Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 07
Mathematisches Institut

Vorkurs Mathematik
(Allgemein)

Übungsaufgaben

PD Dr. Elena Berdysheva

JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT GIESSEN

Aufgabe 1. a) Schreiben Sie die folgenden periodischen Dezimalzahlen als Brüche:

(i) $0{,}\overline{3}$ (ii) $0{,}\overline{9}$ (iii) $0{,}\overline{36}$ (iv) $0{,}\overline{142857}$ (v) $0{,}2\overline{57}$

b) Schreiben Sie die folgenden Brüche als Dezimalzahlen:

(i) $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ (ii) $\frac{1}{14}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

a) $2 \cdot (-5) + (-3) \cdot (-7)$

b) $(-4) \cdot (-3 - (-2a)) + 2a - 3$

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{36}{45} - \frac{11}{6} : \frac{11}{3}$

d) $\frac{7}{8} \cdot \frac{45}{9} : \frac{9}{45} - \frac{1}{4}$

e) $\frac{5}{7} + \left(\frac{2}{6} - \frac{6}{2}\right) \cdot \frac{14}{24}$

f) $\left(\frac{25ax}{12by} + \frac{16bx}{3ay}\right) : \frac{8x}{21y}$ für $a, b, x, y \neq 0$

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob für die folgenden Brüche Gleichheit vorliegt:

a) $\frac{7}{4}, \frac{175}{10}$

b) $\frac{9}{32}, \frac{51}{114}$

c) $\frac{13}{8}, \frac{143}{88}$

Aufgabe 4. Kürzen Sie soweit wie möglich:

a) $\frac{144}{168}$

b) $\frac{42ab^2c}{22a^2bc}$ für $a, b, c \neq 0$

c) $\frac{-x + 2y}{-2y + x}$ für $x \neq 2y$

d) $\frac{3xu - 4xv + 6yu - 8yv}{xv - 3xu + 2yv - 6yu}$ für $x \neq -2y,\ v \neq 3u$

Aufgabe 5. Geben Sie an, für welche Werte von x bzw. $z \in \mathbb{R}$ der Bruchterm definiert ist:

a) $\dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

c) $\dfrac{3-x}{9-3x}$

d) $\dfrac{14}{z^2+1}$

Aufgabe 6. Vereinfachen Sie die folgenden Mengen:

a) $\{3,4,5,6\} \cap \{2,4,6,8\}$

b) $\{1,2\} \cap \{3,4\}$

c) $\{x : x \in \mathbb{N},\ x \leq 5\} \cap \{y : y \in \mathbb{N},\ y > 2\}$

d) $\{a : a \in \mathbb{N},\ a < 25\} \cap \{b : b \text{ ist Primzahl}\}$

Aufgabe 7. Schreiben Sie die folgenden Mengen als Intervalle:

a) $\{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq -2 \text{ und } x < 7\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 3 \text{ oder } x \leq 1\}$

Aufgabe 8. Gegeben seien die Intervalle

$$A = [-4,-1], \quad B = (-2,1), \quad C = [0,5).$$

a) Geben Sie jedes Intervall als eine Menge in beschreibender Form an.

b) Stellen Sie zu jedem Intervall die Komplementärmenge als Vereinigung von Intervallen dar.

c) Bestimmen Sie folgende Mengen: $A \cup B \cup C$, $B \setminus (A \cup C)$, $(A \cap B) \cup C$, $(C \setminus A) \cup B$, $A \setminus (B \setminus C)$.

Aufgabe 9. a) Schreiben Sie ohne Betrag:

(i) $|11-23|$ (ii) $|34a - 2 \cdot (345a - 12)|,\ a < 0$

(iii) $|34a - 2 \cdot (345a + 12)|,\ a > 0$

b) Schreiben Sie unter Verwendung des Betrags:

(i) $A = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 16\}$ (ii) $B = \{x \in \mathbb{R} : -7 < x < 23\}$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $|x + 5| \leq 12$

b) $|y - 4| < 3$

c) $|x - 3| < -2$

d) $|x + 2| > 3$

e) $2 \leq |z - 1| \leq 5$

Aufgabe 11. a) Schreiben Sie die Summanden ausführlich auf:

(i) $\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j}$ (ii) $\sum_{k=22}^{25} k(k+2)$ (iii) $\sum_{\ell=0}^{4} (-1)^\ell \cdot \ell$ (iv) $\sum_{n=1}^{5} 4$

b) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

(i) $6 + 8 + 10 + 12 + 14$ (ii) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$

(iii) $2 + 2 + 2 + 2$ (iv) $c_1 + c_3 + c_5 + c_7 + c_9$

Aufgabe 12. Berechnen Sie folgende Summen:

a) $\sum_{k=1}^{3} \sum_{\ell=1}^{k} \ell(\ell + 1)$

b) $\sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=i+2}^{4} (i + j)$

Aufgabe 13. Es ist bekannt, dass $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$. Leiten Sie daraus folgende Formeln her:

a) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2$

b) $\sum_{i=0}^{n} (i + \alpha) = \frac{(n + 2\alpha)(n+1)}{2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Aufgabe 14. Geben Sie an, für welche Werte von a, x, $z \in \mathbb{R}$ die Wurzel definiert ist:

