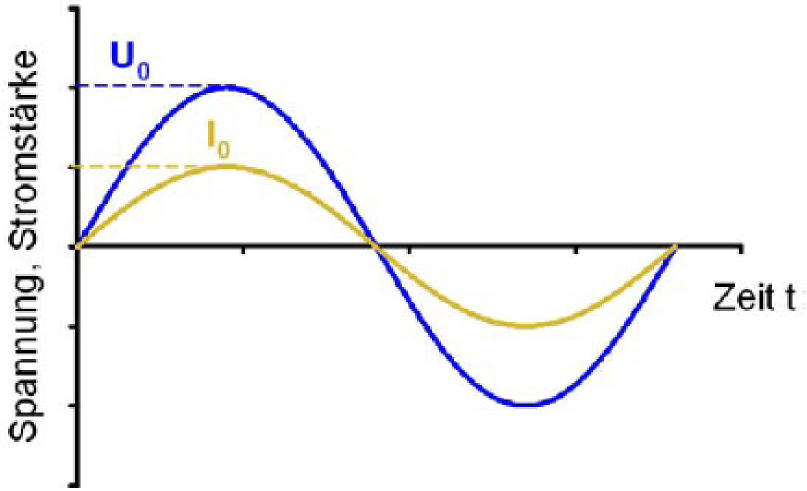
IV. Elektrizität und Magnetismus

IV.4 Wechselstromkreise

Ohmscher Widerstand bei Wechselstrom



- Der Ohmsche Widerstand verhält sich bei Wechselstrom genauso wie bei Gleichstrom
- zu jedem Zeitpunkt t gilt:

$$R = \frac{U(t)}{I(t)} = \text{const}$$

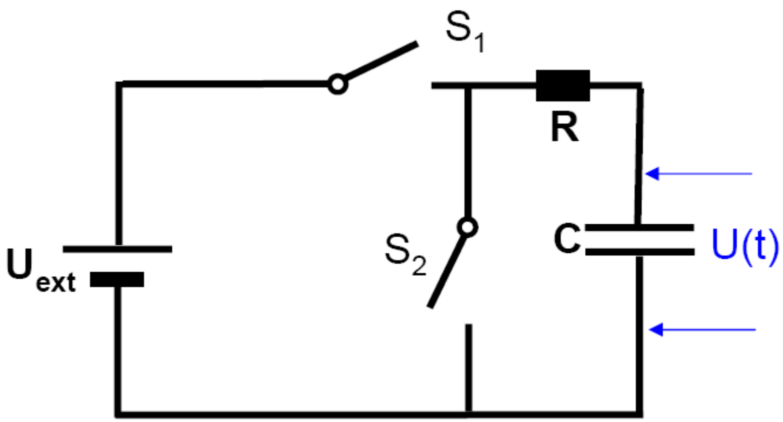
d.h. das Verhältnis aus momentaner Spannung U(t) und momentaner Stromstärke I(t) ist konstant

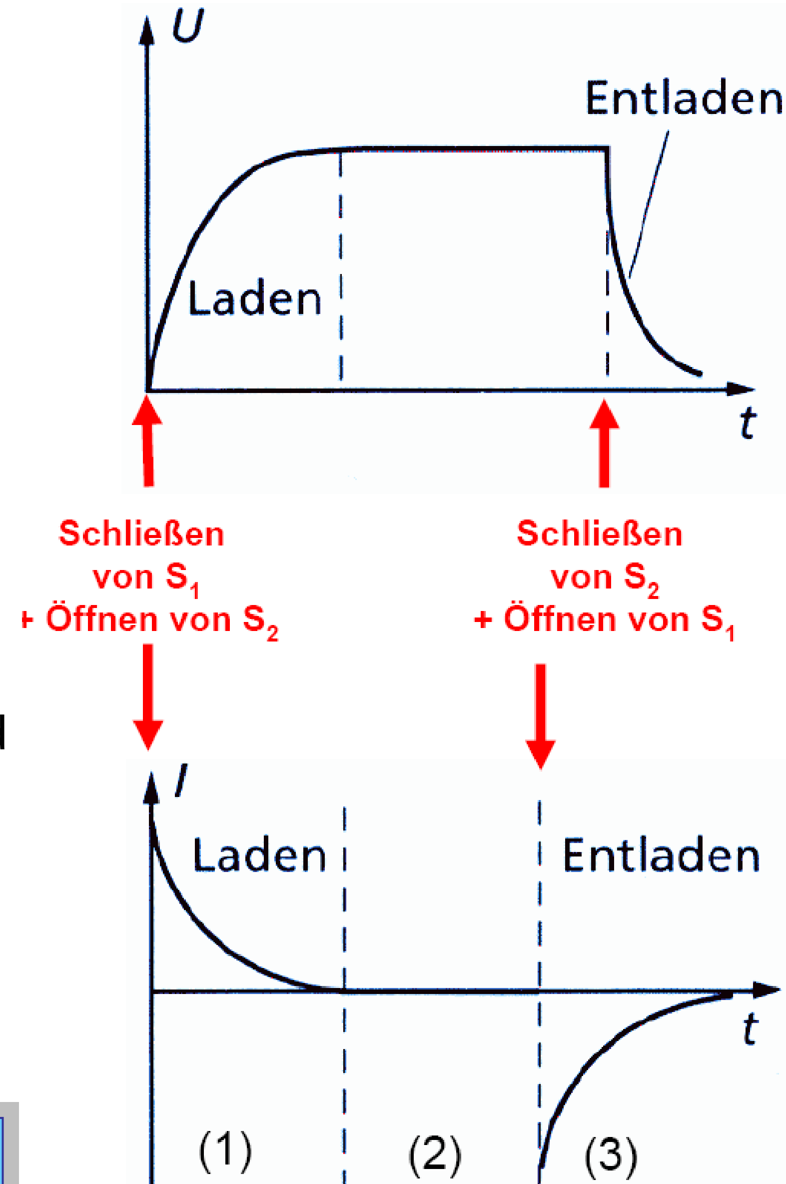
- Der Widerstand ist unabhängig von der Kreisfrequenz ω der Wechsel-spannung

- beim Ohmschen Widerstand laufen Spannungs- und Stromzeiger **in Phase** im Zeigerdiagramm um.

