

Versuch 3 A: Bestimmung von Schallgeschwindigkeiten

Physikalische Grundbegriffe

- **Schwingung, harmonische Schwingung**
- **Schwingungsdauer, Frequenz, Kreisfrequenz, Phase**
- **Dämpfung, Resonanz, Erzwungene Schwingung**

weiterführende Literatur:

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 89-100, 299-329
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 111-133
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 206-219

Erläuterung der wichtigsten physikalischen Begriffe

- Schwingungen

Unter einer Schwingung versteht man einen zeitlich periodischen Vorgang.

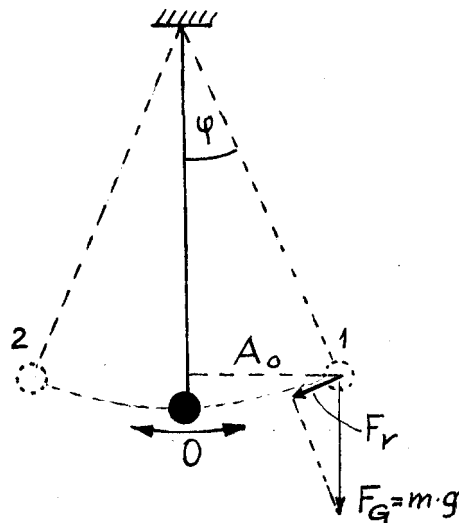


Abb. 3.1: Zur Herleitung eines Schwingungsvorganges an Hand des mathematischen Pendels.

Eine Schwingung entsteht immer dann, wenn man ein System aus seiner stabilen Gleichgewichtslage oder Ruhelage (das ist die Position der minimalen potentiellen Energie) auslenkt und dann sich selbst überläßt. Lenkt man z.B. ein Pendel aus seiner Ruhelage Position 0 bis zur Position 1 aus, so hat sich dadurch die potentielle Energie erhöht (siehe Abb. 3.1). Es wirkt nun eine rücktreibende Kraft $m \cdot g \cdot \sin \varphi$ (m = Masse des Pendelkörpers; g = Erdbeschleunigung) auf den Pendelkörper, die ihn in Richtung der Ruhelage beschleunigt. Dabei nimmt die potentielle Energie ab, die kinetische zu. Bei Erreichen der Ruhelage bewirkt die kinetische Energie, daß sich der Körper über die Ruhelage hinaus weiter bewegt. Die außerhalb der Ruhelage wieder auftretende rücktreibende Kraft verlangsamt die Bewegung, die kinetische Energie nimmt ab, die potentielle zu. Das Pendel kommt zum

Stillstand (Position 2), wenn die kinetische Energie sich vollständig in potentielle Energie umgewandelt hat. Von nun an bewegt sich der Pendelkörper erneut in Richtung Ruhelage. Es entsteht so eine **periodische Bewegung** um die Ruhelage, bei der ein ständiger **Wechsel von potentieller Energie in kinetische und umgekehrt** stattfindet.

Die physikalischen Merkmale einer Schwingung sind:

- **Amplitude A_0**
- **Schwingungsdauer T**
- **Frequenz ν**

Die **Amplitude A_0** ist die maximale Auslenkung. Die **Schwingungsdauer T oder Periode** ist die Zeit für einen **vollen Schwingungsvorgang** und unter der **Frequenz ν** versteht man die Zahl der Schwingungen pro Sekunde. Es gilt:

Definition: Frequenz ν

$$\nu = \frac{1}{T}$$

SI-Einheit für ν : $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hz (Hertz)}$

Trägt man für das oben beschriebene Pendel die Auslenkung A als Funktion der Zeit t auf, so erhält man die in Abb.3.2 dargestellte Kurve.

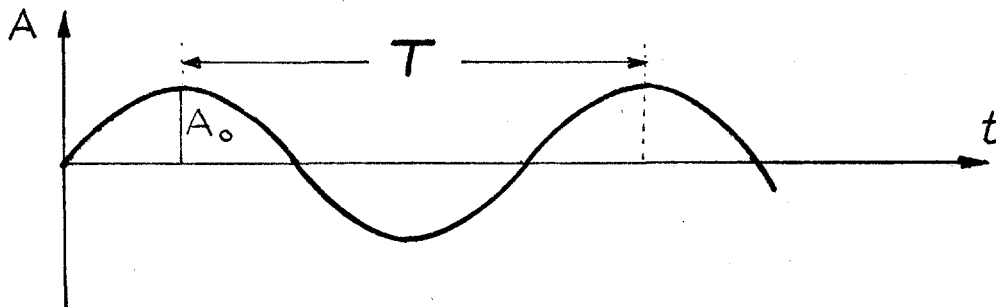


Abb. 3.2: Mathematische Darstellung eines periodischen Vorgangs.

Die genaue mathematische Behandlung (siehe Anhang I) zeigt, daß dies eine Sinus- bzw. Cosinuskurve ist, wenn die rücktreibenden Kräfte am Pendel proportional zur Auslenkung sind. Man spricht von **Sinus- bzw. Cosinusschwingungen** und nennt diese auch **harmonische Schwingungen**.

Die mathematische Darstellung einer Sinusschwingung lautet:

$$\mathbf{A(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot \nu \cdot t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)} \quad \mathbf{3.1}$$

Definition: Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi \cdot \nu$$

SI-Einheit von ω : 1 s^{-1}

Das Argument ωt ist von der Dimension eines Winkels und ist immer im Bogenmaß zu betrachten.

- **Phase, Phasendifferenz**

Die **Phase** einer Schwingung charakterisiert den momentanen Schwingungszustand. Nimmt das Argument des Sinus in Gl.3.1 um 2π zu (dies entspricht dem Zeitzuwachs von genau einer Periode T), so nimmt $A(t)$ wieder den gleichen Wert an und man bezeichnet beide Schwingungszustände als **phasengleich**.

Betrachtet man zwei Schwingungen gleicher Frequenz, die gleichzeitig ablaufen, so besteht zwischen den beiden Schwingungen eine **Phasendifferenz** $\Delta\varphi$, wenn phasengleiche Punkte (z.B. die Maximalausschläge) zeitlich nicht zusammenfallen. Abb. 3.3 zeigt ein Beispiel. Die Schwingung 2 eilt der Schwingung 1 um den Phasenwinkel $\Delta\varphi$ voraus. Die Phasendifferenz kann auch als Zeit Δt in Bruchteilen der Periodendauer T angegeben werden.

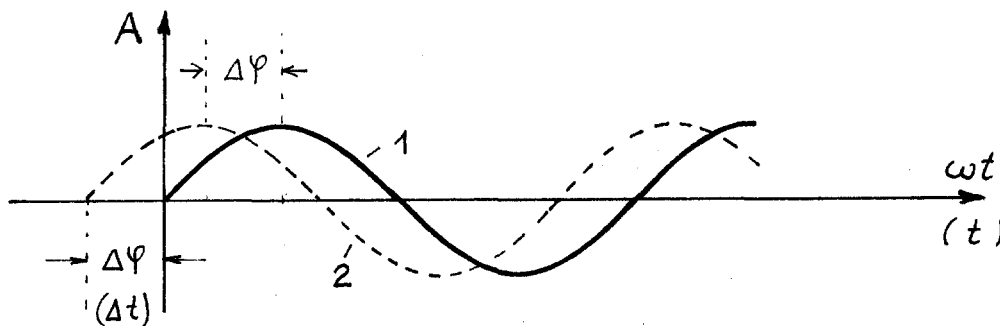


Abb. 3.3.: Beispiel zweier Schwingungen, die hinsichtlich der Phasen zeitlich gegeneinander verschoben sind.

Die Schwingung 1 wird beschrieben durch:

$$A_1(t) = A_0 \sin(\omega \cdot t)$$

Für die Schwingung 2 gilt dann:

$$A_2(t) = A_0 \sin(\omega \cdot t + \Delta\varphi)$$

mit $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$.

- **Gedämpfte Schwingung**

Von **ungedämpften Schwingungen** spricht man, wenn sich der Betrag der Amplitude A_0 zeitlich nicht ändert. In der Praxis treten aber immer Reibungskräfte auf, die die Amplitude einer freien Schwingung allmählich kleiner werden lassen. Man spricht von einer **gedämpften Schwingung** (Abb.3.4). Ungedämpfte Schwingungen sind nur möglich, wenn die Reibungsverluste durch ständige Energiezufuhr ausgeglichen werden.

In vielen Fällen ist die die Dämpfung bewirkende Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit (Stokessches Reibungsgesetz!). In solchen Fällen nimmt die Amplitude der Schwingung **exponentiell** ab. Die gedämpfte Schwingung wird mathematisch dann durch folgende Gleichung beschrieben:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

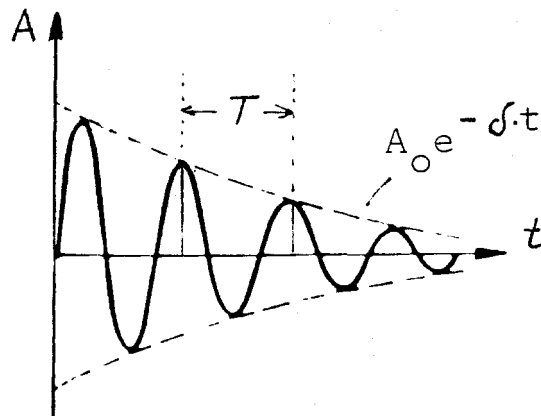


Abb. 3.4: Mathematische Darstellung einer gedämpften Schwingung.

δ heißt **Dämpfungskonstante**. Sie ist umso größer, je größer die Reibungskraft ist. Die Frequenz ω der gedämpften Schwingung ist kleiner als die Frequenz der ungedämpften Schwingung. Es gilt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

ω_0 = Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung.

Für geringe Dämpfung ($\delta \ll \omega_0$) ist die Frequenz ω der gedämpften Schwingung nur wenig verschieden von der Frequenz ω_0 der ungedämpften.

• Freie Schwingung, Eigenfrequenz

Läßt man ein schwingungsfähiges System frei schwingen, so schwingt es mit einer bestimmten, für das System charakteristischen Frequenz ν_0 , die man als **Eigenfrequenz** des Systems bezeichnet.

Die Eigenfrequenz hängt von verschiedenen Parametern des schwingenden Systems ab. Am Beispiel des Fadenpendels und der Spiralfeder werde dies ohne Herleitung aufgezeigt:

Das Fadenpendel

Beim Fadenpendel hängt die Eigenfrequenz ν_0 , von der Pendellänge l und von der Erdbeschleunigung g ab. Die Pendelmasse spielt keine Rolle, wenn ihre Abmessung klein gegenüber der Pendellänge ist. Es gilt:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{bzw.} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

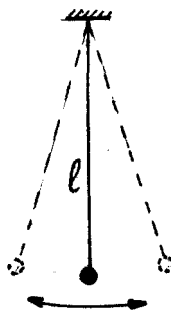


Abb. 3.5: Das Fadenpendel

Die Spiralfeder

Bei einer schwingenden Spiralfeder hängt die Eigenfrequenz von der angehängten Masse m (bei genauer Betrachtung muß auch ein Teil der Masse der Feder selbst dazugenommen werden) und von den elastischen Materialeigenschaften und den Dimensionen der Feder ab, die in der Federkonstanten D zusammengefaßt sind. Es gilt:

$$\frac{1}{v_0} = T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Federkonstante D ist wie folgt definiert: Wird die Feder durch eine Kraft F um die Strecke s gedehnt, so gilt:

$$D = \frac{F}{s}$$

SI-Einheit für D : 1 N / m.

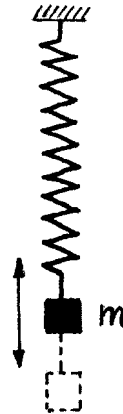


Abb. 3.6: Das Federpendel.

- Erzwungene Schwingung, Resonanz

Läßt man auf ein schwingungsfähiges System eine periodische Kraft einwirken, so führt das System, das dann als **Resonator** bezeichnet wird, erzwungene Schwingungen mit der Frequenz der erregenden Kraft aus. Dem Resonator wird dabei laufend periodisch Energie zugeführt. Die Amplitude des Resonators hängt von der Frequenz des Erregers ab.

