9$ bzw. $(-1)^2 + (-1)^2 \neq 9$.

5.3 Ellipsen

Ellipsen entstehen aus Kreisen durch Strecken bzw. Stauchen.



Der Kreis mit Radius 1.



Streckung um den Faktor a in die x-Richtung und um den Faktor b in die y-Richtung.

Die Gleichung des Kreises in den alten Koordinaten lautet

$$x_{alt}^2 + y_{alt}^2 = 1.$$

Für die neuen Koordinaten (x, y) nach der Streckung gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{alt} \\ y_{alt} \end{pmatrix}$ bzw. $x = a \cdot x_{alt}$, $y = b \cdot y_{alt}$. Daraus folgt $x_{alt} = \frac{x}{a}$, $y_{alt} = \frac{y}{b}$. Einsetzen in die Kreisgleichung liefert

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Wir bekommen folgendes Ergebnis:

Die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsenlängen a und b $(a, b > 0)$ ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Gleichung einer Ellipse in allgemeiner Lage entsteht aus dieser Gleichung durch Drehung und Verschiebung.

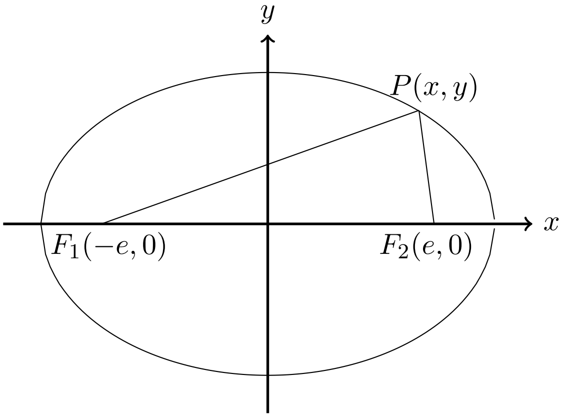
Die Ellipse besitzt – ähnlich wie der Kreis – eine sie definierende Eigenschaft:

Eine *Ellipse* ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, bei denen die Summe der Abstände von zwei festen Punkten (*Brennpunkten*) konstant ist.

Diese Definition wird bei der sogenannte „Gärtnerkonstruktion“ benutzt.

Herleitung der Ellipsengleichung aus der Definition

Wir betrachten die Ellipse mit den Brennpunkten $F_1(-e,0)$ und $F_2(e,0)$, $e>0$, und der Summe der Abstände von den Brennpunkten $2a$, $a>e$. Sei $P(x,y)$ ein Punkt auf der Ellipse.



Es gilt

$$PF_1 = \sqrt{(x+e)^2+y^2} \quad \text{und} \quad PF_2 = \sqrt{(x-e)^2+y^2}.$$

Die Definition der Ellipse impliziert

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

Wir setzten die obigen Beziehungen in diese Formel ein und formen die Gleichung um:

$\sqrt{(x+e)^2+y^2} + \sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a.$

Wir quadrieren und fassen zusammen:

$(x+e)^2+y^2+2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2}+(x-e)^2+y^2 = 4a^2,$

$x^2+2xe+e^2+x^2-2xe+e^2+2y^2+2\sqrt{(x+e)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 4a^2,$

$x^2+e^2+y^2+\sqrt{(x-e)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a^2,$

$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a^2-x^2-y^2-e^2.$

Wir quardieren nochmal und vereinfachen das Ergebnis:

$((x+e)^2+y^2)((x-e)^2+y^2) = 4a^4+x^4+y^4+e^4-4a^2x^2-4a^2y^2-4a^2e^2+2x^2y^2+2x^2e^2+2y^2e^2,$

$(x+e)^2(x-e)^2+y^2(x+e)^2+y^2(x-e)^2+y^4 = 4a^4+x^4+y^4+e^4-4a^2x^2-4a^2y^2-4a^2e^2+2x^2y^2+2x^2e^2+2y^2e^2,$

