Fluktuations-induzierte Modifikation von Neutronen Sternen

Fluctuation-induzed modifications on neutron stars

Bachelor Thesis
vorgelegt von

Martin Beyer

September 2017

Betreuer: PD Dr. Bernd-Jochen Schaefer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Christian Fischer

Institut für theoretische Physik
Fachbereich 07

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**
1.1 Kompakte Objekte 2

2 Grundideen der Allgemeinen Relativitätstheorie **4**
2.1 Herleitung der Tolman–Oppenheimer–Volkoff Gleichung 6

3 Neutronengas Modell **9**

4 Quark-Meson-Modell **13**
4.1 Mean-Field-Approximation 14
4.1.1 Standard Mean-Field-Approximation 15
4.1.2 Extended Mean-Field-Approximation 15
4.2 Bestimmung der Parameter 17

5 Bestimmung der Zustandsgleichung **18**
5.1 Approximation T→0 18
5.2 Zustandsgleichung 20

6 Ergebnisse **21**

7 Ausblick **24**

A Konventionen und Konstanten **25**

B Bestimmung der Parameter **26**
B.1 sMFA 26
B.2 eMFA 27

C Numerik **29**
C.1 Runge-Kutta-Verfahren 29
C.2 root-finding 30

1 Einleitung

Im Rahmen dieser Arbeit werden Neutronensterne bezüglich möglichen Massen und Radien untersucht. Dabei sind Neutronensterne Objekte welche extreme Dichten aufweisen und sind daher gute Testobjekte um das Phasendiagramm der Quantenchromodynamik (QCD) zu untersuchen. Von zentraler Rolle ist dabei die Beschreibung der Kernmaterie, welche durch die Zustandsgleichung (Equation of State, EOS) charakterisiert wird. Die EOS gibt dabei den Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte der Materie. Durch verschiedene Ansätze wird versucht die Zustandsgleichung modellieren.

1.1 Kompakte Objekte

Zunächst werden gewöhnliche Sterne wie etwa unsere Sonne beschrieben. Damit diese Sterne stabil sind durchlaufen sie im Kern Fusionszyklen und setzten dabei Energie frei, welche den Stern aufheizt. Diese ist notwendig damit der Materiedruck dem gravitativen Druck standhalten kann, dabei muss wie bei allen Sternen die Gleichgewichtsbedingung

$$P_{mat} = P_{grav} \tag{1.1}$$

gelten, damit dieser stabil ist. Mit dem zu Ende gehen des Fusionsprozesses gibt es mehrere Möglichkeiten in welche Form der Stern übergeht. Für Anfangsmassen kleiner als $2M_\odot$ ist es wahrscheinlich, dass der Stern in einen weißen Zwerg übergeht. Diese Endstadium kommt in unserem Universum sehr häufig vor, dabei hat der ursprüngliche Stern seinen Fusionsprozess größtenteils beendet, dadurch folgt eine Kontraktion des Stern auf Radien im Bereich von 10.000 km, bei immer noch Massen im Bereich kleiner als als $1,4M_\odot$. Dem Gravitationsdruck wird bei solchen Objekten durch die Fermi-Entartung der Elektronen entgegengewirkt.
Ein anderes Ergebnis durch das Ableben eines Sternes sind Neutronensterne, welche durch Sterne mit ursprünglichen Massen in Bereich 5-100 $M_\odot$ entstehen können. Diese haben für gewöhnlich Massen im Bereich von 1-2 $M_\odot$ und Radien von 10 km. Dabei verläuft der anfängliche Prozess ähnlich wie bei weißen Zwergen, aber aufgrund der großen gravitativen Wirkung kontrahieren solche Sterne weitaus mehr und es entstehen hohe Dichten. Für solch hohe Dichten kann die Fermi-Entartung dem Druck nicht mehr ausreichen entgegenwirken und die Elektronen werden ab einem bestimmten Punkt in die Hadronische Materie gedrückt. Dabei wird der inverse beta-Zerfall

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \tag{1.2}$$

möglich. Da dieser Prozess energetisch günstiger ist nimmt der Druck durch die Entartung der Elektronen immer weiter ab. Das ganze resultiert in einer Supernova, dessen Modellierung in aktueller Forschung ist. Übrig bleibt der Kern, welcher im einfachsten Fall nur aus Neutronen besteht, dabei halten statt der Elektronen, die Neutronen dem Gravitationsdruck durch die Fermi-Entartung entgegen. Für Anfangsmassen über größer als die der Neutronensterne kann selbst die Neutronen-Entartung der Gravitation nicht ausreichen entgegenwirken und es kommt zum Gravitationskollaps welcher in einem schwarzen Loch resultiert. Diese drei Typen von Objekte werden als kompakte Objekte bezeichnet, aufgrund der fehlenden Fusionsprozesse im Endstadium nimmt die thermische Energie immer weiter ab. Nach einer bestimmten Zeit hat sich der Neutronenstern auf eine Temperatur eingependelt, welche im Bereich von weniger als 100keV liegt. Dem entsprechen nennt man solche Materie auch kalte Materie. Im Laufe der Arbeit werden daher stets die Grenzwerte für T$\rightarrow$ 0 betrachtet.
Dabei ist der beschriebene Aufbau von Neutronensternen der simpelste um vermutlich der unrealistischste, den gerade in dem äußeren Regionen des Sterns werden Teile von anderen Baryonen und Elektronen erwartet. Besonders im späteren Verlauf der Arbeit wird der Quark Stern (Abbildung 1) wichtig.

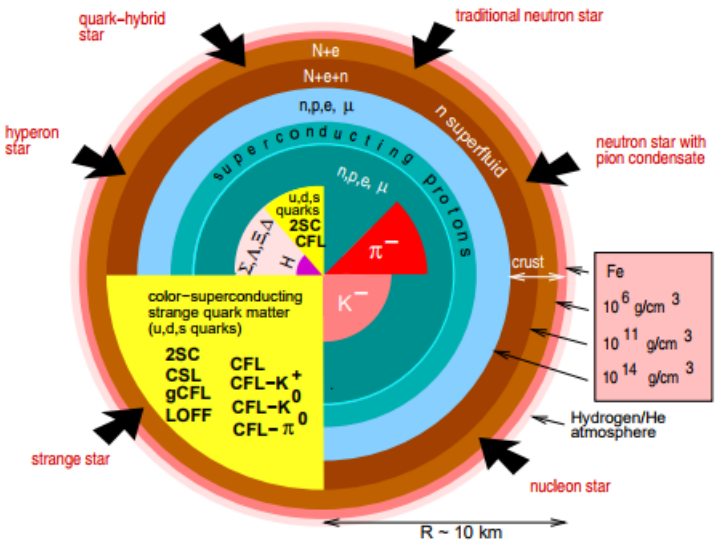

Abbildung 1: verschiedene Modelle des Aufbaus der Materie von Neutronensterne, entnommen aus [6]

2 Grundideen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Um Gravitation zu beschreiben, kann zunächst die Newtonsche Formulierung dieser verwendet werden, dabei treten aber einige Problem auf. Eines davon ist die instantane Wechselwirkung zwischen Massen, was einer Lichtgeschwindigkeit von c=∞ entsprechen würde. Mit Grundlage der speziellen Relativitätstheorie (SRT) und experimentellen Messungen, ist diese aber endlich. Das wirft die Frage auf ob es eine verallgemeinernde Theorie die Gravitation gibt. Genau dies tut die allgemeine Relativitätstheorie (ART). Analog hat es sich bei der Newtonschen Mechanik verhalten, welche zunächst nichtrelativistisch formuliert und dann durch die SRT verallgemeinert wurde. Ein wichtiges Konzept der ART ist das Äquivalenzprinzip, dabei stelle man sich vor, man ist in einer Box und diese wird wie auch immer beschleunigt, dabei erfährt der Beobachter innerhalb der Box ein Kraft entgegengesetzt der Beschleunigung. Betrachtet man die Box auf der Erde, wirkt auf den Beobachter und die Box die Gravitation. Der Beobachter innerhalb der Box kann aber zwischen der freien Beschleunigung und der Gravitation nicht unterscheiden. Dabei ist anzumerken, dass die Gravitation auf der Erde für den Beobachter nicht homogen ist. Die Box müsste infinitesimal klein sein damit das Äquivalenzprinzip zutrifft.
Will man nun die ART mathematisch beschreiben, muss dabei die gekrümmte Raumzeit beschrieben werden. Dabei werden im Normalfall nicht flache Raumzeiten betrachtet, welche durch eine Mannigfaltigkeit M beschrieben werden. Um mit dieser Mannigfaltigkeit arbeiten zu können, wird diese durch Karten beschrieben. Das Analogon dazu ist eine Kugeloberfläche welche durch mehrere Karten beschrieben wird.
Um Vektoren auf dieser Mannigfaltigkeit zu beschreiben, kann in jedem Punkt auf dieser eine Flache Raumzeit approximiert werden, welche einen Tangentialebene in diesem Punkt bildet. Damit kann eine Vektor in einer Basis ∂_μ an einem bestimmten Punkt gebildet werden. Näheres zu Tensoren und Taangeltialräumen findet sich z.B. in [1] .

