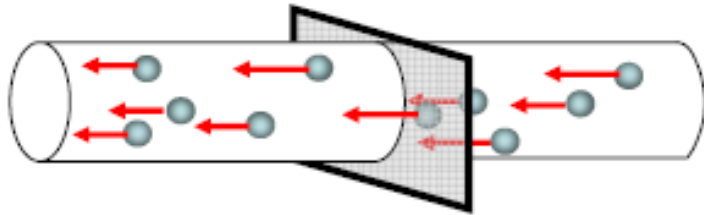


I. Mechanik

I.4 Fluid-Dynamik: Strömungen in Flüssigkeiten und Gasen

Stromdichte

Mikroskopischer Vorgang

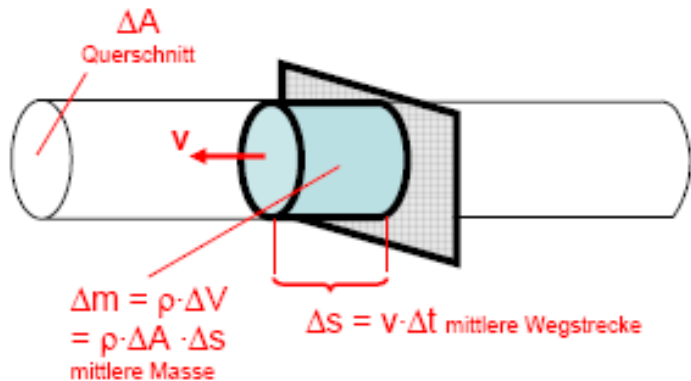


- **Stromstärke** = durch einen Querschnitt (senkrecht zur Flussrichtung) fließende „Menge“ pro Zeit („Menge“ = Energie, Teilchenzahl, Ladung, etc.) hier: Masse

$$I = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (\text{eigentlich Vektor})$$

$$\text{Einheit } [I] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Kontinuumsnäherung



- **Stromdichte** = Stromstärke pro Fläche

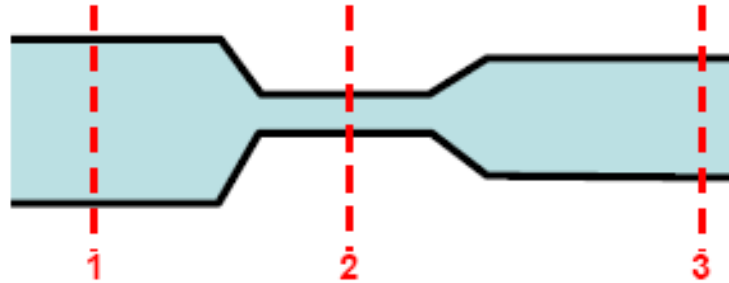
$$j = \frac{I}{\Delta A} = \frac{\Delta m}{\Delta t \cdot \Delta A} = \rho \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta A}$$
$$= \rho \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta A \cdot \Delta s}{\Delta A} = \rho \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \rho \cdot v$$

$$\mathbf{j} = \rho \cdot \mathbf{v} \quad (\text{eigentlich Vektor})$$

$$\text{Einheit } [j] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

Kontinuitätsgleichung

- in fluiden Medien (Flüssigkeiten und Gasen) gilt die **Kontinuitätsgleichung** (auch **Massenerhaltungssatz**): Materie geht nicht verloren. Pro Zeiteinheit fließt durch Fläche 1 die gleiche Masse hinein wie durch Fläche 3 hinaus; d.h. die Stromstärke an den Orten 1,2,3 ist überall gleich groß