Trägt man die Amplitude A des Resonators als Funktion der Erregerfrequenz v auf, so erhält man die in Abb.3.7 dargestellte **Resonanzkurve**.

Die Form der Kurve wird wesentlich durch die Dämpfung des Resonators bestimmt. Die Kurven 1, 2 und 3 beziehen sich auf eine kleine, eine mittlere und eine große Dämpfung des Resonators. Allgemein hat die Amplitude des Resonators bei kleinen Erregerfrequenzen einen Grenzwert A_0 , wächst dann allmählich an, durchläuft ein Maximum und geht für sehr große Frequenzen asymptotisch gegen den Wert Null.

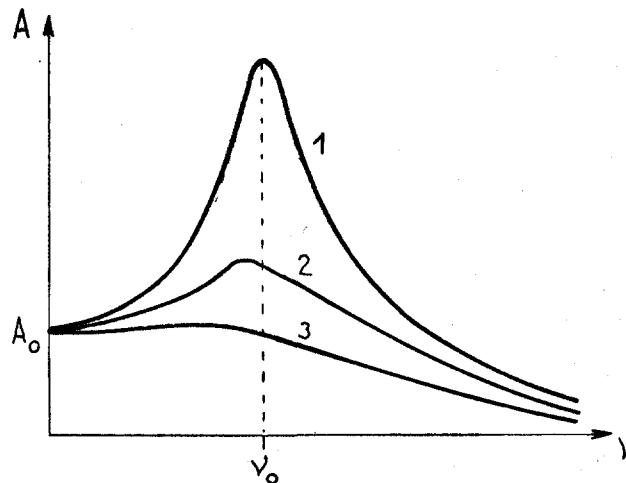


Abb. 3.7: Schematische Darstellung der Resonanzkurve für verschiedene Dämpfung.

Der Fall maximaler Amplitude wird als **Resonanz** bezeichnet. Die zugehörige Erregerfrequenz heißt **Resonanzfrequenz**. Bei kleiner Dämpfung ist die Resonanzfrequenz nahezu gleich der Eigenfrequenz ν_0 des Resonators. Bei großer Dämpfung ist sie kleiner als ν_0 . Zwischen Erreger und Resonator besteht eine Phasendifferenz φ , die von der Erregerfrequenz und der Dämpfung abhängt.

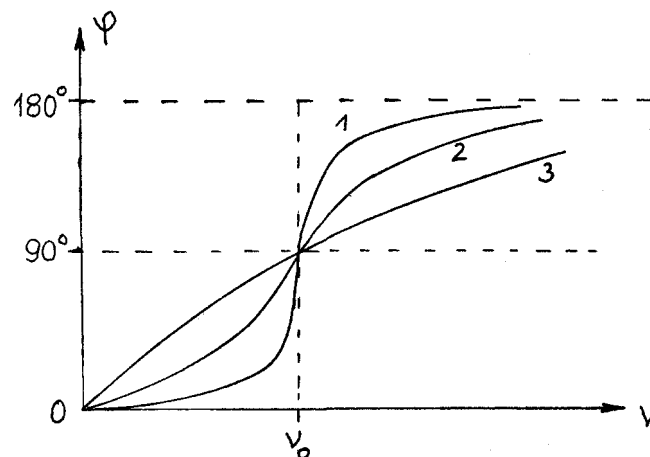


Abb. 3.8: Abhängigkeit der Phasenverschiebung von der Erregerfrequenz.

Abb. 3.8 zeigt die Abhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen Resonator und Erreger bei kleiner (1), mittlerer (2) und großer Dämpfung (3). Die Phasenverschiebung ist bei niedrigen Erregerfrequenzen zunächst klein, nimmt aber mit der Frequenz zu und erreicht bei der Eigenfrequenz den Wert 90° . Für hohe Frequenzen nähert sich φ dem Wert 180° . Die meiste Energie nimmt der Resonator bei der Eigenfrequenz ν_0 auf, gleichgültig wie groß die Dämpfung ist.

• Überlagerung harmonischer Schwingungen

I. Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz und Richtung

Bei der Überlagerung (Superposition) zweier oder mehrerer Sinusschwingungen gleicher Frequenz aber mit verschiedenen Anfangsphasen und Amplituden entsteht wieder eine

Sinusschwingung **gleicher** Frequenz. Amplitude und Phasenwinkel der resultierenden Schwingung lassen sich besonders einfach mit dem "Zeigerdiagramm" ermitteln (siehe Anhang II).

2. Überlagerung von Schwingungen verschiedener Frequenz aber gleicher Richtung

Stehen die Frequenzen der zur Überlagerung kommenden Schwingungen im Verhältnis ganzer Zahlen zueinander, so ergibt sich bei der Superposition von Sinus- oder Cosinus-schwingungen zwar wieder ein **periodischer** Vorgang, jedoch keine **harmonische** Schwingung: Es entsteht eine **anharmonische Schwingung**. Die Frequenz des resultierenden Vorgangs ist gleich der kleinsten Frequenz (langsamste Schwingung) der an der Überlagerung beteiligten Schwingungen.

Je nach Frequenz, Phasendifferenz, Amplitude und Zahl der überlagerten Schwingungen läßt sich jede beliebige Schwingungsform erzielen.

Fourier-Analyse

Umgekehrt zur Überlagerung kann jede beliebige vorgegebene anharmonische Schwingung in eine **Summe von harmonischen** Schwingungen verschiedener Frequenzen und Amplituden zerlegt werden (**Fourier-Entwicklung**). Genau genommen sind hierzu unendlich viele Summenglieder nötig. In vielen Fällen kann man aber, je nach der gewünschten Genauigkeit, die Fourier-Entwicklung bereits nach wenigen Gliedern abbrechen.

Ein Beispiel: Fourier-Entwicklung einer Rechteckschwingung

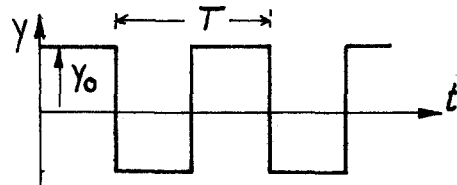


Abb. 3.9: Darstellung einer Rechteckschwingung.

Die Abb.3.9 zeigt eine Rechteckschwingung. Die Fourier-Analyse dieser Schwingung liefert folgendes Ergebnis:

$$y = \frac{4y_0}{\pi} \left[\sin \omega \cdot t + \frac{1}{3} \sin 3\omega \cdot t + \frac{1}{5} \sin 5\omega \cdot t + \dots \right]$$

Die Addition der ersten drei harmonischen Teilschwingungen der Zerlegung der Rechteckschwingung ist in Abb.3.10 dargestellt.

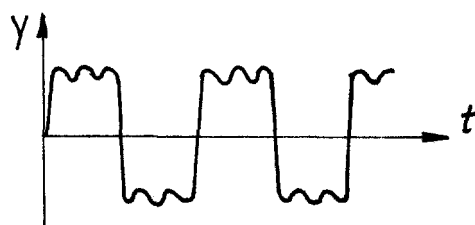


Abb. 3.10: Ergebnis der Fourier-Analyse angewandt auf eine Rechteckschwingung.

3. Überlagerung von Schwingungen verschiedener Frequenz und verschiedener Richtung (Lissajou-Figuren)

Es wird hier nur als Beispiel der Sonderfall der Überlagerung zweier Schwingungen betrachtet, deren Frequenzen gleich sind und deren Schwingungsrichtungen senkrecht zueinander stehen. Die Gleichungen der beiden Schwingungen lauten z.B.

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1) \rightarrow \text{Schwingung in } x\text{-Richtung}$$

$$y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \rightarrow \text{Schwingung in } y\text{-Richtung}$$

Je nach Phasendifferenz und Amplitudenverhältnis ergibt sich als Ergebnis der Überlagerung eine elliptische oder kreisförmige oder geradlinige Schwingung.

Sind die beiden Schwingungen in Phase, d.h. ist $\varphi_1 = \varphi_2$ so ist $y/x = y_0/x_0$ oder $y = \frac{y_0}{x_0} x$.

Dies ist die Gleichung einer Geraden mit der Steigung $\tan \alpha = y_0/x_0$ gegen die x-Richtung (Abb. 3.11a).

Für $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ergeben sich Ellipsen (Abb. 3.11 b,c). Ist die Phasendifferenz $\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$, so ergibt sich wieder eine geradlinige Schwingung (Abb. 3.11 d). Ist speziell die Phasendifferenz gleich 90° und $x_0 = y_0$, so resultiert eine kreisförmige Schwingung (nicht abgebildet). Die in Abb.3.11 dargestellten Kurven heißen nach ihrem Erforscher **Lissajou-Figuren**. Lissajou-Figuren finden Anwendung bei der Frequenzmessung und dem Phasenvergleich.

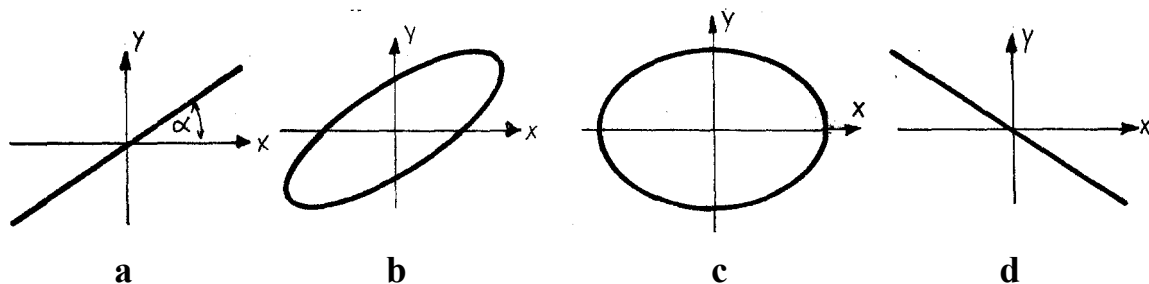


Abb. 3.11: Beispiele für sog. Lissajou-Figuren

• Wellen

Werden Atome oder Moleküle eines Teilbereichs eines elastischen Mediums zu Schwingungen angeregt, so bleiben die Schwingungen nicht auf das Erregerzentrum beschränkt, sondern greifen wegen der elastischen Bindungskräfte (Kopplungskräfte) zwischen den Molekülen auch auf die Nachbarmoleküle über und regen diese zum Mitschwingen an. Der Schwingungszustand breitet sich also im Medium aus, wobei die Ausbreitungsgeschwindigkeit auf jeden Fall vom Material, in manchen Fällen auch von der Frequenz der erregenden Schwingung abhängt. Bei dieser Ausbreitung des Schwingungszustandes schwingen benachbarte Moleküle nicht mit gleicher Phase. Das in Ausbreitungsrichtung folgende Teilchen eilt in der Phase nach. In regelmäßigen Abständen findet man aber Moleküle, die in der Phase übereinstimmen.

Die räumliche Ausbreitung einer Schwingung bezeichnet man als **Welle**. Eine Welle stellt somit einen **zeitlich und räumlich periodischen Vorgang** dar.

Abb. 3.12 zeigt die Darstellung einer Welle. Das Bild zeigt den augenblicklichen

Auslenkungszustand der Moleküle (als kleine Kreise dargestellt) zu einem Zeitpunkt t_1 als Funktion des Ortes (ausgezogene Kurve). Benachbarte Moleküle unterscheiden sich in ihrem Schwingungszustand (Phase). In regelmäßigen Abständen gibt es jedoch phasengleiche Punkte (z.B. bei x_1 und x_2).

Der Abstand zweier benachbarter phasengleicher Punkte in einer Welle heißt **Wellenlänge** λ .

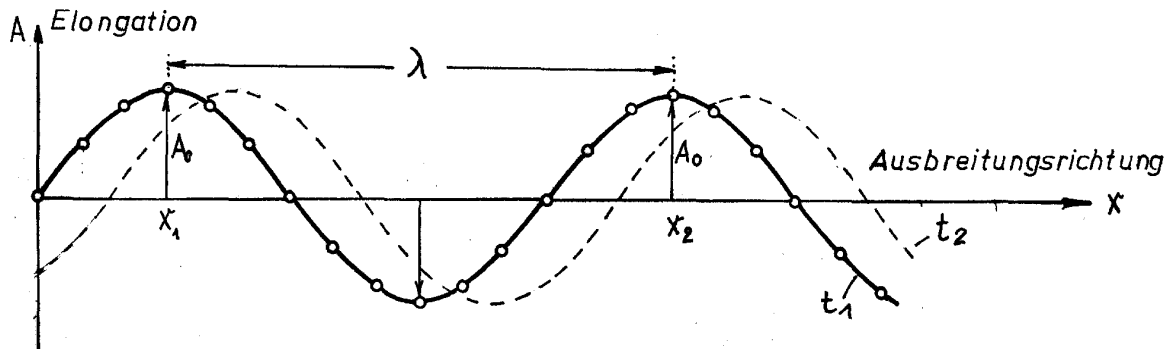


Abb. 3.12: Darstellung der Wellenausbreitung.