An R:
U und I in Phase

Auf- und Entladen eines Kondensators





1.) **Aufladen**:

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

$$U(t) = U_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

2.) **Gleichgewicht**:

$$\left.\begin{array}{l} U(t) = U_0 \\ I(t) = 0 \end{array}\right\} \text{Widerstand unendlich}$$

3.) **Entladen:**

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

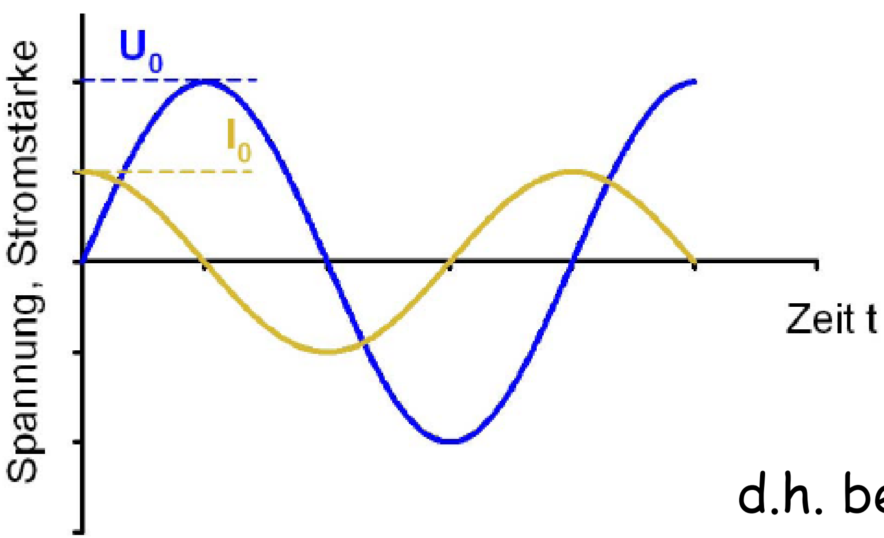
$$I(t) = -I_0 \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Auf- und Entladen eines Kondensators

Kondensator bei Wechselstrom

- Anlegen einer Wechselspannung an einem Kondensator ist dem einem periodischen Auf- und Entladen ähnlich.

  - Erst muss Strom fließen, damit der Kondensator aufgeladen wird; d.h. Stromstärke eilt der Spannung um 90^0 (oder T/4) voraus



- der kapazitive Widerstand X_c nimmt mit zunehmender Frequenz ab:

$$\boxed{X_C = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega \cdot C}}$$

d.h. bei Gleichspannung ist X_c unendlich groß

Am Kondensator eilt Strom der Spannung um $\delta = 90^0$ voraus

An Kondensator C:
I vor U

Selbstinduktion einer Spule

- Wenn ein Strom I durch eine Spule fließt, so entsteht innerhalb der Spule ein Magnetfeld: $B = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{h}$ (h = Länge der Spule)
- dieses Magnetfeld verursacht einen magnetischen Fluss Φ durch die Spule: $$\Phi = A \cdot B(I) = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot A \cdot I}{h}$$
- Wenn sich der Strom I ändert, dann ändert sich auch der magnetische Fluss $\Rightarrow$ Es wird eine Spannung induziert, die der Ursache der Flussänderung entgegenwirkt:

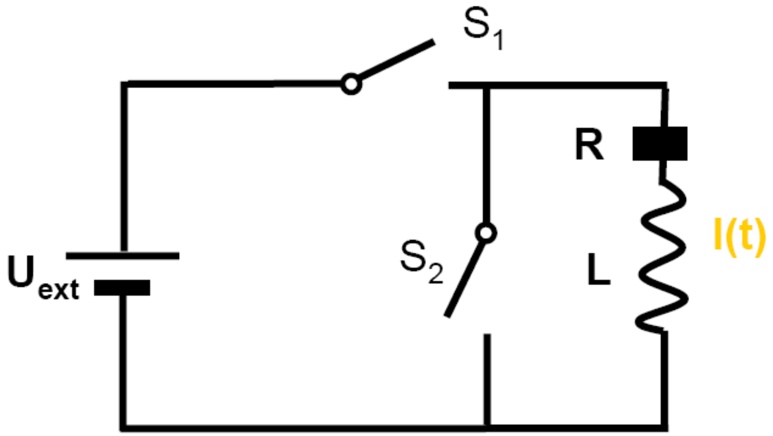
$$U_{ind} = -n \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 \cdot n^2 \cdot A \cdot \frac{I}{h}\right) = -\frac{\mu_0 \cdot n^2 \cdot A}{h} \cdot \frac{dI}{dt}$$

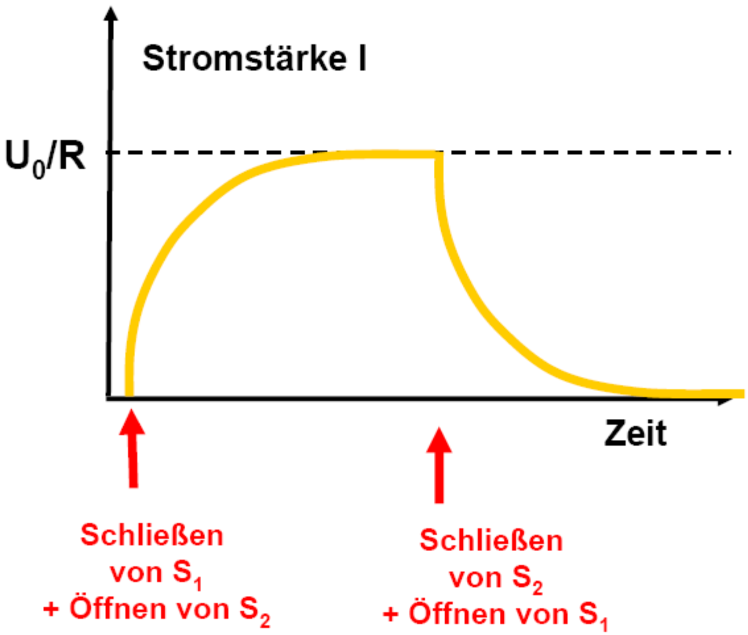
$U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ mit Induktivität $L = \mu_0 \cdot \frac{n^2 \cdot A}{h}$ der Spule

L = **Induktivität (Selbstinduktion):** Einheit [L] = 1 V·s/A =1 H (Henry)

- Die induzierte Spannung erzeugt einen zusätzlichen Strom in der Spule, der beim Ein- bzw. Ausschalten der externen Spannung den Anstieg bzw. Abfall des Gesamtstroms verlangsamt (Lenzsche Regel).

Selbstinduktion einer Spule





- **Einschalten**:
  (Schließen von S_1 und Öffnen von S_2)
  Externe Spannung liegt sofort an.
  Stromfluss ist verzögert durch induzierte Gegenspannung

- **Ausschalten**:
  (Schließen von S_2 und Öffnen von S_1)
  Externe Spannung ist sofort weg;
  aber Strom fließt noch wegen induzierte Spannung

