Inhalt

Griechisches Alphabet

Buchstabe		Name	Buchstabe		Name
Α	α	Alpha	Ν	ν	Ny
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	ϑ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
Ι	ι	Jota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	My	Ω	ω	Omega

Dezimale Vielfache und Bruchteile von Einheiten

Zur Bezeichnung eines dezimalen Teiles oder Vielfachen einer Einheit werden folgende Vorsätze benutzt:

Vorsatz	Symbol	Faktor	Vorsatz	Symbol	Faktor
Hekto	**h**	10^{2}	**Dezi**	**d**	10^{-1}
Kilo	**k**	10^{3}	**Zenti**	**c**	10^{-2}
Mega	**M**	10^{6}	**Milli**	**m**	10^{-3}
Giga	**G**	10^{9}	**Mikro**	μ	10^{-6}
Tera	**T**	10^{12}	**Nano**	**n**	10^{-9}
Peta	**P**	10^{15}	**Piko**	**P**	10^{-12}
Exa	**E**	10^{18}	**Femto**	**f**	10^{-15}
			Atto	**a**	10^{-18}

Anmerkung: **Die Vorsatzsilben gehören bei der Bildung von Potenzen immer zur Einheit.**

Beispiel: $1/\mu m^2 = 1\,(\mu m)^{-2} = 10^{12}\ m^{-2}$.

	0. Gruppe	1. Gruppe		2. Gruppe		3. Gruppe		4. Gruppe		5. Gruppe		6. Gruppe		7. Gruppe		8. Gruppe	0. Gruppe
		Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe	Neben-gruppe	Haupt-gruppe		
			1 H 1,0080		—		—		—		—		—		—		**2 He** 4,003
1	**2 He** 4,003		**3 Li** 6,940		**4 Be** 9,013		**5 B** 10,82		**6 C** 12,010		**7 N** 14,008		**8 O** 16,0000		**9 F** 19,00		**10 Ne** 20,183
2	**10 Ne** 20,183		**11 Na** 22,997		**12 Mg** 24,32		**13 Al** 26,98		**14 Si** 28,09		**15 P** 30,975		**16 S** 32,066		**17 Cl** 35,457		**18 Ar** 39,944
3	**18 Ar** 39,944	**29 Cu** 63,54	**19 K** 39,100	**30 Zn** 65,38	**20 Ca** 40,08	**21 Sc** 44,96	**31 Ga** 69.72	**22 Ti** 47,90	**32 Ge** 72,60	**23 V** 50,95	**33 As** 74,91	**24 Cr** 52,01	**34 Se** 78,96	**25 Mn** 54,93	**35 Br** 79,916	**26 Fe** **27 Co** **28 Ni** 55,85 58,94 58,69	**36 Kr** 83,80
4	**36 Kr** 83,80	**47 Ag** 107,880	**37 Rb** 85,48	**48 Cd** 112,41	**38 Sr** 87,63	**39 Y** 88,92	**49 In** 114,76	**40 Zr** 91,22	**50 Sn** 118,70	**41 Nb** 92,91	**51 Sb** 121,76	**42 Mo** 95,95	**52 Te** 127,61	**43 Tc** [99]	**53 J** 126,91	**44 Ru** **45 Rh** **46 Pd** 101,7 102,91 106,7	**54 X** 131,3
5	**54 X** 131,3	**79 Au** 197,2	**55 Cs** 132,91	**80 Hg** 200,61	**56 Ba** 137,36	**57 La** 138,92	58-71 Seltene Erden* **81 Tl** 204,39	**72 Hf** 178,6	**82 Pb** 207,21	**73 Ta** 180,88	**83 Bi** 209,00	**74 W** 183,92	**84 Po** 210	**75 Re** 186,31	**85 At** [210]	**76 Os** **77 Ir** **78 Pt** 190,2 193,1 195,23	**86 Rn** 222
6	**86 Rn** 222		**87 Fr** [223]		**88 Ra** 226,05	**89 Ac** 227		**90 Th** 232,12		**91 Pa** 231		**92 U** 238,07					

* Seltene Erden:	**58 Ce** 140,13	**59 Pr** 140,92	**60 Nd** 144,27	**61 Pm** [145]	**62 Sm** 150,43	**63 Eu** 152,0	**64 Gd** 156,9	**65 Tb** 159,2	**66 Dy** 162,46	**67 Ho** 164,94	**68 Er** 167,2	**69 Tm** 169,4	**70 Yb** 173,04
	71 Lu 174,99												
Transurane:	**93 Np** [237]	**94 Pu** [242]	**95 Am** [243]	**96 Cm** [243]	**97 Bk** [245]	**98 Cf** [246]	**99 Es**	**100 Fm**	**101 Md**	**102 No**	**103 Lw**		

Periodensystem der Elemente

Basisgrößen und Internationales Einheitensystem

Das Internationale Einheitensystem (kurz mit "SI" bezeichnet; SI = Systeme International) baut sich auf **sieben Basisgrößen** und deren Einheiten auf. Sie lauten:

Basisgröße	Basiseinheit	Einheitenzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur oder Kelvin-Temp.	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

Unter SI-Einheiten versteht man die 7 Basiseinheiten und die von ihnen mit dem Zahlenfaktor 1 in der Einheitengleichung abgeleiteten SI-Einheiten (= kohärente Einheiten).

Abgeleitete Einheiten sind z.b.:

Geschwindigkeit: $\mathbf{1m / 1s = 1m / s}$
Fläche: $\mathbf{1m \cdot 1m = 1m^2}$
Kraft: $\mathbf{1kg \cdot 1m / s^2 = 1kg \cdot m / s^2}$
-
-
-
-

usw.

- **<u>Einige abgeleitete SI-Einheiten haben besondere Einheitennamen und Einheitenzeichen:</u>**

Kraft:	1 kg m/s^2	=	N (Newton)
Druck:	1 N / m^2	=	1 Pa (Pascal)
Frequenz:	1 s^{-1}	=	1 Hz (Hertz)
Energie, Arbeit:	1 Nm	=	1 J (Joule)
Leistung:	1 Js^{-1}	=	1 W (Watt)
elektrische Ladung:	1 As	=	1 C (Coulomb)
elektrische Spannung:	1 JC^{-1}	=	I V (Volt)
elektrischer Widerstand:	1 VA^{-1}	=	1 Ω (Ohm)

elektrischer Leitwert:	$1\ AV^{-1}$	=	1 S (Siemens)	=	$1\ \Omega^{-1}$
elektrische Kapazität:	$1\ CV^{-1}$	=	1 F (Farad)	=	$1\ s\ \Omega^{-1}$
magnetischer Fluß:	1 Vs	=	1 Wb (Weber)		
Induktivität:	$1\ VsA^{-1}$	=	1 H (Henry)	=	$1\ \Omega\ s$
Lichtstrom:	1 cd sr	=	1 lm (Lumen)		
Beleuchtungsstärke:	$1\ lm\ m^{-2}$	=	1 lx (Lux)		
Energiedosis:	$1\ J\ kg^{-1}$	=	1 Gy (Gray)		
Aktivität:	$1\ s^{-1}$	=	1 Bq (Becquerel)		

- **Atomphysikalische Einheiten für:**

Masse: 1 u (atomare Masseneinheit) = $\mathbf{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg}$
Energie: 1 eV (Elektronenvolt) = $\mathbf{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J}$

- **SI-Einheiten für Winkel:**

Ebener Winkel: 1 rad (Radiant) = 1 m / m
Raumwinkel: 1 sr (Steradiant) = $1\ m^2/m^2$

Nach dem "Gesetz über Einheiten im Meßwesen" vom 2.Juli 1969 dürfen eine Reihe früher gebräuchlicher Einheiten nicht mehr verwendet werden. Trotzdem ist die Kenntnis der Definitionen dieser Größen erforderlich, um nötige Umrechnungen von den alten Einheiten auf die SI-Einheiten vornehmen zu können.

Im folgenden sind einige dieser nicht mehr zugelassenen früheren Einheiten und ihr Zusammenhang mit der SI-Einheit aufgeführt:

Länge:	1 Ä (Angström) = 10^{-10} m
Kraft:	1 dyn (Dyn) = 1 g cm/s^2 = 10^{-5} N
	1 kp (Kilopond) = 9,81 N
Druck:	1 at (techn. Atmosphäre) = 1 kp/cm^2 = $0{,}981 \cdot 10^5$ Pa
	1 atm (physikalische Atmosphäre) = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa
	1 Torr (Druck von 1 mm Hg) = 133 Pa
Energie:	1 erg (Erg) = 1 dyn cm = 10^{-7} J
	1 cal (Kalorie) = 4,19 J
Leistung:	1 PS (Pferdestärke) = 75 kp m/s = 736 W
Aktivität:	1 Ci (Curie) = $3{,}7 \cdot 10^{10}$ Bq
lonendosis:	1 R (Röntgen) = $2{,}58 \cdot 10^{-4}$ C/kg

Fehlerrechnung

Bei der Messung einer physikalischen Größe sind Meßungenauigkeiten nicht zu vermeiden. Die Meßfehler können in zwei Gruppen eingeteilt werden: **in systematische Fehler und zufällige Fehler**.