Die gestrichelte Kurve stellt den Schwingungszustand der Moleküle zu einem späteren Zeitpunkt t_2 dar. Man erkennt, daß sich z.B. der Zustand der maximalen Auslenkung (Wellenberg) in der Zeit zwischen t_1 und t_2 ein Stück nach rechts verschoben hat. Es dauert genau T Sekunden (T = Schwingungsdauer), bis ein bestimmter Schwingungszustand um die Strecke λ weitergewandert ist. Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** c für einen bestimmten Schwingungszustand - auch **Phasengeschwindigkeit** c genannt - ist daher $c = \lambda/T$ oder

$$c = \lambda \cdot \nu$$

Bei einer Welle ist die Auslenkung A der Teilchen eine **Funktion des Ortes und der Zeit** (im Gegensatz zur Schwingung, bei der die Auslenkung nur eine Funktion der Zeit ist).

Gemeinsames Merkmal aller fortschreitenden Wellen ist die **Ausbreitung der Phase und der Energie**. Ein etwaiger Transport von Materie bei den elastischen Wellen findet nicht statt. Die Moleküle des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet, schwingen lediglich um ihre Ruhelage.

Die mathematische Darstellung für eine Sinuswelle (= harmonische Welle), die sich in positiver x -Richtung ausbreitet, lautet:

$$A(x, t) = A_0 \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

Man unterscheidet zwischen **Transversalwellen** und **Longitudinalwellen**. Bei den Transversalwellen schwingen die Materieteilchen senkrecht, bei den Longitudinalwellen parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Wellen ist **material- und temperaturabhängig**.

In gasförmigen Substanzen ist sie am geringsten, in Festkörpern am größten. Die Werte für Flüssigkeiten liegen dazwischen. In Wasser und organischem Gewebe ist die Ausbreitungs-

geschwindigkeit für Wellen etwa gleich groß (ca. 1600 m/s). Im einzelnen gilt:

- **Für Gase:**

$$c = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa \cdot RT}{M}}$$

$\kappa = c_p / c_v$; c_p = spez. Wärmekapazität bei konst. Druck

c_v = spez. Wärmekapazität bei konst. Volumen

R = Universelle Gaskonstante; M = molare Masse; T = absolute Temperatur;

ρ = Dichte; p = Gasdruck.

In Gasen gibt es nur Longitudinalwellen!

- **Für Flüssigkeiten:**

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

K = Kompressionsmodul (Definition weiter unten im Kapitel **Elastizität**).

- **Für Festkörper:**

Bei Longitudinalwellen: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Bei Transversalwellen: $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

E = Elastizitätsmodul; G = Torsions- oder Scherungsmodul (Definition dieser Größen weiter unten).

- **Schall**

Man spricht von Schallwellen oder von Schall, wenn sich Wellen in einem elastischen Medium ausbreiten und die Frequenzen im Hörbereich des menschlichen Ohres liegen. Dieser Hörbereich erstreckt sich von etwa 16 Hz bis 16 kHz. Schallwellen mit Frequenzen unter der Hörgrenze werden als Infraschall, Schallwellen mit Frequenzen über dem Hörbereich als Ultraschall bezeichnet. Die für die medizinische Diagnostik verwendeten Ultraschallgeräte arbeiten bei Frequenzen von ca. 1 MHz (10^6 Hz).

- **Schallwellen in Gasen**

Bei den Schallwellen in Gasen ist die Vorstellung von der periodischen Bewegung der Moleküle um ihre Ruhelage nicht aufrechtzuerhalten, da die Gasmoleküle nicht an einen festen Ort gebunden sind, sondern eine regellose thermische Bewegung ausführen.

- **Schallwechseldruck**

Man betrachtet daher besser die **Druckverhältnisse** in einer Schallwelle. Eine Schallwelle in

Luft entsteht, wenn sich z.B. eine Lautsprechermembran periodisch hin und her bewegt. Dabei wird die Luft vor der Membran periodisch verdichtet und verdünnt. Diese Zonen erhöhten und erniedrigten Druckes breiten sich mit einer für die Luft charakteristischen Geschwindigkeit — der Schallgeschwindigkeit — in den Raum hinein aus. Vor der Entstehung der Schallwelle herrschte ein räumlich konstanter Druck p_0 (= Barometerdruck). In Abb. 3.13. ist dies die strichpunktierte Linie. Nach Entstehung der Schallwelle finden wir längs der Ausbreitungsrichtung (x-Richtung in Abb.3.13) für einen fixen Zeitpunkt eine **periodische Druckschwankung** (ausgezogene Linie) um den Druck p_0 . Man spricht von einem **Schallwechseldruck**. Die maximale Druckerhöhung bzw. Erniedrigung heißt **Schallwechseldruckamplitude Δp** (kurz auch Druckamplitude genannt). Bei normaler Sprechlautstärke (ca. 50 phon) liegt Δp im Bereich von 10^{-1} Pa (= 10^{-6} bar).

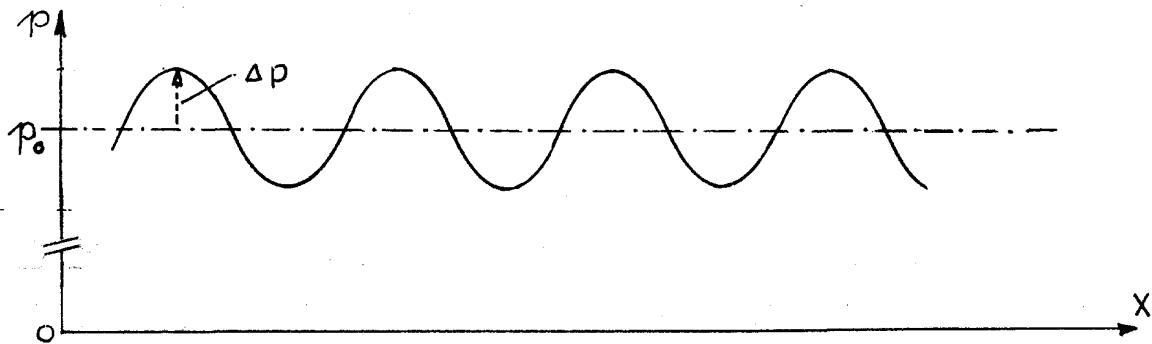


Abb. 3.13: Periodische Druckschwankung als Folge einer Schallwelle.

Eine harmonische Welle in Luft wird mathematisch daher durch eine Druckverteilung als Funktion des Ortes und der Zeit beschrieben:

$$p(x, t) = p_0 + \Delta p \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

- **Schallintensität (Schallstärke)**

Die von einer Schallquelle S ausgehenden Schallwellen transportieren Energie in den Raum hinein. Fällt auf eine zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Fläche A in der Zeit Δt die Schallenergie ΔW , so ist die **Schallintensität I_s** , auch Schallstärke genannt, wie folgt definiert:

Definition der Schallintensität I:

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta t \cdot A}$$

SI-Einheit für I: 1 W/m^2 .

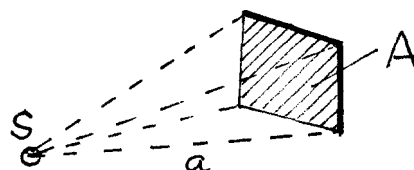


Abb. 3.14: Zur Definition der Schallstärke.

Die Schallintensität ist also die pro Sekunde auf die Flächeneinheit auftreffende Schallenergie. Die Schallintensität nimmt **quadratisch** mit der Entfernung a von der Schallquelle ab. Ist I_1 die Schallstärke in der Entfernung a_1 , so ist I in der Entfernung a :

$$I(a) = I_1 \cdot \frac{a_1^2}{a^2}$$

In doppelter Entfernung von der Schallquelle sinkt also die wahrgenommene Schallintensität auf ein Viertel!

Ein von Schallwellen erfülltes Raumgebiet wird als **Schallfeld** bezeichnet. Zu den Bestimmungsstücken eines Schallfeldes gehört neben der Intensität I , der Druckamplitude Δp , der Amplitude A auch die Schallschnelle v_0 . Als **Schallschnelle** oder **Geschwindigkeitsamplitude** bezeichnet man die Maximalgeschwindigkeit v_0 , mit der die Moleküle sich bei ihren Schwingungen durch die Ruhelage bewegen. Es gilt: $v_0 = \omega \cdot A_0$. Die Schallschnelle v_0 ist wohl zu unterscheiden von der Ausbreitungsgeschwindigkeit c einer Welle. Zwischen der Schallintensität und den übrigen Größen des Schallfeldes bestehen folgende Beziehungen (ohne Herleitung):

$$I = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot A_0^2 \rho \cdot c = \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \rho \cdot c = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p)^2}{\rho \cdot c}$$

Die Schallintensität ist eine **von der subjektiven Empfindung** durch das Ohr **unabhängige Größe**!

• **Reflexion von Schallwellen**

Geht eine Schallwelle von einem Medium in ein anderes über, so wird ein Teil der Schallenergie an der Grenzfläche reflektiert, wenn die sog. Schallwellenwiderstände der beiden Medien verschieden sind. Der **Schallwellenwiderstand Z** ist definiert als das Verhältnis von Druckamplitude zu Schallschnelle: $Z = \Delta p / v_0$. Aus obiger Gleichung ist ersichtlich, daß

$$Z = \rho \cdot c$$

Beim Übertritt einer Welle in ein anderes Medium gilt grundsätzlich, daß sich die **Frequenz** der Welle **nicht ändert**. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit (materialabhängig!) und die Wellenlänge ändern sich.

• **Stehende Wellen**

Die Überlagerung zweier einander entgegenlaufender Wellen gleicher Wellenlänge und Amplitude führt zu einer sog. **stehenden Welle**.

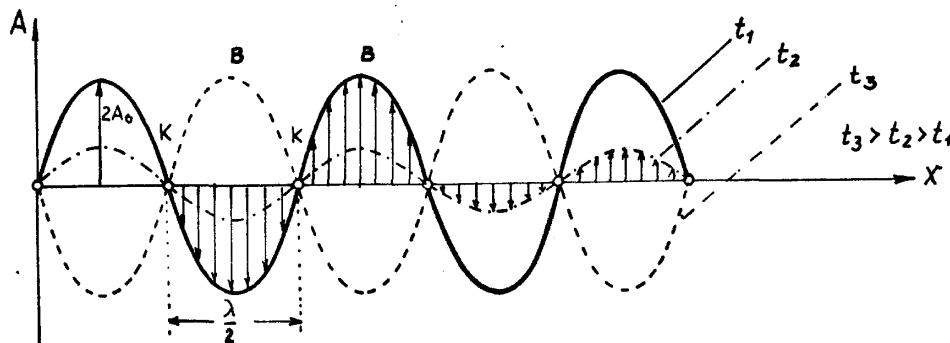


Abb. 3.15: Drei Momentbilder einer stehenden Welle zu den Zeitpunkten t_1 , t_2 und t_3 .

Diese besitzt im Gegensatz zur fortschreitenden Welle Bereiche, die dauernd in Ruhe sind, d.h. keine Schwingungsbewegung mehr ausführen. Man bezeichnet sie als **Schwingungsknoten** (in Abb.3.15 die mit K bezeichneten Punkte). Es läßt sich berechnen, daß der Abstand zweier benachbarter Knoten gleich der **halben Wellenlänge** ist. Zwischen zwei Knoten schwingen alle Punkte **phasengleich**, jedoch mit **verschiedener Amplitude**. Die größten Amplituden treten in der Mitte zwischen zwei Knoten auf. Man bezeichnet diese Bereiche als **Schwingungsbäuche** (in Abb.3.15 mit B bezeichnet).