$(x^2+2xe+e^2)(x^2-2xe+e^2)+y^2(x^2+2xe+e^2+x^2-2xe+e^2) = 4a^4+x^4+e^4-4a^2x^2-4a^2y^2-4a^2e^2+2x^2y^2+2x^2e^2+2y^2e^2,$

$x^4-2x^3e+x^2e^2+2x^3e-4x^2e^2+2xe^3+e^2x^2-2xe^3+e^4+2x^2y^2+2e^2y^2 = 4a^4+x^4+e^4-4a^2x^2-4a^2y^2-4a^2e^2+2x^2y^2+2x^2e^2+2y^2e^2.$

Viele Terme fallen nun weg. Wir bringen alle verbleibenden Terme auf eine Seite und teilen die Gleichung durch 4:

$a^4-a^2x^2-a^2y^2-a^2e^2+e^2x^2 = 0.$

Weiter wird wie folgt umgeformt:

$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2,$

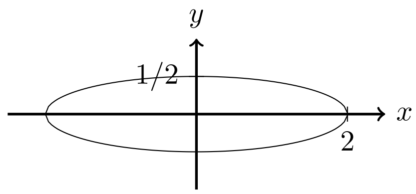
$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$

Wir definieren $b^2 = a^2 - e^2 > 0$, dann gilt $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ und schließlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Beispiel:

$\frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1$ ist die Gleichung der Ellipse mit Halbachsenlängen $a = 2$ und $b = \frac{1}{2}$.



5.4 Hyperbeln

Eine *Hyperbel* ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, bei denen der Absolutbetrag der Differenz der Abstände von zwei festen Punkten (*Brennpunkten*) konstant ist.

Herleitung der Hyperbelgleichung aus der Definition

Wir betrachten eine Hyperbel mit den Brennpunkten $F_1(-e, 0)$ und $F_2(e, 0)$, $e > 0$, und dem Absolutbetrag der Differenz der Abstände von den Brennpunkten $2a$, $0 < a < e$. Sei $P(x, y)$ ein Punkt auf der Hyperbel. Es gilt

$\big||PF_1| - |PF_2|\big| = \left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a,$

$(x+e)^2 + y^2 + (x-e)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+e)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^4.$

Wir wiederholen die Rechnung wie bei der Herleitung der Ellipsengleichung und kommen zur Gleichung

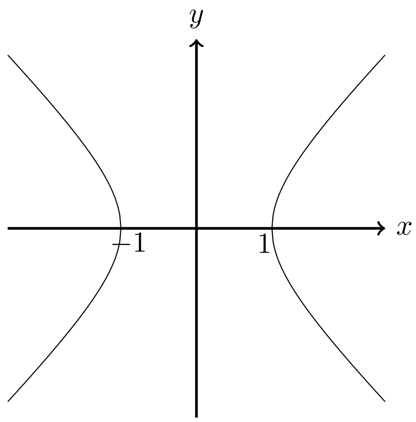
$-x^2(e^2 - a^2) + y^2a^2 = -a^2(e^2 - a^2).$

Definiere $b^2 = e^2 - a^2 > 0$, dann gilt $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, und wir bekommen die Gleichung einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Beispiel:

$x^2 - y^2 = 1$ ist die Gleichung einer Hyperbel.



Das Schaubild dieser Hyperbel ist das um die 45° gedrehte Schaubild der Funktion $y = \frac{1}{2x}$. In der Tat, für $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ und $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ gilt

$x^2 - y^2 = 1,$

$(x+y)(x-y) = 1,$

$u \cdot v = 2,$

$v = \frac{1}{2u},$

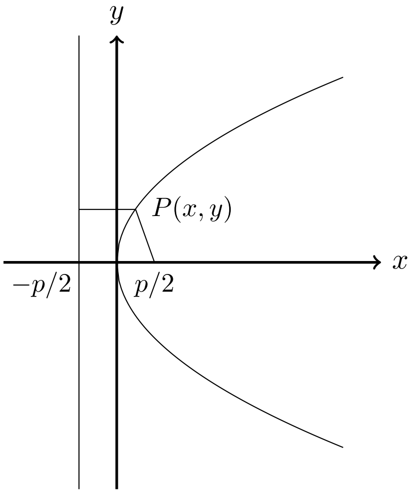
und die Abbildung $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist die Drehung um 45°.