$$I_1 = I_2 = I_3$$

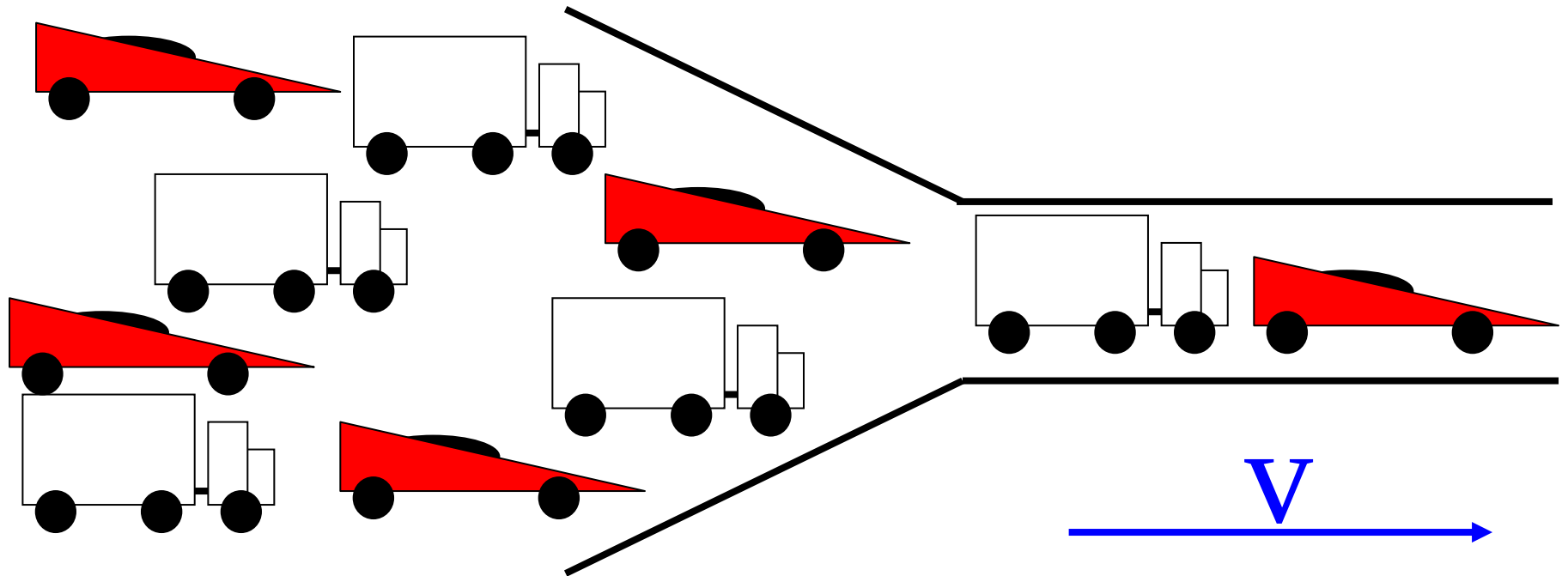
$$\rho_1 \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot v_2 = \rho_3 \cdot A_3 \cdot v_3$$

Kontinuitätsgleichung: $\rho \cdot A \cdot v = \text{const}$

Für Flüssigkeiten (inkompressibel: $\rho = \text{const}$) gilt:

$$A \cdot v = \text{const}$$

Fahrbahnverengung auf Autobahn



Um Massen-(Fahrzeug) durchsatz zu erhalten, müsste man
Geschwindigkeit an Baustelle erhöhen !!!

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

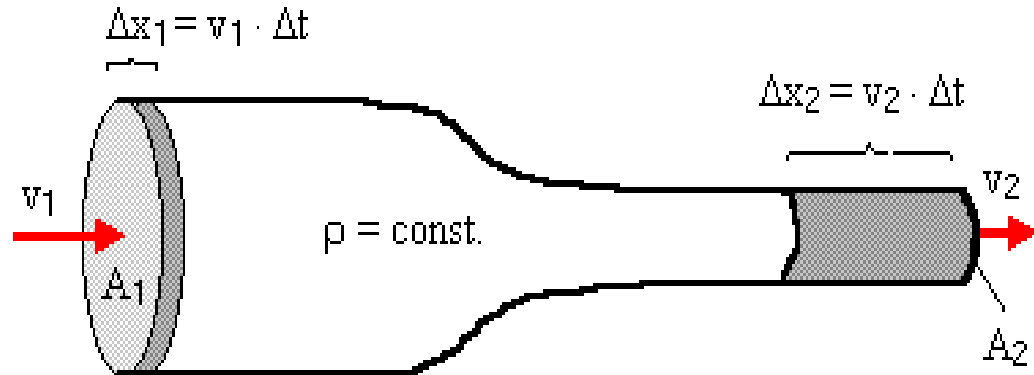
Blutkreislauf



- Aufteilung des Blutstroms aus der Aorta ($A = 4 \text{ cm}^2$) auf sehr viele Kapillaren mit einer großen Gesamtfläche ($A = 4800 \text{ cm}^2$)
- mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Aorta: 21 cm/s ;
aus $A \cdot v = \text{const} \Rightarrow$ mittlere Strömungsgeschwindigkeit in den Kapillaren: 0.018 cm/s
- Volumenstrom durch Aorta: $A \cdot v = 4 \text{ cm}^2 \cdot 21 \text{ cm/s} = 84 \text{ cm}^3/\text{s}$
$$= \frac{84 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} \cdot 60 = 5040 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}} \approx 5 \text{ l/min}$$
- in einer Minute wird das gesamte Blutvolumen des Körpers umgewälzt

Bernoulli-Gleichung

Strömung durch
verengtes Rohr



- Energieerhaltung:

Differenz der kinetischen Energien der Flüssigkeitsmenge m beim Ein- und Austritt aus Rohr:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2$$

Zur Bewegung der Flüssigkeitsmenge m muss Arbeit geleistet werden:

Arbeit = Kraft * Weg = Druck * Fläche * Weg = Druck * Volumen

$$\text{Nettoarbeit: } \Delta W = (p_1 - p_2) \cdot V = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho}$$