Während also bei einer fortschreitenden Welle alle Punkte mit gleicher Amplitude aber innerhalb einer Wellenlänge mit verschiedener Phase schwingen, schwingen bei einer stehenden Welle alle Punkte zwischen zwei Knoten mit gleicher Phase aber unterschiedlicher Amplitude. Mit einer stehenden Welle wird **keine Energie transportiert!**

Stehende Wellen erzeugt man am einfachsten durch senkrechte Reflexion fortschreitender Wellen. Reflexion einer Welle tritt immer dann auf, wenn sich der Wert für den Schallwellenwiderstand ändert. Besonders stark ändert sich der Schallwellenwiderstand an Grenzflächen von Festkörpern zu Gasen. Tritt eine Welle vom **akustisch dichteren** Medium (größerer Wert von $\rho \cdot c$) ins **akustisch dünnere** (kleinerer $\rho \cdot c$ -Wert) über, so bildet sich an der Grenzfläche bei der Reflexion immer ein Bewegungsbauch aus. Bei Reflexion am dichteren Medium tritt ein Bewegungsknoten auf.



Abb. 3.16: Reflexion am dünneren (links) und dichteren (rechts) Medium.

Eigenschwingungen von Stäben

Regt man Teile eines beidseitig freien in der Mitte eingespannten Stabes zu Longitudinalschwingungen an (z.B. durch Reiben mit einem Tuch), so entsteht infolge der Ausbreitung der Schwingung zunächst eine fortschreitende Welle im Stab. Diese Welle wird an den Enden des Stabes teilweise reflektiert und überlagert sich mit der ankommenden Welle zu einer **stehenden Welle im Stab**. Da Reflexion am dünneren Medium erfolgt, bilden sich an den Stabenden Bäuche der Bewegung aus. Zwischen zwei Bewegungsbäuchen muß sich mindestens ein Knoten befinden.

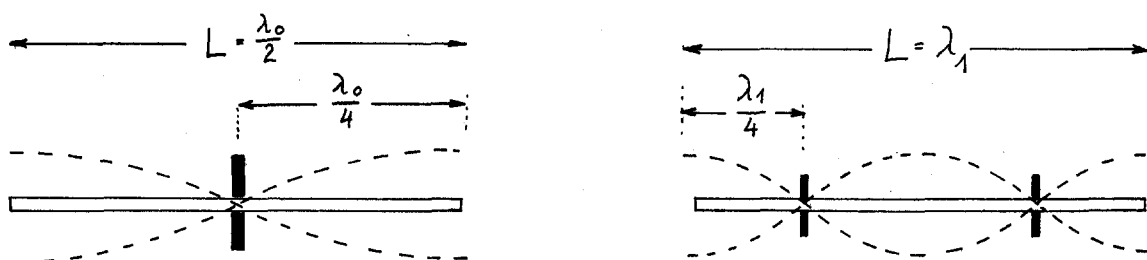


Abb. 3.17: Grundschwingung (links) und 1. Oberschwingung (rechts) eines Stabes.

Dieser Fall ist in Abb. 3.17 (links) dargestellt: Die Stablänge L ist hier gleich der halben Wellenlänge λ_0 , d.h. $\lambda_0 = 2L$. Ist c die Schallgeschwindigkeit des Stabmaterials, so ist die zugehörige Frequenz gleich $\nu_0 = c/\lambda_0 = c/2L$. Da im Falle der Abb.3.17 (links) $\lambda_0 = 2L$ die größtmögliche Wellenlänge darstellt, die sich einstellen kann, muß die zugehörige Frequenz ν_0 ein Minimalwert sein:

ν_0 ist die kleinstmögliche Eigenschwingung des Stabes, sie wird auch als Grundfrequenz bezeichnet.

Eine andere mögliche stationäre Schwingungsform ist in Abb.3.17 (rechts) dargestellt. Hier sind zwei Knoten zwischen den äußeren Bäuchen, so daß in diesem Falle gilt; $\lambda_1 = L$ und $\nu_1 = 2\nu_0$. ν_1 ist die Frequenz der ersten Oberschwingung.

Diese Ergebnisse gelten auch für beidseitig eingespannte Stäbe (z.B. Violine), sowie für beidseitig offene und beidseitig geschlossene Luftsäulen (lineare Schallgeber).



Abb. 3.18: Grund – und 1. Oberschwingung für einen beidseitig eingespannten Stab.

Was man unbedingt wissen sollte:

- Welche physikalischen Merkmale beschreiben eine harmonische Schwingung?
- Was ist eine Schwingung?
- Was ändert sich bei einer gedämpften Schwingung mit der Zeit?
- Was ist eine Welle?
- Wie berechnet sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle und von was ist sie anhängig?
- Wie entstehen stehende Wellen?
- Wann bezeichnet man einen Stoff als elastisch, wann als plastisch?
- Unter welchen Bedingungen ist das Hooksche Gesetz gültig und welchen proportionalen Zusammenhang beschreibt es?
- Was versteht man unter Elastizitäts-, Torsions- und Kompressionsmodul?
- Welche Eigenschaft eines Körpers wird durch das Flächenträgheitsmoment beschrieben und von was ist es abhängig?

Anhang I: Sinusschwingung und Kreisbewegung

Eine punktförmige Masse bewege sich mit der konstanten Bahngeschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r . Projiziert man die Masse auf eine zur Kreisbahnebene senkrechte Ebene, so ergibt sich eine periodische Auf- und Abbewegung des Schattenbildes.

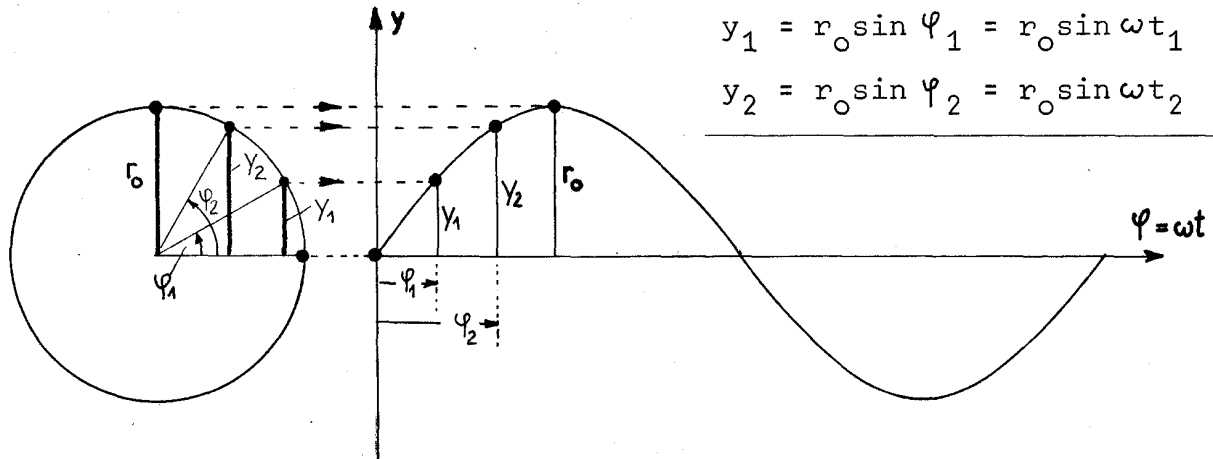


Abb. 3.A.1: Mathematische Darstellung einer Kreisbewegung.

Trägt man die momentanen Projektionslängen des Radius r_0 in einem Koordinatensystem über den zurückgelegten Winkel φ (oder gegen die Zeit t) auf, so ergibt sich eine Sinuskurve, da die Projektionslängen gleich $r_0 \cdot \sin \varphi$ bzw. gleich $r_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ sind. $\omega = \Delta\varphi / \Delta t$ ist die Winkelgeschwindigkeit des Bahnumlaufs. Ist T die Zeit für einen vollen Bahnumlauf, so ist $\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot \nu$. $\nu = 1 / T$ ist die Umlauffrequenz, 2π ist der volle Winkel im Bogenmaß.

Die Schattenbewegung des Kreisumlaufs würde also **synchron** z.B. mit der Auf- und Abbewegung einer schwingenden Feder verlaufen, wenn die Feder um die Strecke r_0 aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird, und die Schwingungsfrequenz der Feder mit der Umlauffrequenz der Kreisbewegung übereinstimmt.

Die früher für eine Schwingung der Frequenz ν definierte Kreisfrequenz $2\pi \cdot \nu$ erweist sich also als identisch mit der Winkelgeschwindigkeit ω einer Kreisbewegung mit konstanter Umlauffrequenz.

Die Herkunft des Begriffs **Kreisfrequenz** ist durch den Zusammenhang von Sinusschwingung und Kreisbewegung somit ersichtlich.

Anhang II: Die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung

An einer in Ruhe befindlichen Spiralfeder hängt ein Körper mit der Masse m . Lenkt man die Feder aus ihrer Ruhelage aus, so treten rücktreibende Kräfte auf, die bei nicht zu großer Auslenkung proportional zur Dehnung sind:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

Lässt man die um die Strecke x_0 ausgelenkte Feder los, so führt die an der Feder befestigte Masse eine periodische Bewegung aus. Um die Bewegungsgleichung aufzustellen gehen wir von der Grundgleichung der Mechanik aus:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{m} \cdot \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{m} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

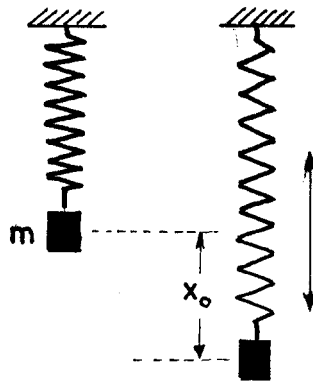


Abb. 3.A.2: Zur Herleitung der Differentialgleichung einer harmonischen Schwingungen eines Federpendels.

Durch Einsetzen der rücktreibenden Kraft in obige Gleichung ergibt sich:

$$\mathbf{m} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

$$\text{oder} \quad \ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

Wie muss nun die Funktion $x(t)$, die die Auslenkung der an der Feder hängenden Masse als Funktion der Zeit beschreibt, aussehen? Die Funktion muß a) **periodisch sein** und b) die obige Differentialgleichung erfüllen. Eine periodische Funktion ist z.B. die Sinusfunktion. Wir machen daher versuchsweise den Ansatz:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

Um zu prüfen, ob dieser Ansatz die Differentialgleichung erfüllt, müssen wir die zweite Ableitung $\ddot{\mathbf{x}}$ bilden und \mathbf{x} und $\ddot{\mathbf{x}}$ einsetzen. Die Differentiation von $\mathbf{x}(t)$ nach der Zeit (Anwendung der Kettenregel!) ergibt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}_0 \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 \cdot \mathbf{x}$$

Man sieht, daß für $\omega^2 = \mathbf{D}/\mathbf{m}$ die Differentialgleichung durch den Ansatz identisch erfüllt wird, unabhängig davon, wie groß die Amplitude \mathbf{x}_0 und der Nullphasenwinkel α sind. Diese beiden Größen sind ausschließlich durch die Anfangsbedingungen (Randbedingungen) der Bewegung bestimmt, d.h. sie sind abhängig davon, wie weit die Feder ausgelenkt wurde und welcher Schwingungszustand (Phase) zum Zeitpunkt $t = 0$ bestand.

Statt einer Sinusfunktion hätte man auch eine Cosinusfunktion als Ansatz für eine Lösung der nehmen können. Eine Sinusbewegung unterscheidet sich von einer Cosinusbewegung nur durch den Phasenwinkel von 90° .

Allgemein läßt sich folgendes formulieren:

Alle Bewegungen, die auf eine Differentialgleichung der Form

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = 0$$

führen, stellen eine **harmonische Schwingung** dar und werden **durch Sinus- oder Cosinusfunktionen** beschrieben. Für die Frequenz der Schwingung gilt dann:

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}} \quad \text{bzw.} \quad \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\mathbf{k}} .$$

Für die Schwingungsdauer T folgt daraus:

$$\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\mathbf{k}^{-1}}$$

Für das mathematische Pendel (Fadenpendel) ergibt sich für kleine Amplituden die Differentialgleichung zu

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{l}} \cdot \mathbf{x} = 0$$

mit l = Pendellänge, g = Erdbeschleunigung ($= 9,81 \text{ m/s}^2$).

