

Versuch 3 B Elastizitätsmodul

Vorbereitung auf den Versuch

Physikalische Grundbegriffe

- Normal-, Tangentialspannung
- Hooksches Gesetz
- Elastizitäts-, Torsions- und Kompressionsmodul
- Flächenträgheitsmoment

weiterführende Literatur:

- W.Seibt, Physik f. Mediziner, 3.Aufl. p. 123-129
- W.Hellenthal, Physik für Mediziner und Biologen, 6.Aufl. p. 48-51
- V.Harms, Physik für Mediziner und Pharmazeuten, 14 Aufl. p. 53-57

Erläuterung der wichtigsten physikalischen Begriffe

• Elastizität fester Körper

Alle Körper bestehen aus Atomen bzw. Molekülen. Zwischen ihnen bestehen Kräfte. Wirken äußere Kräfte auf den Körper ein, so treten Deformationen auf: Die einzelnen Bausteine ändern ihre Abstände zueinander oder gar ihre gegenseitige Lage. Als *elastisch* (oder ideal-elastisch) bezeichnet man das Verhalten eines deformierbaren Körpers, wenn er nach Beendigung der Krafteinwirkung wieder seine ursprüngliche Form annimmt. Bleibt jedoch eine dauerhafte Formänderung zurück, ohne daß ein Bruch erfolgt, so spricht man von **Plastizität**.

Eine in beliebiger Richtung auf die Oberfläche eines Körpers wirkende Kraft F läßt sich in zwei Komponenten zerlegen: In eine Komponente senkrecht zur Fläche (= Normalkraft F_n) und in eine Komponente parallel zur Fläche (= Tangentialkraft F_t). Die pro Flächeneinheit auf die Oberfläche wirkende Normalkraft heißt **Normalspannung σ** :

$$\sigma = \frac{\text{Normalkraft } F_n}{\text{Fläche } A}$$

Je nach Richtung von F_n unterscheidet man noch zwischen **Zug- und Druckspannung**.

Die pro Flächeneinheit auf die Oberfläche wirkende Tangentialkraft heißt **Tangential- oder Schubspannung τ** :

$$\tau = \frac{\text{Tangentialkraft } F_t}{\text{Fläche } A}$$

Das elastische Verhalten eines Materials bei verschiedenartigen Belastungen (Dehnung, Biegung, Scherung, Torsion, Kompression) wird durch verschiedene elastische Konstanten, den **Moduln**, gekennzeichnet.

- **Dehnung**

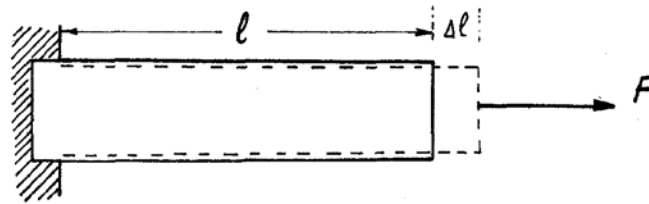


Abb. 3.21: Zur Erläuterung des Hookschen Gesetzes.

Läßt man auf einen einseitig eingespannten Stab der Länge l und der Querschnittsfläche A am freien Ende eine Kraft F in Stabrichtung angreifen, so wird der Stab gedehnt (Abb.3.21). Gleichzeitig tritt eine Querkontraktion auf. Das Volumen bleibt in erster Näherung konstant.

- **Das Hookesche Gesetz**

Für kleine Dehnungen ist die relative Längenänderung $\epsilon = \Delta l / l$ proportional zur Normalspannung $\sigma = F / A$:

Definition des E-Moduls:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

Der Proportionalitätsfaktor E heißt **Elastizitätsmodul (E-Modul)**.

SI-Einheit für E : $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

- **Spannungs-Dehnungs-Diagramm**

Die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes ist auf sehr kleine Dehnungen beschränkt. Bei stärkerer Dehnung wird die Proportionalitätsgrenze überschritten und die Deformation wächst dann stärker als die Spannung.