Bernoulli-Gleichung

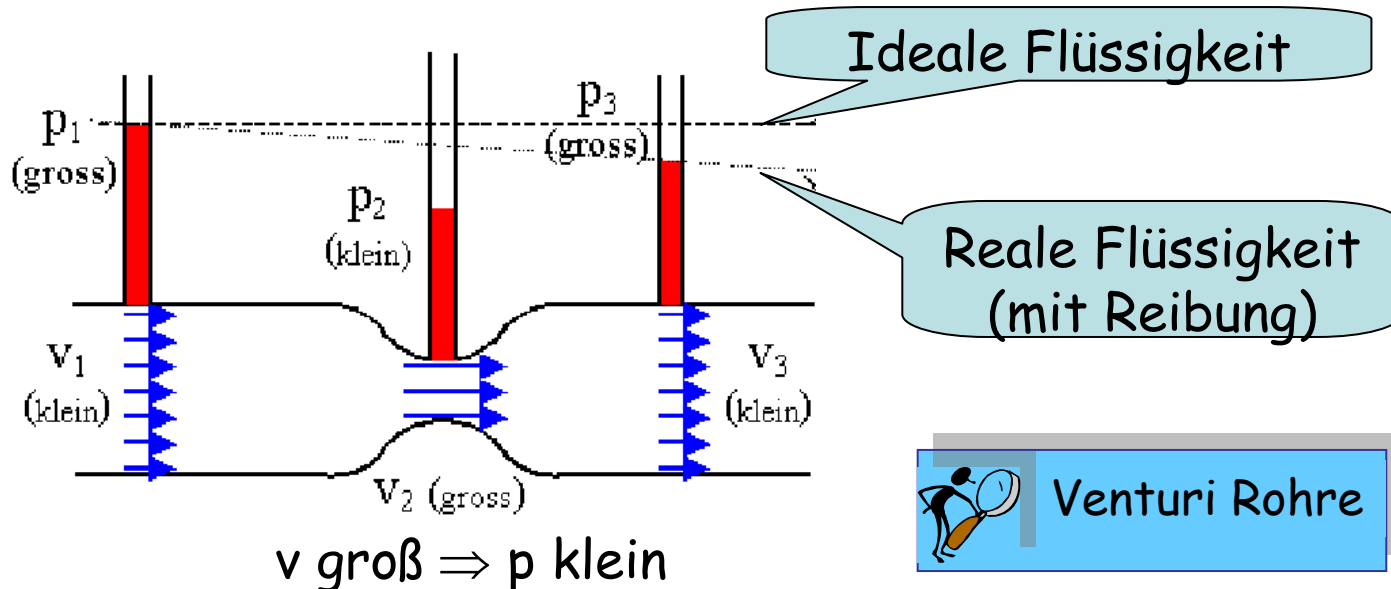
Energieerhaltung: $\Delta E_{\text{kin}} = \Delta W$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = \Delta W = (p_1 - p_2) \cdot \frac{m}{\rho}$$

$$\frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = (p_1 - p_2) \cdot \frac{1}{\rho} \quad | \cdot \rho$$

Bernoullische Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2 + p_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 + p_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + p = \text{const} = p_{\text{ges}}$$

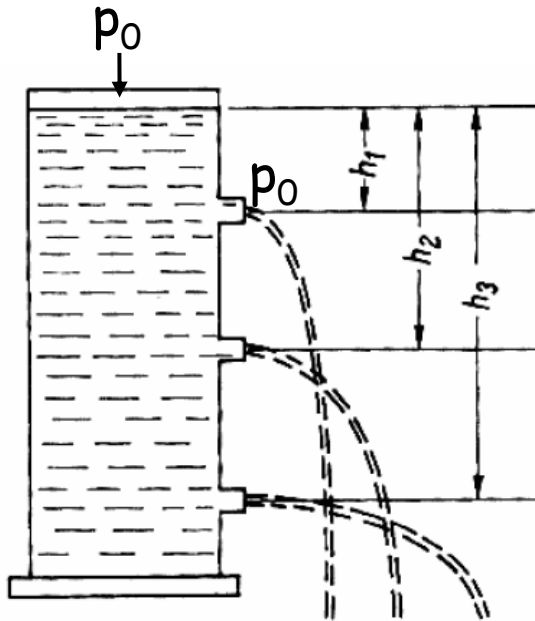


Bernoulli-Gleichung

Bei zusätzlicher Berücksichtigung des Schweredruckes:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = p_{\text{ges}} = p_0$$

allgemeine Form der **Bernoulli Gleichung**



auf Wasseroberfläche
und an Loch wirkt jeweils
der Luftdruck p_0

im Innern der Flüssigkeit in Höhe h_1
unterhalb der Wasseroberfläche:

$$\left. \begin{array}{l} p_{\text{ges}} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_1 \\ \text{außen: } p_{\text{ges}} = p_0 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \rho \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$
$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