- **Systematische Fehler**

ergeben sich z.B. bei der Verwendung falsch geeichter Meßinstrumente. Die abgelesenen Werte weichen dann stets im gleichen Sinne vom "wahren" Wert ab. Diese Fehler können nur unter besonderem Aufwand (z.B. Vergleich mit anderen Instrumenten) erkannt und reduziert werden. Unter Praktikumsbedingungen ist dies aber nicht möglich. Sie bleiben also bei der Ermittlung der Meßfehler außer Betracht.

- **Zufällige Fehler**

haben statistischen Charakter. Sie treten bei jedem Experiment auf und können das Meßergebnis sowohl verkleinern als auch vergrößern. Bei aufeinanderfolgenden Messungen unter gleichen experimentellen Bedingungen streuen die Meßwerte um den wahren Wert, falls systematische Fehler ausgeschlossen werden. Zufällige Fehler haben subjektive und objektive Ursachen und sind prinzipiell unvermeidbar.

- **Histogramm**

Wir betrachten den Fall, daß eine einzige physikalische Größe x unter gleichen Bedingungen n-mal gemessen wird. Bei der Verwendung eines Meßinstruments, das eine genügend feine Ablesung erlaubt, sind — infolge der zufälligen Fehler — die n Meßwerte $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ im allgemeinen voneinander verschieden, häufen sich jedoch bei einem bestimmten Wert. Systematische Fehler seien ausgeschlossen.
Es ist oft nützlich einen Überblick zu gewinnen, wie oft die verschiedenen Meßwerte in einer Meßreihe vorkommen. Zu diesem Zweck unterteilt man den Bereich der Meßwerte in gleich große Intervalle (die Intervallbreite $\Delta\mathbf{x}$ kann frei gewählt werden) und zählt ab, wie viele Messwerte jeweils in den einzelnen Intervallen liegen. Diese Zahlen $\Delta\mathbf{n}_k$, werden dann in einem Diagramm über den entsprechenden Intervallen $\Delta\mathbf{x}_k$, aufgetragen. Es entsteht eine **Treppenkurve** wie sie Abb.l zeigt. Solch ein Diagramm wird Histogramm genannt. Die Gestalt des Histogramms hängt natürlich von der gewählten Intervallbreite ab.

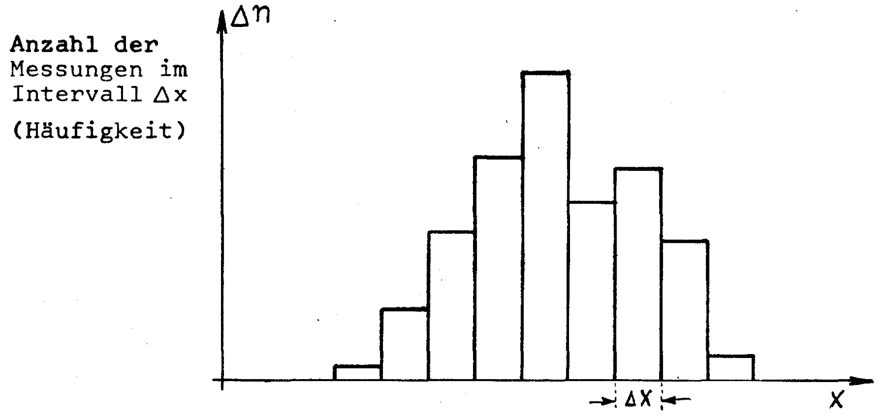


Abb. 1: Beispiel eines Histogramms

Statt der Absolutzahl $\Delta\mathbf{n}$ der Messungen im Intervall $\Delta\mathbf{x}$ (= Häufigkeit) kann man auch die relative Häufigkeit $\Delta\mathbf{n}/\mathbf{n}$ oder die prozentuale relative Häufigkeit (= rel. Häufigkeit mal 100) angeben.
Die Ansammlung der n Meßwerte wird Verteilung genannt. Unter der **Verteilungsfunktion w(x)** versteht man die relative Häufigkeit $\Delta\mathbf{n}/\mathbf{n}$ pro Intervallbreite $\Delta\mathbf{x}$:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{\Delta\mathbf{n}}{\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{x}} \qquad \textbf{(1)}$$

w(x) gibt an, in welcher Weise sich die Meßwerte auf die einzelnen Intervalle verteilen. $\mathbf{w}(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}$ ist somit der Bruchteil der n Ablesungen, der im Intervall $\Delta\mathbf{x}$ liegt, d.h. $\mathbf{w}(\mathbf{x})\cdot\Delta\mathbf{x}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein beliebig der Verteilung entnommener Meßwert im Bereich zwischen x und $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ liegt. Die Verteilungsfunktion w(x) wird daher auch als **Wahrscheinlichkeitsdichte** bezeichnet.
Für die Verteilungsfunktionen w(x) sind je nach Meßproblem geeignete mathematische Funktionen zu finden. In der Praxis werden besonders die Verteilungsfunktionen nach **Gauß** und die nach **Poisson** angewendet.

- **<u>Gaußverteilung</u>**

In vielen Fällen verteilen sich die Meßwerte annähernd nach einer Glockenkurve (exakt nur dann, wenn unendlich viele Meßwerte angenommen werden), also **symmetrisch** um einen häufigsten oder **wahrscheinlichsten Wert**. Der mathematische Ausdruck für w(x) ist dann eine **Gaußfunktion**, die durch die zwei Konstanten $\bar{\mathbf{x}}$ und σ bestimmt ist:

$$\boxed{\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})^2}{2\cdot\sigma^2}}} \qquad \textbf{(2)}$$

Die Verteilung wird dann als Gaußverteilung oder als Normalverteilung bezeichnet (Abb.2a). Sie gilt für viele statistische Probleme aus dem Bereich der Naturwissenschaft und der Technik und auch für die Verteilung der rein subjektiven statistischen Beobachtungsfehler.

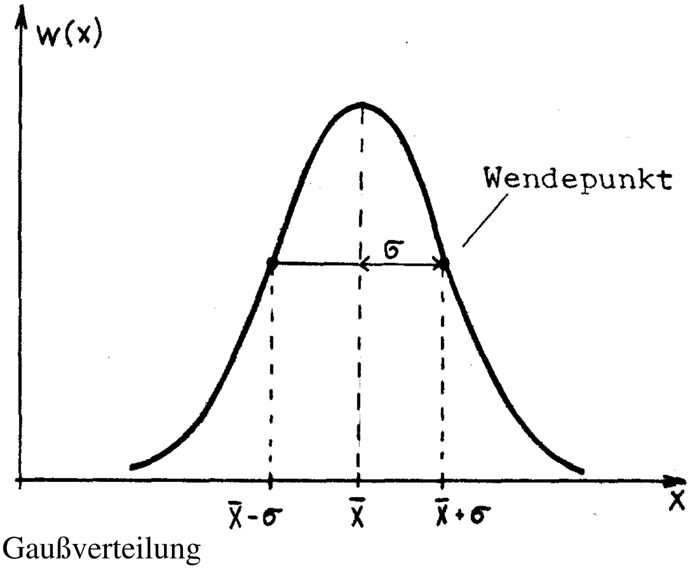


Abb. 2a: Die Gaußverteilung

In Gl. 2 ist e = 2,718.. die Basis der natürlichen Logarithmen. Der Wert $\bar{x}$ stellt den **wahrscheinlichsten** Wert (Maximum der Verteilung) der Meßreihe dar. Er ist gleich dem arithmetischen Mittelwert aus den Einzelmeßwerten (s. Gl. 3). Als **Standardabweichung** σ der Verteilung oder **Standardfehler** σ wird der Abstand der Wendepunkte der Gaußfunktion vom Maximum $\bar{x}$ definiert. Die Berechnung von σ erfolgt nach Gl. 4.

Die Größe σ^2 wird als Varianz bezeichnet.

Durch Integration der Verteilungsfunktion w(x) in den Grenzen von $\bar{x}-\sigma$ bis $\bar{x}+\sigma$ läßt sich ermitteln, daß bei einer Gaußfunktion 68,3 % der gemessenen Werte im Bereich $\bar{x}-\sigma$ und $\bar{x}+\sigma$ liegen. Das bedeutet auch, daß ein beliebig der Meßreihe entnommener Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % zwischen $\bar{x}-\sigma$ und $\bar{x}+\sigma$ liegt. Im Bereich $\bar{x}\pm 2\sigma$ liegen 95,4 % und im Bereich $\bar{x}\pm 3\sigma$ bereits 99,7 % der Meßwerte. Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Ausdehnung der Verteilung, d.h. für die Streuung der Meßwerte. Abb. 2b zeigt die Verteilungsfunktionen von drei verschiedenen Meßreihen mit dem gleichen Mittelwert $\bar{x}$. Die Messreihe (1) lieferte die präzisesten und die Meßreihe (3) die ungenauesten Messungen.