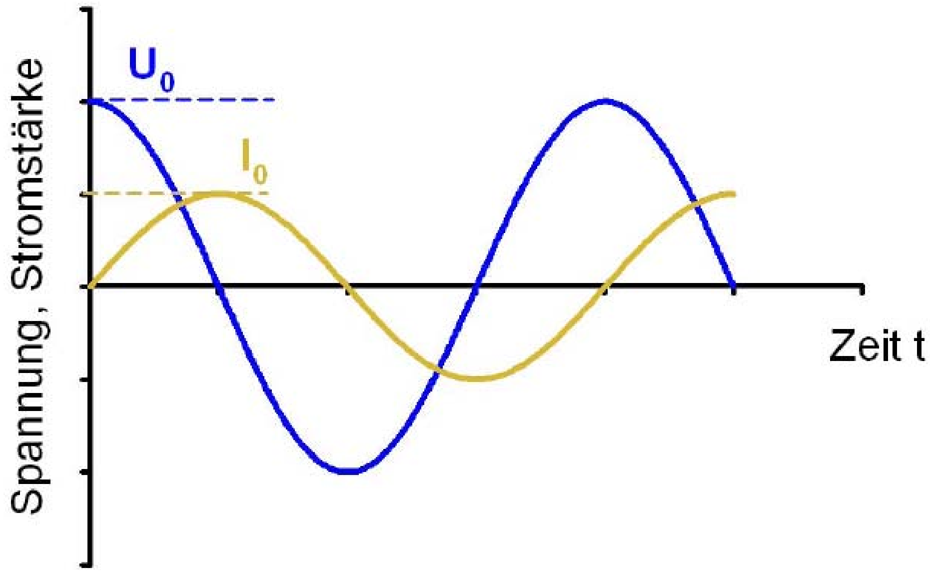
1.) **Einschalten:** $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$

2.) **Gleichgewicht:** $\left. \begin{array}{l} U = U_0 \\ I = \frac{U_0}{R} \end{array} \right\}$ nur Ohmscher Widerstand

3.) **Ausschalten:** $I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Nachleuchten mit Induktivität

Ideale Spule bei Wechelstrom



- Anlegen einer Wechselspannung an eine Spule ist wieder periodischem An- und Abschalten ähnlich.
- Strom hinkt der Spannung um 90^0, d.h. um T/4 hinterher. (R=0)
- der induktive Widerstand X_L nimmt mit wachsender Frequenz zu:

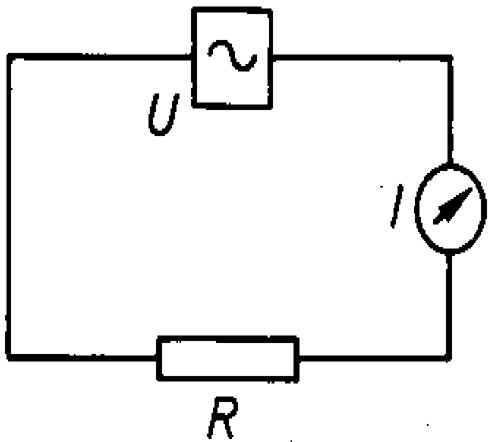
$$\boxed{X_L = \frac{U_0}{I_0} = L \cdot \omega}$$

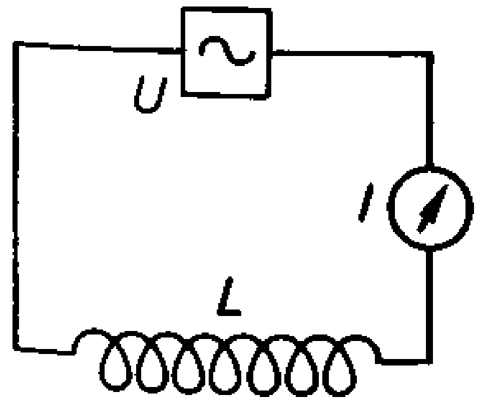
d.h. bei Gleichstrom ist X_L=0

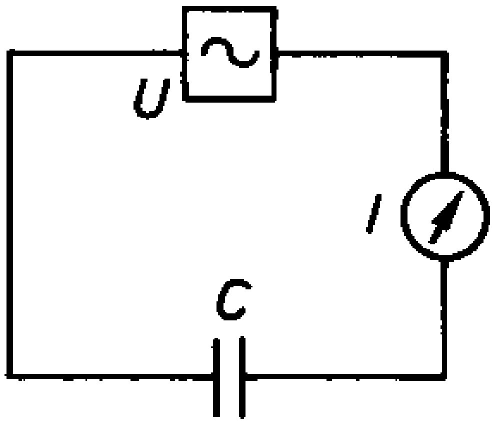
An einer Spule hinkt der Strom der Spannung um $\delta = 90^0$ hinterher

An Induktivität L:
U vor I

Frequenzabhängigkeit der Wechselstromwiderstände an
Ohmschem Widerstand, Induktivität und Kapazität





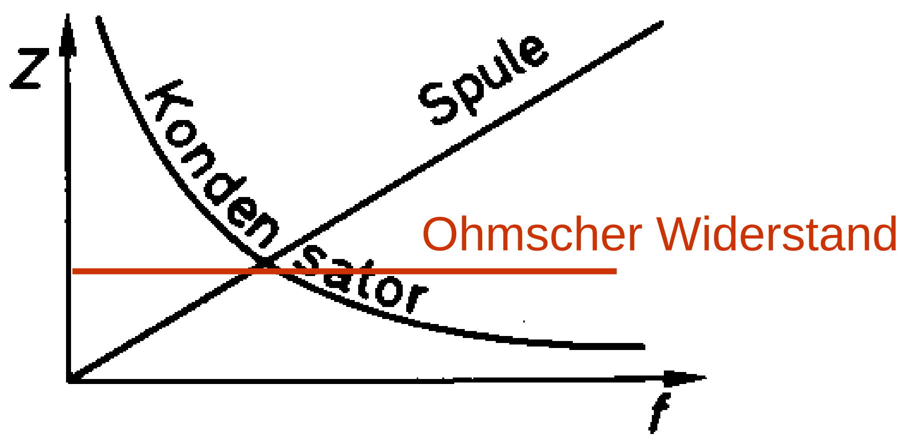


$$R = \frac{U_0}{I_0}$$

$$X_L = \omega \cdot L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

frequenzunabhängig

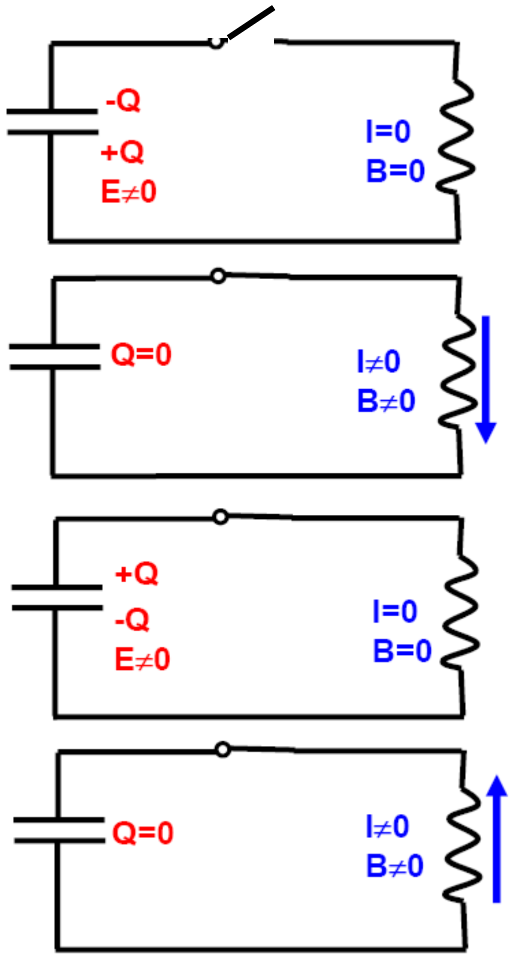


LC-Schwingkreis

Schwingungen beinhalten **periodische Umwandlung** von Energieformen:

<u>in Mechanik</u>: **potenzielle Energie ⇔ kinetische Energie**

<u>in Elektrodynamik</u>:
periodische Umwandlung **elektrische ⇔ magnetische Energie**



1.) Ladung Q auf Kondensator gespeichert;
Spannung $U_C=Q/C$

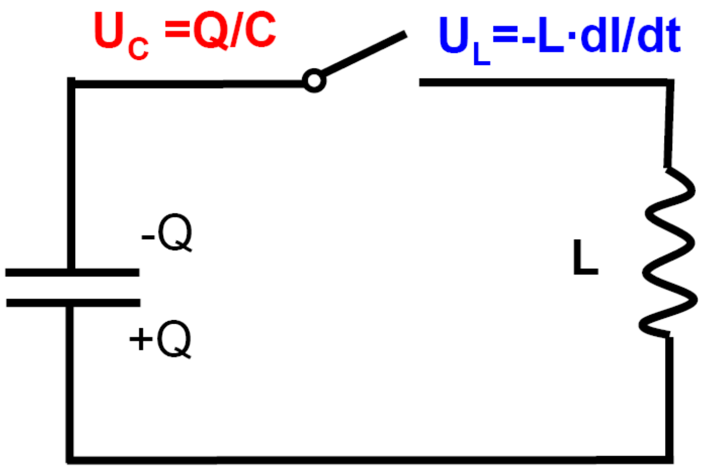
2.) Schließen des Schalters; Ladungsausgleich;
Strom fließt; Spannung wird in Spule induziert

3.) Kondensator entladen; Spule hält Stromfluss aufrecht; Kondensator lädt sich entgegen-gesetzt auf.

4.) Vorgang wiederholt sich mit umgekehrter Stromrichtung

⇒ **periodischer Umladevorgang: Schwingkreis**

Quantitative Beschreibung des LC-Schwngkreises



- **Kirchhoffsche Maschenregel:**

$$U_C - U_L = 0$$

$$U_C = \frac{Q}{C}; \quad U_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad \Rightarrow L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- analog zur mechanischen Schwingungsgleichung (z.B. Federpendel)

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \quad \text{Lösung: } x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- entsprechende Lösung für den LC-Schwingkreis:

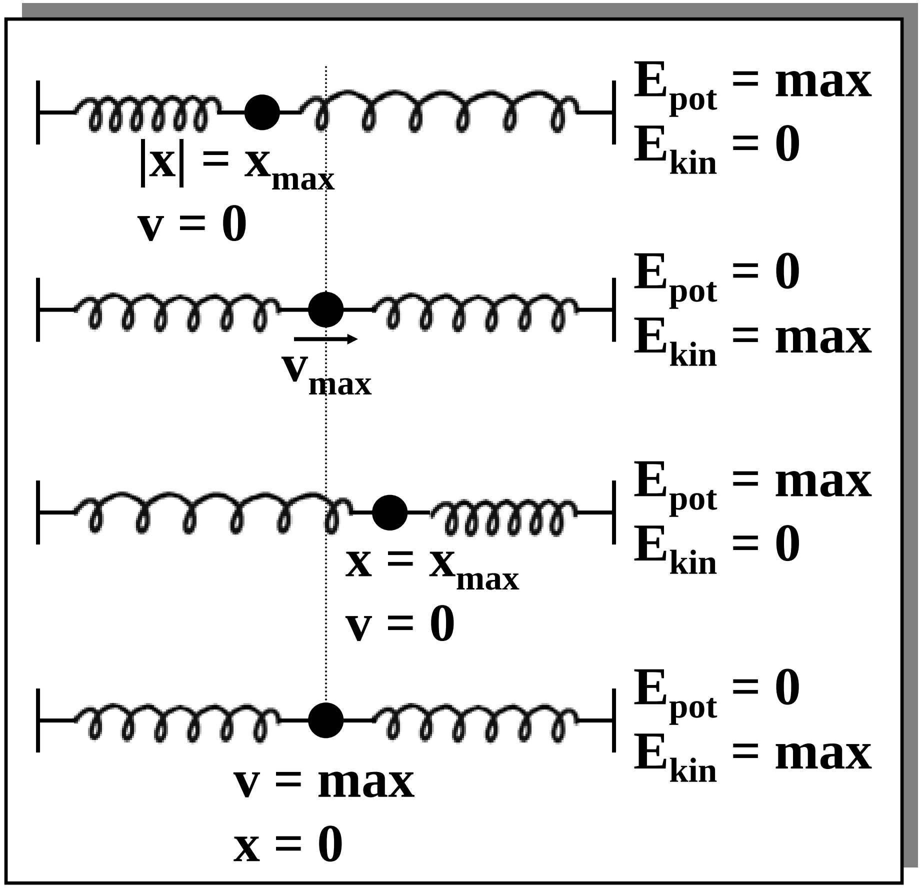
$$Q(t) = Q_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \text{ mit Eigenfrequenz } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = I_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$\Rightarrow$ **ungedämpfte harmonische Schwingung**

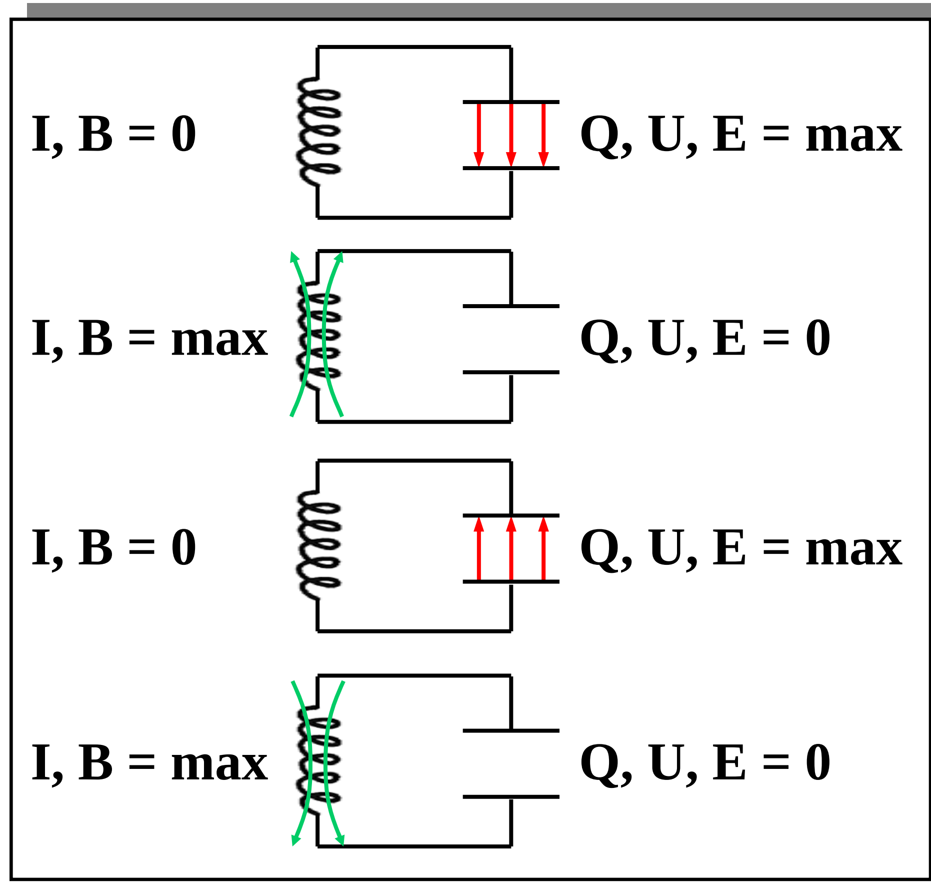
Vergleich mechanischer und elektromagnetischer Schwingungen