Um mit der Einsteinschen Feldgleichung zu arbeiten benötigt man den Krümmungstensor [1]

$$R_{mikp} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x^i \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^m \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^i \partial x^k}\right) + g_{rs}\left(\Gamma^r_{km}\Gamma^s_{ip} - \Gamma^r_{pm}\Gamma^s_{ik}\right) \tag{2.1}$$

wobei dabei der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ verwendet wurde. Dieser beschreibt dabei die Krümmung des Raumes, was sich zum Beispiel auch auf das Wegelement zwischen zwei Raumzeitpunkten $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ auswirkt. Dabei

wurden zusätzlich die Christoffelsymbole

$$\Gamma^k_{lm} = \frac{1}{2} g^{kn} (\frac{\partial g_{mn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n}) \tag{2.2}$$

verwendet, welche keine Tensoren sind, da sie sich nicht wie solche transformieren. Durch Kontraktion des Krümmungstensors

$$g^{km} R_{kimp} = R_{ip} \tag{2.3}$$

erhält man den Ricci-Tensor, welcher zusammen mit dem Ricci-Skalar

$$R = g^{ik} R_{ik} \tag{2.4}$$

eine Seite der Einsteinschen Feldgleichung (EFG) formen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

Dabei ist $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impuls-Tensor, welche die Materie beschreibt. Demnach verbindet die EFG die Krümmung des 4-Dimensionalen Raumes mit der Materie, bzw. der Masse. Demnach lässt sich bei einem bekannten Energie-Impuls-Tensor die Krümmung des Raumes berechnen, indem der Metrische Tensor bestimmt wird. Aber gleichermaßen kann auch bei bekanntem Metrischen Tensor auf die zugrundeliegende Masse geschlossen werden. Für die Herleitung der TOV-Gleichung wird eine kovariante Ableitung 2. Stufe benötigt welche sich schreiben lässt als

$$\nabla_\epsilon A^{\mu\nu} = \partial_\epsilon A^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\epsilon\kappa} A^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\epsilon\kappa} A^{\mu\kappa} \tag{2.6}$$

welches als Vergleich zweier Parallel verschobener Tensoren verstanden werden kann.

2.1 Herleitung der Tolman–Oppenheimer–Volkoff Gleichung

In einem statischen, sphärischen Fall kann ähnlich wie bei der Schwarzschildlösung der Ansatz für das Längenquadrat gewählt werden mit

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)}dt^2 + e^{2\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.7}$$

Der Vergleich dessen mit der Tensordarstellung $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ergibt den Ansatz für die Komponenten des Metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = diag(-e^{2\Phi(r)}, e^{2\lambda(r)}, r^2, r^2 sin^2(\theta)) \tag{2.8}$$

$$x^0 \equiv t \quad x^1 \equiv r \quad x^2 \equiv \theta \quad x^3 \equiv \varphi$$

Um die allgemeinen Funktionen $\Phi(r)$, $\lambda(r)$ zu bestimmen, muss die Einstein'sche Feldgleichung

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

mit $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ gelöst werden. Um nun kompakte Objekte, wie in unserem Fall einen Neutronenstern zu beschreiben, wird die Materie als ideale Flüssigkeit betrachtet, welche durch den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\mu\nu} = (\rho + \frac{P}{c^2})u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

beschrieben wird. Allgemein gilt die Invarianz der Norm

$$u_\nu u^\nu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2 \tag{2.11}$$

Sei nun das betrachtende Objekt ruhend $\rightarrow u^\mu = 0 \quad \forall \mu \neq 0$, folgt

$$g_{00}(u^0)^2 = -c^2 \Rightarrow u^0 = ce^{-\Phi(r)}$$

$$\rightarrow u_0 = -ce^{\Phi(r)} \tag{2.12}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor folgt nach (2.11) und (2.12)

$$T_{\mu\nu} = diag(\rho(r)c^2 e^{2\Phi(r)}, P(r)e^{2\lambda(r)}, P(r)r^2, P(r)r^2 sin^2(\theta)) \tag{2.13}$$

Es muss nur noch $R_{\mu\nu}$ und R bestimmt werden, welche sich allgemein aus der Metrik berechnen lassen mit

$$R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} \quad R_{\alpha\beta} = R^\epsilon_{\alpha\epsilon\beta} \tag{2.14}$$

Aus den Diagonalkomponenten der EFG ergeben sich die vier Gleichungen

$$\text{I}: \quad (-1 + e^{2\Phi(r)} + 2r\Phi'(r))e^{-2\Phi(r)} = c^2\kappa r^2\rho \tag{2.15a}$$

$$\text{II}: \quad (1 - e^{2\Phi(r)} + 2r\lambda'(r))e^{-2\lambda(r)} = \kappa r^2 P \tag{2.15b}$$

$$\text{III}: \quad (\lambda''(r) + \lambda'(r)^2 - \lambda'(r)\Phi(r) + \frac{\lambda'(r) - \Phi'(r)}{r})e^{-2\Phi(r)} = \kappa P \tag{2.15c}$$

$$\text{IV}: \quad sin^2\theta \cdot \text{III} \tag{2.15d}$$

Durch den speziell gewählten Ansatz (2.7) kann Gleichung I direkt bezüglich $e^{-2\Phi(r)}$ gelöst werden, es ergibt sich

$$e^{-2\Phi(r)} = (1 - \frac{2G}{c^2}\frac{M(r)}{r}) \tag{2.16}$$

mit der Masse abhängig von dem betrachtetem Radius

$$M(r) = 4\pi \int_0^r d\tilde{r}\tilde{r}^2\rho(\tilde{r}) \tag{2.17}$$

mit der Lösung in Gleichung (2.16) kann II gelöst werden mit

$$\lambda'(r) = \frac{\frac{4\pi G}{c^4}r^3 P + \frac{G}{c^2}M(r)}{r(r - \frac{2G}{c^2}M(r))} \tag{2.18}$$

Die Gleichungen III-IV sind redundant und werden daher nicht weiter betrachtet.
Mit der Energie-Impuls-Erhaltung in kovarianter Darstellung für die Komponente μ=1

$$\nabla_\nu T^{\nu 1} = e^{-2\Phi(r)}(P'(r) + (P(r) + c^2\rho(r))\lambda'(r)) = 0 \tag{2.19}$$

folgt die Änderung des Drucks

$$P'(r) = -(P(r) + c^2\rho(r))\lambda'(r) \tag{2.20}$$

Mit Gleichung (2.18) und (2.17) folgt schlussendlich die TOV-Gleichung

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}\left[1 + \frac{P}{\rho c^2}\right]\left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{M(r)c^2}\right]\left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right]^{-1} \tag{2.21a}$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2\rho \tag{2.21b}$$

In dieser Darstellung ist gut zu sehen, dass die relativistischen Korrekturen in den drei hinteren Faktoren von Gleichung (2.21a) stecken. In nichtrelativistischen Betrachtung

$$\frac{P}{\rho c^2} \ll 1 \quad \frac{4\pi r^3 P}{M(r)c^2} \ll 1 \quad \frac{2GM(r)}{c^2 r} \ll 1 \tag{2.22}$$

geht die TOV-Gleichung in den Newtonschen Grenzfall über.