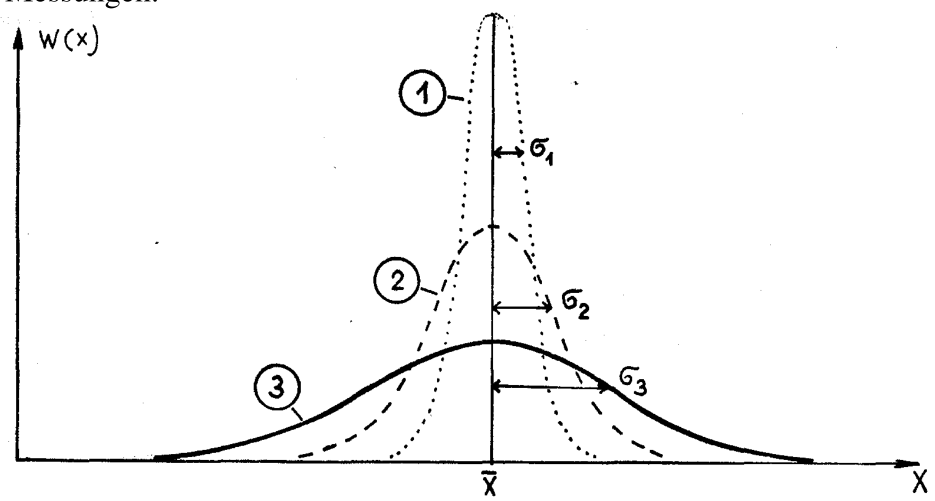


Abb.2b: Verteilungsfunktionen mit verschiedenen Werten von σ.

- **Mittelwert**

Werden n aufeinanderfolgende Messungen einer Größe x durchgeführt, wobei man eine Verteilung mit den Werten erhält x_1, x_2, x_3, ... x_n, so ist der wahrscheinlichste Wert $\bar{x}$ der Verteilung derjenige, für den die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte von diesem Bestwert ein Minimum wird:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \text{Minimum}$$

Aus dieser Bedingung berechnet sich $\bar{x}$ zu:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (3)$$

d.h. $\bar{x}$ ist das **arithmetische Mittel** der Einzelwerte.

- **Standardfehler der Einzelmessung**

Für den Standardfehler σ einer Einzelmessung liefert die Theorie:

$$\boxed{\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum(\mathbf{x_i} - \overline{\mathbf{x}})^2}{\mathbf{n} - 1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

- **Standardfehler des Mittelwerts**

Für die Beurteilung der Genauigkeit einer Messung kommt es auf den Fehler des Mittelwertes an. Wiederholt man die Meßreihe mit den n Messungen, so hat die neue Meßreihe einen anderen Mittelwert. Denken wir uns eine sehr große Anzahl solcher Meßreihen ausgeführt, so hat jede Meßreihe ihren eigenen Mittelwert. Die Gesamtheit aller Einzelmeßwerte bildet eine Verteilung, deren Standardabweichung durch σ gekennzeichnet ist. Die Mittelwerte aller Meßreihen bilden eine andere Verteilung, deren Verteilungsfunktion ebenfalls eine Gaußfunktion ist und deren Standardabweichung mit σ_m bezeichnet wird. Die Größe σ_m heißt **Standardfehler des Mittelwertes oder mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwerts**. Zwischen σ und σ_m gibt es folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}} \qquad \textbf{(5)}$$

σ_m gibt die Schwankung des arithmetischen Mittels an, die zu erwarten ist, wenn man die ganze Meßreihe mit der gleichen Anzahl von Messungen wiederholt.

Um σ_m zu verkleinern, muß man möglichst viele Messungen machen (großes n!) und σ klein halten (sorgfältig messen!).

Da σ nur von der Genauigkeit der Einzelmessung und nicht von deren Anzahl n abhängt, ist eine geringere Zahl sorgfältiger Messungen einer größeren Zahl oberflächlicher Messungen vorzuziehen, da σ_m nur mit der Wurzel aus n kleiner wird.

Um z.b. den Fehler zu halbieren, muß die Zahl der Messungen vervierfacht werden !

Das Messresultat für die Größe x wird, nachdem σ_m berechnet wurde, in der Form

$$x = x \pm \sigma_m$$

angegeben.
Es ist **oft** anschaulicher statt des **absoluten Fehlers** σ_m den **relativen Fehler** $\sigma_m / \overline{x}$ oder den **prozentualen relativen Fehler** $(\sigma_m / \overline{x}) \cdot 100\%$ anzugeben.

• Poissonverteilung

Die Poissonverteilung gilt in der Zählstatistik, wenn die Durchschnittszählrate konstant bleibt.

Beispiele:

Zählratenbestimmung in der Atom- und Kernphysik;
Bestimmung der Zahl der Erythrocyten in der Zählkammer.

Die Meßwerte (x-Werte) sind dann ganzzahlige, positive Werte einschließlich der Null. Für diese diskreten x-Werte lautet die Poissonverteilung:

$$\boxed{\mathbf{w(x) = \frac{\bar{x}^{x}}{x!} e^{-\bar{x}}}} \qquad \textbf{(6)}$$

Die Verteilung ist nur durch den einen Parameter $\bar{\mathbf{x}}$ (= Mittelwert aller Meßwerte) bestimmt. Der Ausdruck x! (sprich: x Fakultät) bedeutet: $\mathbf{x}! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (\mathbf{x}-1) \cdot \mathbf{x}$. Vereinbarungsgemäß ist 0! =1.
Die Poissonverteilung ist für kleine Werte von $\bar{\mathbf{x}}$ stark unsymmetrisch. Für große Werte von $\bar{\mathbf{x}}$ nimmt die Symmetrie zu und die Poissonverteilung kann durch eine Gaußverteilung angenähert werden. Für die Standardabweichung σ bei der Poissonverteilung gilt:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\bar{x}}} \qquad \textbf{(7)}$$

Eine Poissonverteilung ist bei solchen Messungen zu erwarten, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses wesentlich kleiner ist als für das Nichteintreten.

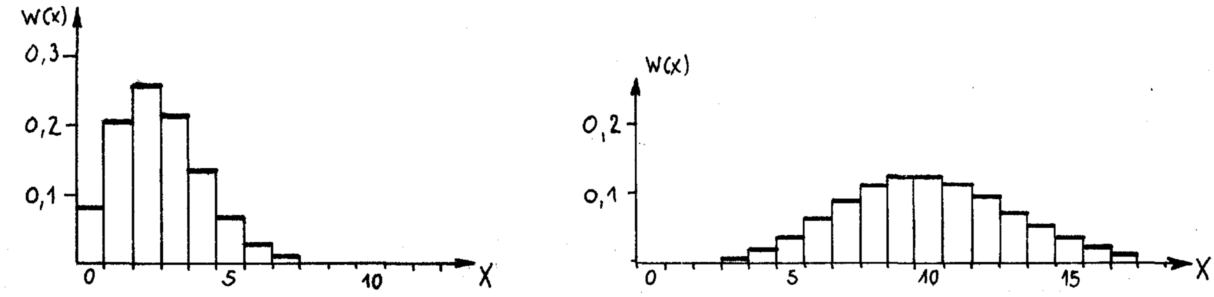


Abb. 3: Poissonverteilungen für zwei Mittelwerte $\bar{\mathbf{x}}$=2,5 (links) und für $\bar{\mathbf{x}}$=10,0 (rechts).

Im Falle der Versuche 9 und 10 werden in den kernphysikalischen Experimenten Zählratenbestimmungen vorgenommen, wobei die Durchschnittszählrate oder aber auch der einzelne Meßwert mit dem Symbol N bezeichnet wird. Der Standardfehler bei Zugrundelegung der Poissonstatistik ist dann gegeben durch:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{N}} \qquad \textbf{(7a)}$$

σ ist der **absolute Fehler**. Er sagt zunächst über die Genauigkeit (Güte) einer Messung nichts aus. Dies tut jedoch der **relative** bzw. **der prozentuale Fehler**.

Relativer Fehler:
$$\boxed{\frac{\sigma}{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{N}}}} \qquad \textbf{(7b)}$$

Prozentualer Fehler:
$$\boxed{\frac{\sigma}{\mathbf{N}} \cdot 100\% = \frac{100\%}{\sqrt{\mathbf{N}}}} \qquad \textbf{(7c)}$$

Gl.(7b) bzw. (7c) belegen, daß mit größerem N (größere Ereigniszahl!) der Fehler kleiner wird.

- ## <u>Geschätzte Fehler</u>

Kann man eine Größe nur einmal messen, **so ist auf Grund statistischer Überlegungen keine Fehlerangabe möglich**. In solchen Fällen kann man nur einen geschätzten Fehler angeben, der sich meist aus der Güte des verwendeten Meßinstrumentes ergibt.
Es ist üblich den Fehler mit $\Delta\mathbf{x}$ zu bezeichnen, wenn x die Meßgröße ist. $\Delta\mathbf{x}$ heißt **absoluter Fehler**. Aussagekräftiger im Hinblick auf die Genauigkeit eines Meßwertes ist der **relative** $\Delta\mathbf{x}/\mathbf{x}$ oder auch der **relative prozentuale Fehler** (= relativer Fehler mal 100 %). Der rel. Fehler ist eine **dimensionslose Größe**. Sinnvollerweise sollten die Fehler auf **höchstens <u>2 Stellen</u>** angegeben werden (siehe unten!).

<u>Ein Beispiel:</u>
Die Meß- bzw. Ableseungenauigkeit einer **Schieblehre** beträgt ±0,1 mm, bei guten Geräten auch ±0,05 mm . Wird damit der Durchmesser eines etwa 0,5 mm dicken Drahtes bestimmt, so lautet das Ergebnis: d = (0,5 ± 0,1) mm

Hier ist der **absolute Fehler** $\mathbf{\Delta d = \pm 0{,}1\ mm}$

der **relative Fehler** $\mathbf{\dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2}$

der **rel. proz. Fehler** $\mathbf{\dfrac{\Delta d}{d} \cdot 100\ \% = 20\,\%}$.