Anhang III: Das Zeigerdiagramm

Überlagern sich mehrere Sinusschwingungen gleicher Frequenz mit verschiedenen Anfangsphasen und verschiedenen Amplituden, so entsteht wieder eine Sinusschwingung derselben Frequenz. Zu ermitteln sind Amplitude und Phasenwinkel der resultierenden Schwingung.

Neben der relativ aufwendigen Ermittlungsmethode durch Anwendung der trigonometrischen Additionstheoreme, steht eine besonders einfache, geometrische Methode mittels **Zeigerdiagramm** zur Verfügung. Nach dieser Methode wird eine Schwingung, z.B. $y = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$, als Pfeil oder **Zeiger** dargestellt, dessen Länge ein Maß für die Amplitude y_0 ist, und dessen Richtung mit der Horizontalen den Phasenwinkel φ einschließt.

Der Überlagerung mehrerer Schwingungen entspricht dann die vektorielle Addition der einzelnen Zeiger zum Gesamtzeiger für die resultierende Schwingung.

- **Ein Beispiel:**

Überlagerung der Schwingungen $y_1 = y_{01} \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$ und $y_2 = y_{02} \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$ zur resultierenden Schwingung $y = y_1 + y_2 = y_0 \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. Aus der untenstehenden Abbildung geht das Verfahren hervor:

Man addiert die einzelnen Zeiger wie Vektoren. Aus der Länge des Resultatzeigers erhält man die Amplitudengröße y_0 . Der Winkel des Resultatzeigers mit der Horizontalen ist der Phasenwinkel φ .

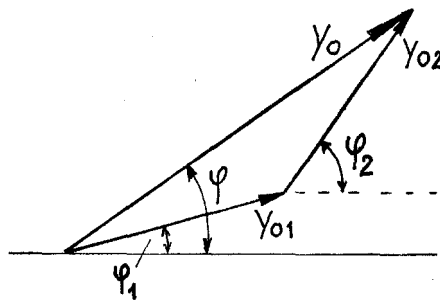


Abb. 3.A.3: Zur Erläuterung des Zeigerdiagramms.

Anhang IV: Schallbewertung (Pegelmaß, Phonskala)

• Weber-Fechnersches Gesetz

Die menschlichen Sinnesorgane wandeln einen äußeren (physikalischen) Reiz (z.B. eine Schallintensität) in eine Reizantwort (Sinnesempfindung) um. Bei der Erforschung dieser Zusammenhänge stießen Weber und Fechner auf folgenden Sachverhalt: Ist bei Einwirkung eines Reizes R auf das Sinnesorgan die Reizantwort gleich E , so bewirkt eine Änderung des Reizes um ΔR eine Änderung der Reizantwort um ΔE , die näherungsweise **proportional zur relativen Reizänderung** ist.

$$\Delta E \sim \Delta R / R$$

Bei gegebenen (konstanten) Reizzuwachs ΔR ist also der Empfindungszuwachs ΔE um so kleiner, je größer der vorhandene Reiz R ist.

Den Zusammenhang zwischen E und R erhält man durch Integration der obigen Gleichung. Es ergibt sich:

$$E = k \cdot \log \frac{R}{R_0}$$

k ist ein Proportionalitätsfaktor; R_0 ist eine Integrationskonstante.

Dies Gleichung nennt man das **Weber-Fechnersche Gesetz**. Es sagt aus, daß die Reizantwort **proportional zum Logarithmus** des Reizes ist.

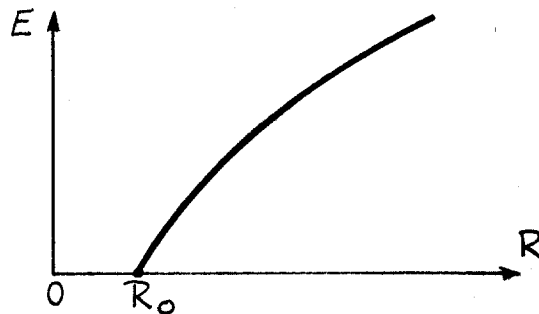


Abb. 3.A.4: Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Reiz und Reizantwort.

Die obige Abbildung zeigt graphisch den Zusammenhang von Reizantwort E und dem physikalischen Reiz R . Es ist eine Logarithmuskurve! Die Reizantwort wächst also unterproportional zum Reiz. Eine Verdoppelung der Schallintensität z.B. wird weniger als doppelt so laut empfunden.

Die Integrationskonstante R_0 bedeutet physiologisch die **Reizschwelle** (= Mindestreizstärke). Unterhalb des Schwellenwertes R_0 wird keine Sinnesempfindung ausgelöst. Für $R = R_0$ ist $E = 0$.

• Pegelmaß

Für die Bewertung und den Vergleich von Schallintensitäten wird praktisch immer das sog. **Pegelmaß** herangezogen. Das Pegelmaß ist ein logarithmisches Maß. Sollen zwei Energie- oder Leistungswerte miteinander im Pegelmaß verglichen werden (z.B. die Ausgangsleistung P mit der Eingangsleistung P_0 bei einem Verstärker), so ist der **Pegel P_e** am Ausgang definiert als:

$$P_e = 10 \cdot \log \frac{P}{P_0} \quad [\text{dB}]$$

Die sich ergebende Zahl für den Pegel erhält die Bezeichnung **Dezibel (dB)**.

Beispiel: Ist die Ausgangsleistung P eines Verstärkers 1000 mal größer als die Eingangsleistung P_0 , so ist der Ausgangspegel nach obiger Beziehung $P_e = 30 \text{ dB}$. Der Eingangspegel ist definitionsgemäß Null Dezibel. Einer weiteren Steigerung der Ausgangsleistung z.B. um den **Faktor 100** entspricht dann einer **additiven Pegelanhebung um 20 dB**.

- **Absoluter Schallpegel**

In der Audiometrie werden Schallintensitätswerte I meist mit dem Intensitätswert I_0 an der Hörschwelle verglichen. Man definiert als **absoluten Schallpegel L**:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

Der Durchschnittswert für den Schwellenwert I_0 bei 1000 Hz beträgt etwa 10^{-12} W/m^2 (die Schallempfindlichkeit des Ohres ist frequenzabhängig!).

- **Schalldruckpegel**

Ersetzt man in der Definitionsgleichung für den absoluten Schallpegel die Schallintensität I durch die Druckamplitude Δp , so spricht man vom **Schalldruckpegel SPL** und erhält wegen

$$I \sim (\Delta p)^2: \quad \text{SPL} = 20 \cdot \log \frac{\Delta p}{\Delta p_0} \quad (\text{SPL} = \text{Sound Pressure Level}).$$

Da sich die Druckamplitude Δp mittels Mikrophon wesentlich einfacher messen läßt als die Intensität I , kommt diese Gleichung häufiger zur Anwendung. Die **Dezibel-Werte** für L und SPL **sind jedoch dieselben!**

Die Größe Δp in dieser Gleichung sollte logischerweise die Druckamplitude an der Hörschwelle sein. Sie ergäbe sich aus dem Wert für $I_0 = 10^{-12} \text{ W / m}^2$ zu $3,16 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$. Dieser Wert wurde auf den Wert $2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$ abgerundet und so der Bezugswert für Δp neu festgesetzt:

$$\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$$

Durch den neuen Bezugswert liegt die Hörschwelle nun nicht mehr bei Null dB, sondern bei ca. 4 dB.

- **Hörverlust**

In der Medizin wird das Ausmaß der Schwerhörigkeit (Hörverlust) auch im Pegelmaß angegeben. Man stellt dazu den Schwellenwert $\Delta p'_0$ des Patienten fest ($\Delta p'_0 > \Delta p_0$) und vergleicht diesen Wert über das Pegelmaß mit dem Bezugswert $\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$.

Der **Hörverlust H_v** berechnet sich dann nach der Formel:

$$H_v = 20 \cdot \log \frac{\Delta p'_0}{\Delta p_0}$$

- **Überlagerung von Schallpegelwerten**

Überlagern sich an **einem** Ort die Pegelwerte L_1 und L_2 von zwei Schallquellen, so gilt für den Gesamtpegel L_{ges} :

$$L_{\text{ges}} = 10 \log(I_{\text{ges}} / I_0) = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0} + \frac{I_2}{I_0}\right)$$

mit $I_1 / I_0 = 10^{L_1/10}$ und $I_2 / I_0 = 10^{L_2/10}$.

Am Ort der Schallüberlagerung gilt: $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$.

Die Pegelwerte selbst dürfen nicht addiert werden!

- **Phonskala**

Die Schallempfindlichkeit des menschlichen Ohres ist von der Frequenz abhängig, d.h. Schallwellen mit gleichem Schallwechseldruck aber verschiedenen Frequenzen werden im allgemeinen nicht als gleich laut empfunden. Umgekehrt haben gleich laute Töne verschiedener Frequenz im allgemeinen verschiedene Schalldruckpegel, also auch verschiedene dB-Werte.

Es wurde deshalb für die Angabe von **Lautstärken** die Bezeichnung **phon** eingeführt. Da die Lautstärke nicht durch unmittelbare Bewertung der Schallempfindung, sondern **nur im Vergleich** mit einem anderen Ton (Normschall) bestimmt werden kann, erhält man die Phon-Werte eines zu bewertenden Schalls beliebiger Frequenz wie folgt:

Man erzeugt mittels einer Vergleichsschallquelle einen Ton von 1000 Hz (= Normschall), macht nun diesen Normschall bei **subjektiver Beurteilung** so laut wie den zu bewertenden Schall und mißt dann den Schalldruckpegel des Normschalls in dB. Der Zahlenwert dieses Schallpegels der Normschallquelle erhält die Bezeichnung phon und wird als die **Lautstärke** des verglichenen Schalls bezeichnet.

Bei Schall von 1000 Hz sind definitionsgemäß Schallpegel in dB und Lautstärke in phon einander gleich.

Die Abhängigkeit der Empfindlichkeit des menschlichen Ohres von der Frequenz im Bereich von kleinen bis zu großen Lautstärken läßt sich aus der Kurvenschar im folgenden Diagramm ablesen.

Die Punkte, die auf einer Kurve liegen, geben die Pegelwerte bzw. Wechseldruckwerte in Abhängigkeit von der Frequenz wieder, für die jeweils der gleiche Lautstärkeindruck entsteht. Die Kurven stellen also Kurven gleicher Lautstärke dar; man nennt sie **Isophone**.

Alle Kurven haben im Bereich von etwa 3000 Hz bis 5000 Hz ein Minimum, d.h. dort ist die jeweils geringste Schallstärke erforderlich, um eine bestimmte Lautstärke hervorzurufen. Das Ohr besitzt also in diesem Frequenzbereich die größte Empfindlichkeit. Die unterste gestrichelte Isophone stellt die Hörschwelle dar. Sie liegt bei 4 phon.

Man erhält die Isophonen, indem man die oben erwähnte Vergleichsmethode mit der Normschallquelle anwendet. Um z.B. die 20-phon-Kurve zu erhalten, erzeugt man mit der Normschallquelle (1000 Hz) eine Schallstärke mit der Wechseldruckamplitude von $2 \cdot 10^{-4}$ Pa, also einen SPL von 20 dB bei 1000 Hz.

Eine zweite Schallquelle wird nun bei verschiedenen Frequenzen bei subjektiver Beurteilung durch eine Versuchsperson jeweils genau so laut eingestellt wie die Normschallquelle. Die anschließend gemessenen Werte der Wechsellldruckamplitude der zweiten Schallquelle (bzw. die entsprechenden Werte in dB) werden über der Frequenz aufgetragen. Die so erhaltenen Meßpunkte bilden dann die 20-phon-Isophone.