Die vollständige TOV-Gleichung (2.21) lässt sich nur Numerisch lösen. Die beiden Gleichungen sind gekoppelt und werden mittels des Runge-Kutta-Verfahren unter gegebenen Anfangsbedingungen gelöst. Bei gegebener Zustandsgleichung P(ρ) (wird in dem folgenden Kapiteln besprochen), Zentraldichte ρ_0 und der Bedingung M(R_0)=0 kann die Masse-Radius-Relation berechnet werden. Um die Singularität bei R=0 in Gleichung (2.21a) zu umgehen, wird ein sehr geringer Anfangswert R_0=10^{-14}km verwendet. Die allgemeinen Abbruchbedingung ist, dass der Druck am Rand der kompakten Objekts verschwindet $P(R_{max}) = 0$.

3 Neutronengas Modell

Im folgenden werden Neutronensterne betrachtet, welche ausschließlich aus Neutronen bestehen. Dies ist eine Näherung, denn wie schon erwähnt haben Neutronensterne kleine Mengen an anderen Baryonen und Leptonen, besonders weit außerhalb des Kerns. Da es sich bei Neutronen um Fermionen handelt wird die Besetzungszahl eines Zustandes mit der Fermi-Dirac-Besetzungswahrscheinlichkeit (3.1) gewichtet.

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\beta(E-\mu)}} \tag{3.1}$$

Damit ergibt sich für freie Neutronen die Teilchendichte für Impulse im Intervall [p,p+dp]

$$dn = \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \mathrm{g} f(E) \tag{3.2}$$

Der Faktor g steht für den Entartungsgrad der Fermionen, in diesem Fall besitzen Neutronen einen Freiheitsgrad bezüglich der Spinausrichtung up- und down, dementsprechend wird im folgenden g=2 gewählt. Damit folgt durch integrieren die Teilchendichte in der Approximation T$\to$ 0

$$\begin{aligned} n = \int_0^\infty dn = 2\int_0^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E) \overset{T \to 0}{=} \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \Theta(\mu - E) \\ = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{p_f} dp p^2 = \frac{1}{3\pi^2} p_f^3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dabei sind die Zustände in der Approximation T$\to$0 nur besetzt bis zum Fermi-Impuls $p_f = \sqrt{\mu^2 - m_n^2}\Theta(\mu - m_n)$. Die Energiedichte der Neutronen berechnet sich durch die Summation über die relativistische Einteilchenenergie E=$\sqrt{p^2 + m_n^2}$ gewichtet mit f(E). Beim Übergang zu kontinuierlichen Impulsen wie in (3.3) ergibt sich die Energiedichte

$$\begin{aligned} \epsilon_n =& 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E f(E) \overset{T \to 0}{=} \frac{1}{\pi^2}\int_0^{p_f} dp p^2 E \\ =& \frac{1}{8\pi^2}\left[p_f\sqrt{p_f^2 + m_n^2}(2p_f^2 + m_n^2) - m_n^4 arcsinh\left(\sqrt{\left(\frac{p_f}{m_n}\right)^2 + 1} + \frac{p_f}{m_n}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mithilfe der Thermodynamischen Relation der inneren Energie bei verschwindender Temperatur U=μN-pV folgt der Zusammenhand zwischen Energiedichte und Druck ϵ=μn-p . Das chemische Potential berechnet sich mit

$\mu = \frac{d\epsilon}{dn}$, damit folgt für für den Druck

$$p = \frac{1}{24\pi^2}\left[p_f\sqrt{p_f^2+m_n^2}(2p_f^2-3m_n^2)+3m_n^4 arcsinh\left(\sqrt{\left(\frac{p_f}{m_n}\right)^2+1}+\frac{p_f}{m_n}\right)\right] \tag{3.5}$$

Dieses Ergebnis ist analog zu den Resultaten aus [5] . Durch die Gleichungen (3.4) und (3.5) ist nun die Zustandsgleichung gegeben. Diese wird nun berechnet indem unter Variation des Fermi-Impulses der Druck und die Energiedichte aufgetragen wird. Dabei wird ersichtlich, dass der funktionale Zusammenhang P(ϵ) stark davon abhängt welcher Bereich der Fermi-Impulses betrachtet wird. In Abb. (2) ist ein niedriger Impulsbereich aufgetragen. Aufgrund der großen Ruhemasse des Neutronen bezogen auf kleine Impulse dominiert die Energiedichte in diesem Bereich. In Abb. (3) sind große Impulse aufgetragen. Dort ist direkt ersichtlich, dass die EOS in den wohlbekannten ultrarelativistischen Grenzfall p=$\frac{1}{3}\epsilon$ übergeht.

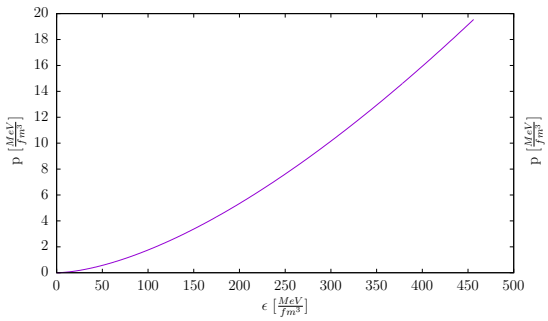

Abbildung 2: EOS für kleine Fermi-Impulse

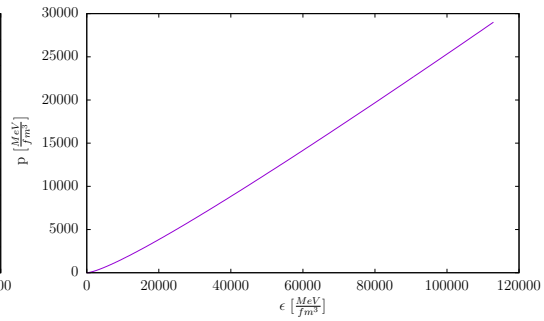

Abbildung 3: EOS für große Fermi-Impulse

Um die TOV-Gleichung zu lösen ist es notwendig bei gegebenen Druck die dazugehörige Energiedichte zu berechnen. Dafür wird eine root-finding Methode verwendet um unter gegebenem Druck den zugehörigen Fermi-Impuls zu berechnen und dadurch die Energiedichte zur TOV-Gleichung zurückzugeben. In Abbildung (4) ist ein Ausschnitt der Masse-Radius-Relation zu sehen, dabei ist anzumerken, dass es Lösungen für beliebig kleine Zentraldichten gibt, was in beliebig geringen Massen und großen Radien resultiert. Für die Maximale Masse und den Radius ergibt sich ein Wert von 0,71$M_\odot$ bei einem Radius von 9,15 km. Diese Werte entsprechen in etwa dem Ergebnis von Tolman-Oppenheimer-Volkoff aus dem Jahr 1939, welche ebenfalls ein Fermigas-Modell verwendet haben.

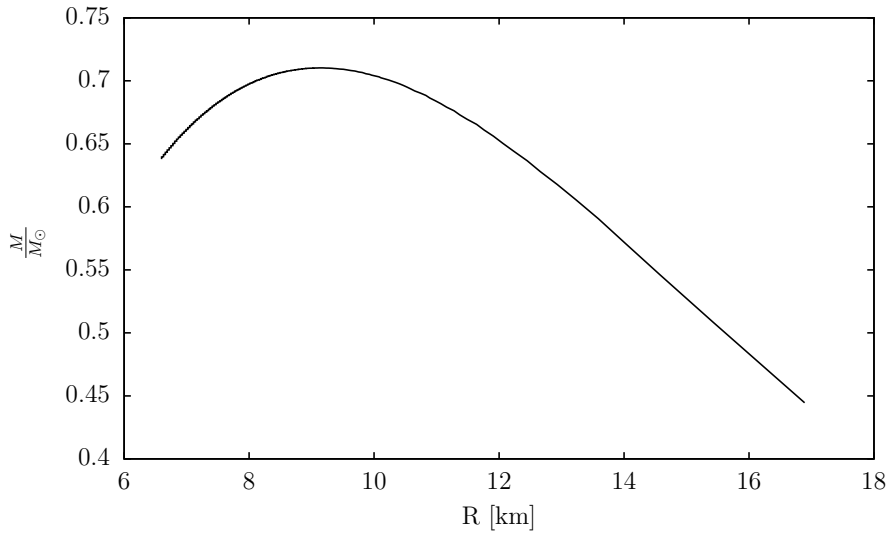

Abbildung 4: Masse-Radius Relation des Fermi-Gas Modells

Es ist außerdem darauf zu achten welche Radius-Massen Werte stabil sind, für die notwendige Stabilitätsbedingung [2] gilt :

$$\frac{\partial M}{\partial \epsilon_c} > 0 \tag{3.6}$$

In Abbildung 5 ist diese Abhängigkeit aufgezeigt und man sieht, dass dadurch eine Radiusuntergrenze entsteht. Demnach sind im Fermigasmodell nur Massen stabil dessen Radien größer als 9,15 km sind. Für kleinere Radien ist das System instabil und würde in ein schwarzes Loch kollabieren. Es fällt auf, dass die zentrale Energiedichte Werte bis knapp über 2000 $\frac{MeV}{fm^3}$ annimmt, im Vergleich zur normalen Kerndichte mit etwa 250 $\frac{MeV}{fm^3}$, wäre dies ein 8-facher Wert. Das ist dadurch erklärbar, dass das Neutronengas als nicht wechselwirkend beschrieben wurde, sondern als freies Fermigas, was bei solchen Dichten eine zu starke Näherung ist.