Wiederholt man die Messung mit einer **Mikrometerschraube**, deren Meßgenauigkeit bei mindestens ±0,01 mm liegt, so kann das Meßergebnis wie folgt ausfallen:
d = (0,48 ± 0,01) mm

Hier ist der **absolute Fehler** $\mathbf{\Delta d = \pm 0{,}01}$ mm,

der **relative Fehler** $\mathbf{\dfrac{\Delta d}{d} = \dfrac{0{,}01}{0{,}48} = 0{,}021}$ (auf 2 Stellen gerundet)

der **rel. proz. Fehler** $\mathbf{\dfrac{\Delta d}{d} \cdot 100\ \% = 2{,}1\,\%}$.

- ## <u>Stellenzahl</u>

Unter der **Stellenzahl** (Stellenangabe) versteht man die Zahl der geschriebenen Ziffern, gleichgültig wo das Komma steht. Nachgestellte Nullen zählen als Stelle, vorgestellte nicht.

Beispiel:

	2100	→	4-stellig
	$2{,}10\ 10^3$	→	3-stellig
	$2{,}1\ 10^3$	→	2-stellig

Will man nur die Stellen **nach** dem Komma nennen, so spricht man von **Dezimalstellen**

- ## Fehlerfortpflanzung, Näherungsrechnung, Größtfehler

Im folgenden sind a, b, c, ... Meßwerte (Meßvariable); z ist eine physikalische Größe, die eine Funktion dieser Meßwerte ist. Es sei also:

$$\mathbf{z = f(a, b, c,..)} \qquad \textbf{(8)}$$

Nach der Messung der Größen a, b, ... und der Feststellung der Fehler $\mathbf{\Delta a}$, $\mathbf{\Delta b}$, ..(z.B. als geschätzte Fehler) ist nun die Frage zu beantworten, wie sich der Gesamtfehler $\mathbf{\Delta z}$ aus den Einzelfehlern $\mathbf{\Delta a}$, $\mathbf{\Delta b}$, .. ermitteln läßt

Ein Beispiel:
Um die Querschnittsfläche eines kreisrunden Drahtes zu ermitteln, mißt man den Durchmesser d und erhält daraus den Radius r (r = d/2). Die Kreisfläche berechnet sich nach $\mathbf{A} = \pi \mathbf{r}^2$. Es muss nun herausgefunden werden, welche Änderung $\mathbf{\Delta A}$ die Fläche A erfährt, wenn man den Radius r um $\mathbf{\Delta r}$ vergrößert oder verkleinert. Die Lösung läßt sich am einfachsten mit Hilfe der Differentialrechnung finden. Wir differenzieren hierzu A nach r und erhalten:

$$\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dr}} 2\pi\mathbf{r} \quad \textbf{oder} \quad \mathbf{dA} = 2\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{dr}$$

dA und dr sind sog. **Differentiale**, (beliebig kleine Größen), die physikalisch nicht realisiert werden können. Ersetzt man sie aber durch $\mathbf{\Delta A}$ und $\mathbf{\Delta r}$, so erhält man die **näherungsweise** gültige Beziehung $\mathbf{\Delta A} = 2\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{\Delta r}$. Dividiert man diese Gleichung beidseitig durch A, so erhält man:

$$\frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{A}} = \frac{2\pi\mathbf{r\Delta r}}{\pi\mathbf{r}^2} \quad \textbf{oder} \quad \frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{A}} = 2\frac{\mathbf{\Delta r}}{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(9)}$$

Gl.(9) sagt aus, daß die relative Änderung der Kreisfläche gleich der zweifachen relativen Änderung des Radius ist. Der Faktor π fällt weg. Erhöht (verkleinert) man den Radius z.B. um 3 %, so vergrößert (verkleinert) sich die Kreisfläche um 6 % . Der Leser möge selbst nachvollziehen, daß z.B. für die Änderung des Kugelvolumens folgende Beziehung gilt: $\mathbf{\Delta V / V} = 3\mathbf{\Delta r / r}$.
Ist die Größe z von mehr als einer Meßvariablen abhängig (s. Gl.8), so gilt nach den Methoden der Differentialrechnung (wieder als Näherungslösung):

$$\boxed{\mathbf{\Delta z} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}\mathbf{\Delta a} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}}\mathbf{\Delta b} + \ldots} \qquad \textbf{(10)}$$

$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{a}}$ bedeutet dabei die Ableitung von f **nur** nach a, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{b}}$ die Ableitung von f nach b usw. Man nennt diese Ableitungen **partielle Ableitungen**.

Ein Beispiel:

Es sei $\mathbf{z} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} / \mathbf{b}^2$ (k = Konstante). Dann ist $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{k} / \mathbf{b}^2$ und $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{b}} = -2\mathbf{ka} / \mathbf{b}^3$. Für die relative Änderung $\Delta\mathbf{z} / \mathbf{z}$ der Größe z erhält man dann:

$$\frac{\Delta\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \frac{\Delta\mathbf{a}}{\mathbf{a}} - 2\frac{\Delta\mathbf{b}}{\mathbf{b}}.$$

Vergrößert sich a um z.B. 1%, b um 2%, so hat das zur Folge, daß sich z um 3% verkleinert ($\Delta\mathbf{z} / \mathbf{z} = -3\%$). Verkleinern sich a und b um z.B. je 2% (es ist dann $\Delta\mathbf{a} / \mathbf{a}$ = -2% und $\Delta\mathbf{b} / \mathbf{b}$ = -2%), so ist $\Delta\mathbf{z} / \mathbf{z} = 2\%$, d.h. z wächst um 2% .

Allgemein läßt sich nun folgendes formulieren:
Ist f(a,b,..) ein **Potenzprodukt,** d.h. ist $\mathbf{z} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}^\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}^\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}^\mathbf{p}$ (k = Konstante),

so ist:
$$\boxed{\frac{\Delta\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \mathbf{m}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\mathbf{a}} + \mathbf{n}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\mathbf{b}} + \mathbf{p}\frac{\Delta\mathbf{c}}{\mathbf{c}}} \qquad \textbf{(11)}$$

- ## Anwendung auf die Fehlerbetrachtung:

Nach Gl.(11) läßt sich die Gesamtveränderung einer Funktion z = f(a,b,..) **vorzeichengerecht** näherungsweise errechnen, wenn die Änderungen $\Delta\mathbf{a}, \Delta\mathbf{b}$, ... vorliegen. Betrachtet man die Größen $\Delta\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{b}$, .. als Meßfehler (geschätzte Fehler), so haben diese immer ein ± Zeichen vor sich (auch wenn es nicht immer geschrieben wird). Will man nun Gl.(11) zur Berechnung eines **Gesamtfehlers** $\Delta\mathbf{z} / \mathbf{z}$ heranziehen, so würde jeder Summand zunächst das ± Zeichen aufweisen. Man vereinbart, daß nur die +Zeichen gelten sollen, d.h. man addiert alle auftretenden Fehler und erhält so den größtmöglichen Fehler. Er wird kurz als **Größtfehler** bezeichnet.

Größtfehler:
$$\boxed{\frac{\Delta\mathbf{z}}{\mathbf{z}} = \left|\mathbf{m}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\right| + \left|\mathbf{n}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\mathbf{b}}\right| + \left|\mathbf{p}\frac{\Delta\mathbf{c}}{\mathbf{c}}\right|} \qquad \textbf{(12)}$$

In Worten:

Bei einem **Potenzprodukt** ergibt sich der relative (prozentuale) Gesamtfehler als **Summe** der relativen Einzelfehler der Meßgrößen, jeweils multipliziert mit der Potenz, mit der die Meßgröße auftritt.

Für eine **Summe** (Differenz), z.B. der Art $\mathbf{z} = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{a} \pm \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{b}$ (k_1 , k_2 sind konstante Größen) ergibt sich für den **absoluten** Größtfehler $\Delta\mathbf{z}$:

$$\Delta\mathbf{z} = \mathbf{k}_1 \cdot \Delta\mathbf{a} + \mathbf{k}_2 \cdot \Delta\mathbf{b} \qquad \textbf{(13)}$$

In Worten:

Bei einer Summe addieren sich die absoluten Einzelfehler zum absoluten Gesamtfehler.

In der Mehrzahl der Fälle liegen Potenzprodukte oder Summen vor, so daß man mit den speziellen Formeln (12) und (13) für die Größtfehlerbestimmung auskommt. Andernfalls muß man Gl.(10) anwenden, d.h. man muß differenzieren können.

- **Übungsbeispiel:**

Der Strömungswiderstand R einer Kapillare berechnet sich nach der Formel:
$\mathbf{R} = (8\mathbf{l}\eta)/\pi\mathbf{r}^4$ (l = Länge; r = Radius; η = Zähigkeit).

a) Um wieviel % vergrößert oder verkleinert sich R, wenn Länge, Radius und Zähigkeit um je 1% zunehmen ?

b) Mit welcher prozentualen Genauigkeit läßt sich R berechnen, wenn Länge, Radius
und Zähigkeit auf je 1% genau ermittelt wurden ?

Lösung: a) $\Delta R/R$ = - 2% , d.h. R verkleinert sich um 2% .
b) $\Delta R/R$ = 6% , d.h. R läßt sich auf 6% genau angeben

Übungsaufgaben :

Aufgabe 01:
Durchmesser d und Höhe h eines Zylinders werden zu d = (1,25 ± 0,01) an und h = (4,32 ± 0,01) cm bestimmt. Berechnen Sie das Volumen des Zylinders, sowie den prozentualen und den absoluten Fehler für V_{Zyl}.