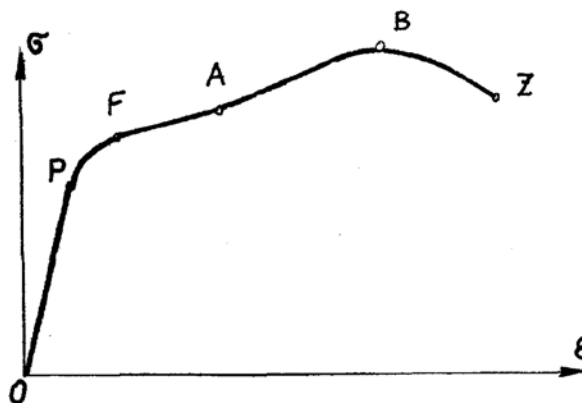


Abb. 3.22: Das Spannungs-Dehnungs Diagramm eines Festkörpers.

Die Verhältnisse lassen sich in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb.3.22) veranschaulichen:

0 bis P stellt den **Hookeschen Bereich** dar. Im allgemeinen zeigen Metalle über

die Proportionalitätsgrenze hinaus noch elastisches Verhalten, d.h. bei Wegnahme der deformierenden Kraft verschwinden die Verzerrungen wieder. Die genaue Elastizitätsgrenze ist daher schwer zu definieren. Sie liegt zwischen P und F.

Vom Punkt E an nimmt die Dehnung bei schwacher Zunahme der Spannung relativ stark zu. Man nennt diese Stelle Streck- oder Fließgrenze. Das Metall verhält sich ähnlich wie eine zähe Flüssigkeit, und der Körper erfährt jetzt eine bleibende Formveränderung. Dieser Fließvorgang hat bei A ein Ende. Es folgt eine Zone der "Verfestigung", in der die Spannung bei weiterer Dehnung wieder zunimmt bis zu einem Maximalwert, der sog. Zerreiß- oder Bruchspannung (Punkt B). Von B ab erfolgt eine starke Querschnittsverkleinerung und bei Z tritt Zerreißen oder Bruch ein.

• Schubelastizität (Scherung, Torsion)

Läßt man z.B. auf die Oberseite eines Quaders eine parallel zur oberen Quaderfläche wirkende Kraft F angreifen (oberen Quaderfläche wirkende Kraft F (die untere Fläche sei festgehalten), so wird der Quader in der aus der Abb. 3.23 ersichtlichen Weise deformiert: Er erfährt eine Scherung. Für kleine Scherungswinkel α erfolgt keine Volumenänderung, sondern nur eine Gestaltsänderung. Ist $\tau = F/A$ die Schubspannung ($A =$ Fläche, in der die Kraft angreift), so herrscht nach dem Hookeschen Gesetz für kleine Scherungswinkel α Proportionalität zwischen α und τ :

Definition des Schub- oder Torsionsmodul:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

Der vom Material abhängige Proportionalitätsfaktor G heißt **Schub- oder Torsionsmodul**.

SI-Einheit von G : $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

Die Bezeichnung **Torsionsmodul** für G ist dadurch begründet, daß auch bei der Torsionsbeanspruchung (Drillung) eines Materials der Schubmodul G als maßgebende elastische Konstante auftritt.

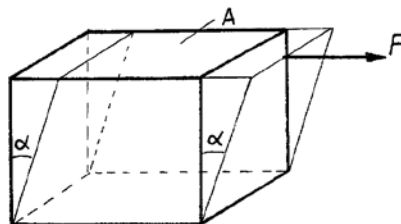


Abb. 3.23: Zur Definition des Schubmoduls.

• Volumenelastizität (Kompression)

Setzt man einen Körper einem **allseitigen** Druck oder Zug aus, so wird sein Volumen verkleinert oder vergrößert. Eine Gestaltsänderung tritt nicht auf. Ist p der wirkende Druck und $\Delta V/V$ die relative Volumenänderung, so sind p und $\Delta V/V$ im Hookeschen Bereich wieder einander proportional:

Definition des Kompressionsmoduls:

$$p = K \cdot \frac{-\Delta V}{V}$$

Der Proportionalitätsfaktor K heißt **Kompressionsmodul**. Sein Kehrwert wird **Kompressibilität** genannt.

SI-Einheit von K: $1 \text{ N} / \text{m}^2$.

Das Minuszeichen in der obigen Definitionsgleichung tritt auf, weil einer Volumenverkleinerung (ΔV ist dann negativ!) ein positiver Druck zugeordnet wird. Die Moduln sind immer positiv.