(i) $\sqrt{4 + a}$ (ii) $\sqrt{-3 - 3z}$ (iii) $\sqrt{-x^2 - 1}$ (iv) $\frac{2}{\sqrt{4 - a^2}}$

Aufgabe 15. Vereinfachen Sie ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

a) $\dfrac{(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(\sqrt{x} + 2\sqrt{y})}{5x - 20y}$

b) $\sqrt{1 - x^2} : \sqrt{1 - x}$

c) $(\sqrt{a} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{a} + \sqrt{2})^2$

d) $\sqrt{9b^2 - 6b + 1}$

Aufgabe 16. Der Durchmesser eines H_2O-Moleküls ist ungefähr $2{,}5 \times 10^{-10}$ m. In einem Mol (= 18 g) Wasser sind ca. $6{,}022 \times 10^{23}$ Moleküle enthalten. Wie lang wäre eine "Kette" dieser Moleküle? Vergleichen Sie dies mit dem Abstand der Erde zur Sonne, der ungefähr $1{,}496 \times 10^8$ km beträgt.

Aufgabe 17. Vereinfachen Sie ($x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

a) $(-2^2)^3$ und $((-2)^2)^3$

b) $\sqrt[4]{9} \cdot (\sqrt[4]{3})^2$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$

d) $\dfrac{2}{x^{-1}} + 3x - x^{-2} + \dfrac{3}{x^2}$

e) $(2y)^{1-q} \cdot (2y)^{q-2}$

Aufgabe 18. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

(i) $\lg 0{,}0001$ (ii) $\log_{17} 1$ (iii) $\log_2 (\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^3})$ (iv) $\log_8 \frac{1}{\sqrt{8}}$

Aufgabe 19. a) Schreiben Sie als Summen/Differenzen von Logarithmen ($x, y \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\log_3 3x$ (ii) $\ln \dfrac{\sqrt[5]{x^2} \cdot (\sqrt[6]{y})^3}{\sqrt{x \cdot \sqrt{y}}}$

b) Schreiben Sie mit einem Logarithmus ($x, u, v, a \in \mathbb{R}$ sind so gewählt, dass alle Terme definiert sind):

(i) $\lg (u + v) + \lg (u + v)^2 - \frac{1}{2} \lg u + 1$

(ii) $\lg (a^2 - 1) - \lg (a - 1) - \lg (a + 1)^2$

(iii) $(\log_2 x^2) : (\log_2 x) - 2$ (iv) $2 \ln x - \ln \frac{x}{x^2+1} - \ln x^3$

Aufgabe 20. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $14x + 3 = 2x + 7$

b) $-7(4x + 0{,}5) = 0{,}25(-112x) - 3{,}5$

c) $2x(x - 1) = 4(x + 1) - 6$

d) $11x = 3 + 30x^2$

e) $-9x^2 = 1 + 6x$

f) $4x^4 - 7x^2 + 3 = 0$

Aufgabe 21. Lösen Sie die Gleichung

$$4xy + 7x - 3y = 0$$

einmal nach x und einmal nach y auf. Hinweis: Die Lösungenmenge hängt vom Wert der anderen Variable ab.

Aufgabe 22. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ besitzen folgende Gleichungen genau eine, zwei oder keine Lösung?

a) $x^2 - 6x + a = 0$

b) $x^2 + ax + 1 = 0$

Aufgabe 23. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, deren Lösungen $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ und $x_2 = 1 - \sqrt{3}$ sind.

Aufgabe 24. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\dfrac{x-2}{2x+2} + \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x+1}$

b) $\dfrac{x-3}{x^2-1} + \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2}{x-1}$

c) $\dfrac{x^2+x+1}{x-2} + 2 = \dfrac{10x-13}{x-2}$

Aufgabe 25. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $\sqrt{2x^2 - 2} = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $x = \sqrt{3x + 10}$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x + 6}} = 6$

d) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$

Aufgabe 26. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$

b) $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$

Aufgabe 27. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Gleichungen:

a) $0{,}1^x - 10^x = 10^{x+2} - 0{,}1^{x+2}$

b) $\ln(x^2 - 8) - \ln x = \ln 2$

Aufgabe 28. Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $x^2 + 2x - 2 \leq 0$

b) $4x^2 + 40 \leq 28x - 9$

c) $3x^3 - 2x^2 - 5x + 4 \geq 0$

d) $\dfrac{2x^2 - 7x + 2}{x - 5} \geq x$

Aufgabe 29. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & (a^2 - a + 2)x_2 & = & a + 6 \end{array}$$

Aufgabe 30. a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Aufgabe 31. Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $A + 2B$, $A^2 = A \cdot A$, AB und BA.

b) Berechnen Sie $A^T \cdot \vec{v}$.

(c) Berechnen Sie $\det(A)$ und A^{-1}.

Aufgabe 32. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2\,x_2 \\ x_2 - 10\,x_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $T(\vec{x})$ für $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie die Matrix der Abbildung T an.