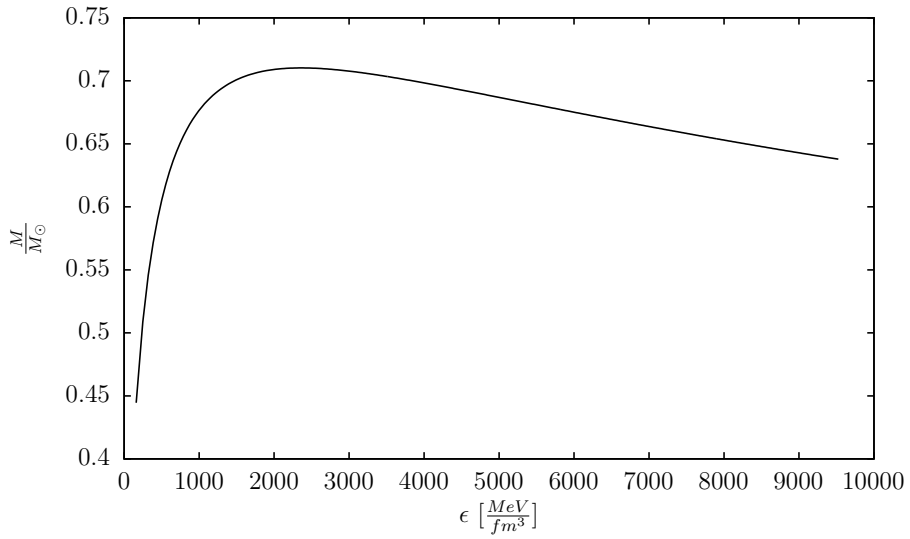

Abbildung 5: Masse in Abhängigkeit der zentralen Energiedichte des Fermi-Gas Modells

Das größte Problem dieses Modells ist, dass die starke Wechselwirkung vernachlässigt wird . Anders als bei weißen Zwergen, welche durch den Entartungsdruck der Elektronen dem Gravitationsdruck entgegenwirken, bei denen die starke Wechselwirkung vernachlässigt werden kann, ist es bei Neutronensternen notwendig diese zu berücksichtigen. Daher wird im nächsten Kapitel ein Modell vorgestellt, welches diese berücksichtigt.

4 Quark-Meson-Modell

Im Folgenden wird das Quark-Meson-Modell (QM-Modell) vorgestellt, welches eine Abwandlung des linearen Sigma Modells ist und Quarks zusammen mit Mesonen als effektive Freiheitsgrade enthält.

Um die starke Wechselwirkung der QCD zu beschreiben, wird eine effektive Theorie verwendet, welche in Bereichen niedriger Temperatur das Verhalten der Hadronen beschreibt. Genau dies tut das QM-Modell.
In dieser Arbeit wird sich nur auch die zwei leichten Quarks (up-,down-Quark) beschränkt, die schweren Quark (charm-,top-,bottom-Quark) sind im Bereich niedriger Temperatur vernachlässigbar. Das strange-Quark ist auch als leicht anzusehen relativ zu den schweren Quark, aber bezüglich der up-,down-Quark immer noch mehr als eine Größenordnung schwerer und wird daher in Rahmen dieser Arbeit ebenfalls vernachlässigt.

Der Lagrangian für das 2-flavor chirale Quark-Meson Modell lässt sich schreiben als:

$$\mathcal{L}_{QM} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - h(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5))\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + U(\phi) \tag{4.1}$$

mit dem $4N_fN_c$-dimensionaler Quark-Spinor ψ und der Kurzschreibweise für die beiden Mesonfelder ϕ=$(\sigma, \vec{\pi})$. Dabei ist σ das Skalarfeld des Sigma Mesons und $\vec{\pi}$ die pseudo-skalar Felder des Pionen Tripplets mit $\vec{\pi}$=(π^+, π^0, π^-) .
Das Mesonische Potential

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2 - \nu^2)^2 - c\sigma \tag{4.2}$$

ist dazu fähig spontane und explizite Symmetriebrechung zu beschreiben, je nachdem wie die Parameter gewählt werden.

Das weitere Vorgehen ist nun die Zustandssumme zu berechnen und daraus Thermodynamische Größen ableiten zu können, wie z.B. den Druck und die Energiedichte.
Im allgemeinen Fall berechnet sich die Zustandssumme mittels der Pfadintegralmethode durch

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\pi} exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}_{QM} + \mu\bar{\psi}\gamma_0\psi\right] \tag{4.3}$$

wobei zusätzlich zu dem Lagrangian noch das chemische Potential hinzugefügt wurde

$$\mu n = \mu\bar{\psi}\gamma_0\psi \tag{4.4}$$

4.1 Mean-Field-Approximation

In der mean-field-Approximation (MFA) werden die Mesonischen Felder durch ihre Erwartungswerte ersetzt und können als klassische Felder betrachtet werden.

$$\sigma \to \langle\sigma\rangle, \vec{\pi} \to \langle\vec{\pi}\rangle \tag{4.5}$$

Dadurch verschwinden die Ableitungen $\partial_\mu\phi$ und der Lagrangian (4.1) reduziert sich auf die Form (4.6).

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - h\sigma)\psi + U(\sigma) \tag{4.6}$$

Im folgenden wird die Definition $S_0^{-1} := i\partial\!\!\!/ - h\sigma + \mu\gamma_0$ verwendet. Da die Fluktuationen in der MFA vernachlässigt werden, fallen die Pfadintegrale der Mesonischen Felder weg. Es ergibt sich die Zustandssumme

$$\mathcal{Z}_{MF} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\psi}S_0^{-1}\psi + U(\sigma))\right] \tag{4.7}$$

Die Integration des Mesonischen Potentials kann direkt ausgeführt werden, weil es nicht von den Integrationsparametern der Pfadintegrale abhängt.

$$\mathcal{Z}_{MF} = exp(-\beta V U(\sigma)) \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi exp\left[-\int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} (\bar{\psi}S_0^{-1}\psi)\right] \tag{4.8}$$

Mit der Identität $\ln(\det(S_0^{-1})) = \tilde{Tr}(ln(S_0^{-1}))$ kann die Zustandssumme weiter umgeformt werden in

$$\mathcal{Z}_{MF} = exp(-\beta V U(\sigma)) det(S_0^{-1}) = exp(\tilde{Tr}(ln(S_0^{-1})) - \beta V U(\sigma)) \tag{4.9}$$

Damit ergibt sich für das großkanonische Potential pro Volumen V

$$\Omega = -\frac{ln(\mathcal{Z}_{MF})}{\beta V} = -\frac{\tilde{Tr}(ln(S_0^{-1}))}{\beta V} + U(\sigma) \tag{4.10}$$

Für die Spurbildung des ersten Terms wird dieser in den Impulsraum transformiert

$$\frac{\tilde{Tr}(ln(S_0^{-1}))}{\beta V} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(ln(S_0^{-1})) \tag{4.11}$$

Mithilfe der Matsubara Methode wird die nullte Komponente des Impulses durch eine Summe über fermionische Matsubara Frequenzen ω_n=(2n+1)πT ersetzt und damit eine endliche Temperatur T eingeführt, näheres dazu in [3] oder [4] .