- **Biegung**

Gegeben sei ein einseitig eingespannter Stab der Länge l , an dessen freien Ende eine Kraft F senkrecht zur Stabrichtung wirkt (Abb.3.24). Der Stab wird dadurch gebogen, wobei der obere Teil des Stabes gedehnt, der untere gestaucht wird. Zwischen beiden Bereichen gibt es eine Zone, die **neutrale Faser**, die weder gedehnt noch gestaucht wird, d.h. ihre ursprüngliche Länge l beibehält.

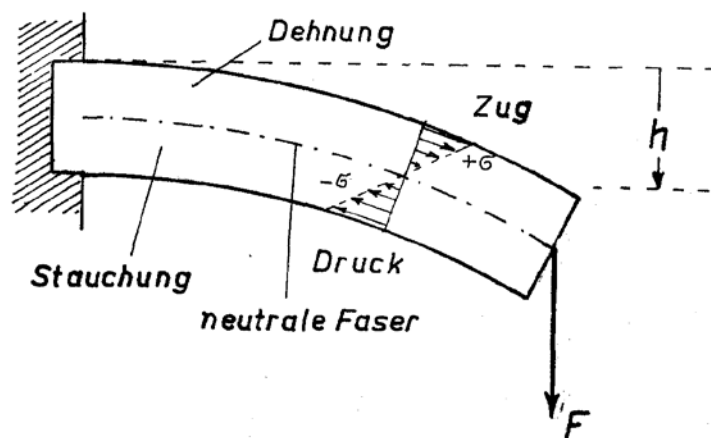


Abb.3.24: Biegung eines einseitig fixierten Stabes.

In Abb.3.24 ist auch die Verteilung der Zug- und Druckbelastung über die Querschnittsfläche dargestellt. Die Zug- bzw. Druckspannung σ steigt mit der Entfernung von der neutralen Faser an. Man sieht, daß die maßgebende **elastische Konstante bei der Biegung** der **E-Modul** ist. Für die Senkung h des freien Stabendes (h wird auch Biegeungspfeil genannt) eines einseitig eingespannten Stabes liefert die Theorie:

Definition des Flächenträgheitsmoments I:

SI-Einheit von I: 1 m^4 .

$$h = \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} \cdot F$$

Ohne auf die genaue Definition und Berechnungsmethode von I einzugehen, werden in Abb.3.25 für einige Profile die Flächenträgheitsmomente in Bezug auf die Richtung der Krafteinwirkung angegeben. Das Flächenträgheitsmoment I ist ganz entscheidend von der **Gestalt des Stabquerschnitts** und der **Richtung der Kraft F** abhängig. Großes Flächenträgheitsmoment und damit auch hohe Steifigkeit (kleiner Biegunspfeil) ergibt sich bei solchen Profilen, wo die beanspruchten Zonen weit von der neutralen Faser entfernt sind. Für die Durchbiegung eines an **beiden** Enden frei aufliegenden Stabes gilt:

$$h = \frac{l^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot F \quad (\text{Gl. 3.1})$$

l ist hier der **Abstand der Auflagepunkte!**

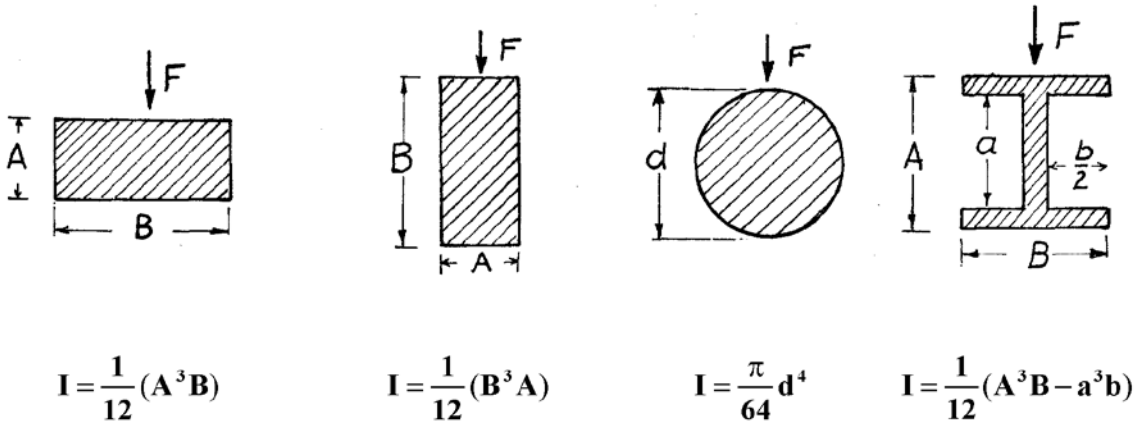


Abb. 3.25: Beispiele für Flächenträgheitsmomente einiger Stabprofile

Übungen

Ü 3.1

Ein Pendel hat eine Maximalauslenkung von 10 cm und es dauert 0,5 s (gezählt vom Nulldurchgang ab), bis der Maximalausschlag erreicht ist.