mechanische Schwingungen



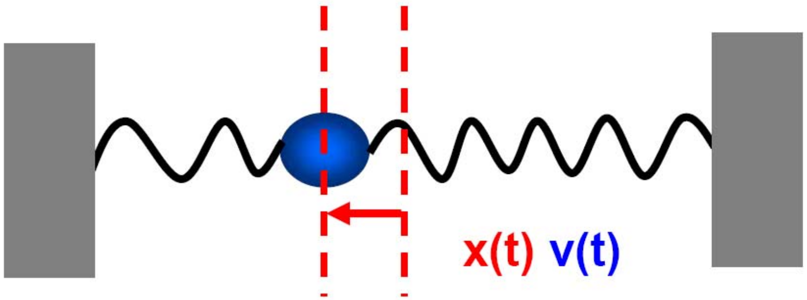
potenzielle ↔ kinetische Energie

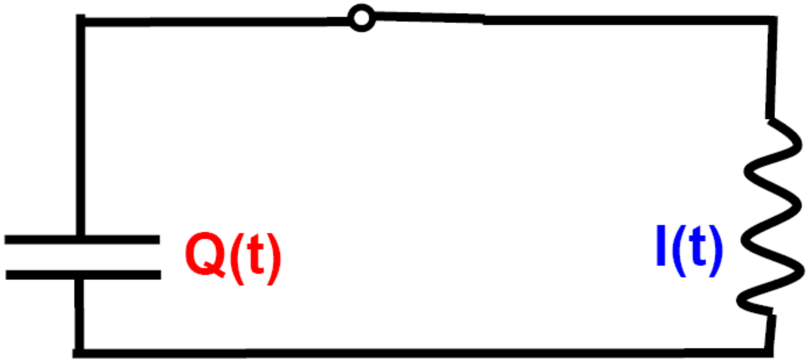
elektromagnetische Schwingungen



elektrische ↔ magnetische Energie

Analogie: LC-Schwingkreis und Federschwingung





$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

$$L \cdot \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

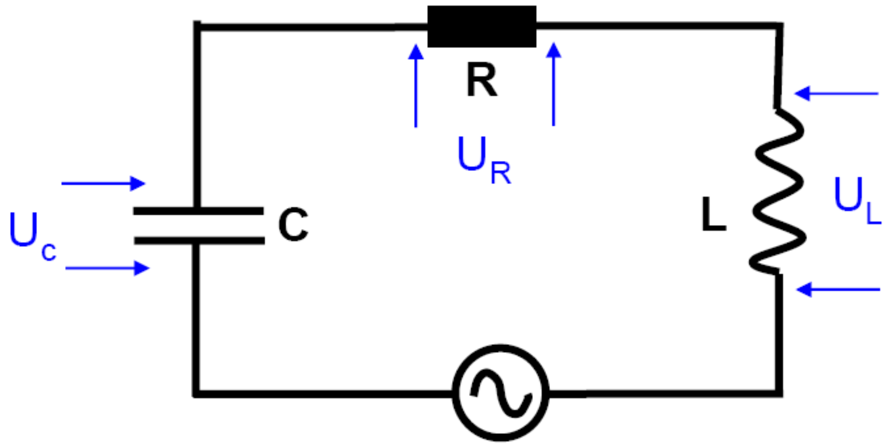
Auslenkung x	Ladung Q
Geschwindigkeit v	Strom I
träge Masse m	Induktivität L
Federkostante k	inverse Kapazität 1/C
potenzielle Energie: $E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$	elektrische Feldenergie: $E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$
kinetische Energie: $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	magnetische Feldenergie: $E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$

LCR-Reihenschwingkreis

Reihenschaltung aus L, C, R mit äußerer Spannngsquelle: $U_{ext} = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

Strom überall gleich: $I = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta) = \frac{U_0}{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta)$

Spannung und Stromstärke phasenverschoben um Winkel δ

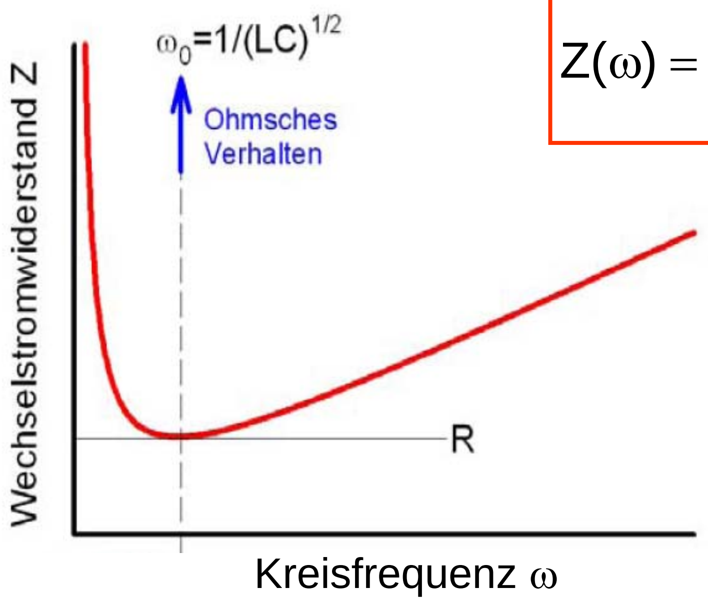


$U_{ext}(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$

Wechselstromwiderstand: $Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$

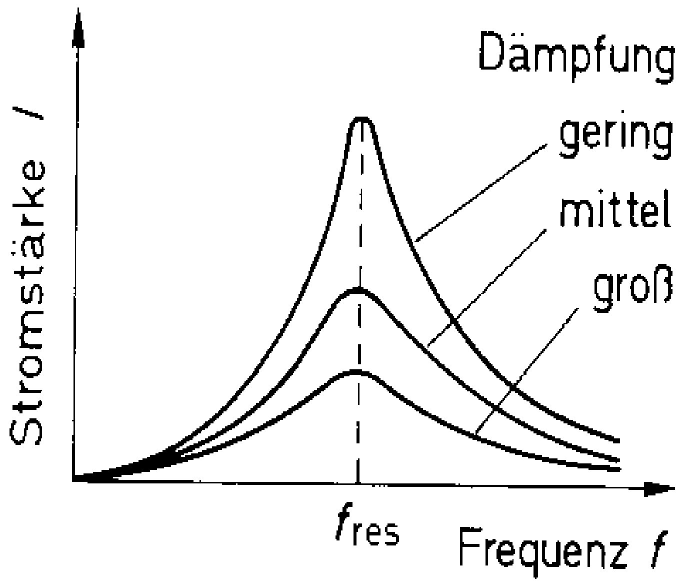
Phasenwinkel δ: $\tan\delta = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R}$