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr(ln(S_0^{-1})) \to T\sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} Trln(S_0^{-1}) \tag{4.12}$$

Durch Ausnutzung der Entartung kann die color und flavor Spur gebildet werden

$$Tr(ln(S_0^{-1})) = N_c N_f Tr_D(ln(S_0^{-1})) \tag{4.13}$$

Wird nun die Dirac Spur ausgeführt, genaueres dazu in [4] , ergibt sich für das großkanonische Potential:

$$\Omega_{MF} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[E_q + Tln(1 + e^{-\beta(E_q+\mu)}) + Tln(1 + e^{-\beta(E_q-\mu)})\right] + U(\sigma) \tag{4.14}$$

Dabei unterscheidet man zwischen einem Wechselwirkungsterm

$$\Omega_{q\bar{q}} = -2N_c N_f T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ln(1 + e^{-\beta(E_q+\mu)}) + ln(1 + e^{-\beta(E_q-\mu)})\right] \tag{4.15}$$

und einem Vakuumterm

$$\Omega_{vac} = -2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_q \quad \text{mit} \quad E_q = \sqrt{p^2 + (h\sigma)^2} \tag{4.16}$$

welcher selbst im Vakuum bei T=μ=0 das Potential beeinflusst. Dabei ist noch zu beachten, dass dieser Term divergent ist, daher wird eine Regulierung mittels eines cutoffs Λ eingeführt. Wird nun nur bis zu einem bestimmten Impuls, welcher dem cutoff entspricht, integriert, ist der Vakuumterm dementsprechend endlich.

Zusätzlich ist der Erwartungswert σ am globalen Minimum des großkanonischen Potentials definiert, wodurch bei gegebenen Werten für die Temperatur und chemischen Potential der Erwartungswert mit

$$\left.\frac{\partial \Omega_{MF}(T,\mu)}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\langle\sigma\rangle} = 0 \tag{4.17}$$

bestimmt werden kann.

4.1.1 Standard Mean-Field-Approximation

In der standard Mean-Field-Approximation (sMFA) wird der Vakuumterm Ω_{vac} ignoriert.

$$\Omega_{sMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + U(\sigma) \tag{4.18}$$

4.1.2 Extended Mean-Field-Approximation

In der extended Mean-Field-Approximation (eMFA) wird der divergente Vakuumterm mit berücksichtigt

$$\Omega_{eMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + \Omega_{vac} + U(\sigma) \tag{4.19}$$

Im Abbildung 6 ist der Erwartungswert für verschiedene chemische Potentiale aufgetragen, dabei fällt die Fermi-kante auf, ab dieser wird der Erwartungswert erst durch den quark-anitquark-Term beeinflusst.

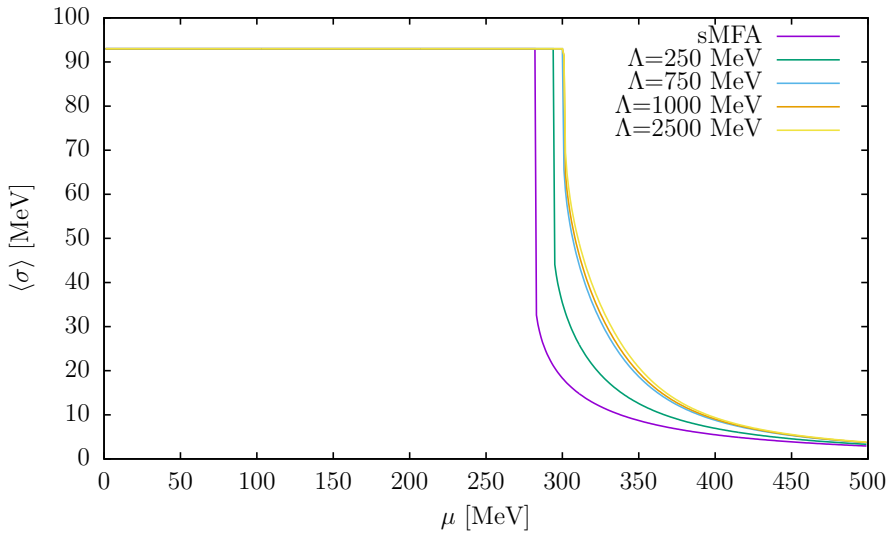

Abbildung 6: Erwartungswert des Sigma Meson Feldes unter Variation des chemischen Potentials bei T=0, bei verschiedenen cutoff Werten

4.2 Bestimmung der Parameter

Die Parameter λ,ν^2,h und c des Mesonischen Potentials werden im Vakuum, also bei T=μ=0 festgelegt. Die Kondensate nehmen die Werte

$$\langle\sigma\rangle = f_\pi \quad \langle\vec{\pi}\rangle = 0 \tag{4.20}$$

an. In der Quantenfeldtheorie steht die zweite Ableitung des Potentials nach einem beliebigen Feld für die Masse des Teilchens, welches durch das Feld beschrieben wird. Zusammen mit Gleichung (4.17) und der dynamischen Quarkmasse m_q=hσ ergeben sich also die Bestimmungsgleichungen im Vakuum

$$\left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = m_\sigma^2 \tag{4.21}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\pi_a^2}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = m_{\pi_a}^2 \tag{4.22}$$

$$\left.\frac{\partial\Omega_{MF}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=f_\pi,\vec{\pi}=0} = 0 \tag{4.23}$$

$$hf_\pi = m_q \tag{4.24}$$

welche nun in sMFA und eMFA bezüglich der Parameter gelöst werden kann. Die Bestimmung ist in Appendix B ausgeführt.

5 Bestimmung der Zustandsgleichung

Um die Zustandsgleichung, also den Zusammenhang P(ϵ), zu berechnen bedarf man sich der Thermodynamik. Ausgehend von der Euler-Gleichung für die innere Energie U= TS-pV+μN und dem allgemeinen Großkanonischen Potential $\tilde{\Omega}$=U-TS-μN=-pV lässt sich die Energiedichte bestimmen zu[1]

$$\epsilon = Ts + \Omega + \mu n \tag{5.1}$$

Dabei ist zu beachten, dass der Druck am Minimum des großkanonischen Potentials definiert ist mit Gleichung (4.17).
Die Entropie- und Teilchendichte lässt sich direkt berechnen und ist nur abhängig von dem Quark-Antiquark-Term, da das Potential U(σ,$\vec{\pi}$) und der Vakuumterm Ω_{vac} nicht explizit von dem chemischen Potential bzw. von der Temperatur abhängt.

$$s = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = -\frac{\partial\Omega_{q\bar{q}}}{\partial T} = -\frac{\Omega_{q\bar{q}}}{T} + 2N_cN_fT\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{\pm}\left(\frac{\beta^2(E_q \pm \mu)}{1+e^{\beta(E_q\pm\mu)}}\right) \tag{5.2}$$

$$n = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = -\frac{\Omega_{q\bar{q}}}{\mu} = 2N_cN_fT\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{\pm}\left(\frac{\mp\beta}{1+e^{\beta(E_q\pm\mu)}}\right) \tag{5.3}$$

5.1 Approximation T→0

Im Folgenden wird die Näherung des Großkanonischen Potential bei verschwindender Temperatur betrachtet. Diese Vereinfachung scheint im ersten Moment sehr grob zu sein, aber tatsächlich ist diese Näherung sehr zutreffend für kompakte Objekte, denn die Effekte der Temperatur sind im Bezug zu der Energie der Fermi-Entartung weitaus geringer.
Bei der Grenzwertbetrachtung T→0 [2] treten Funktionen der Form

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{1+e^{\beta x}} = \Theta(-x) \tag{5.4}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\frac{ln(1+e^{-\beta x})}{\beta} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{\beta\to\infty}\frac{-x}{1+e^{\beta x}} = -x\Theta(-x) \tag{5.5}$$

[1] Im folgenden wird die Dichte der jeweiligen Größen betrachtet, welche durch Kleinbuchstaben notiert werden. Beispiel: s = $\frac{S}{V}$, außerdem $\epsilon = \frac{U}{V}$ und $\Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{V}$

[2] $\beta = \frac{1}{T} \Rightarrow T \to 0 \Leftrightarrow \beta \to \infty$

auf, welche im Limes durch die Heavisidefunktion ausgedrückt werden. In Gleichung (5.5) wurde die Regel von de l'Hospital verwendet um den Grenzwert zu berechnen. Die Summanden der Energiedichte (5.1) werden nun einzeln im Grenzwert T→0 betrachtet, das ist daher möglich, weil jeder Summand für sich ein endliche Ergebnis liefern .