Aufgabe 02:
Die Kantenlängen eines Würfels werden mit einer Genauigkeit von ±3% gemessen. Auf wieviel Prozent genau läßt sich das Würfelvolumen angeben?

Aufgabe 03:
Das Volumen einer Kugel ist auf ±5% genau bestimmt worden. Wie genau (in %) läßt sich daraus der Kugelradius und wie genau (in %) der Kugeldurchmesser berechnen?

Aufgabe 04:
Die Querschnittsfläche eines kreisförmigen Rohres soll auf mindestens 2% genau aus dem Rohrdurchmesser bestimmt werden. Wie genau muß dazu der Rohrdurchmesser bekannt sein?

Aufgabe 05:
Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr werden in 10 Sekunden 2150 β-Teilchen einer radioaktiven Probe registriert. Wie groß ist der mittlere quadratische Fehler (Standard-abweichung) der Messung? Wie groß ist der prozentuale Fehler?

Aufgabe 06;
Bei der Aktivitätsbestimmung eines radioaktiven Präparates werden mit einem Zählrohr zwei Messungen vorgenommen:
a) Bei einer Meßdauer von 10 s werden 3645 Impulse registriert.
b) Bei einer Meßdauer von 20 s werden 7255 Impulse registriert.
Welche Messung ist genauer?

Aufgabe 07:
Die Schwingungsdauer eines Fadenpendels berechnet sich nach der Formel: $\mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\mathbf{l/g}}$. l = Pendellänge; g = 9,81 m/s^2. Wie genau läßt sich die Schwingungsdauer T angeben, wenn die Pendellänge auf 1 Promill genau gemessen wird?

• Schieblehre

Mit der Schieblehre (Abb. 1) lassen sich

(a) Außenmaße,

(b) Innenmaße,

(c) Tiefen mit einer Genauigkeit von mindestens ± 0,1mm bestimmen.

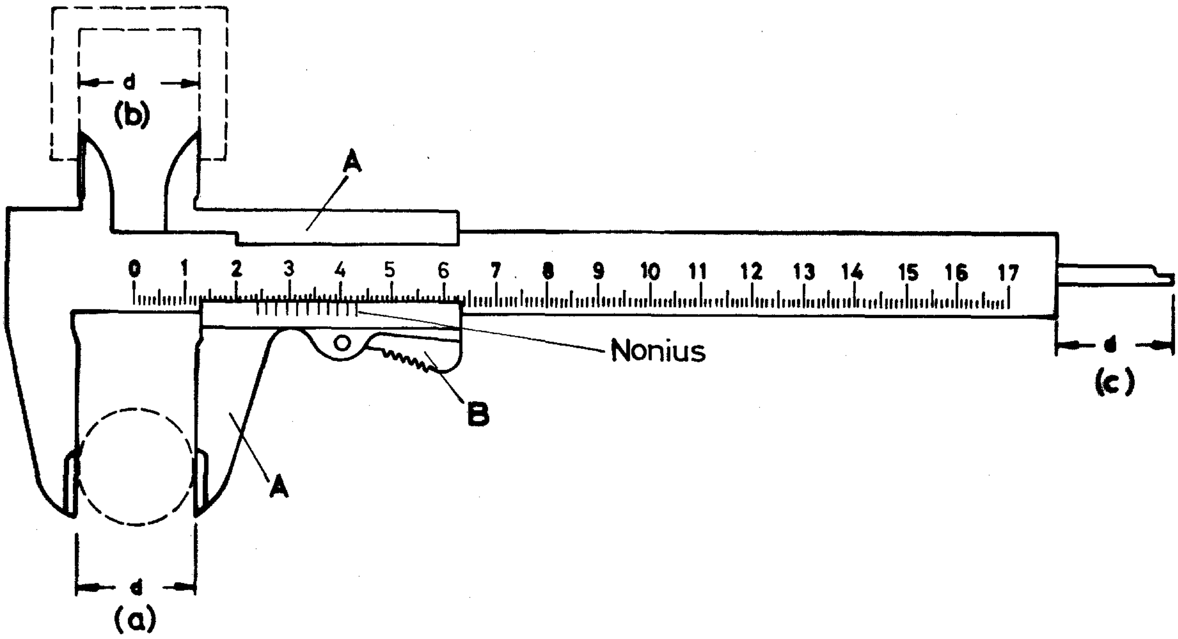


Abb. 1: Eine Schieblehre

Wird die Federsperre B nach oben gedrückt, so läßt sich der Teil A gegen den übrigen mit einem Maßstab versehenen Teil verschieben. Auf dem verschiebbaren Teil A ist zur genauen Ablesung ein N o n i u s angebracht. Abb.2 (links) zeigt die Nullstellung.

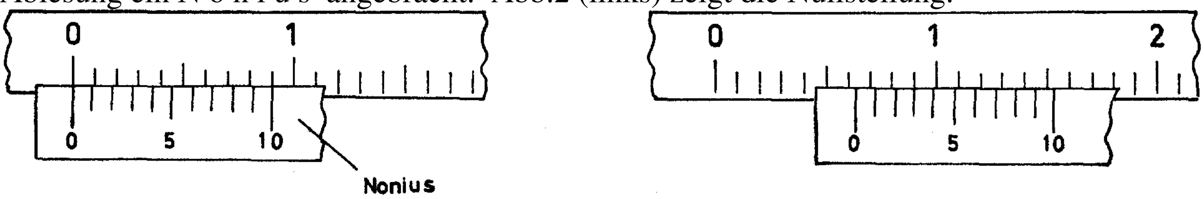


Abb. 2: Zum Ablesen einer Nonius-Skala: Nullstellung (links), beliebige Ableseposition (rechts).

10 Skalenteile des Nonius entsprechen 9 (oder auch 19, 29, ..) Skalenteilen des Maßstabs. Der Nullstrich des Nonius gibt die ganzen Millimeter an. Derjenige Teilstrich (z.B. der dritte in Abb.2 rechts) des Nonius, der mit einem beliebigen Teilstrich des Maßstabs fluchtet gibt die Zehntel-Millimeter an. Die Ablesung gemäß Abb. 2 (rechts) lautet also: 6,3 mm. Wird der Nonius in 20 Teile (statt in 10) unterteilt, so beträgt die Ablesegenauigkeit 0,05 mm

• Mikrometerschraube

Mit der Mikrometerschraube (Abb. 3) lassen sich äußere Abmessungen von Gegenständen (meist bis 25 mm) mit einer Genauigkeit von mindestens ± 0,01 mm messen. Man benutzt die Steigung eines Gewindes zur Ermittlung von Längen. Die Schraubspindel S besitzt eine Ganghöhe von 0,5 mm, d.h. bei einer vollen Umdrehung bewegt sie sich um 0,5 mm weiter.

Die Meßtrommel T, auf deren Umfang 50 Skalenteile angebracht sind, ist mit S fest verbunden und bewegt sich beim Drehen über eine Skalenhülse mit Millimeterteilung (ganze und halbe Millimeter). Wird also die Trommel um 1 Skalenteil weitergedreht, so entspricht dies einem Vorschub der Spindel um 0,01 mm.

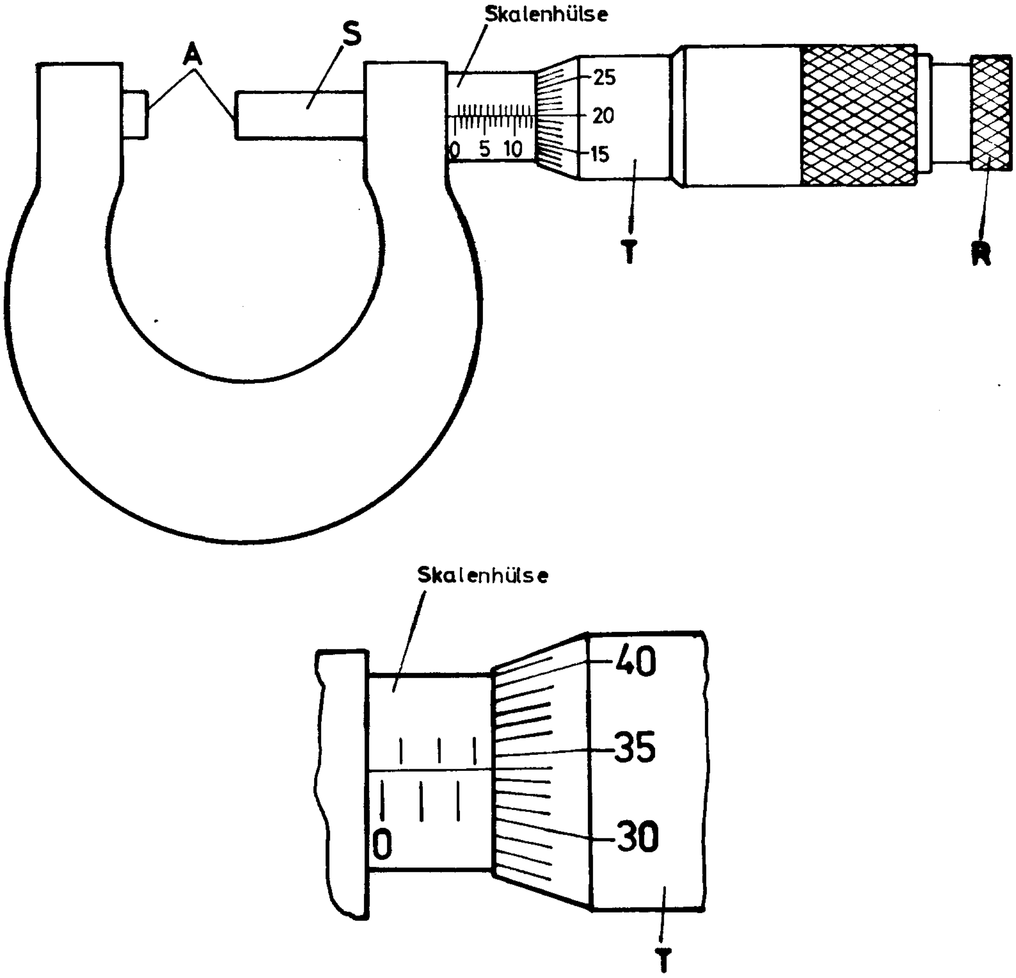


Abb. 3: Eine Mikrometerschraube sowie die herausvergrößerte Ableseskala (rechts).