LCR-Reihenschwingkreis



$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

- für kleine Frequenzen Wechselstrom-widerstand groß (Strom klein) wegen kapazitiven Widerstands: $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$
- für große Frequenzen Wechselstrom widerstand groß (Strom klein) wegen induktiven Widerstands: $X_L = \omega \cdot L$



- Strom maximal (Widerstand minimal) für

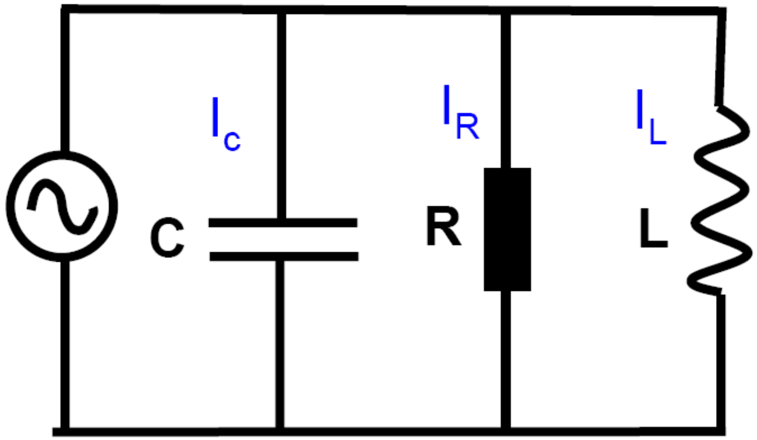
$$X_L = X_C; \quad \omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}; \quad Z(\omega_0) = R \ \text{(ohmisch)}$$

Resonanzkreisfrequenz: $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

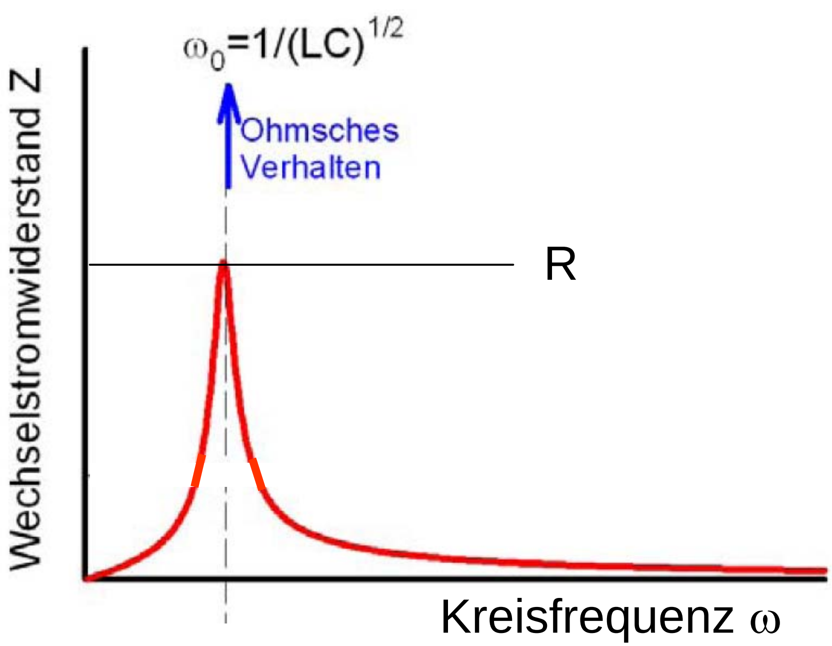
Resonanzfrequenz: $f_{res} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

Dämpfung durch Ohmschen Widerstand R

LCR-Parallelschwingkreis



$U_{ext}(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$



- für kleine Frequenzen fließt Strom durch Induktivität, da induktiver Widerstand am kleinsten: $X_L = \omega \cdot L$
- für große Frequenzen fließt Strom durch Kapazität, da kapazitiver Widerstand am kleinsten: $X_C = \dfrac{1}{\omega \cdot C}$
- im Resonanzfall Widerstand maximal und rein ohmisch

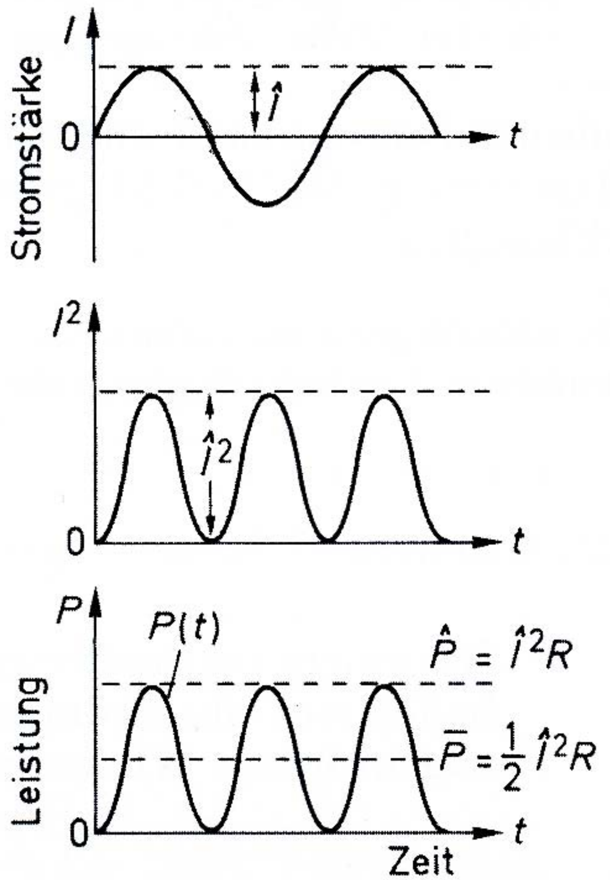
$$X_L = X_C; \quad \omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C}; \quad Z(\omega_0) = R$$

Resonanzkreisfrequenz: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

Resonanzfrequenz: $f_{res} = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