Aufgabe 33. Betrachten Sie folgende lineare Abbildungen:

- T_1: Drehung um $30°$.
- T_2: Skalierung um den Faktor $\tan(30°)$ in die Richtung der x-Achse und um den Faktor $\frac{1}{\tan(30°)}$ in die Richtung der y-Achse.
- T_3: Drehung um $-60°$.

(a) Geben Sie die Matrizen der Abbildungen T_1, T_2 und T_3 an.

(b) Skizzieren Sie das Quadrat $[0,1]^2$ und sein Bild unter der Abbildungen T_1, $T_2 \circ T_2$ und $T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

(c) Berechnen Sie die Matrix der Abbildung $T_3 \circ T_2 \circ T_1$. Welche lineare Abbildung ist $T_3 \circ T_2 \circ T_1$?

Aufgabe 34. Bestimmen Sie den maximalen Definitionbereich für jede der folgenden Funktionen. Schränken Sie, wenn nötig, für jede der Funktionen den Definitionsbereich und den Wertebereich so ein, dass die neu definierte Funktion bijektiv ist, und geben Sie die Umkehrfunktion an.

a) $f(x) = 2x - 4$

b) $g(x) = x^2 + 1$

c) $h(x) = 8x^3$

d) $u(x) = \dfrac{1}{x+1}$

e) $v(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 2^x$

Aufgabe 35. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden

a) die durch die Punkte $P_1(1,2)$ und $P_2(-2,3)$ geht,

b) die durch den Punkt $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{11}\right)$ geht und die Steigung $\frac{1}{3}$ besitzt,

c) die durch den Ursprung geht und parallel zu der Geraden durch die Punkte $P(-72,-60)$ und $Q(-24,-20)$ liegt.

Aufgabe 36. Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der Geraden mit den Gleichungen

a) $y = -2x + 8$ und $y = 3x - 7$,

b) $y = \frac{3}{2}x + 5$ und $y = \frac{3}{2}x + 10$,

c) $y = \frac{3}{7}x + \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{7}x + \frac{5}{10}$.

Wie erkennt man am Funktionsterm, dass zwei Geraden keinen Schnittpunkt besitzen?

Aufgabe 37. Welchen Wert kann der Ausdruck $-\frac{1}{3}x^2 + x + 2$ höchstens annehmen? Gibt es auch einen minimalen Wert?

Aufgabe 38. Bestimmen Sie jeweils die Scheitelform der folgenden quadratischen Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 4x$

b) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

Aufgabe 39. Untersuchen Sie folgende Funktionen hinsichtlich Nullstellen, Polstellen, hebbaren Definitionslücken und Verhalten für $x \to \pm\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x}{x^2 + 1}$

Aufgabe 40. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ und der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 1$. Skizzieren Sie zuerst die Schaubilder.

Aufgabe 41. Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$, $a > 0$, kann in der Form $f(x) = e^{kx}$ dargestellt werden. Geben Sie die Formel für k an.

Aufgabe 42. Das Abkühlen eines Glühweins auf dem Weinachtsmarkt kann durch eine Funktion der Form

$$f(t) = c \cdot a^t$$

beschrieben werden, wobei t die Zeit und $f(t)$ die Temperatur zur Zeit t darstellt. Der frisch ausgeschenkte Glühwein hat eine Temperatur von 80°C. Nach 3 Minuten ist die Temperatur des Glühweins 40°C.

a) Berechnen Sie die Konstanten a und c für diesen Vorgang.

b) Welche Temperatur hat der Glühwein nach 9 Minuten?

c) Nach wie vielen Minuten hat der Glühwein die Temperatur von 25°C?

d) Welche Temperatur herrschte an diesem Wintertag?

Aufgabe 43. Bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich sowie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{\ln(1-x)} - e$

b) $f(x) = \ln x (\ln x - 3)$

c) $f(x) = \ln(5x^2) - 4\ln(\sqrt{x}) - 3$

Aufgabe 44. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \tan(2x)$

Aufgabe 45. Bestimmen Sie die Gleichung der allgemeinen Sinusfunktion

$$f(\varphi) = A\sin(B(\varphi - \varphi_0)) + C,$$

welche

a) die Periode $p = 2\pi$ hat, den maximalen Wert 3 bei $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ annimmt und für die gilt $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

b) die Periode $p = 1$ hat, den maximalen Wert 2 bei $\varphi = 0{,}45$ annimmt und für die gilt $f(0{,}7) = -1$.

Aufgabe 46. Bestimmen Sie die Achsenabschnittform folgender Geraden:

a) $3x - 5y + 15 = 0$

b) $-3x + y = -2$

Aufgabe 47. Bestimmen Sie den Typ folgender Quadriken:

a) $2x^2 - 2y^2 + 16x + 10y - \frac{105}{2} = 0$

b) $3x^2 + 24x + 15y + 138 = 0$

c) $16x^2 + y^2 - 96x = 0$

d) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$

e) $x^2 - 4 = 0$

Version: 26.09.2018