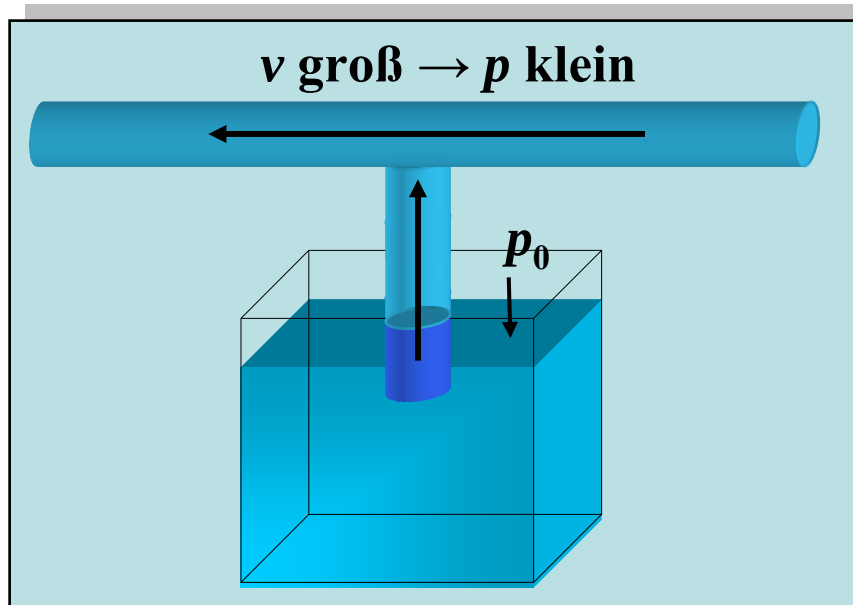


Daniel Bernoulli
(1700- 1782)

Je höher Wassersäule, desto größer die Austrittsgeschwindigkeit

Wasserstrahlpumpe

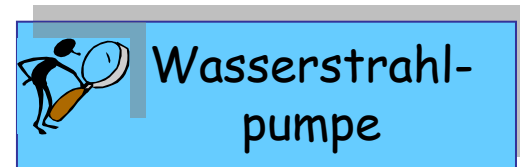
Anwendung: Wasserstrahlpumpe (Prinzip des Zerstäubers)



$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$

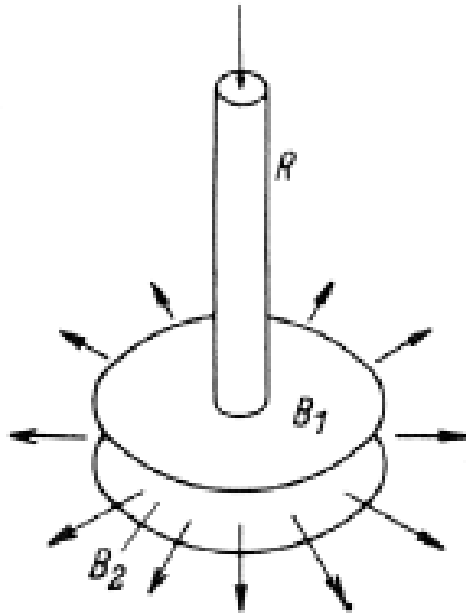
(Gravitation vernachlässigt)

Luftdruck p_0 drückt Wasser aus Gefäß, da Druck p im Rohr klein wegen großer Strömungsgeschwindigkeit v



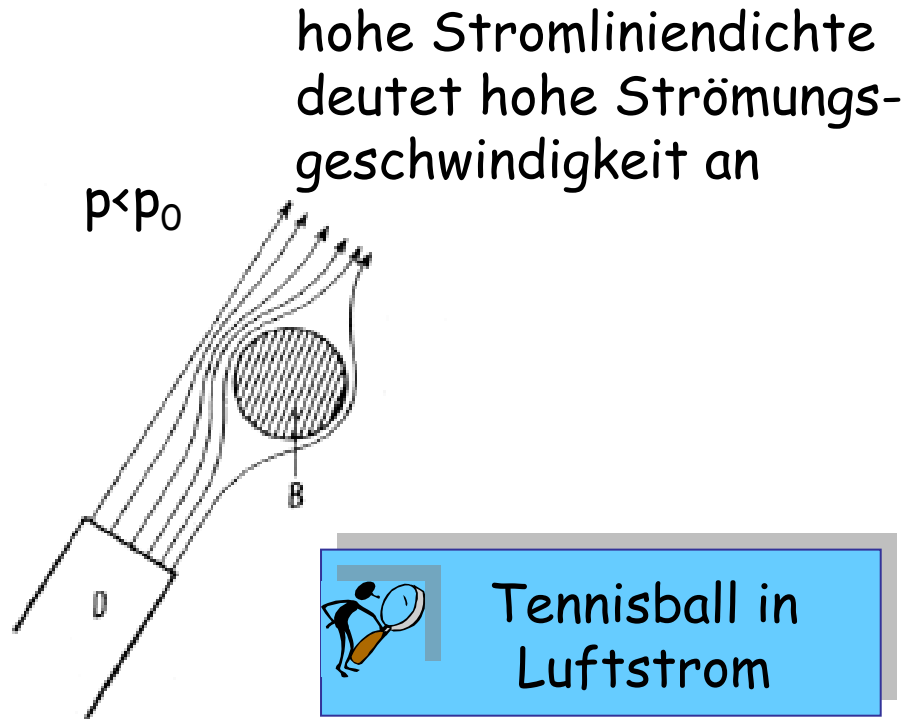
Anwendung der Bernoulli Gleichung bei Gasen