Das zu messende Objekt wird zwischen die Meßflächen A gebracht und die Trommel nach rechts gedreht, bis die Spindel den Gegenstand berührt. Da man aber mit einer Schraublehre einen hohen Meßdruck erzeugen kann, durch den die Meßfehler größer als 0,01 mm werden können, ist die Meßtrommel mit einer Ratsche R versehen, die sich leer weiterdreht, wenn ein gewisser Meßdruck überschritten wird. **Beim Meßvorgang muß also grundsätzlich an der Ratsche gedreht werden**, während das Zurückdrehen der Spindel an der Trommel erfolgt.

Bevor eine Messung durchgeführt wird, muß der Nullpunkt überprüft werden. Steht bei Berührung der beiden Meßflächen A die Trommel nicht auf Null, so ist die Differenz der Ablesungen mit und ohne Objekt zu bilden. Abb. 3 (rechts) zeigt ein Beispiel für eine Ablesung. Der eingestellte Wert beträgt 2,84 mm.

Grundbegriffe und Definitionen aus der Mechanik

- **Geschwindigkeit**

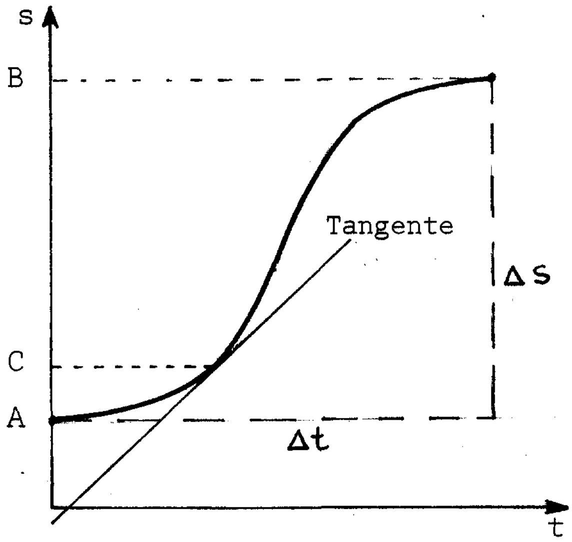


Abb. a: Beispiel eines Weg-Zeit-Diagramms und der Definition des Differenzenquotienten $\Delta s / \Delta t$.

Ein Körper bewege sich ungleichförmig längs des Weges s von einem Ort A zu einem Ort B. Trägt man den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit t auf, so erhält man das sog. Weg-Zeit-Diagramm (s-t-Diagramm, s.Abb.a). Als **mittlere Geschwindigkeit** zwischen A und B definiert man den Quotienten aus zurückgelegtem Weg Δs und der dafür benötigten Zeit Δt:

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Um die **Momentangeschwindigkeit** z.B. am Ort C zu ermitteln, muß Δs und Δt am Ort C infinitesimal klein gewählt werden, so daß der Differenzenquotient $\Delta s / \Delta t$ in den Differentialquotient ds/dt übergeht.

Definition der Geschwindigkeit v:

Die Geschwindigkeit v eines Körpers ist der l. Differentialquotient (= 1. Ableitung) des Weges nach der Zeit:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$$

SI-Einheit für v: $1\ \frac{m}{s}$

$\dot{s}$ ist eine abkürzende Schreibweise für ds/dt.

Da der l. Differentialquotient die Steigung der Tangente ist, erhält man die Momentangeschwindigkeit z.b. im Ort C aus dem s-t-Diagramm, indem man die Tangente an die s-t-Kurve im Punkt C zeichnet und anschließend deren Steigung- bestimmt. Ermittelt man auf diese Weise für jeden Punkt der s-t-Kurve die Tangentensteigung und trägt diese in einem Diagramm über der Zeit auf, so erhält man das zum s-t-Diagramm gehörende v-t-Diagramm (Geschwindigkeit-Zeit-Diagramms siehe Abb.b).

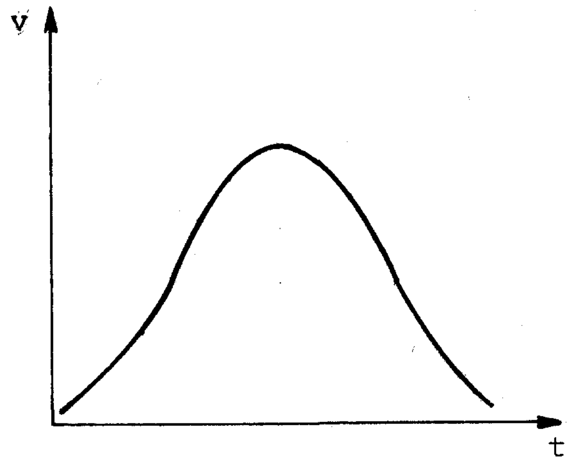


Abb. b: Das zu Abb. a korrespondierende v-t-Diagramm.

- **Beschleunigung**

Ändert sich die Geschwindigkeit eines Körpers als Funktion der Zeit, so spricht man von einer beschleunigten Bewegung. Auch eine bloße Richtungsänderung stellt eine beschleunigte Bewegung dar, da die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist (z.B. Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit). Als **mittlere Beschleunigung** definiert man den Quotienten $\Delta v / \Delta t$, wenn sich in der Zeitspanne Δt die Geschwindigkeit um Δv geändert hat. Für die **momentane Beschleunigung a** gilt dann wieder:

Definition der Beschleunigung a:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}} \qquad (0.2)$$

SI-Einheit für a: 1 m/s²

Da v = ds/dt ist, gilt auch: $a = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$, d.h.

die Beschleunigung ist die 1. Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, bzw. die 2. Ableitung des Weges nach der Zeit.

- **Masse**

Jeder Körper besitzt eine Masse. Sie hängt nicht von äußeren Bedingungen ab. Die Masse ist eine Basisgröße.

SI-Einheit für die Masse: 1 kg

• Dichte

Die Dichte ρ eines Körpers ist definiert als Masse m des Körpers dividiert durch sein Volumen V:

Definition der Dichte: $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$ **(0.3)**

SI-Einheit für ρ: 1 kg/m^3

Gebräuchlicher für die Angabe von Dichtewerten ist die cgs-Einheit: 1 g/cm^3.
Für Gase wird die Dichte oft in g/l (Gramm/Liter) angegeben.

• Kraft

Ein Körper mit der Masse m verharrt ohne äußere Einwirkung im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung (1. Newtonsches Axiom). Ändert sich Richtung oder Betrag seiner Geschwindigkeit, d.h. erfährt der Körper eine Beschleunigung, so ist die Ursache hierfür das Wirken einer Kraft F. Das Experiment zeigt, daß F proportional zur Masse m und zur Beschleunigung a ist. Newton definierte als Kraft (2. Newtonsches Axiom):

Definition der Kraft F:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}} \qquad \textbf{(0.4)}$$

Kraft = Masse mal Beschleunigung

SI-Einheit für F: 1 kg m/s^2 = 1 N (Newton).
cgs-Einheit für F: 1 g cm/s^2 = l dyn.

Gl. (0.4) läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{s}}{\mathbf{dt}^2} \qquad \textbf{(0.5)}$$

Gl.(0.5) wird auch Grundgleichung der Mechanik genannt.

Wirkt auf einen Körper eine zeitlich konstante Kraft ein, so erfährt dieser eine konstante Beschleunigung a, wenn er sich ungehindert (reibungsfrei) bewegen kann. Es gilt dann: $\mathbf{a} = \mathbf{d}^2\mathbf{s}/\mathbf{dt}^2$.Durch Integration dieser Gleichung erhält man zunächst die Geschwindigkeit v(t) des Körpers und durch nochmaliges Integrieren den zurückgelegten Weg s(t):

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{v(t)} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{t} \\ \textbf{und} \quad \mathbf{s(t)} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}^2 \end{array}}, \qquad \textbf{(0.6)}$$

wenn v_0 und s_0 Geschwindigkeit und zurückgelegter Weg zur Zeit t = 0 sind.

