Spezielle wirtschaftswissenschaftliche Funktionen

Angebots- und Nachfragefunktion

Die Angebots- und die Nachfragefunktion werden üblicherweise für die Marktform der **vollständigen Konkurrenz** (kurz: Konkurrenzmarkt) aufgestellt. Hierbei treffen viele unabhängig voneinander agierende Anbieter und Nachfrager aufeinander. Im Idealfall bildet sich ein Marktgleichgewicht, wenn die angebotene Gütermenge gleich der nachgefragten Menge ist.

- **Angebotsfunktion**: angebotene Menge $x_A(p)$ in Abhängigkeit des Preises p,
- **Nachfragefunktion**: nachgefragte Menge $x_N(p)$ in Abhängigkeit des Preises p,
- **Marktgleichgewicht**: Schnittpunkt der Angebots- und der Nachfragefunktion mit **Konkurrenzpreis** $p^\star$ und angebotener gleich nachgefragter Menge $x^\star$.

Preis-Absatz-Funktion

Die Preis-Absatz-Funktion PAF wird üblicherweise für **Monopolmärkte** aufgestellt. Hierbei trifft ein Anbieter auf viele Nachfrager. Der Monopolist legt die Herstellungsmenge nach gewinnmaximierenden Kriterien fest.

- **Preis-Absatz-Funktion (PAF)**: $p(x)$ Preis in Abhängigkeit der vom Monopolist angebotenen Menge x. Die PAF entspricht der Umkehrfunktion der Nachfragefunktion des Konkurrenzmarktes.

- **Cournotscher Punkt** (Antoine-Augustin Cournot, 1801 – 1877): Gewinnmaximierende Menge $x^\star$ und aus der PAF ermittelter, zugehöriger Preis $p^\star$.

Kostenfunktionen

Die entstehenden Kosten in Abhängigkeit der hergestellten Menge eines Gutes werden mit Kostenfunktionen modelliert. Folgende **Kostenarten** in Abhängigkeit der produzierten Menge x werden unterschieden:

- **Gesamtkostenfunktion**: $K(x)$, Kurzbezeichnungen auch **Gesamtkosten** oder **Kostenfunktion**,
- **variable Kosten**: $K_v(x)$, stehen in direktem Zusammenhang mit der produzierten Menge,
- **Fixkosten**, **Bereitstellungskosten**: K_f, fallen unabhängig von der produzierten Menge an,
- **Stückkosten**, **Durchschnittskosten**: $k(x) = K(x)/x$,
- **variable Stückkosten**: $k_v(x) = K_v(x)/x$.

Einige mögliche Verläufe von Kostenfunktionen

- **Lineare Kostenfunktion**: $K(x) = ax + b$ mit $a, b > 0$.
- **Progressiv wachsende Kosten**: $K(x)$ ist monoton steigend und konvex. Hierzu zählen bspw. quadratische Kostenfunktionen $K(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c > 0$.
- **Degressiv wachsende Kosten**: $K(x)$ ist monoton steigend und konkav.
- **Ertragsgesetzliche Kostenfunktion**: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
  mit $a, c, d > 0$, $\ b < 0$ und $3ac > b^2$.
  S-förmiger Verlauf mit zunächst degressivem, dann progressivem Wachstum der Kostenfunktion ohne lokale Extremstellen.
- **Unstetige Kostenfunktion**: Unstetigkeitsstellen z. B. aufgrund sprungfixer Kosten möglich.

Umsatz, Gewinn und Deckungsbeitrag

- **Umsatz-, Erlösfunktion**: $E(x) = x \cdot p(x)$, Einnahmen in Abhängigkeit der verkauften Menge x, Berechnung aus dem Produkt von verkaufter Menge und Preis pro Mengeneinheit $p(x)$ beim Absatz von x Mengeneinheiten (s. PAF).
- **Gewinnfunktion**: $G(x) = E(x) - K(x)$, erzielter Gewinn in Abhängigkeit der abgesetzten Menge, Berechnung aus dem Erlös abzüglich der Kosten.
- **Deckungsbeitrag**: $D(x) = E(x) - K_v(x)$,
  Deckungsbeitrag je Mengeneinheit: $d(x) = D(x)/x = p(x) - k_v(x)$.

Produktionsfunktionen

Produzierte Menge (Output) $x(r)$ in Abhängigkeit der Menge des eingesetzten Faktors (Input) $r,\ r \geq 0$.

Bei mehreren Einsatzfaktoren werden Produktionsfunktionen $x(r_1, \ldots, r_n)$ definiert, die verschiedene Eigenschaften haben können:

- **Substitutionale Produktionsfunktion**: Die Reduzierung der Menge eines Faktors kann durch die Steigerung der Menge eines anderen Faktors ausgeglichen werden, so dass der Output konstant bleibt.
- **Ertragsgesetzliche Produktionsfunktion**: Durch die Erhöhung eines Faktors steigt das Produktionsergebnis zunächst überproportional, danach jedoch steigt die hergestellte Menge ab einer bestimmten Faktoreinsatzmenge nur noch unterproportional (sinkender Grenzertrag).
- **Limitationale Produktionsfunktion**: Die produzierte Menge kann nur dann gesteigert werden, wenn die Mengen aller Faktoren gleichzeitig angehoben werden.

Zu den speziellen Produktionsfunktionen aus der Volkswirtschaftslehre zählen die

- **CES-Produktionsfunktion**
  CES für „constant elasticity of substitution“

  $$x(r_1, \ldots, r_n) = \beta \left(\alpha_1 r_1^{-\rho} + \alpha_2 r_2^{-\rho} + \ldots + \alpha_n r_n^{-\rho} \right)^{-\gamma/\rho}$$

  mit $\beta, \gamma > 0,\ r_i > 0$ und $\alpha_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ sowie $\rho \neq 0$.
  CES-Produktionsfunktionen zeichnen sich durch eine konstante Substitutionselastizität im gesamten Definitionsbereich aus.
- **Cobb-Douglas-Produktionsfunktion**
  (Paul Howard Douglas, 1892 – 1976, Charles Wiggins Cobb, 1875 – 1949)

  $$x(r_1, \ldots, r_n) = \beta \alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_n^{r_n}$$

  mit $\beta > 0,\ r_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ und $\alpha_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
  Die Substitutionselastizität von Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen ist konstant gleich 1 im gesamten Definitionsbereich.
- **Leontief-Produktionsfunktion**
  (Wassily Leontief, 1905 – 1995)

  $$x(r_1, \ldots, r_n) = \alpha_0 \min \left\{ \frac{r_1}{a_1}, \frac{r_2}{a_2}, \ldots, \frac{r_n}{a_n} \right\}$$

  mit $a_i > 0$ für alle $i = 0, 1, \ldots, n$.
  Leontief-Produktionsfunktionen sind limitationale Produktionsfunktionen, d. h. die Substitutionselastizität ist im gesamten Definitionsbereich der Funktion gleich Null.

Einige weitere wirtschaftswissenschaftliche Funktionen

- **Konsumfunktion**: $C(Y) = \alpha Y + C_0$
  mit Y – Einkommen
  C – Wert des Konsums
  C_0 – autonomer Konsum (Exisitenzminimum)
  $0 < \alpha < 1$ – Konsumquote
- **Investitionsfunktion**: $I(p)$ mit I – Wert der Investitionen, p – Zinssatz
- **Nutzenfunktion**: $U(x)$ Nutzen in Abhängigkeit der konsumierten Menge x eines Gutes