5.5 Parabeln

Eine *Parabel* ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, bei denen der Abstand von einem festen Punkt (*Brennpunkt*) und der Abstand von einer festen Gerade (*Leitlinie*) gleich sind.

Herleitung der Gleichung der Parabel aus der Definition

Wir betrachten die Parabel mit dem Brennpunkt $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ und der Leitlinie $x = -\frac{p}{2}$, $p > 0$. Sei $P(x, y)$ ein Punkt auf der Parabel.



Es gilt $PF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ und der Abstand zu der Leitlinie ist $\left|x + \frac{p}{2}\right|$. Diese Abstände sind gleich:

$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$

Wir quadrieren die Gleichung und fassen die Terme zusammen:

$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$

$x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$

Die Gleichung der Parabel lautet also

$$y^2 = 2px.$$

Beispiel:

$y^2 = x$ ist die Gleichung einer Parabel. Ihr Schaubild ist die an der Geraden $y = x$ gespiegelte Normalparabel.

5.6 Zusammenfassung: Kurven zweiter Ordnung

Eine allgemeine Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung lautet

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Mögliche Lösungen für $a = b = c = 0$ sind

- die ganze Ebene, wenn $d = e = f = 0$,
- die leere Menge, wenn $d = e = 0$, $f \neq 0$,
- die Gerade mit der Gleichung $dx + ey + f = 0$, wenn $d \neq 0$ oder $e \neq 0$.

Ist der Ausdruck $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ ein Polynom vom Grad 2, d.h. ist $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, so sind folgende Lösungen möglich:

- nicht ausgeartete Quadriken:
  - eine Ellipse,
  - eine Hyperbel,
  - eine Parabel,
- ausgeartete Quadriken:
  - zwei schneidende Geraden,
  - zwei parallele Geraden,
  - eine Gerade,
  - ein Punkt,
  - die leere Menge.

Welche Art der Quadrik vorliegt, erkennt man, indem man den Ausdruck durch die sogenannte Hauptachsentransformation umformt. Diese wird hier jedoch nicht besprochen. In manchen Fällen hilft schon die quadratische Ergänzung.

Beispiele:

1) $x^2 + 2x + y^2 - 8y + 8 = 0$
   $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + y^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + 4^2 - 4^2 + 8 = 0$
   $(x+1)^2 - 1 + (y-4)^2 - 16 + 8 = 0$
   $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 9$
   $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$
   Das ist eine Ellipse, genauer gesagt: Der Kreis mit Radius 3 um den Punkt $(-1, 4)$.

2) $x^2 - 2x - y^2 - 4y - 4 = 0$
   $x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1 - 1 - (y^2 + 4y + 4) = 0$
   $(x-1)^2 - (y+2)^2 = 1$
   Das ist eine Hyperbel. Ihr Schaubild entsteht aus dem Schaubild der Parabel $x^2 - y^2 = 1$ durch Verschiebung um 1 in die x-Richtung und um -2 in die y-Richtung.

3) $25x^2 - 4y^2 = 0$
   $(5x - 2y)(5x + 2y) = 0$
   $5x - 2y = 0 \ , \ 5x + 2y = 0$

   Diese Quadrik besteht aus zwei schneidenden Geraden.

4) $7x^2 + 3y^2 - 6y + 3 = 0$
   $7x^2 + 3(y - 1)^2 = 0$

   Diese Quadrik ist der Punkt $(0, 1)$.

Index