Resonanz-Schwingkreis

Effektivwerte von Strom und Spannung



$$U(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta) = \frac{U_0}{Z} \cdot \sin(\omega \cdot t - \delta)$$

am Ohmschen Widerstand sind Spannung und Stromstärke phasengleich: $\delta = 0^0$

- Der **Effektivwert** I_{eff} des Wechselstroms I(t) ist der Wert, der über eine volle Periode gemittelt an einem Ohmschen Widerstand die mittlere Leistung wie ein Gleichstrom ergibt:

$$\overline{P}_{AC} = \overline{I(t) \cdot U(t)} = \frac{1}{2} R \cdot I_0^2 = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot I_0$$

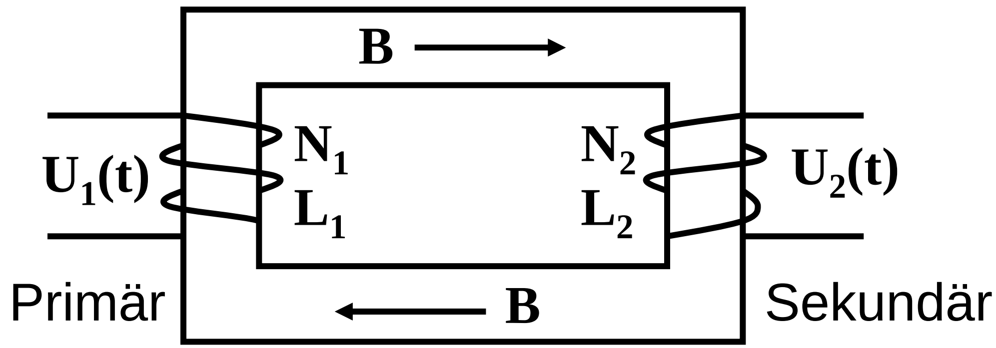
$$P_{DC} = I_{eff} \cdot U_{eff} = R \cdot I_{eff}^2$$

Gleichsetzen ergibt: $\boxed{I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot I_{0;} \quad U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot U_{0;}}$

An der Wechselstromsteckdose: $U_{eff} = 230\ \text{V};$ Scheitelspannung: $U_0 = 325\ \text{V}$

Gekoppelte Induktivitäten : Transformator

- Zwei getrennte Spulen auf denselben Eisenkern gewickelt; dieselben B-Feldlinien gehen durch beide Spulen; beide Spulen sehen das gleiche $\frac{d\phi_m}{dt}$



Primärspule L_1: N_1 Windungen;
Sekundärspule L_2: N_2 Windungen

Ständige zeitliche Flussänderung bei Wechselspannung

- Wechselspannung $U_1(t)$ an Primärspule erzeugt Wechselstrom $I_1(t)$
- Wechselstrom $I_1(t)$ erzeugt ein magnetisches Wechselfeld B(t), dessen Feldlinien im ganzen Eisenkern umlaufen
- oszillierender magnetischer Fluss $\Phi(t)$ induziert in Sekundärspule Sekundärspannung $U_2(t)$ gleicher Frequenz aber anderer Amplitude

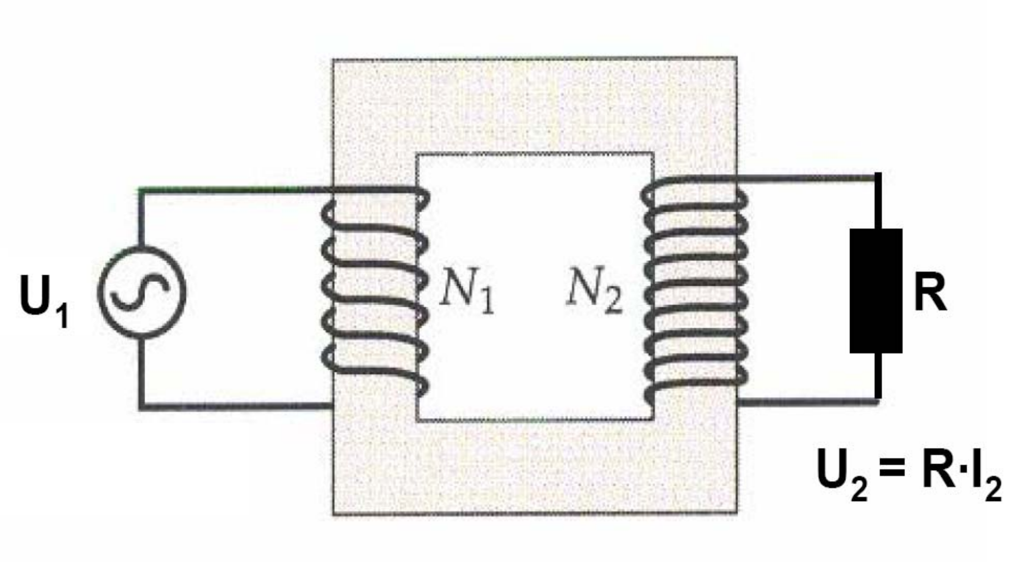
$$U_1(t) \rightarrow I_1(t) \rightarrow B(t) \rightarrow \phi(t) \rightarrow U_2(t)$$

$$U_1(t) = -N_1 \frac{d\phi_m}{dt}; \quad U_2(t) = -N_2 \frac{d\phi_m}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

Umsetzung von Wechsel-spannungen

Transformator mit Last

- Wird ein Widerstand R an die Sekundärspule angeschlossen, so fließt dort der Strom $I_{2;}$ verbrauchte elektrische Leistung: $P_2 = I_2 \cdot U_2$



- Energieerhaltung verlangt, dass die an der Sekundärseite entnommene Leistung an der Primärseite hineingesteckt wird:

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = P_2 = U_2 \cdot I_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