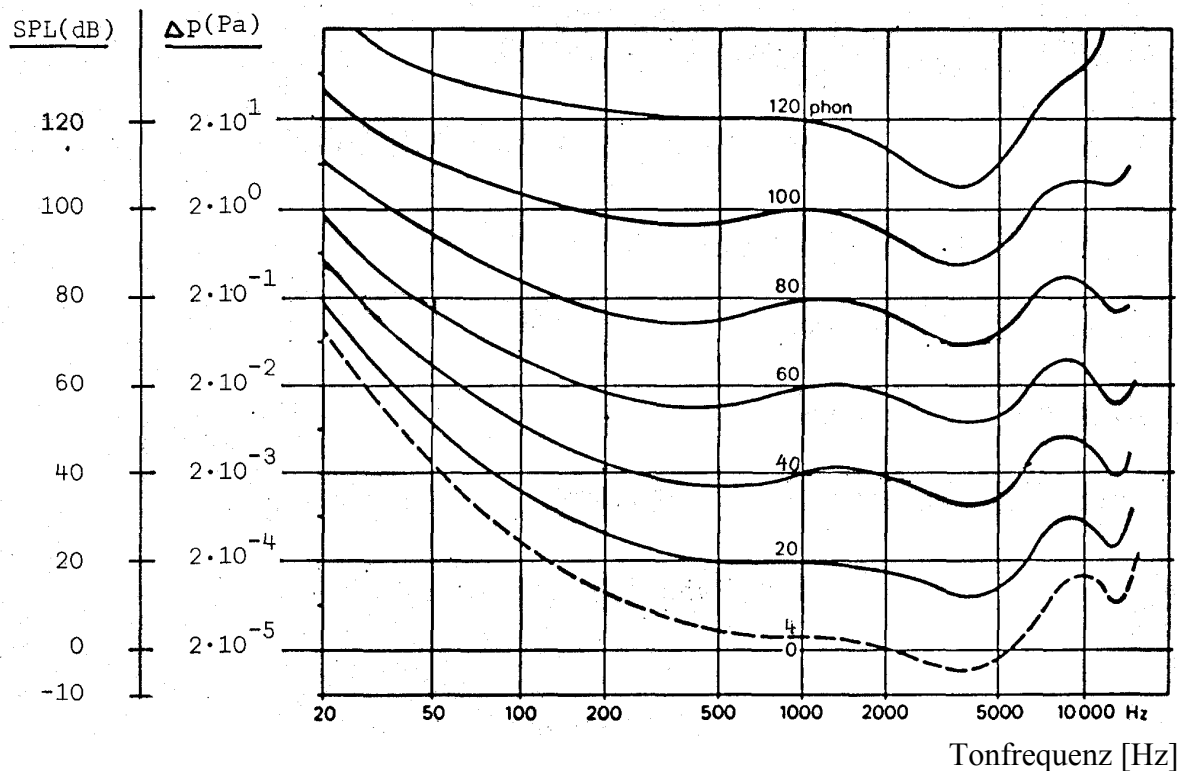


Abb. 3.A.5: Schalldruckpegel als Funktion der Tonfrequenz für verschiedene Lautstärken für die Empfindlichkeit des menschlichen Ohres.

Die in der Technik verwendeten Geräte zur Messung der Lautstärken in phon müssen so gebaut sein, daß ihr Frequenzgang der Frequenzabhängigkeit der Lautstärkeempfindung des Ohres möglichst nahe kommt. Man erreicht dies näherungsweise durch die Verwendung von Filtern. Da die Isophonen in den verschiedenen Lautstärkebereichen unterschiedliche Verläufe zeigen, müßten entsprechend viele Filter mit jeweils unterschiedlichem Frequenzgang für die verschiedenen Lautstärkebereiche zur Verfügung stehen. In der Praxis verwendet man drei Filter: Eins für den unteren, eins für den mittleren und eins für den oberen Lautstärkebereich. Sie werden mit A, B und C bezeichnet. Die mit dem Filter A gemessenen Werte erhalten dann die Bezeichnung "dB(A)". Entsprechendes gilt für die Filter B und C.

Oft werden in der Technik auch für die mittleren Lautstärkebereiche dB(A)-Werte angegeben. Diese liegen dann z.T. erheblich unter den wahren Lautstärkewerten und beschönigen somit das Meßergebnis zugunsten niedriger Lautstärkewerte. Dazu ein Zahlenbeispiel:

Einem Schallpegel von 60 dB bei 200 Hz entspricht nach dem obigen Diagramm eine Lautstärke von 62 phon. Ein Pegelmessgerät mit Filter A würde dann 49 dB(A), einer mit Filter B den Wert 58 dB(B) anzeigen.

Anmerkung: Für die Ermittlung der letzten beiden Zahlenwerte müssen die Filterkurven A und B vorliegen, die hier nicht abgedruckt sind.

Versuchsdurchführung 3A:

Bestimmung von Schallgeschwindigkeiten

- **Aufgabenstellung:**

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft
 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Glas
 Berechnung des E-Moduls für Glas

- **Meßanordnung 1**

Die Abb.3.19 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus. Auf einer optischen Bank befindet sich ein Lautsprecher L und ein Mikrophon M. Ein Tonfrequenz-Generator (er liefert sinusförmige Wechselspannung variabler Frequenz) ist mit L und parallel dazu mit Kanal I eines Zwei-Kanal-Oszillografen verbunden. Das Mikrophon M wird an Kanal II angeschlossen (Triggerung über Kanal I!).

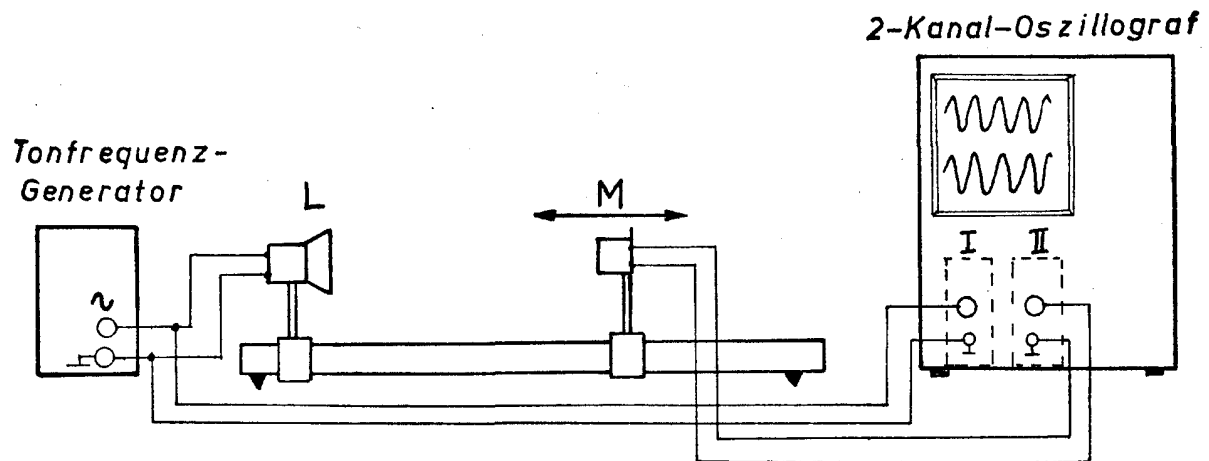


Abb. 3.19: Schematischer Aufbau des Versuchs zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in Luft.

Auf dem Oszillografenscreen erscheinen auf diese Weise gleichzeitig zwei Bilder einer Sinusspannung: Auf Kanal I die direkt vom Generator übertragene Wechselspannung, auf Kanal II die von L ausgehende und von M aufgenommene Schallwelle als weitere Sinusspannung (ein Mikrophon wandelt Schallschwingungen in synchrone Spannungsschwankungen um). Zwischen beiden auf dem Screen erscheinenden Sinusschwingungen besteht eine Phasendifferenz, die vom Abstand Lautsprecher - Mikrophon abhängt. Man verschiebe zunächst M bis die Phasendifferenz z.B. Null ist. Verschiebt man M nun von dieser Stelle aus bis die Phasendifferenz wieder Null ist, so entspricht die Größe der Verschiebung genau einer Wellenlänge der Schallwelle in Luft. Bei bekannter Frequenz läßt sich daraus die Schallgeschwindigkeit in Luft berechnen.

- **Versuchsdurchführung**

1. Man wähle eine Schallfrequenz von $\nu = 10^4$ Hz. Die genaue Einstellung der Frequenz wird mit dem Oszillografen durchgeführt, indem man z.B. einen Time-Base-Wert (Horizontal-

ablenkung) von 0,1 ms/cm wählt und sich überlegt, welchen Abstand dann die Maxima auf dem Schirm haben müssen.

Der Aufbau und die Funktionsweise des Oszillografen sind ausführlich im Rahmen des Versuchs 8 erläutert!

2. Man verschiebe M bis die Phasendifferenz Null ist und notiere die Position s_1 von M auf dem Maßstab der optischen Bank.

3. M um 10 Wellenlängen (entsprechend 10 Periodendauern auf dem Schirm!) verschieben und Position s_2 von M notieren.

Für die Wellenlänge λ_L in Luft gilt dann: $10\lambda_L = |s_1 - s_2|$

4. Man berechne die Schallgeschwindigkeit c_L in Luft aus λ_L und ν für Raumtemperatur und für 0°C.

Für die Temperaturabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit in Luft gilt:

$$c_L = c_{0L} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}}$$

T = Kelvin-Temperatur; $T_0 = 273 \text{ K}$; c_0 = Schallgeschwindigkeit bei 0°C.

5. Für interessierte Praktikanten: Erzeugung von Lissajous-Figuren.

Dazu Taste **Mono** und Taste **Hor.ext.** des Oszillografen drücken (weitere Erläuterung durch den Assistenten!).

• Meßanordnung 2

Erregt man einen in der Mitte eingespannten Glasstab der Länge l in seiner Grundfrequenz (z.B. durch Reiben mit einem Tuch), so bildet sich im Stab eine stehende Welle aus mit der Wellenlänge $\lambda_G = 2 \cdot l$. Die zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit im Glas zusätzlich erforderliche Frequenz des Stabes kann z.B. mit dem **Kundtschen Rohr** ermittelt werden, wenn die Schallgeschwindigkeit in Luft bekannt ist.

Das Kundtsche Rohr ist ein Glasrohr (Luft enthaltend), das auf der einen Seite mit einem verschiebbaren Stempel S abgeschlossen ist und bei dem auf der anderen Seite sich der eingespannte Glasstab der Länge l befindet (Abb.3.20).

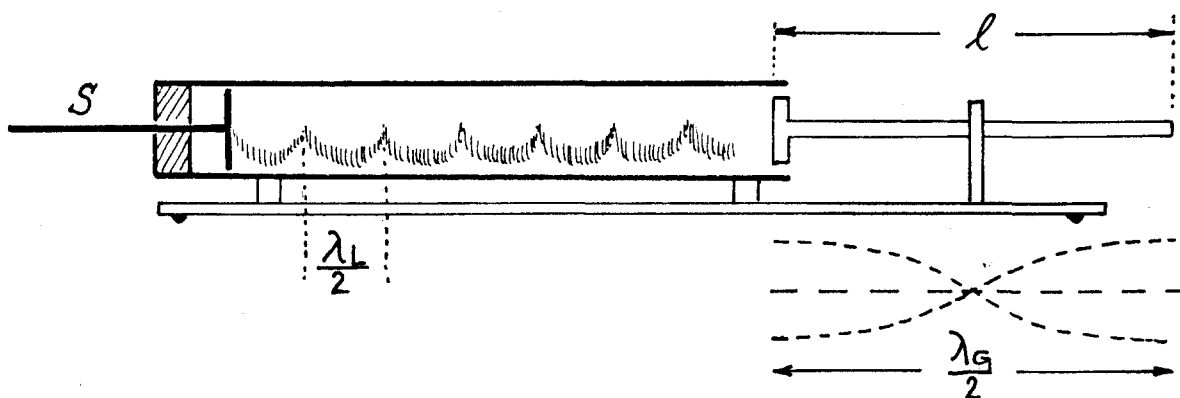


Abb.3.20: Schematische Darstellung der Meßanordnung eines Kundtschen Rohres.

Reibt man den Glasstab mit einem Tuch, so gerät er in Longitudinalschwingungen, die sich im Stab ausbreiten und so zu einer Welle im Glasstab führen. An den Enden des Stabes wird die Welle teilweise reflektiert, teilweise geht sie in die Luft über (mit gleicher Frequenz!). Durch Reflexion am Stempel S entsteht dann im Rohr ebenfalls eine stehende Welle, deren Knoten und Bäuche sich leicht sichtbar machen lassen, wenn man etwas trockenes Korkpulver in einer schmalen Spur in das Rohr gibt. An den Knotenstellen bleibt das Pulver dann liegen, während es in den Bäuchen mit den Schwingungen der Luftmoleküle mitbewegt wird. Der Abstand zweier Knoten ist gleich der halben Wellenlänge.