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$$



Aerodynamisches
Paradoxon

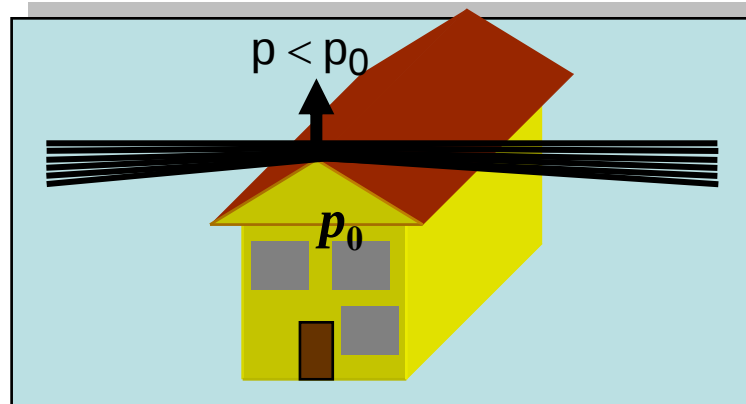
$p < p_0$ zwischen den Platten



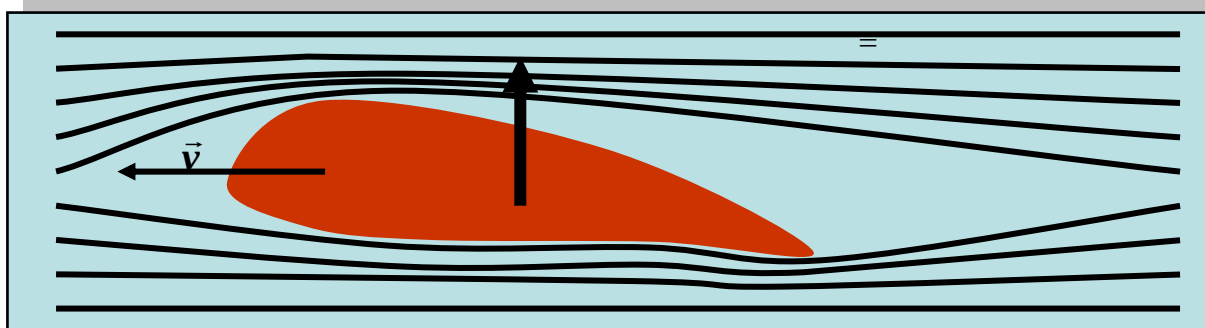
Tennisball in
Luftstrom

Anwendung der Bernoulli Gleichung bei Gasen

Abdecken von
Dächern im Sturm:



Dynamischer Auftrieb von Flugzeugen:



Druck oben:

$$p_{\text{oben}} = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{oben}}^2$$

Druck unten:

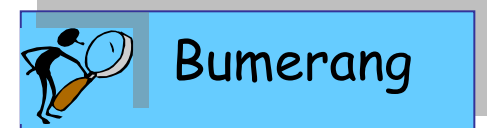
$$p_{\text{unten}} = p_0 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{\text{unten}}^2$$

- auf Oberseite des Flügels Zusammendrängen der Stromlinien

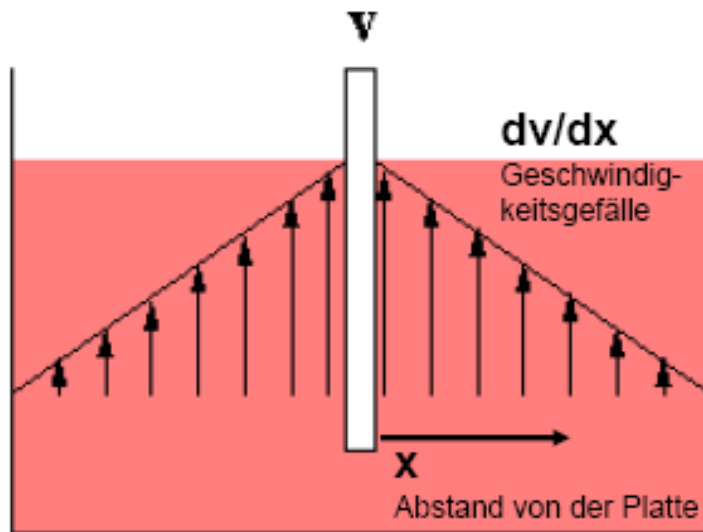
$$\rightarrow v_{\text{oben}} > v_{\text{unten}} \Rightarrow p_{\text{oben}} < p_{\text{unten}}$$

$$F_{\text{Auftrieb}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot (v_{\text{oben}}^2 - v_{\text{unten}}^2)$$

Flaps ausfahren !!