Transformator

Anwendungen des Transformators

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}}$$

- **Niederspannungstransformator:** $N_2 < N_1$

  Anpassung von Niederspannungsgeräten z.B. 6V oder 12 V an das Stromnetz: 230 V

- **Hochstromtransformator:** $N_2 \ll N_1$

  z.B. Elektroschweißen

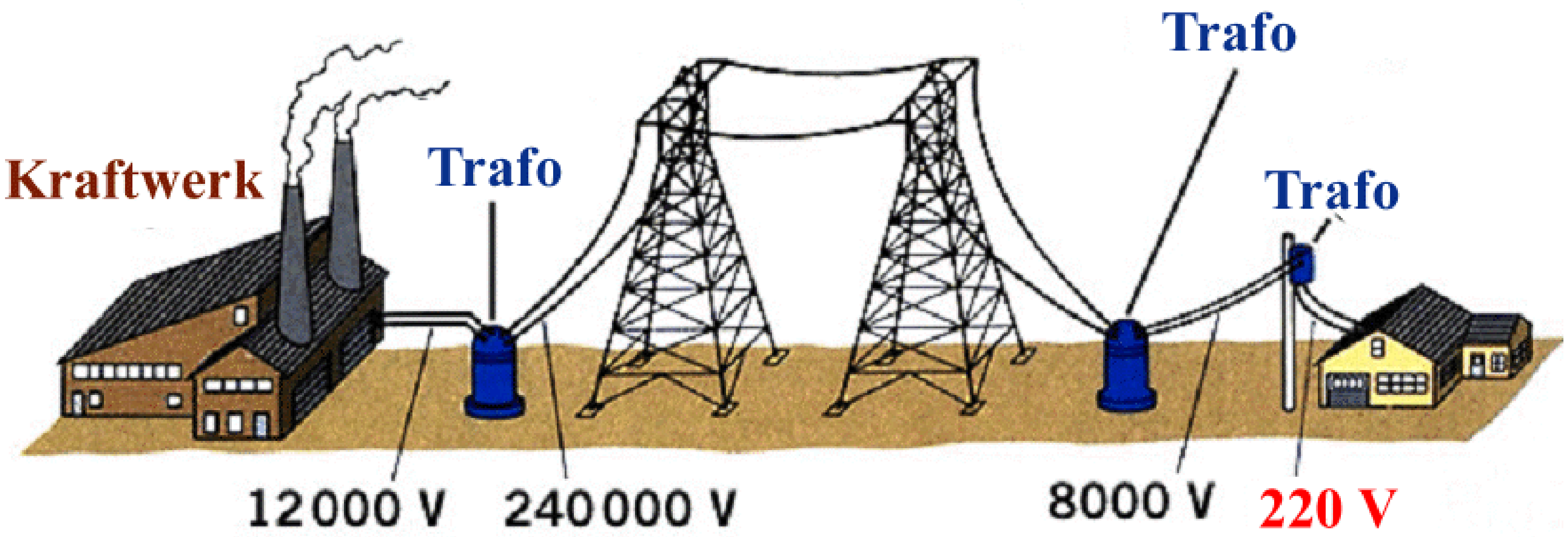
Hochstrom-Transformator

- **Hochspannungstranformator:** $N_2 \gg N_1$

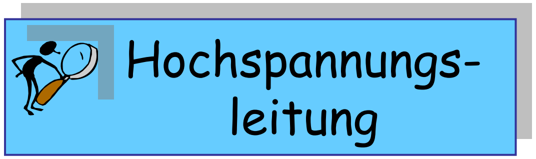
  z.B. Umspannwerk

Hochspannungs-Transformator

Überlandleitung zur Energieübertragung



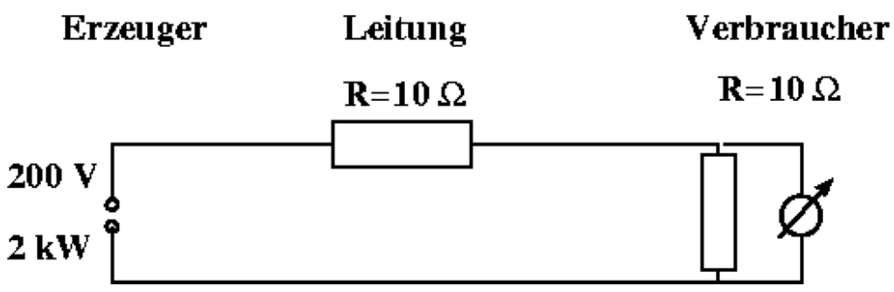
- Zum verlustarmen Transport der elektrischen Energie vom Kraftwerk zum Verbraucher wird elektrische Energie über mehrere Spannungsebenen transportiert



Vergleich des Energietransports mit und ohne Umspannung

2 kW Leistung vom Erzeuger: was geht zum Verbraucher ?

Niederspannungslösung



- maximaler Strom:

$$I = \frac{P}{U} = 10\ \text{A}$$

- Leistungsverlust in Leitung:

$$P_{\text{Verl.}} = R \cdot I^2 = 1\text{kW}$$

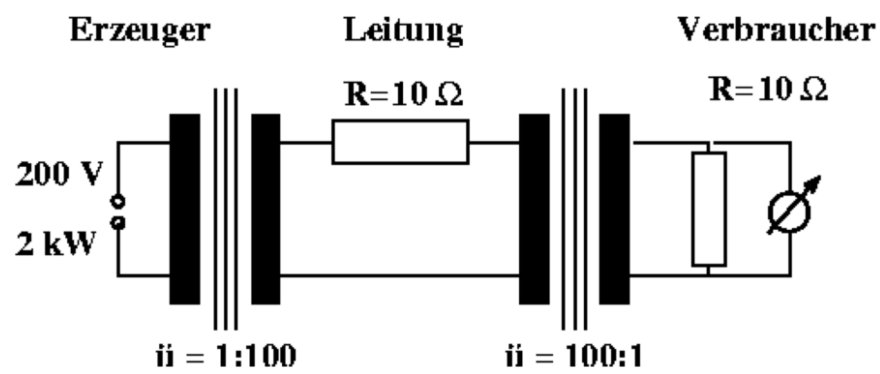
- Leistung beim Verbraucher:

$$P_{\text{Verb}} = 1\text{kW}$$

- Spannung beim Verbraucher:

$$U_{\text{Verb}} = 100\,\text{V}$$

Umspannungslösung



- maximaler Strom:

$$U_{HV} = 20\text{kV}; \quad I = \frac{P}{U_{HV}} = \frac{2\text{kW}}{20\text{kV}} = 0{,}1\text{A}$$

- Leistungsverlust in Leitung:

$$P_{\text{Verl.}} = R \cdot I_{HV}{}^2 = 0{,}1\text{W}$$

- Leistung beim Verbraucher:

$$P_{\text{Verb}} = 1{,}9999\,\text{kW}$$

- Spannung beim Verbraucher:

$$P_{\text{Verb.}} = \frac{U_{HV} - R \cdot I_{HV}}{100} = 199{,}99\,\text{V}$$

Zusammenfassung

- Kapazitäten, Induktivitäten und Ohmsche Widerstände verhalten sich unterschiedlich im Wechselstromkreis:
  - **Ohmscher Widerstand**: Stromstärke und Spannung sind in Phase
  - **Kapazität:** Stromstärke eilt der Spannung um eine Viertelperiode (90^0) voraus. Der kapazitive Widerstand nimmt mit zunehmender Frequenz ab.
  - **Induktivität**: Stromstärke hinkt der Spannung um eine Viertelperiode (90^0) hinterher. Der induktive Widerstand nimmt mit der Frequenz zu

- **elektromagnetische Schwingkreise**:

  L, C, R können zu Schwingkreisen zusammengeschaltet werden; periodische Umwandlung: **elektrische** ⇔ **magnetische** Energie

- **Transformatoren** sind wichtige Komponenten bei Wechselstrom-anwendungen:
  - induktive Kopplung zweier Wechselstromkreise;
  - Leistungsübertragung durch induktive Kopplung vom Primär- zum Sekundärstromkreis;
  - Umsetzung von Wechselströmen und Spannungen: $\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}}$