$$\lim_{\beta\to\infty}\Omega_{q\bar{q}} = \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \sum_{\pm}(E_q \pm \mu)\Theta(-E_q \mp \mu) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\infty} Ts =& \lim_{\beta\to\infty}(-\Omega_{q\bar{q}}) + \lim_{\beta\to\infty} 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sum_{\pm}\left(\frac{E_q \pm \mu}{1+e^{\beta(E_q\pm\mu)}}\right)\\ =& \lim_{\beta\to\infty}(-\Omega_{q\bar{q}}) + \underbrace{\frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \sum_{\pm}(E_q \pm \mu)\Theta(-E_q \mp \mu)}_{=\lim_{\beta\to\infty}\Omega_{q\bar{q}}}\\ =& 0\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\mu n = \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \sum_{\pm}\Theta(-E_q \mp \mu) \tag{5.8}$$

Die Integrale der Gleichungen (5.6-5.8) können weiter ausgewertet werden. Für ausschließlich positive chemische Potentiale reduziert sich die Summe auf den Term proportional zu $\Theta(-E_q+\mu)$. Wird nun die Heavisidefunktion ausgeführt, mit $E_q = \sqrt{p^2+m_q^2}$ ergibt sich endgültig

$$\begin{aligned}\Omega_{q\bar{q}}^{\beta\to\infty} =& \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \Theta(p_F - p)(E_q - \mu)\\ =& \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^{p_F} dp p^2 (E_q - \mu)\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\mu n^{\beta\to\infty} =& \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^\infty dp p^2 \Theta(p_f - p)\\ =& \frac{N_c N_f}{\pi^2}\int_0^{p_F} dp p^2 = \frac{N_c N_f}{3\pi^2}p_F^3\end{aligned} \tag{5.10}$$

mit dem Fermi Impuls

$$p_F = \Theta(\mu - m_q)\sqrt{\mu^2 - m_q^2} \tag{5.11}$$

5.2 Zustandsgleichung

Um den Druck richtig zu beschreiben wird die Bedingung eingeführt, dass dieser bei verschwindender Temperatur und Dichte ebenfalls verschwindet. Das Großkanonische Potential kann beliebig verschoben werden und es folgt für den Druck bei T=0

$$p(\mu) = -(\Omega_{MF}(\mu) - \Omega_{MF}(\mu = 0)) \tag{5.12}$$

Mit dieser Definition des Drucks und der Gleichung (5.1) zusammen mit (5.7,5.9,5.10) und bei Betrachtung der eMFA dem Vakuum Term, kann nun die Zustandsgleichung berechnet werden. Dabei wird ähnlich wie beim Neutronen-Gas-Modell $\epsilon(\mu)$ und p(μ) bei Variation von μ aufgetragen. Um bei der numerischen Berechnung bei gegebenem Druck die Energiedichte zu erhalten wird wieder die root-finding Methode verwendet um das entsprechende chemische Potential zu erhalten.

6 Ergebnisse

Mit der nun gewonnenen Zustandsgleichung des Quark-Meson-Modells kann dieses auf ihre Masse-Radius-Relation überprüft werden. Sofern es nicht explizit angegeben, wird für die Massen m_σ = 650 MeV , m_π = 138 MeV, $m_q = 300 MeV$, die Zerfallskonstante f_π=93 MeV und dem cutoff-Parameter Λ=2500 MeV festgelegt. Zunächst wird der cutoff variiert, in Abbildung 7 ist die EOS für verschiedene Werte zu sehen, dabei fällt auf, dass bei verschwindendem Druck die Energiedichte nicht verschwindet. In anderen effektiven Modellen wird dieser Zusammenhang als Bag Konstante eingeführt um das quark confinement zu modellieren. Dabei sind Quarks als freies Fermi-Gas in dieser 'Tasche' und wirken dem Vakuumdruck entgegen [7] . Außerdem ist ersichtlich, dass bei größer werdendem cutoff die Energiedichte bei gegebenem Druck zunimmt, dadurch wird die Maximal Masse abnehmen.

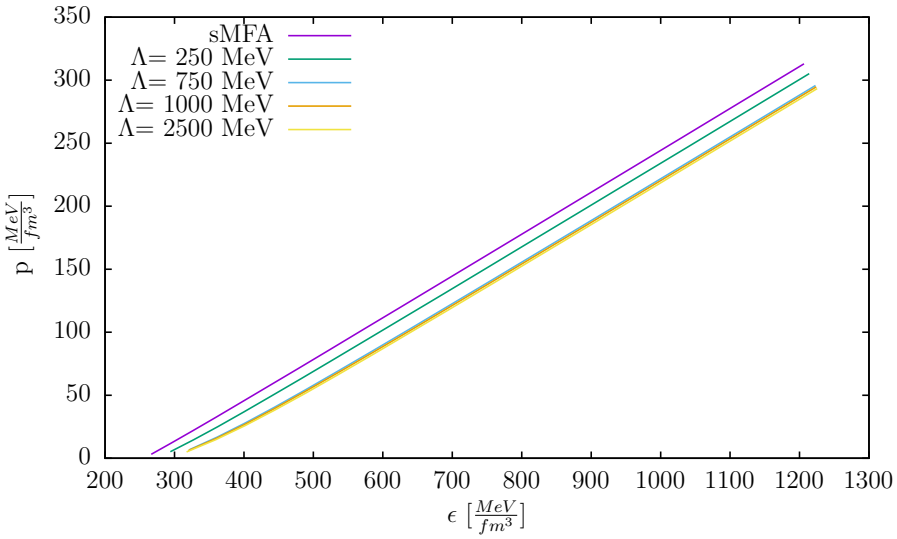

Abbildung 7: EOS des QM-Modells unter verschiedenen cutoff Werten

Für die Masse-Radius Relationen, Abbildung 8, ergeben sich maximale Massen von 1,65-1,86 $M_\odot$ bei Radien von 9,03-10,32 km, je nach cutoff Wert.