- **Gewichtskraft**

Auf der Erdoberfläche erfahren alle Körper eine Kraft in Richtung des Erdmittelpunktes, also senkrecht zur Erdoberfläche (von einer geringen Abweichung durch Zentrifugalkräfte infolge der Erdrotation sei hier abgesehen). Man nennt diese an allen Körpern angreifende Kraft die Gewichtskraft F_G oder Schwerkraft. Läßt man einen Körper der Masse m in der Nähe der Erdoberfläche frei fallen, so beobachtet man unabhängig von seiner Masse eine **Fallbeschleunigung g** (auch Erdbeschleunigung genannt) von $\mathbf{g} = 9{,}81\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}$. Die auf alle Körper wirkende Gewichtskraft berechnet sich also nach der Formel:

$$\boxed{\mathbf{F_G = m \cdot g}} \qquad \textbf{(0.7)}$$

Die Masse l kg übt also eine Kraft von 9,81 N nach unten aus. Früher wurde diese Kraft l kp (Kilopond) genannt.

Die Ursache für die Gewichtskraft ist die **Gravitation** (Massenanziehung): Zwischen zwei Körpern mit den Massen m_1 und m_2, deren Massenmittelpunkte den Abstand a haben, herrscht eine Anziehungskraft (Gravitationskraft), die wie folgt von den Massen und ihrem Abstand abhängt:

$$\boxed{\mathbf{F} = \gamma \cdot \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{\mathbf{a}^2}} \qquad \textbf{(Gravitationsgesetz)}$$

γ ist die Gravitationskonstante. Sie kann nur im Labor bestimmt werden. Ihr Wert ist $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \mathbf{m}^3/(\mathbf{kg} \cdot \mathbf{s}^2)$. Betrachten wir eine Masse m, die auf der Erde (ihre Masse sei M) liegt, so ist die anziehende Kraft zwischen m und M einerseits gleich $\mathbf{m} \cdot \mathbf{g}$, andererseits gleich $\gamma \cdot \mathbf{m} \cdot \mathbf{M}/\mathbf{R}^2$, wenn R der Erdradius ist (= Abstand der Massenmittelpunkte von m und M). Es ist demnach $\mathbf{g} = \gamma \cdot \mathbf{M}/\mathbf{R}^2$. Man sieht daraus, daß g mit zunehmender Höhe über der Erde abnimmt und auch von der geographischen Breite abhängig ist, da die Erde keine exakte Kugel, sondern an den Polen etwas abgeplattet ist. Die Gewichtskraft eines Körpers ist also ortsabhängig.

> Am gleichen Ort aber verhalten sich die Gewichtskräfte zweier Körper wie deren Massen (Prinzip der Massenbestimmung mit der Hebelwaage).

- **Impuls (Bewegungsgröße)**

Der Impuls p eines Körpers ist das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit:

Definition des Impulses p:

$$\boxed{\mathbf{p = m \cdot v}} \qquad \textbf{(0.8)}$$

SI-Einheit für p: 1 kg m/s

Für den Impuls gilt ein Erhaltungssatz:

> **Der Gesamtimpuls eines Systems bleibt zeitlich konstant, wenn von außen keine Kräfte auf das System einwirken (Prinzip der Rückstoßrakete, Ballistik).**

- **Druck** (siehe Versuch 1)

- **Arbeit**

Wird ein Körper unter der Einwirkung einer Kraft längs eines Weges verschoben, so wird an ihm Arbeit geleistet. Die Arbeit W ist definiert als das Produkt aus Kraftkomponente $\mathbf{F}\cdot\cos\beta$ und der Wegstrecke s, wenn β der Winkel zwischen F und s ist.

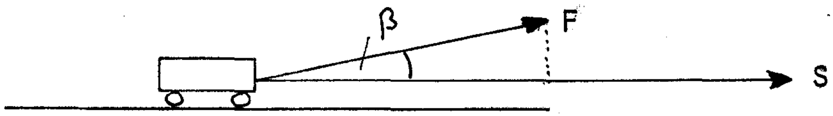


Abb. c: Zur Definition der Arbeit.

Definition der Arbeit:

$$\boxed{\mathbf{W = F \cdot s \cdot \cos\beta}} \qquad \mathbf{(0.9)}$$

SI-Einheit für W: 1 Nm = 1 J (Joule)
Es gilt auch: 1 Nm = 1 J =1 Ws (Wattsekunde)
1 W (Watt) ist das Produkt aus 1 Volt (V) mal 1 Ampere (A): 1W = 1VA

Ist die Kraft F längs des Weges s nicht konstant, sondern eine Funktion F(s) des Weges, so gilt zunächst: $\mathbf{dW} = \mathbf{F}(\mathbf{s})\cos\beta\cdot\mathbf{ds}$. W erhält man dann durch Integration:

$$\mathbf{W} = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F(s)\cdot\cos\beta\cdot ds} \qquad \mathbf{(0.10)}$$

- **Energie**

Energie und Arbeit sind dimensionsgleiche Größen. Die an einem System geleistete Arbeit steckt dann als kinetische und/oder als potentielle Energie in dem System.

a) Kinetische Energie (Energie der Bewegung)

Beschleunigt man einen Körper der Masse m von der Geschwindigkeit Null auf die Endgeschwindigkeit v, so berechnet sich die am Körper geleistete Arbeit zu $\mathbf{W} = \mathbf{m}\mathbf{v}^2/2$. Diese Arbeit ist dann als **kinetische Energie $\mathbf{W_k}$** in dem Körper beinhaltet:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} m v^2} \qquad \textbf{(0.11)}$$

b) Potentielle Energie (Energie der Lage)

Jeder ruhende Körper in einem Kraftfeld besitzt eine Energie, die von der Lage (Ort) abhängig ist. Verschiebt man den Körper quasistatisch - also so, daß er keine kinetische Energie gewinnt - von einem Ort zu einem anderen, so kann dazu Arbeit erforderlich sein, die dann als zusätzliche **Energie der Lage** im Körper gespeichert ist. Prinzipiell ist die Energie der Lage (**potentielle Energie**) nur bis auf eine beliebige Konstante bestimmt, d.h. die potentielle Energie ist von einem Bezugsniveau abhängig. Differenzen der potentiellen Energie sind jedoch eindeutig bestimmt, da die Konstante dann wegfällt. Für einen Körper der Masse m berechnet sich die potentielle Energie W_p, wenn er sich in der Höhe h über dem Erdboden befindet und dieser das Bezugsniveau (h = 0) ist, zu:

$$\boxed{W_p = m \cdot g \cdot h} \qquad \textbf{(0.12)}$$

- **Leistung**

Die Leistung P ist definiert als geleistete Arbeit pro Zeiteinheit. Ist ΔW die in der Zeitspanne Δt verrichtete Arbeit, so ist P = $\Delta W / \Delta t$ oder:

Definition der Leistung P:

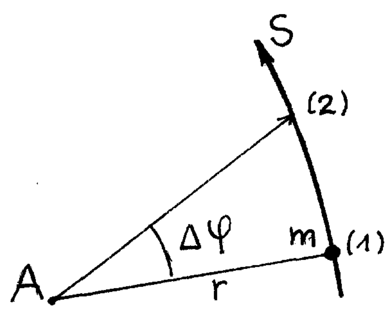
$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \qquad \textbf{(0.13)}$$

SI-Einheit für P: **1 J/s oder 1 W (Watt).**
Frühere Einheit in der Technik: **1 PS = 736 W = 0,736 kW.**

Die geleistete Arbeit kann auch in Reibungsenergie und somit in Wärme umgesetzt werden.

- **Rotationsbewegung**

- **Winkelgeschwindigkeit**



In der nobenstehenden Skizze sei A ein raumfester Punkt. Ein Massenpunkt m bewege sich auf einer Bahn S in der Zeit t vom Punkt (l) zum Punkt (2) der Bahn. Überstreicht dabei der Fahrstrahl r in dieser Zeit den Winkel φ, so ist die Winkelgeschwindigkeit ω des Massenpunktes bezüglich A definiert als:

Definition der Winkelgeschwindigkeit ω:

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \textbf{oder} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}} \qquad \textbf{(0.14)}$$

SI-Einheit für ω: 1 rad/s oder 1 s^{-1}.
"rad" ist die dimensionslose Einheit für den Winkel im Bogenmaß.

- **Bogenmaß**

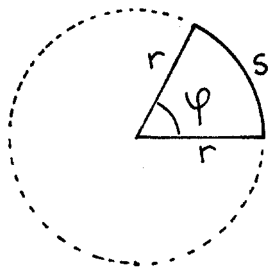


Abb. d: Zur Definition des Bogenmaßes.

Im Bogenmaß ist der Winkel φ definiert als der Quotient von zum Winkel gehörender Kreisbogenlänge s zu Radius r:

$$\varphi = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(0.15)}$$

Die Einheit für φ ist also 1 m/m. Diese dimensionslose Einheit wird als 1 rad (Radiant) bezeichnet. Für den vollen Winkel im Bogenmaß gilt demnach, da der Umfang des Kreises gleich $2\pi r$ ist: $\varphi_{\mathrm{voll}} = \frac{2\pi \mathbf{r}}{\mathbf{r}}\,\mathbf{rad} = 2\pi\,\mathbf{rad}$

Im Gradmaß beträgt der volle Winkel 360°. Es besteht somit die Umrechnungsbeziehung:

$$\mathbf{360^0 = 2\pi\,rad, bzw.\ 1^0 = 0{,}01745\,rad, bzw. \quad 1rad = 57{,}3^0}$$

Merke: In allen Formeln der Drehbewegung muß der Winkel grundsätzlich im Bogenmaß eingesetzt werden.

