Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07
Mathematisches Institut

Vorkurs Mathematik

Einführung in das mathematische Denken

Übungsaufgaben

PD Dr. Elena Berdysheva

Aufgabe 1. Schreiben Sie folgende Mengen in aufzählender Form:

$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ ist Primzahl und } x < 20\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 6 = 0\}$,
$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$, $D = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \le n \le 5\}$.

Aufgabe 2. Schreiben Sie folgende Mengen in beschreibender Form:

$$A = \{4, 6, 8, 10, 12\}, \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\right\}, \quad C = \{0, 3, 8, 15, 24, 35\}.$$

Aufgabe 3. a) Geben Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge $M = \{o, m, a\}$ an.

b) Eine Menge M bestehe aus n Elementen. Wie viele Elemente enthält ihre Potenzmenge $P(M)$?

Aufgabe 4. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{5, 9, 13\}, \quad M_2 = \{4, 7, 10\}, \quad M_3 = \{1, 3, 5, 7\}, \quad M_4 = \{7, 13, 19\}.$$

Bilden Sie $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$.

Aufgabe 5. Gegeben seien die Intervalle

$$A = [-5, 0], \quad B = (-3, 2), \quad C = [-1, 4).$$

a) Geben Sie jedes Intervall als eine Menge in beschreibender Form an.

b) Stellen Sie zu jedem Intervall die Komplementärmenge als Vereinigung von Intervallen dar.

c) Bestimmen Sie folgende Mengen: $A \cup B \cup C$, $B \setminus (A \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(C \setminus A) \cup B$, $A \setminus (B \setminus C)$, $(A \setminus B) \setminus C$.

Aufgabe 6. Beweisen Sie folgende Identitäten:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cap (B \cup A) = A$

c) $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Aufgabe 7. Seien A und B zwei Mengen und es gelte $A \subseteq B$. Beweisen Sie, dass in diesem Fall $A \cup B = B$ und $A \cap B = A$.

Aufgabe 8. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Mengengleichungen. Machen Sie sich erst anhand von Venn-Diagrammen klar, ob die jeweilige Gleichung richtig oder falsch ist. Ist sie richtig, geben Sie einen mengentheoretischen Beweis an. Ist sie falsch, konstruieren Sie ein Gegenbeispiel. Versuchen Sie, die falschen Mengengleichungen zu korrigieren.

a) $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$

b) $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$

c) $(X \cup Y) \cap \overline{X} = Y$

d) $(X \cap \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) = Y$

Aufgabe 9. Welche der folgenden Familien von Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ stellen eine Partition der Menge M dar?

a) $M_1 = \{a\}$, $M_2 = \{b, c\}$, $M_3 = \{d\}$

b) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{b, c, d\}$

c) $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{d\}$

Aufgabe 10. Gegeben seien die Mengen $A = [1, 2]$, $B = \{3\}$, $C = (0, 1]$, $D = \{1, 2\}$. Skizzieren Sie die Mengen $A \times C$, $A \times B$, $(A \cup B) \times C$, $(A \cup B) \times D$.

Aufgabe 11. Negieren Sie folgende Aussagen:

a) Alle Primzahlen sind ungerade.

b) $x + 5 \neq 7$

c) Die Erde ist eine Scheibe und die Sonne dreht sich um die Erde.

d) Der Kugelschreiber ist schwarz oder dunkelblau.

Aufgabe 12. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für logische Operationen anhand von Wahrheitstafeln:

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

b) $a \vee (b \wedge a) = a$

c) $a \wedge \neg a = f$

d) $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Aufgabe 13. Bilden Sie die Negationen und die Kontrapositionen folgender Aussagen:

a) Wenn eine Kerze brennt, dann ist der Raum nicht dunkel.

b) Es ist Herbst, folglich sind die Laubbäume bunt.

c) n ist eine Primzahl $\Rightarrow$ $41n + 1$ ist eine Primzahl.

Aufgabe 14. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen anhand von Wahrheitstafeln:

a) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow p$

b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

c) $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge q)$

Aufgabe 15. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils die Negation der Aussage an.

a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x < y$

b) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$

c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \geq y$

d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$

e) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$

Aufgabe 16. Beweisen Sie folgende Aussagen direkt:

a) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide gerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

b) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ beide ungerade, so ist ihre Summe $n + m$ gerade.

Aufgabe 17. Beweisen Sie durch Kontraposition folgende Aussage:

Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Ist die Summe $n + m$ ungerade, so ist eine der Zahlen n, m gerade und die andere ungerade.

Aufgabe 18. Beweisen Sie durch Widerspruch:

Es gibt keine natürlichen Zahlen n und m, für die gilt: $18n + 27m = 200$.

Aufgabe 19. Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel folgende Aussage:

Sind die Zahlen p, q irrational, so ist auch ihre Summe $p + q$ irrational.

Aufgabe 20. a) Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die Zahl $\sqrt{3}$ irrational ist.

b) Versuchen Sie, diesen Beweis auch für $\sqrt{4}$ durchzuführen. An welcher Stelle funktioniert der Widerspruchsbeweis nicht?

Aufgabe 21. Beweisen Sie folgende Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

b) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad n \geq 0, \quad q \neq 1$

c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der Term $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar.