Reale Flüssigkeiten: Reibung



$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx}$$

η : **Viskosität**

Einheit: $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

$$\eta_{\text{Blut}} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

- Eine Platte mit der Fläche A wird mit der Geschwindigkeit v aus einer Flüssigkeit gezogen
- Aufgrund der Reibung werden benachbarte Flüssigkeitsschichten mitgerissen; aber es existiert ein Geschwindigkeitsgefälle: $\frac{dv}{dx}$ mit zunehmendem Abstand x von der Wand nimmt die Geschwindigkeit der Schichten ab.
- die Reibungskraft ist parallel zur Plattenverschiebung gerichtet
- für ideale Flüssigkeiten (keine Reibung) ist $\eta = 0$ und natürlich auch $dv/dx = 0$

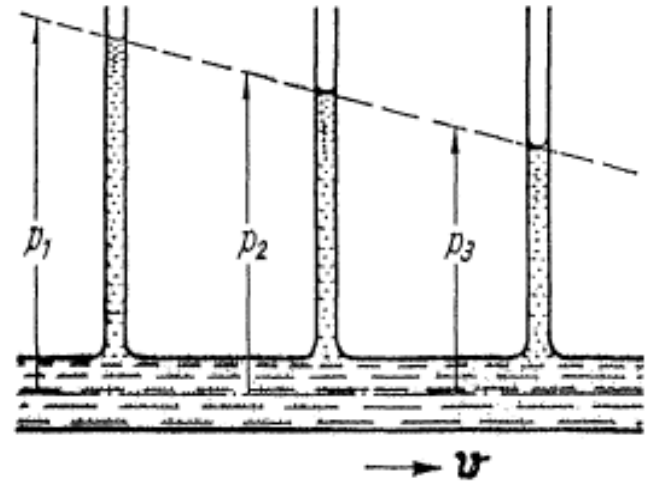
Strömung im Rohr mit Reibung



Reibung bewirkt ein parabolisches Strömungsprofil in einem Rohr



parabolisches Strömungsprofil



Reibung bewirkt einen Druckabfall entlang der Strömungsrichtung

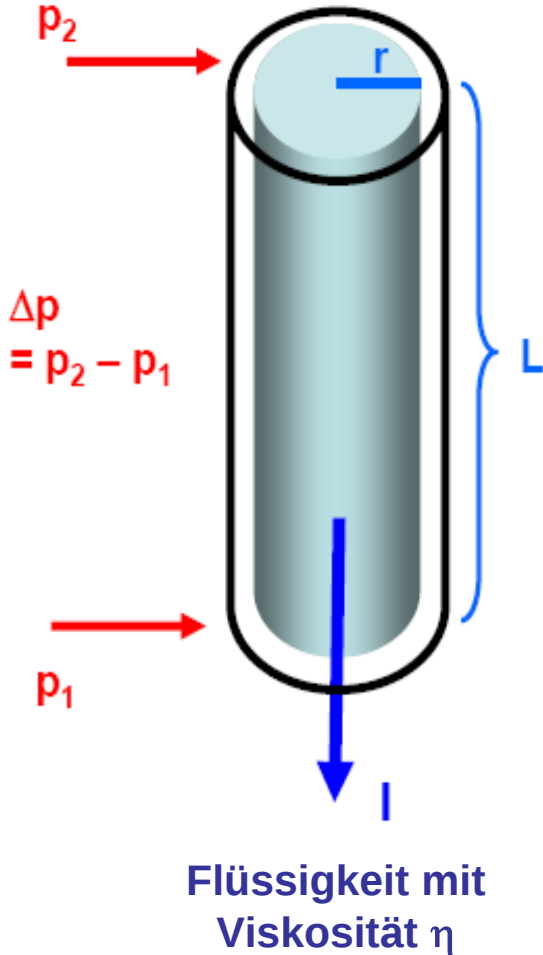
Strömungswiderstand R_s

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Druckdifferenz}}{\text{Strömungswiderstand}}; \quad i = \frac{\Delta p}{R_s}$$

in reibungsfreien idealen Flüssigkeiten ist $R_s=0$ und $\Delta p=0$

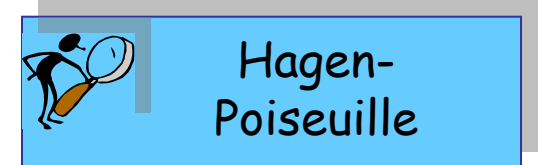
Gesetz von Hagen - Poiseuille

Strömungswiderstand von Rohren



$$R_s = \frac{8 \cdot \eta \cdot L}{\pi \cdot r^4}$$

$$i = \frac{\Delta p}{R_s} = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot \Delta p$$



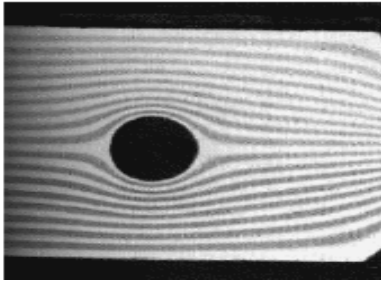
**Stromstärke ändert sich mit der
4. Potenz des Radius !!!**

d.h. bei Verringerung des Radius einer Arterie/
Vene durch Verkalkung um 20% nimmt der
Blutdurchfluss ab auf $(0,8)^4 = 0,41$ also um
einen Faktor 2,4.

Achtung: entsprechende Erhöhung des
Blutdurchflusses bei Ballonerweiterung
von Arterien !!