Zur Ermittlung der Wellenlänge λ_L in Luft lege man einen Maßstab von unten an das Rohr und messe eine Strecke a ab, auf der sich n halbe Wellenlängen befinden (n soll mindestens 10 sein!). Es gilt dann:

$$a = \frac{\lambda_L}{2} \cdot n$$

Auf diese Weise ist die Wellenlänge λ_L in der Luft ermittelt. Bei bekannter Schallgeschwindigkeit der Luft (siehe Vorversuch) läßt sich die Frequenz der Schallwelle berechnen. Es gilt:

$$\text{Frequenz } \nu = c_L / \lambda_L$$

Die gesuchte Schallgeschwindigkeit c_G im Glasstab berechnet sich dann nach der Formel:

$$c_G = \lambda_G \cdot \nu$$

Hinweis: Achten Sie darauf, daß bei der Angabe der Ergebnisse für die Frequenz und die Schallgeschwindigkeit die Stellenzahl nicht höher ist als die Stellenzahl der Meßgrößen (hier also die Strecke a und die Geschwindigkeit c_L in Luft)!

- **Berechnung des E-Moduls für Glas aus der Schallgeschwindigkeit im Glas**

Die Schallgeschwindigkeit in Festkörpern steht in engem Zusammenhang mit den elastischen Konstanten des Körpers. Für eine Longitudinalwelle in einem Festkörper wurde eine entsprechende Beziehung in der Einführung angegeben.

Berechnen Sie den Elastizitätsmodul (E-Modul) für Glas aus der Schallgeschwindigkeit c_G im Glas. Die Dichte des Glases ist am Arbeitsplatz angegeben. Der E-Modul soll in SI-Einheiten angegeben werden.

Versuch 3 B: Bestimmung des Elastizitätsmoduls

Physikalische Grundbegriffe

- Normal-, Tangentialspannung
- Hooksches Gesetz
- Elastizitäts-, Torsions- und Kompressionsmodul
- Flächenträgheitsmoment

weiterführende Literatur:

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 123-129
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 48-51
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 53-57

Erläuterung der wichtigsten physikalischen Begriffe

• Elastizität fester Körper

Alle Körper bestehen aus Atomen bzw. Molekülen. Zwischen ihnen bestehen Kräfte. Wirken äußere Kräfte auf den Körper ein, so treten Deformationen auf: Die einzelnen Bausteine ändern ihre Abstände zueinander oder gar ihre gegenseitige Lage. Als *elastisch* (oder ideal-elastisch) bezeichnet man das Verhalten eines deformierbaren Körpers, wenn er nach Beendigung der Krafteinwirkung wieder seine ursprüngliche Form annimmt. Bleibt jedoch eine dauerhafte Formänderung zurück, ohne daß ein Bruch erfolgt, so spricht man von **Plastizität**.

Eine in beliebiger Richtung auf die Oberfläche eines Körpers wirkende Kraft F läßt sich in zwei Komponenten zerlegen: In eine Komponente senkrecht zur Fläche (= Normalkraft F_n) und in eine Komponente parallel zur Fläche (= Tangentialkraft F_t). Die pro Flächeneinheit auf die Oberfläche wirkende Normalkraft heißt **Normalspannung σ** :

$$\sigma = \frac{\text{Normalkraft } F_n}{\text{Fläche } A}$$

Je nach Richtung von F_n unterscheidet man noch zwischen **Zug- und Druckspannung**.

Die pro Flächeneinheit auf die Oberfläche wirkende Tangentialkraft heißt **Tangential- oder Schubspannung τ** :

$$\tau = \frac{\text{Tangentialkraft } F_t}{\text{Fläche } A}$$

Das elastische Verhalten eines Materials bei verschiedenartigen Belastungen (Dehnung, Biegung, Scherung, Torsion, Kompression) wird durch verschiedene elastische Konstanten, den **Moduln**, gekennzeichnet.

- **Dehnung**

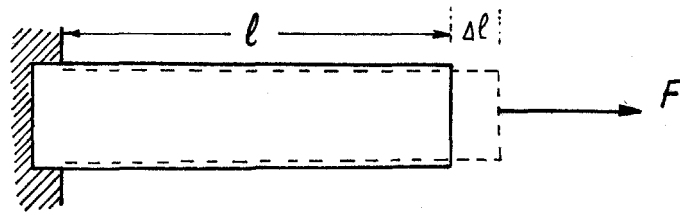


Abb. 3.21: Zur Erläuterung des Hookschen Gesetzes.

Läßt man auf einen einseitig eingespannten Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A am freien Ende eine Kraft F in Stabrichtung angreifen, so wird der Stab gedehnt (Abb.3.21). Gleichzeitig tritt eine Querkontraktion auf. Das Volumen bleibt in erster Näherung konstant.

- **Das Hookesche Gesetz**

Für kleine Dehnungen ist die relative Längenänderung $\epsilon = \Delta l / l$ proportional zur Normalspannung $\sigma = F / A$:

Definition des E-Moduls:

$$\sigma = \mathbf{E} \cdot \epsilon$$

Der Proportionalitätsfaktor E heißt **Elastizitätsmodul (E-Modul)**.

SI-Einheit für E : $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

- **Spannungs-Dehnungs-Diagramm**

Die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes ist auf sehr kleine Dehnungen beschränkt. Bei stärkerer Dehnung wird die Proportionalitätsgrenze überschritten und die Deformation wächst dann stärker als die Spannung.

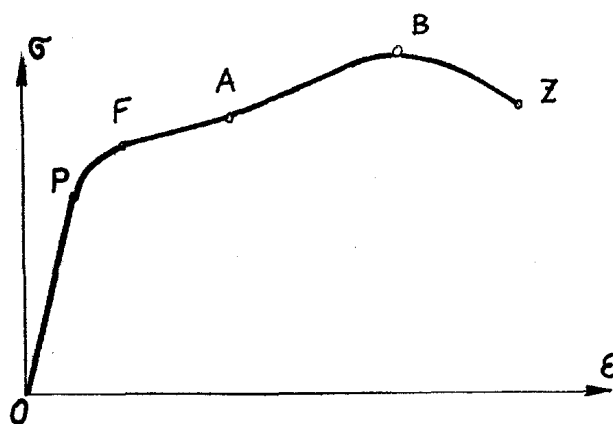


Abb. 3.22: Das Spannungs-Dehnungs Diagramm eines Festkörpers.

Die Verhältnisse lassen sich in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb.3.22) veranschaulichen:

0 bis P stellt den **Hookeschen Bereich** dar. Im allgemeinen zeigen Metalle über

die Proportionalitätsgrenze hinaus noch elastisches Verhalten, d.h. bei Wegnahme der deformierenden Kraft verschwinden die Verzerrungen wieder. Die genaue Elastizitätsgrenze ist daher schwer zu definieren. Sie liegt zwischen P und F.

Vom Punkt E an nimmt die Dehnung bei schwacher Zunahme der Spannung relativ stark zu. Man nennt diese Stelle Streck- oder Fließgrenze. Das Metall verhält sich ähnlich wie eine zähe Flüssigkeit, und der Körper erfährt jetzt eine bleibende Formveränderung. Dieser Fließvorgang hat bei A ein Ende. Es folgt eine Zone der "Verfestigung", in der die Spannung bei weiterer Dehnung wieder zunimmt bis zu einem Maximalwert, der sog. Zerreiß- oder Bruchspannung (Punkt B). Von B ab erfolgt eine starke Querschnittsverkleinerung und bei Z tritt Zerreißen oder Bruch ein.

- **Schubelastizität (Scherung, Torsion)**

Läßt man z.B. auf die Oberseite eines Quaders eine parallel zur oberen Quaderfläche wirkende Kraft F angreifen (oberen Quaderfläche wirkende Kraft F (die untere Fläche sei festgehalten), so wird der Quader in der aus der Abb. 3.23 ersichtlichen Weise deformiert: Er erfährt eine Scherung. Für kleine Scherungswinkel α erfolgt keine Volumenänderung, sondern nur eine Gestaltsänderung. Ist $\tau = F/A$ die Schubspannung ($A =$ Fläche, in der die Kraft angreift), so herrscht nach dem Hookeschen Gesetz für kleine Scherungswinkel α Proportionalität zwischen α und τ :

Definition des Schub- oder Torsionsmodul:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Der vom Material abhängige Proportionalitätsfaktor G heißt **Schub- oder Torsionsmodul**.

SI-Einheit von G : $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

Die Bezeichnung **Torsionsmodul** für G ist dadurch begründet, daß auch bei der Torsionsbeanspruchung (Drillung) eines Materials der Schubmodul G als maßgebende elastische Konstante auftritt.

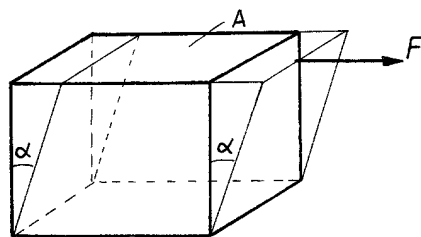


Abb. 3.23: Zur Definition des Schubmoduls.

- **Volumenelastizität (Kompression)**

Setzt man einen Körper einem **allseitigen** Druck oder Zug aus, so wird sein Volumen verkleinert oder vergrößert. Eine Gestaltsänderung tritt nicht auf. Ist p der wirkende Druck und $\Delta V/V$ die relative Volumenänderung, so sind p und $\Delta V/V$ im Hookeschen Bereich wieder einander proportional:

Definition des Kompressionsmoduls:

$$p = K \cdot \frac{-\Delta V}{V}$$

Der Proportionalitätsfaktor K heißt **Kompressionsmodul**. Sein Kehrwert wird **Kompressibilität** genannt.

SI-Einheit von K : $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

Das Minuszeichen in der obigen Definitionsgleichung tritt auf, weil einer Volumenverkleinerung (ΔV ist dann negativ!) ein positiver Druck zugeordnet wird. Die Moduln sind immer positiv.

- **Biegung**

Gegeben sei ein einseitig eingespannter Stab der Länge l , an dessen freien Ende eine Kraft F senkrecht zur Stabrichtung wirkt (Abb.3.24). Der Stab wird dadurch gebogen, wobei der obere Teil des Stabes gedehnt, der untere gestaucht wird. Zwischen beiden Bereichen gibt es eine Zone, die **neutrale Faser**, die weder gedehnt noch gestaucht wird, d.h. ihre ursprüngliche Länge l beibehält.

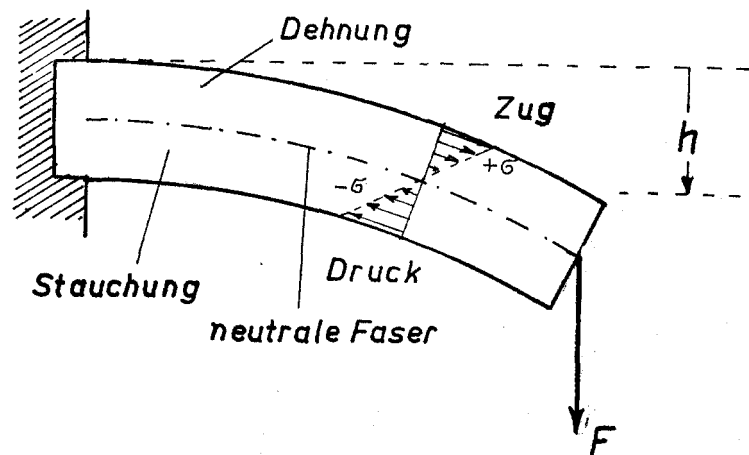


Abb.3.24: Biegung eines einseitig fixierten Stabes.