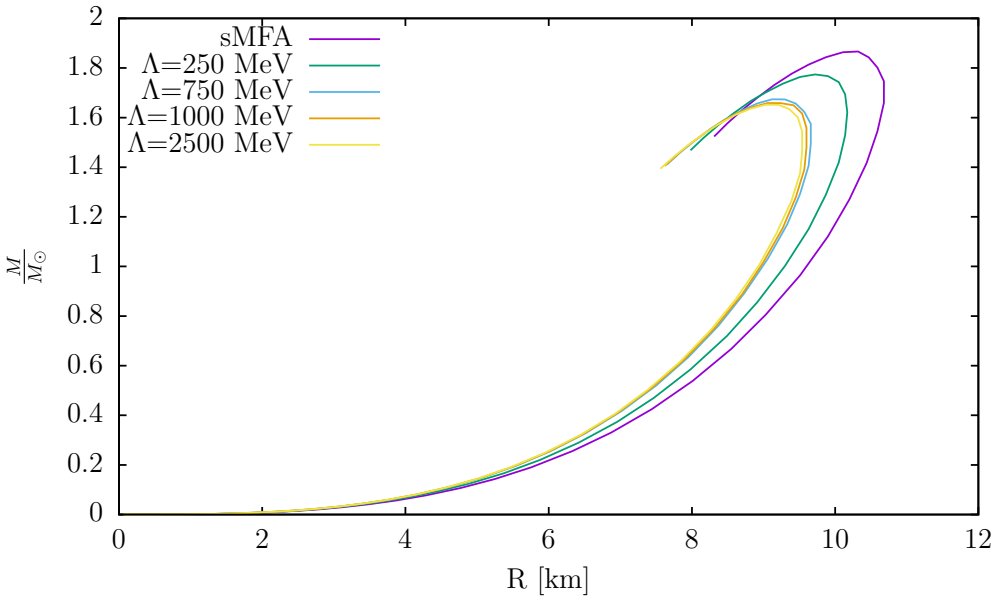

Abbildung 8: Masse-Radius Relation für verschiedene cutoff Werte

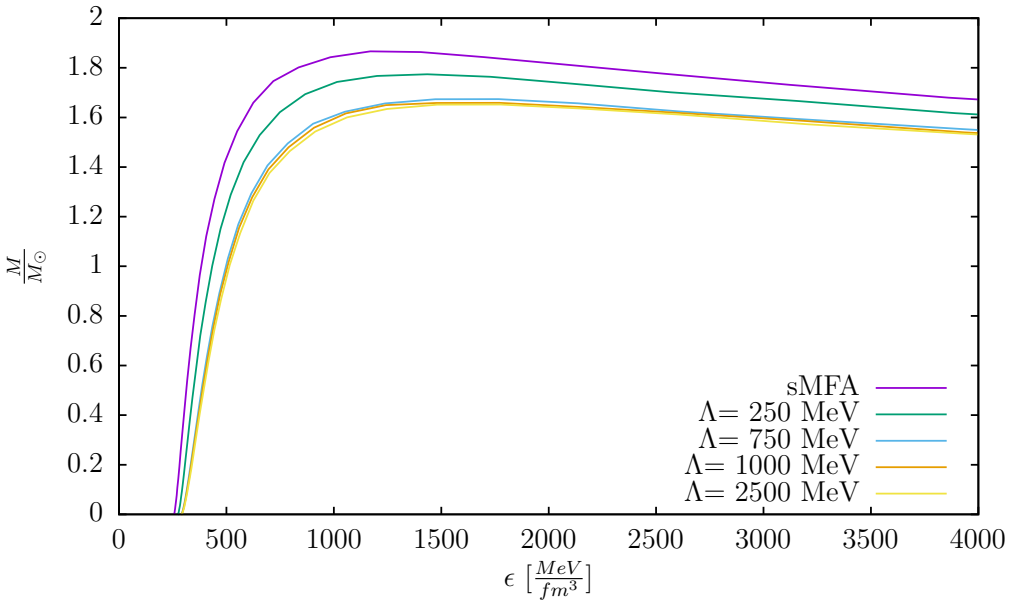

Abbildung 9: Masse in Abhängigkeit von der zentralen Energiedichte

Nach Gleichung (3.6) ergibt sich mit dem Maximum in Abbildung 9 wieder eine Beschränkung. Mit der Masse-Radius Relation in Abbildung 8 ergibt sich eine Radiusobergrenze für mögliche Neutronensterne, im Vergleich

dazu gab es im Fermigas-Modell eine Radiusuntergrenze. Das ist damit zu begründen, dass die Zustandsgleichungen der beiden Modelle sich bei verschwindenden Drücken unterschiedlich verhalten. Bei dem Fermigas-Modell verschwindet dieser bei Dichten gegen null, hingegen beim QM-Modell bleibt Energiedichte im Bereich 260-320 $\frac{MeV}{fm^3}$. Diese Eigenschaft ist charakteristisch Modelle welche Quarksterne beschreiben, wobei die des Fermigas-Modells Hadronische Materie beschreibt.

Um diese Schlussfolgerung zu festigen kann man zusätzlich den Erwartungswert des Sigma Meson Feldes betrachtet. In Abbildung 6 ist für Bereiche $\mu \approx m_q$ eine deutliche Fermi-kante zu sehen, diese Unstetigkeit kann als Indiz für den Phasenübergang von Hadronischer zu Phasmaphase gedeutet werden.

Da die Masse des Sigma Mesons nicht genau bekannt ist, wird nun die EOS unter verschiedenen Massen aufgetragen. In Abbildung 10 sieht man dabei, dass größere Massen die EOS 'härter' macht und dadurch die Maximale Masse des Sterns verringert, für kleinere Massen wird diese dementsprechend 'weicher' und es ergeben sich größere Maximale Massen. Daraus kann wiederum die Masse-Radius Relation berechnet werden, was hier nicht weiter ausgeführt wird.

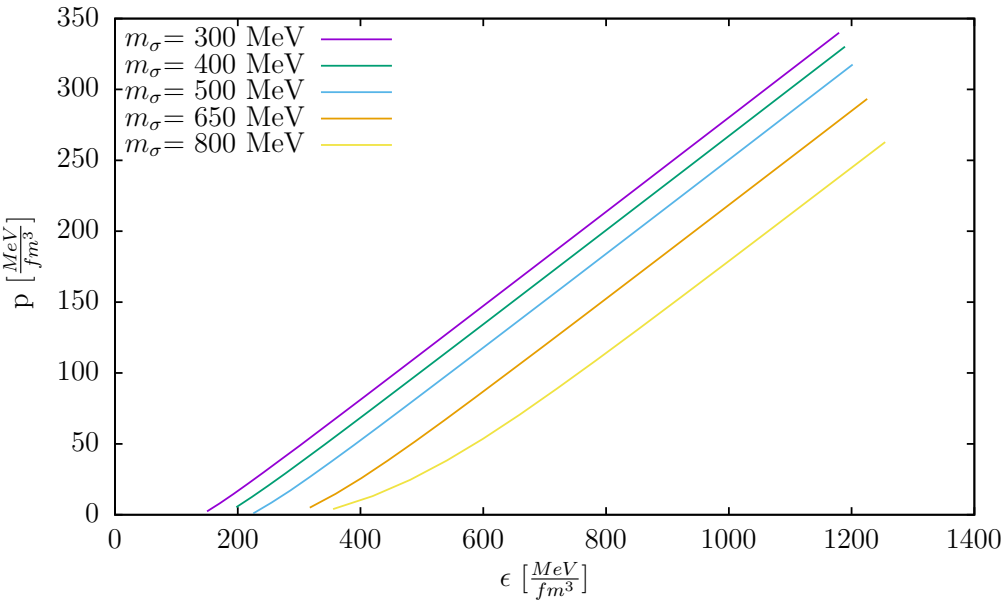

Abbildung 10: EOS unter Variation der Sigma Meson Masse bei Λ=2500 MeV

7 Ausblick

Mit dieser Arbeit wurde aufgezeigt welche Massen unter dem 2-flavor Quark-Meson-Modell möglich sind, dabei hat sich herausgestellt, dass sich die Materie nicht mehr in der Hadronischen Phase befindet, sondern einen Phasenübergang in die Plasmaphase gemacht hat.

Eine sinnvolle Erweiterung des Modells wäre die genauere Beschreibung der Quark-Gluon-Plasma Phase bezüglich des Deconfinements und Phasenübergangs. In dieser Arbeit wurde sich ausschließlich auf eine Materieart beschränkt, um ein realistischeres Modell zu erhalten können beispielsweise zusätzlich Elektronenanteile betrachtet werden, welche den Lagrangian um einen Term $\mathcal{L}_e$ erweitert.

A Konventionen und Konstanten

In dieser Arbeit wurde natürliche Einheiten verwendet mit $\hbar$=c=k_B=1 , ausgenommen Kapitel 2 .

Des weiteren wurde die Einsteinsche Summenkonvension verwendet, wobei über gleiche oben und unten stehenden Indizes summiert wird und dadurch das Summenzeichen aus Gründen der Übersicht weggelassen wird , z.B.

$$\sum_{\nu} a_\nu b^\nu = a_\nu b^\nu$$

Dabei wurde die Signatur des Metrischen Tensors (- + + +) verwendet . Außerdem wurde die Notation $\sum_{\pm}$ verwendet, wobei gemeint ist, dass über jeweils die oben, bzw. unten stehenden Vorzeichen summiert wird.

Für das numerische lösen der TOV-Gleichung ist es hilfreich das System G=c=1 zu verwenden, dort kann jegliche Größe in Einheiten von km ausgedrückt werden, dabei wurde explizit für die Sonnenmasse $M_\odot$=1.4766 km verwendet.

Für die weiteren Konstanten wurde verwendet :

$$\begin{aligned} m_n =& 939,5654133 \frac{MeV}{c^2} \\ G =& 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \\ \hbar =& 1,05457162825 \cdot 10^{-34} Js \\ c =& 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \\ e =& 1,602176487 \cdot 10^{-19} C \end{aligned} \tag{A.1}$$

Eine häuft vorkommende Funktion ist die Heaviside-Funktion welche definiert ist mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

B Bestimmung der Parameter

Die Parameter der Mesonischen Potentials werden im Vakuum festgelegt, also bei T=μ=0. Die Werte der Kondensate werden auf $<\sigma>=f_\pi$ und $<\vec{\pi}>=0$ festgelegt. Somit können nun die 4 Parameter durch die 4 Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma^2} = m_\sigma^2 \quad \frac{\partial^2\Omega}{\partial\pi_a^2} = m_{\pi_a}^2 \tag{B1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} = 0 \qquad m_q = h\sigma \tag{B2}$$

festgelegt werden.