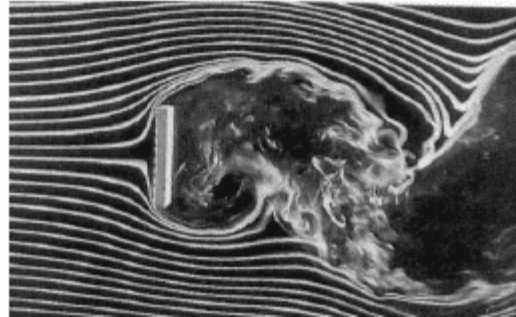
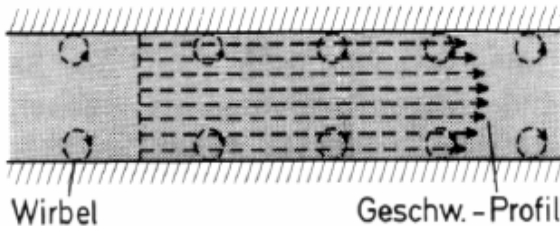
Laminare und turbulente Strömung

- laminare Strömung: keine Durchmischung der Stromfäden



laminare Strömung:
Stromfäden

- bei Erhöhung des Druckunterschieds tritt Wirbelbildung auf:
turbulente Strömung:



laminare → turbulente
Strömung

- Die **Reynoldssche Zahl** liefert ein Kriterium für das Strömungsverhalten:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot r}{\eta}$$

Geometrie

Materialparameter

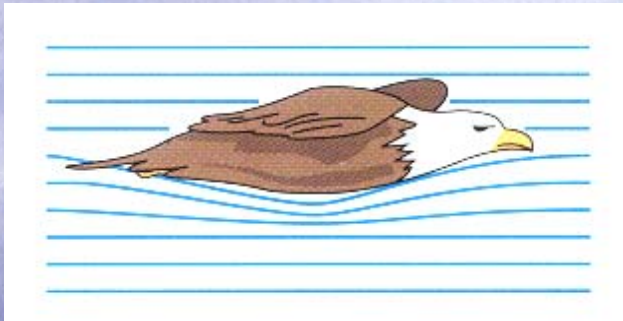
$Re < 2000$: laminar

$Re > 2000$: turbulent

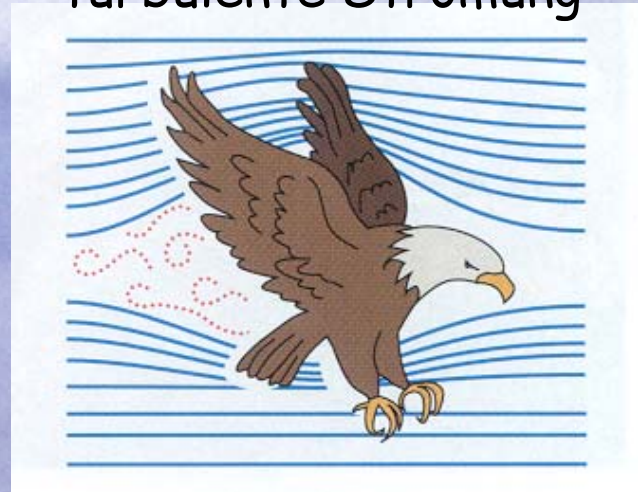
Blut in Aorta: $Re \approx 500 \Rightarrow$ Strömung laminar

Raubvogel

im Flug:
laminare Strömung

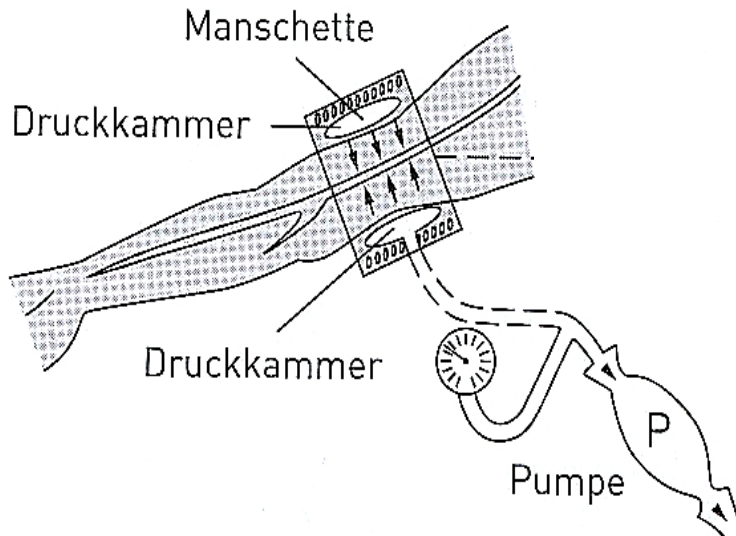


zur Landung:
turbulente Strömung



Blutdruckmessung

- Blutdruckmessung an Arterie (nach Riva-Rocci)



Systole: Zusammenziehen der Herzkammern und Ausstoß arteriellen Bluts: Herzschlag

Diastole: Erschlaffen der Vorhöfe und Auffüllen mit venösem Blut; Entspannung zwischen den Herzschlägen