In Abb.3.24 ist auch die Verteilung der Zug- und Druckbelastung über die Querschnittsfläche dargestellt. Die Zug- bzw. Druckspannung σ steigt mit der Entfernung von der neutralen Faser an. Man sieht, daß die maßgebende **elastische Konstante bei der Biegung der E-Modul** ist. Für die Senkung h des freien Stabendes (h wird auch Biegungspfeil genannt) eines einseitig eingespannten Stabes liefert die Theorie:

Definition des Flächenträgheitsmoments I:

SI-Einheit von I : 1 m^4 .

$$h = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot F$$

Ohne auf die genaue Definition und Berechnungsmethode von I einzugehen, werden in Abb.3.25 für einige Profile die Flächenträgheitsmomente in Bezug auf die Richtung der Krafteinwirkung angegeben. Das Flächenträgheitsmoment I ist ganz entscheidend von der **Gestalt des Stabquerschnitts** und der **Richtung der Kraft F** abhängig. Großes Flächenträgheitsmoment und damit auch hohe Steifigkeit (kleiner Biegungspfeil) ergibt sich bei solchen Profilen, wo die beanspruchten Zonen weit von der neutralen Faser entfernt sind. Für die Durchbiegung eines an **beiden** Enden frei aufliegenden Stabes gilt:

$$h = \frac{I^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot F \quad (\text{Gl. 3.1})$$

I ist hier der **Abstand der Auflagepunkte!**

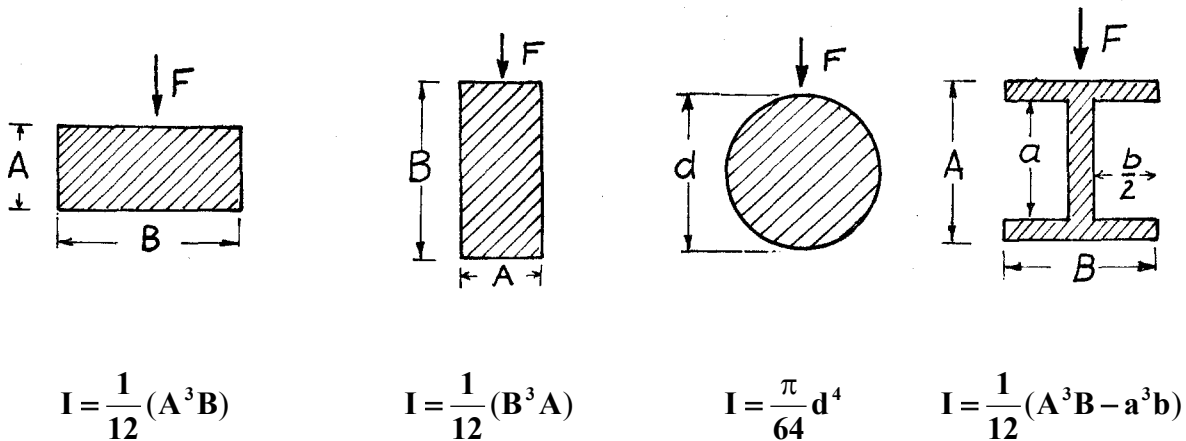


Abb. 3.25: Beispiele für Flächenträgheitsmomente einiger Stabprofile

Versuchsdurchführung 3B:

Bestimmung des E-Moduls für Messing

- Aufgabenstellung:

Bestimmung des E-Moduls für Messing

- Meßanordnung

Die Abb.3.26 zeigt eine Skizze der Versuchsanordnung. Ein Vierkant-Messingrohr R wird - auf zwei Auflager (Schneiden S) liegend - in der Mitte durch Anhängen von Massestücken m mit der Kraft $F = m \cdot g$ belastet und dadurch gebogen. Die Durchbiegung h wird mit einer Meßuhr MU bestimmt. Ein Hub der Spindel von 1,00 mm entspricht einem vollen Zeigerumlauf (= 100 Skt) des großen Zeigers. Die Meßuhr kann durch Drehen der Skala auf Null gestellt werden.

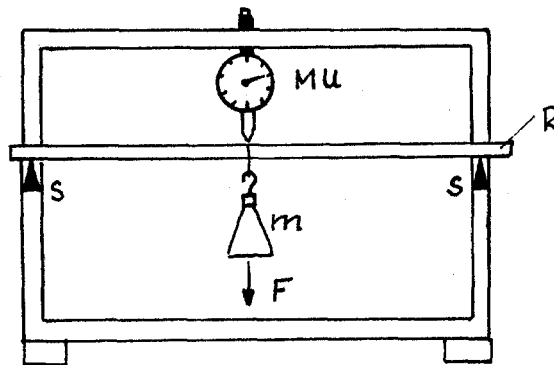


Abb. 3.26: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus.

Durch Anhängen verschiedener Massestücke m_1, m_2, \dots ergeben sich entsprechende Werte h_1, h_2, \dots für die Biegungspfeile (Wertetabelle anfertigen!). Trägt man in einem Diagramm die Masse m (oder die entsprechende Gewichtskraft $F = m \cdot g$) als Funktion der Durchbiegung h auf, so liegen die Meßpunkte auf einer Geraden, wenn der Hookesche Bereich der Belastung nicht überschritten wird. Die Bestimmung von E erfolgt nach der für die Durchbiegung eines Balkens abgeleiteten Gleichung (Gl. I) im Kapitel über Biegung. Löst man die Gleichung nach E auf, so sieht man, daß die Länge l , das Trägheitsmoment I und der Quotient F/h bzw. m/h die zu ermittelnden Meßgrößen sind. m/h erhält man als Steigung $\Delta m / \Delta h$ der Geraden aus dem Diagramm (großes Steigungsdreieck wählen!). **Die Stablänge l entspricht dem Schneidenabstand.** Er wird ermittelt, indem man den Stab abnimmt (Meßuhr anheben!) und einen Maßstab auf die Schneiden legt.

Das Flächenträgheitsmoment I ist aus den Querschnittsabmessungen (Abb.3.27) zu ermitteln. Bei dem vorhandenen Stab handelt es sich um ein Vierkantrohr mit quadratischem Querschnitt. Das Außenmaß A und das Innenmaß a sind mit der Schieblehre zu messen (Werte auf Zehntelmillimeter angeben!). Die Berechnungsformel für I kann man sich für das gegebene Profil aus dem Berechnungsbeispiel in der Abb.3.25 herleiten. Es gilt: I für den Vollstab minus I für den Hohlraum.

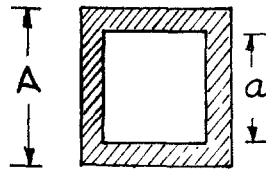


Abb. 3.27: Definition der Dimensionen des Vierkantrohres.

• **Meßprotokoll**

1. **Messung der Stabdimensionen des Vierkantrohres:**

$$l = \quad \text{cm} = \quad \text{m};$$

$$A = \quad \text{mm};$$

$$a = \quad \text{mm};$$

2. **Berechnung des Flächenträgheitsmoments I_R für das Vierkantrohr** (zunächst in mm^4 , dann in m^4 umrechnen):

$$I_R = \quad \text{mm}^4 = \quad \text{m}^4;$$

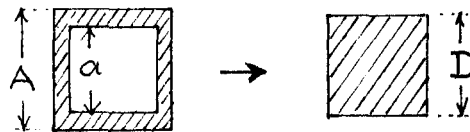
3. **Wertetabelle:**

m / kg	0,5	1,0	1,5	2,0
h / mm				

4. **Erstellung des Diagramms m gegen h und Bestimmung der Steigung $\Delta m / \Delta h$ der Geraden.** $\Delta m / \Delta h$ entspricht in (Gl. 3.1) dem Quotienten m/h .

5. **Berechnung von E in SI-Einheiten.**

6. **Berechnen Sie, welche Seitenlänge D** ein quadratischer Vollstab von gleicher Länge und gleichem Material wie das Vierkantrohr haben müßte, damit er die gleiche Durchbiegung erfährt, bei gleicher Belastung. Um welchen **Faktor f** ist der Materialaufwand bei dem Vollstab größer als beim Rohr?



7. **Welcher Fehler (in %) für E** würde sich **allein** aus einer Längenungenauigkeit des Stabes von ± 2 mm ergeben?

8. **Freiwillige Aufgabe** (für gute Rechner):

Wie groß ist der absolute und der prozentuale Fehler für das Flächenträgheitsmoment des Rohres, wenn A und a mit einer der Schieblehre entsprechenden Genauigkeit von $\pm 0,1$ mm gemessen werden? (Berechnung nach Gl. 12 auf Seite 0/15).

Übungen

Ü 3.1

Ein Pendel hat eine Maximalauslenkung von 10 cm und es dauert 0,5 s (gezählt vom Nulldurchgang ab), bis der Maximalausschlag erreicht ist.

- Welche Kreisfrequenz hat das Pendel ?
- Wie lange dauert es, bis das Pendel einen Ausschlag von 4,0 cm hat ?
- Wie groß ist der Ausschlag 2,3 s nach dem Nulldurchgang ?

Ü 3.2

Wann tritt Resonanz auf ? Was ist ein Resonator ? Was beschreibt die Resonanzkurve ?

Ü 3.3

Wie groß ist die Wellenlänge (in mm) bei Ultraschall von 30 kHz in Wasser, wenn die Phasengeschwindigkeit in Wasser 1500 m/s ist ?

Ü 3.4

Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Stickstoffgas bei 20°C (für zweiatomige Gase gilt: $C_p/C_v = \kappa = 1,40$).

Ü 3.5

Um welchen Faktor ändert sich die Schallintensität einer Welle, wenn sich die Schallwechseldruckamplitude verdoppelt ?

Ü 3.6

Welche Größen einer Welle ändern sich und welche nicht, wenn die Welle von einem Medium in ein anderes übertritt ?

Ü 3.7

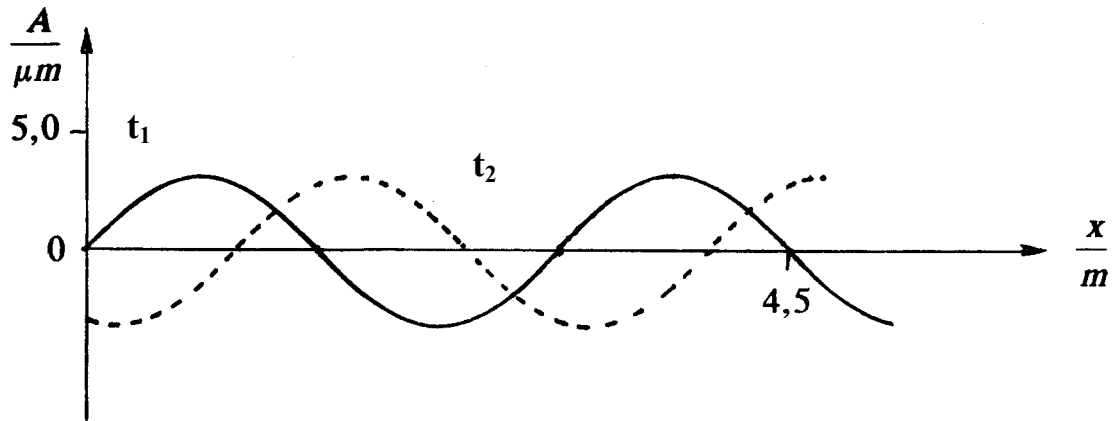
Wann tritt beim Auftreffen einer Welle auf ein anderes Medium keine Reflexion auf?

Ü 3.8

Eine Violinsaite der Länge 40 cm schwinde mit 440 Hz. Mit welcher Frequenz schwingt die Saite, wenn man sie bei gleicher Spannung auf 35 cm verkürzt ?

Ü 3.9

Das Diagramm zeigt den Auslenkungszustand einer harmonischen Welle als Funktion der Ausbreitungscoordinate zu den Zeiten $t_1 = 0$ s und $t_2 = 600$ μ s. Ermitteln Sie aus dem Diagramm Frequenz, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie die Amplitude dieser Welle (alle Größen in SI-Einheiten):



Ü 3.10

Auf die Querschnittsfläche eines Rechteckstabes wirkt unter einem Winkel von 30° zum Lot eine Kraft F von 100 N ein.

Berechnen Sie die Normal- und die Tangentialspannung, die auf die Fläche wirkt.

Ü 3.11

Der E-Modul von Kupfer ist $E = 1,25 \cdot 10^{11}$ N/m^2 . Wie groß wäre er in kbar? Welche Längenänderung (in mm) erfährt ein 2 m langer Cu-Draht vom Durchmesser $0,5$ mm, wenn man 1 kg anhängt? Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Cu? Dichte von Cu: $8,93$ g/cm^3 .