B.1 sMFA

In die sMFA reduziert sich das großkanonische Potential

$$\Omega_{sMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + U(\sigma, \vec{\pi}) \tag{B3}$$

für T=μ=0 auf das mesonische Potential U(σ,$\vec{\pi}$)=$\frac{\lambda}{4}(\sigma^2+\vec{\pi}^2-\nu^2)^2-c\sigma$, denn $\Omega_{q\hat{q}}(\mu$=0,T=0)=0. Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma^2}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} = \lambda(3f_\pi^2-\nu^2) = m_\sigma^2 \tag{B4}$$

$$\left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\pi_a^2}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} = \lambda(f_\pi^2-\nu^2) = m_{\pi_a}^2 \tag{B5}$$

$$\left.\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} = \lambda f_\pi(f_\pi^2-\nu^2) - c = 0 \tag{B6}$$

$$f_\pi h = m_q \tag{B7}$$

In der Näherung, dass alle drei Pion-Massen gleich sind ergibt das lösen des Gleichungssystems die Parameter

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2}{2f_\pi^2} \tag{B8}$$

$$\nu^2 = \frac{f_\pi^2(m_\sigma^2-3m_\pi^2)}{m_\sigma^2-m_\pi^2} = \frac{m_\sigma^2-3m_\pi^2}{2\lambda} \tag{B9}$$

$$c = m_\pi^2 f_\pi \tag{B10}$$

$$h = \frac{m_q}{f_\pi} \tag{B11}$$

B.2 eMFA

In der eMFA wird noch zusätzlich der Vakuum Term mit betrachtet, das großkanonische Potential nimmt die Form

$$\Omega_{sMFA} = \Omega_{q\bar{q}} + \Omega_{vac} + U(\sigma, \vec{\pi}) \tag{B12}$$

an. Der Vakuum Term ist nicht abhängig von dem chemischen Potential bzw. der Temperatur und spielt daher ein entscheidende Rolle beim bestimmen der Parameter.

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma^2}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} &= \lambda(3f_\pi^2 - \nu^2) - k\int_0^\Lambda dpp^2\left[\frac{h^2}{E_q} - \frac{h^4\sigma^2}{E_q^3}\right] \\ &= \lambda(3f_\pi^2 - \nu^2) + h^2 I_1 + h^4 f_\pi^2 I_2 = m_\sigma^2 \end{aligned} \tag{B13}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2\Omega}{\partial\pi^2}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} &= \lambda(f_\pi^2 - \nu^2) - k\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^2}{E_q} \\ &= \lambda(f_\pi^2 - \nu^2) + h^2 I_1 = m_\pi^2 \end{aligned} \tag{B14}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}\right|_{<\sigma>=f_\pi,<\vec{\pi}>=0} &= \lambda f_\pi(f_\pi^2 - \nu^2) - c - k\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^2}{E_q} \\ &= \lambda f_\pi(f_\pi^2 - \nu^2) - c + h^2\sigma I_2 = 0 \end{aligned} \tag{B15}$$

$$f_\pi h = m_q \tag{B16}$$

Dabei wurden die auftretenden Integrale durch

$$I_1 = -k\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^2}{E_q} \qquad I_2 = k\int_0^\Lambda dpp^2\frac{h^4\sigma^2}{E_q^3} \tag{B17}$$

substituiert mit der Konstanten k= $\frac{8\pi N_c N_f}{(2\pi)^3}$. Das Lösen des Gleichungssystems ergibt für die Parameter

$$\lambda = \frac{m_\sigma^2 - m_\pi^2 - f_\pi^2 h^4 I_2}{2f_\pi^2} \tag{B18}$$

$$\nu^2 = \frac{f_\pi^2(m_\sigma^2 - 3m_\pi^2) + h^2 I_1 - f_\pi^2 h^4 I_2}{m_\sigma^2 - m_\pi^2 - f_\pi^2 h^4 I_2} \tag{B19}$$

$$c = m_\pi^2 f_\pi \tag{B20}$$

$$h = \frac{m_q}{f_\pi} \tag{B21}$$

Die Integrale I_1 und I_2 sind analytisch lösbar mit

$$I_1 = -\frac{1}{4}k\left[2\Lambda\sqrt{\Lambda^2 + (h\sigma)^2} - 2(h\sigma)^2 arcsinh(\frac{\Lambda}{h\sigma})\right] \tag{B22}$$

$$I_2 = k\left[-\frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda^2 + (h\sigma)^2}} + arcsinh(\frac{\Lambda}{h\sigma})\right] \tag{B23}$$

Alternativ kann die Relation

$$arcsinh(x) = ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \tag{B24}$$

verwendet werden.

C Numerik

C.1 Runge-Kutta-Verfahren

Um die TOV-Gleichung zu lösen benötigt man eine Methode um Anfangswertprobleme der Form y'=f(t,y)=f(t,y(t)) mit der Anfangsbedingung $y(t_0)=y_0$ zu lösen.
Allgemein kann diese Gleichung integriert werden mit

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau f(\tau, y(\tau)) \tag{C1}$$

Da dieses Integral in den meisten Fällte nicht analytisch lösbar ist oder um den Rechenaufwand gering zu halten, wird die Differenzialgleichung schrittweise in dem Intervall $[t_n,t_n+h]$ durch eine Quadraturformel genähert. Für das explizite Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ergibt sich mit $y_n \approx y(t_n)$ und $t_{n+1}=t_n+h$ die Näherung

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) =& y(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} d\tau f(\tau, y(\tau)) \\ \approx& y_n + h \cdot \frac{1}{6}(k_1^{(n)} + 2k_2^{(n)} + 2k_3^{(n)} + k_4^{(n)}) \end{aligned} \tag{C2}$$

mit den vier Zwischenwerten

$$k_1^{(n)} = f(t_n, y_n) \tag{C3}$$

$$k_2^{(n)} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1^{(n)}}{2}) \tag{C4}$$

$$k_3^{(n)} = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2^{(n)}}{2}) \tag{C5}$$

$$k_4^{(n)} = f(t_n + h, y_n + k_3^{(n)}) \tag{C6}$$

Um eine Balance zwischen numerischer Genauigkeit und Rechenaufwand herzustellen, wird zusätzlich eine adaptive Schrittweite verwendet. Dadurch wird die Schrittweite h nicht mehr konstant gewählt, sondern durch eine Abschätzung des Fehlers zwischen Näherung und der exakten Lösung variiert. Gibt man eine gewünschte Genauigkeit ϵ vor, so wird z.B die Schrittweite erhöht, falls der Fehler unter dieser Schranke liegt.

C.2 root-finding

Es ist bei der Berechnung der TOV-Gleichung notwendig für einen gegebenen Druck die dazugehörige Energiedichte zu bestimmen. Da die Zustandsgleichung transzendent ist bzw. p und ϵ bezüglich ihres Arguments, wird eine root-finding Methode angewendet.
Mit der Sekanten-Methode wird für zwei Anfangswerte x_1 und x_2 eine Sekante an den Funktionswerte f(x_1) und f(x_2) gebildet. Besitzen die Funktionwerte unterschiedliche Vorzeichen kann mit der Iteration

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \tag{C7}$$

die Nullstelle beliebig genau approximiert werden.

Literatur

[1] Torsten Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Springer, 2012.

[2] Norman K Glendenning. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Julian Metzger. Bachelorarbeit,vakuum fluktuationen und der chirale phasenübergang. 2013.

[4] Matthias Puhr. The qcd phase diagram with higher moments of charge fluctuations, diplomarbeit. 2012.

[5] Richard R Silbar and Sanjay Reddy. Neutron stars for undergraduates. *arXiv preprint nucl-th/0309041*, 2003.

[6] Fridolin Weber. Strange quark matter and compact stars. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 54(1):193–288, 2005.

[7] Andreas Zacchi. Ein drei flavor quark-meson modell für kompakte sterne. 2013.

Erklärung

Hiermit versichere ich diese Arbeit selbstständig und nur mit den benannten Quellen und Hilfsmitteln geschrieben zu haben. Stellen, welche aus Quellen entnommen wurden sind also solche gekennzeichnet.

_____
Name, Datum