Aufgabe 22. Gegeben seien die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x,$$
$$f_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin x,$$
$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto \frac{n}{n+1}.$$

Bestimmen Sie folgende Bilder und Urbilder: $f_1\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f_1\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$, $f_1(\mathbb{R})$, $f_2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $f_2\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)$, $f_1^{-1}(\{0\})$, $f_1^{-1}([0,1])$, $f_1^{-1}((2,3))$, $f_1^{-1}(\mathbb{R})$, $f_2^{-1}(\{0\})$, $f_2^{-1}([0,1])$, $f_2^{-1}((2,3))$, $f_2^{-1}(\mathbb{R})$, $g(\{1,2,3\})$, $g^{-1}\left(\left\{\frac{7}{8}, \frac{8}{9}, 1\right\}\right)$, $g^{-1}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 23. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

c) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Zeigen Sie auch, dass die Aussagen in a) und in c) nicht mit "=" geschrieben werden können.

Aufgabe 24. Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = \{1\}, \quad M_2 = \{1, 2\}.$$

a) Finden Sie alle Abbildungen

- von M_1 nach M_1,
- von M_1 nach M_2,
- von M_2 nach M_1,
- von M_2 nach M_2.

b) Geben Sie für jede dieser Abbildungen den dazugehörigen Graphen an.

c) Entscheiden Sie für jede dieser Abbildungen, ob sie jeweils injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

Aufgabe 25. Bestimmen Sie für folgende Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = |x| - 2$

b) $f_2 : (-\infty, -2] \to [0, \infty),\ f_2(x) = |x| - 2$

c) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax + b \ \text{ mit } \ a, b \in \mathbb{R}$

d) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ h(n) = n^2$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie den maximalen Definitionbereich für jede der folgenden Funktionen. Schränken Sie, wenn nötig, für jede der Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich so ein, dass die neu definierte Funktion bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

b) $g(x) = x^2 - 1$

c) $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$

d) $u(x) = \frac{1}{x}$

e) $v(x) = e^x + 1$

Aufgabe 27. Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) = \ln x.$$

Bilden Sie die Verkettungen $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ g$, $g \circ f$, wenn möglich.

Aufgabe 28. a) Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ gleichmächtig sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ und die Menge aller ganzen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 ergeben, gleichmächtig sind.

Aufgabe 29. Seien $a, b, c, p, q \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie folgende Regeln für die Teilbarkeit:

a) $a \mid b \ \Rightarrow \ a \mid (bc)$

b) $a \mid p \wedge b \mid q \ \Rightarrow \ (ab) \mid (pq)$

Aufgabe 30. Seien $t, b, c \in \mathbb{Z}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $t \mid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b+c)$

b) $t \nmid b \wedge t \nmid c \;\Rightarrow\; t \nmid (b+c)$

Aufgabe 31. Bestimmen Sie die Teilermengen der Zahlen 60, 92, -54.

Aufgabe 32. Teilen Sie a durch b mit Rest, d.h. bestimmen Sie $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < b$, so dass $a = qb + r$ ist.

a) $a = 27$, $b = 45$

b) $a = 219$, $b = 17$

c) $a = -219$, $b = 17$

Aufgabe 33. Eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt gerade, wenn $2 \mid a$. Sonst heißt a ungerade. Beweisen Sie folgende Eigenschaften von geraden und ungeraden Zahlen. Hier sind $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k$

b) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k + 1$

c) a ist gerade $\quad\Leftrightarrow\quad$ a^2 ist gerade

d) a ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad$ a^2 ist ungerade

e) ab ist ungerade $\quad\Leftrightarrow\quad$ a ist ungerade und b ist ungerade

Aufgabe 34. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler von a und b mit dem Euklidischen Algorithmus und durch die Primfaktorenzerlegung:

a) $a = 27$, $b = 45$

b) $a = -219$, $b = 60$

c) $a = 1092$, $b = 390$

Aufgabe 35. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $n = \prod_{i=1}^{M} p_i^{k_i}$ seine Primfaktorenzerlegung mit Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, M$, und $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, M$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ genau dann gilt, wenn alle k_i, $i = 1, \ldots, M$, gerade sind.

Aufgabe 36. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten folgende Relation:

$$x \equiv y, \quad \text{wenn } x - y \text{ ungerade ist.}$$

Ist $\equiv$ eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 37. Berechnen Sie:

$$[2]_3 + [2]_3, \quad [4]_7 + [3]_7, \quad [7]_2 + [1]_2, \quad [8]_{10} + [7]_{10},$$
$$[2]_3 \cdot [2]_3, \quad [4]_7 \cdot [3]_7, \quad [7]_2 \cdot [1]_2, \quad [8]_{10} \cdot [7]_{10}.$$

Aufgabe 38. Versuchen Sie, analog zu $\mathbb{Z}_m$ mit $m \geq 2$ die Restklassen $\mathbb{Z}_1$ und $\mathbb{Z}_0$ zu definieren. Was passiert dabei?

Aufgabe 39. Berechnen Sie alle möglichen Summen und Produkte in $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_3$.

Aufgabe 40. Finden Sie alle Restklassen $[m]_4$ und $[n]_4$, so dass

a) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [1]_4$,

b) $[m]_4 \cdot [n]_4 = [0]_4$ und $[m]_4 \neq [0]_4$, $[n]_4 \neq [0]_4$.

Aufgabe 41. a) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ gilt: $a^2 < ab < b^2$.

b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

Aufgabe 42. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen in Abhängigkeit von den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) $ax + b \leq c$ b) $|ax + b| \leq c$

Aufgabe 43. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $\dfrac{3x+2}{x-1} > -3$ b) $\dfrac{4x+3}{2x-1} \geq 2$ c) $|3x-5| > 2|x+2|$

d) $|x-4| + |2-x| \leq 2$ e) $\dfrac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$

Version: 04.09.2017