- **Winkelbeschleunigung**

Die Winkelbeschleunigung α ist definiert als die Änderung der Winkelgeschwindigkeit pro Zeiteinheit:

$$\boxed{\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \textbf{oder} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}} \qquad \textbf{(0.16)}$$

SI-Einheit für α **:** 1 rad/s^2 oder 1 s^{-2} .

Da $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ist, gilt auch $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

- **<u>Kreisbewegung</u>**

Bewegt sich ein Massenpunkt m auf einer **Kreisbahn** (r ist dann konstant!), so erhält man durch Differenzieren von Gl. (0.15) einen Zusammenhang von Bahngeschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt}, \text{ d.h. } \quad \omega = \frac{1}{r} \cdot v, \text{ bzw. } \quad v = \omega \cdot r \qquad \textbf{(0.17)}$$

- **<u>Zentripetal- und Zentrifugalkraft</u>**

Soll sich ein Massenpunkt (Masse m) mit konstanter Bahngeschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegen, so muß ständig eine zum **Mittelpunkt der Kreisbahn** gerichtete Kraft wirken. Man nennt sie **Zentripetalkraft** F_p . Die Theorie liefert für F_p :

$$F_p = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot a_p \qquad \textbf{(0.18)}$$

a_p ist die Zentripetalbeschleunigung. Sie beträgt:

$$a_p = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad \textbf{(0.19)}$$

Als **Zentrifugalkraft** F_f bezeichnet man die bei einer Kreisbewegung in **radialer Richtung nach außen** wirkende Trägheitskraft. F_p und F_f bzw. a_p und a_f (= Zentrifugalbeschleunigung) sind betragsmäßig einander gleich: $|a_p| = |a_f|$

- **<u>Drehmoment</u>**

Ein Körper sei drehbar um eine Achse D gelagert (in der untenstehenden Skizze sei D senkrecht zur Papierebene). Im Abstand a von der Drehachse greife eine Kraft F am Körper an, die mit der Richtung von a einen Winkel β bildet.

Unter dem **Drehmoment** M, das bezüglich der Drehachse D auf den Körper ausgeübt wird, versteht man dann das Produkt aus dem Abstand a und der Kraftkomponente $F \cdot \sin\beta$, die senkrecht zu a wirkt:

Definition des Drehmomentes M:

$$\boxed{\mathbf{M = a \cdot F \cdot \sin\beta}} \qquad \textbf{(0.20)}$$

SI-Einheit von M: 1 Nm

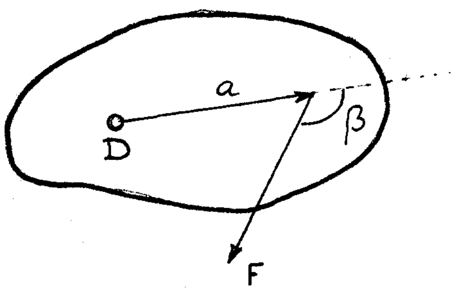


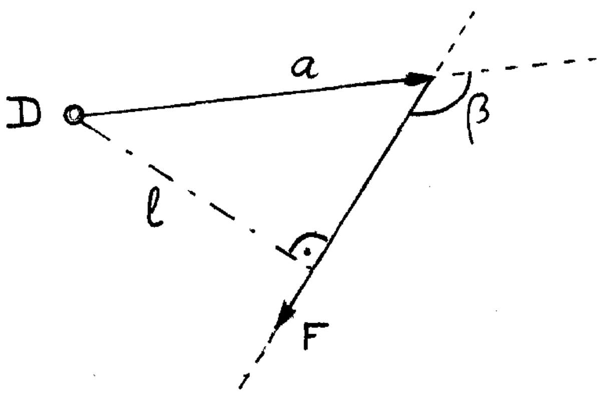
Abb. d: Zur Definition des Drehmomentes.

Sind a und F parallel zueinander (β = 0), so ist M gleich Null; steht F senkrecht zu a (β = 90°), so ist M = a F.

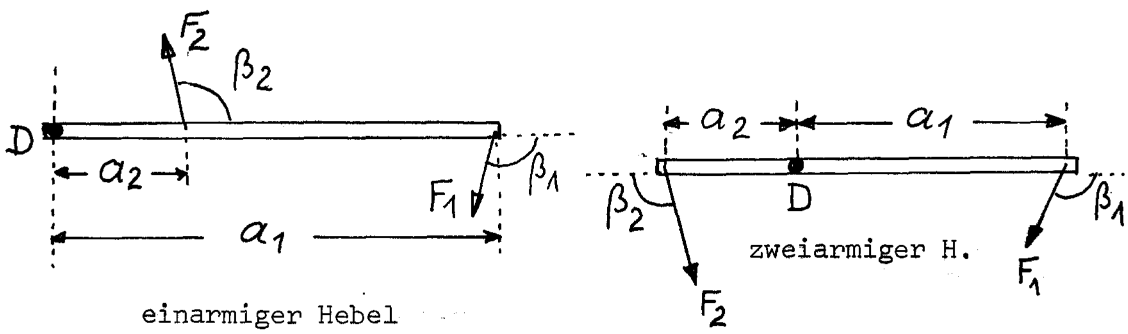
Bei einem drehbaren Körper bewirkt ein Drehmoment eine **Drehung mit bestimmten Drehsinn**. In der obigen Abbildung erfolgt die Drehung im Uhrzeigersinn. Zwei Drehmomente gleicher Größe, aber von gegensätzlichem Drehsinn, kompensieren sich zum Gesamtdrehmoment Null. Bezogen auf ein und dieselbe Drehachse addieren sich die Beträge mehrerer Drehmomente bei gleichem Drehsinn.

Anmerkung:

Man kann das Drehmoment $\mathbf{M} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \cdot \sin\beta$ auch als Produkt der Kraft F und einer Hebelarmlänge $\mathbf{l} = \mathbf{a} \cdot \sin\beta$ interpretieren: $\mathbf{M} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}$
l ist dann der Abstand der Drehachse D von der Wirkungslinie der Kraft F, d.h. l steht senkrecht auf der Richtung von F (siehe nachfolgende Skizze).



- **Hebelgesetz**

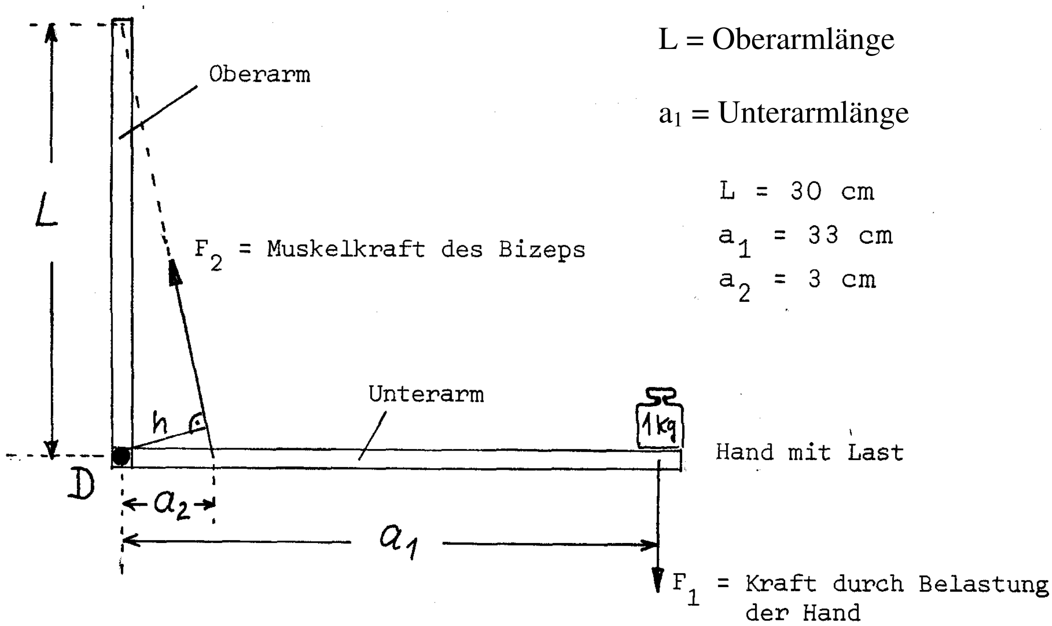


Als Beispiel für das Wirken von Drehmomenten seien der zweiarmige und einarmige Hebel angeführt (siehe obige Abbildungen). Der Hebel besteht aus einer um eine raumfeste Achse D gelagerte Stange, an der in den Abständen a_1 und a_2 von der Drehachse die Kräfte F_1 und F_2 angreifen. Die Stange führt keine Drehbewegung aus, wenn die gegensinnig wirkenden Drehmomente einander gleich sind, d.h.:

$$\mathbf{a_1 F_1 \sin\beta_1 = a_2 F_2 \sin\beta_2}$$

Die Hebelarme a_1 und a_2 werden auch als **Kraftarm** und als **Lastarm** bezeichnet. Mit einem Hebel lassen sich große Kräfte ausüben, wenn die Hebelarmlängen sehr unterschiedlich sind.

- **Der Arm als Hebel (modellhaft dargestellt):**



L = Oberarmlänge

a_1 = Unterarmlänge

L = 30 cm
a_1 = 33 cm
a_2 = 3 cm