- Welche Kreisfrequenz hat das Pendel ?
- Wie lange dauert es, bis das Pendel einen Ausschlag von 4,0 cm hat ?
- Wie groß ist der Ausschlag 2,3 s nach dem Nulldurchgang ?

Ü 3.2

Wann tritt Resonanz auf ? Was ist ein Resonator ? Was beschreibt die Resonanzkurve ?

Ü 3.3

Wie groß ist die Wellenlänge (in mm) bei Ultraschall von 30 kHz in Wasser, wenn die Phasengeschwindigkeit in Wasser 1500 m/s ist ?

Ü 3.4

Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Stickstoffgas bei 20°C (für zweiatomige Gase gilt: $C_p/C_v = \kappa = 1,40$).

Ü 3.5

Um welchen Faktor ändert sich die Schallintensität einer Welle, wenn sich die Schallwechseldruckamplitude verdoppelt ?

Ü 3.6

Welche Größen einer Welle ändern sich und welche nicht, wenn die Welle von einem Medium in ein anderes übertritt ?

Ü 3.7

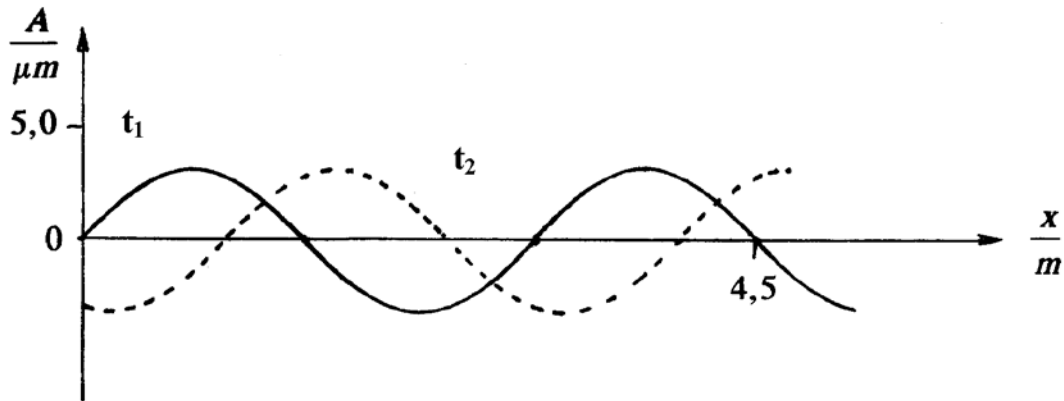
Wann tritt beim Auftreffen einer Welle auf ein anderes Medium keine Reflexion auf?

Ü 3.8

Eine Violine Saite der Länge 40 cm schwingt mit 440 Hz. Mit welcher Frequenz schwingt die Saite, wenn man sie bei gleicher Spannung auf 35 cm verkürzt ?

Ü 3.9

Das Diagramm zeigt den Auslenkungszustand einer harmonischen Welle als Funktion der Ausbreitungskoordinate zu den Zeiten $t_1 = 0$ s und $t_2 = 600$ μ s. Ermitteln Sie aus dem Diagramm Frequenz, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit sowie die Amplitude dieser Welle (alle Größen in SI-Einheiten):



Ü 3.10

Auf die Querschnittsfläche eines Rechteckstabes wirkt unter einem Winkel von 30° zum Lot eine Kraft F von 100 N ein.

Berechnen Sie die Normal- und die Tangentialspannung, die auf die Fläche wirkt.

Ü 3.11

Der E-Modul von Kupfer ist $E = 1,25 \cdot 10^{11}$ N/m². Wie groß wäre er in kbar? Welche Längenänderung (in mm) erfährt ein 2 m langer Cu-Draht vom Durchmesser 0,5 mm, wenn man 1 kg anhängt? Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit in Cu? Dichte von Cu: 8,93 g/cm³.