1. durch Manschettendruck wird Arterie abgedrückt
 $p > p_{sys}$
2. Manschettendruck absenken:
Blut beginnt turbulent zu strömen $p = p_{sys}$
Stoßgeräusche durch Herzschlag
3. Manschettendruck weiter absenken: gleichmäßige Fließgeräusche: $p = p_{dia}$

typische Werte

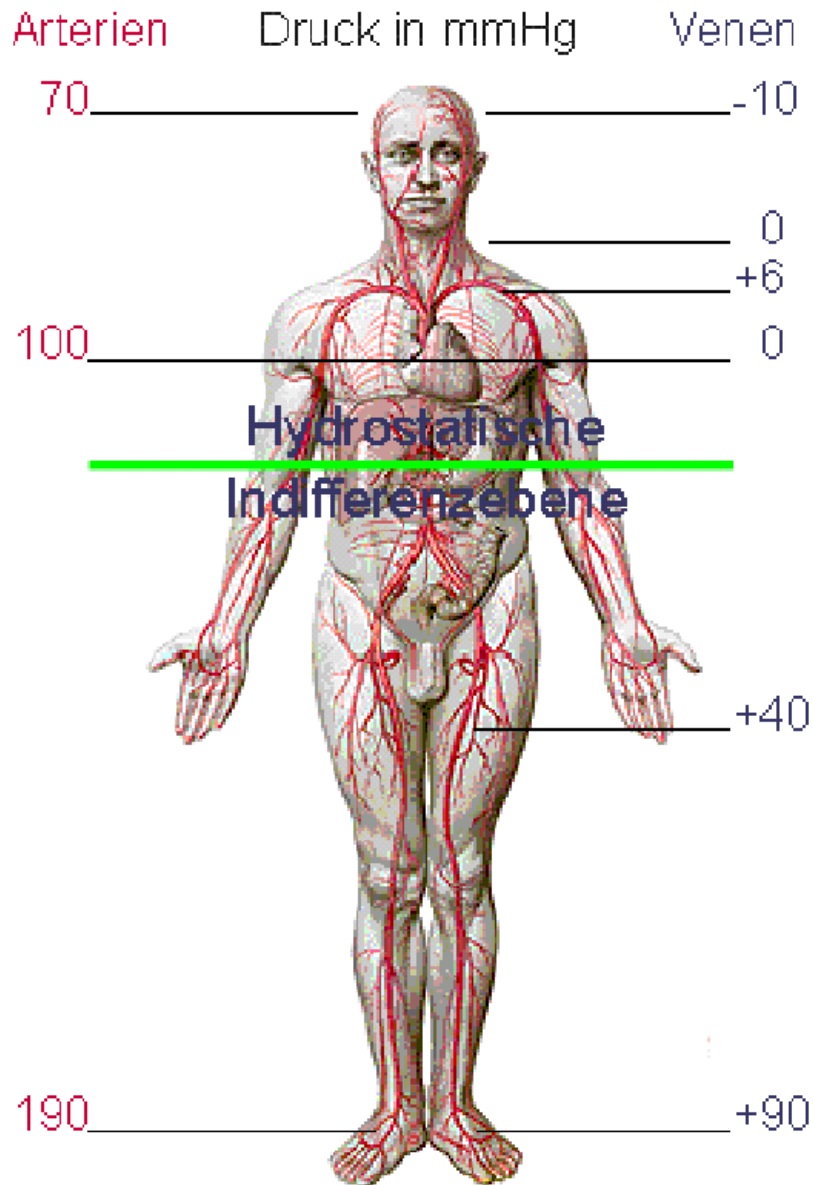
$$p_{sys}/p_{dia} = 120 / 80 \text{ mm Hg}$$

physikalische Einheiten:

$$p_{sys}/p_{dia} = 16,0 / 10,7 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ atm} = 101,3 \text{ kPa} = 760 \text{ mm Hg}$$

Blutdruckmessung



Schweredruck $\rho \cdot g \cdot h$ berücksichtigen !

Druckvariation durch Schwerkraft:

Gehirn: 8,8 kPa

Fuß: 26,5 kPa

$$\begin{aligned} \rho \cdot g \cdot h &= \\ &= 103 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,75 \text{m} = 17,7 \text{kPa} \end{aligned}$$

wichtig !!

Bei Blutdruckmessung Manschette auf Höhe des Herzens, damit keine Fehler durch Schweredruckunterschiede $\rho \cdot g \cdot h$ auftreten

Zusammenfassung

- **Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen**
- ideale Flüssigkeiten (keine Reibung)
 - **Kontinuitätsgleichung**: konstanter Massendurchsatz
 $\rho \cdot A \cdot v = \text{const}$
 - **Bernoulli Gleichung**: $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p = p_0 = \text{const}$
Summe aus dynamischem und statischem Druck ist konstant
- reale Flüssigkeiten
 - Reibung bei Flüssigkeitsströmungen: Viskosität η
 - Strömungsverhalten (**laminar** oder **turbulent**) bestimmt durch **Reynoldsc** Zahl