

JUSTUS-LIEBIG-



UNIVERSITÄT
GIESSEN

Physikalisches Praktikum

für Naturwissenschaftler

Dr. Hasko Stenzel

II. Physikalisches Institut

Justus-Liebig-Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

P	Praktikumsordnung	5
E	Einleitung	9
F	Fehlerabschätzung	17
G	Graphische Darstellungen	23
M	Tutorium Mathematik	27
1	Dichtebestimmung mit hydrostatischer Waage	41
2	Elastizitätsmodul	49
3	Torsionsmodul	55
4	Bestimmung der Gravitationskonstanten	63
5	Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit der Kundtschen Röhre	71
6	Oberflächenspannung	81
7	Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Metallen	89
8	Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten von Luft	97
9	Wärmeleitfähigkeit	105
10	Widerstandsmessung	111
11	Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke	119
12	Kapazität und Selbstinduktion	125
13	Permittivität	135
14	Linsen und Mikroskop	145
15	Dispersion und Spektralapparat	159
16	Beugung	171

17 Polarisiertes Licht	181
18 Absorption von γ-Strahlen	191
19 Radioaktiver Zerfall	201
20 Röntgenstrahlen	207
Index	213

P. Praktikumsordnung

Im Praktikum werden einfache Versuche zur Physik durchgeführt, pro Praktikumssitzung ist ein Versuch abzuschliessen. Die Versuchsdurchführung besteht aus folgenden Teilen:

- Vorbereitung anhand dieser Anleitung auf die Versuche, Durcharbeiten des physikalischen Stoffes, Beherrschung des Fragenkataloges
- Das Kolloquium. Die Versuchsbetreuer führen ein mündliches Kolloquium durch und vergewissern sich von der guten Vorbereitung der Praktikanten.
- Der Betreuer führt die Praktikanten in den Versuchsaufbau ein.
- Die Praktikanten führen den Versuch eigenständig durch und führen dabei saubere Protokolle
- Der Versuch wird nach Anleitung ausgewertet.
- Die fertige Auswertung wird dem Betreuer vorgelegt, dieser erteilt im Erfolgsfalle das Testat.

Pro Sitzung verbringen die Praktikanten **3 Stunden** im Praktikum, in dieser Zeit ist das Kolloquium abzuschliessen, der Versuch durchzuführen, die Auswertung anzufertigen und dem Betreuer zum Testat vorzulegen. Nachdem alle Versuche testiert worden sind müssen die Praktikanten Ihre Laufzettel (Testatscheine) bei der Oberbetreuung abgeben damit für das entsprechende Teil-Modul in FlexNow "bestanden" eingetragen werden kann. Die Note des Gesamtmoduls ergibt sich dann aus der Note der Vorlesungsklausur. Für die einzelnen Studiengänge ergeben sich die Anforderungen aus den jeweiligen Modulbeschreibungen, kurz zusammengefasst (Stand: 2020) wie folgt:

BSc Biologie absolviert im WS 8 Versuche. Mit 8 testierten Versuchen ist das Praktikumsmodul bestanden.

BSc Chemie absolviert im WS 5 Versuche aus Mechanik und Thermodynamik (BK-03) und im SS 5 Versuche aus Elektrizitätslehre und Optik (BK-09). Mit jeweils 5 testierten Versuchen ist das Praktikumsmodul bestanden.

BSc Lebensmittelchemie absolviert im WS 5 Versuche aus verschiedenen Bereichen der Physik. Mit jeweils 5 testierten Versuchen ist das Praktikumsmodul bestanden.

L3 Chemie absolviert im WS 5 Versuche aus verschiedenen Bereichen der Physik. Mit jeweils 5 testierten Versuchen ist das Praktikumsmodul bestanden.

Die Versuche werden prinzipiell in 2-er Gruppen durchgeführt. Von jeder Praktikanten-Gruppe dürfen nur die Versuche bearbeitet werden, für die sie eingeteilt ist. Außerhalb dieser Einteilung können Versuche nur in begründeten Fällen nach vorheriger Rücksprache mit dem Praktikumsleiter durchgeführt werden. Jeder erfolgreich durchgeführte Versuch wird vom Betreuer im Protokollheft und im Praktikumsschein testiert. In jedem Praktikumszyklus werden am Ende Nachholtermine angeboten, an denen versäumte Versuche nachgeholt werden können. Ist die erforderliche Anzahl erfolgreich durchgeführter Versuche erreicht, wird das Praktikum mit einer Prüfung abgeschlossen.

Für die Durchführung des Praktikums ist im übrigen folgendes zu beachten:

1. Für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben ist es notwendig, vor jedem Praktikumstag den betreffenden Abschnitt in diesem Heft gründlich zu studieren. Man orientiere sich dazu an den Stichpunkten, die am Beginn jedes Versuches zusammengestellt sind. Die zusätzliche Benutzung eines Lehrbuches der Physik ist unbedingt erforderlich.

In den Naturwissenschaften verwendet man Modelle und Formeln, um die realen Zusammenhänge in der Natur unserer begrenzten Vorstellungskraft zu eröffnen. Es ist daher wichtig, die Formeln und Gleichungen zu verstehen und anwenden zu können. Ein sinnloses Auswendiglernen ist verpönt. Wir erhoffen, dass Sie den jeweiligen Versuch durchgearbeitet und verstanden haben; bestehen aber darauf, dass Sie mindestens die eingerahmten Formeln kennen und anwenden können. Die zusätzlich mit einem Sternchen (*) versehenen Formeln müssen Sie verstanden haben und herleiten können. Im Kopf jedes Versuchs finden Sie außerdem Fragen und Aufgaben, die Sie lösen können müssen. Dazu gehören auch mathematische Grundkenntnisse. Selbstverständlich müssen Sie den Versuchsaufbau kennen und grundlegende diesen Versuch betreffende Fehlerabschätzungen vornehmen können.

Jeweils zu Beginn werden in einem halbstündigen Kolloquium Ihre Kenntnisse überprüft.

Die Benutzung alter Protokolle ehemaliger Praktikumsmitglieder als Hilfsmittel im Praktikum ist nicht gestattet.

2. Als Protokollheft **muss** ein gebundenes Heft DIN A4 (kariert) benutzt werden. Alle Eintragungen sind mit Tinte oder Kugelschreiber zu machen, graphische Darstellungen nur mit dem Bleistift auf Millimeterpapier. Auf die Verwendung von TippEx oder Tintenkiller ist zu verzichten. Für die Rechnungen ist ein Taschenrechner zu verwenden.
3. Das Protokoll muss enthalten:
 - a) Datum und Versuchstitel
 - b) *Alle* abgelesenen Messwerte in übersichtlicher Form (Tabelle) mit Ablesefehler **sofort im Protokollheft**. Von einem Notizzettel später übertragene Werte sind nicht zulässig! Gleiches gilt für die Protokollführung mit dem Laptop. Diese ersetzt ein handschriftliches Messprotokoll **nicht !**

- c) Die vollständige Auswertung mit Zwischenergebnissen
- d) Fehlerabschätzung (soweit verlangt)
- e) Das **Endresultat mit Fehlergrenzen** (besonders hervorheben), ggfs. Vergleich mit der Literatur

Es ist auf klare und übersichtliche Protokollführung zu achten.

4. Schäden, die an den Apparaturen festgestellt werden oder beim Versuch auftreten, sind sofort einem Betreuer zu melden. Für Schäden, die durch grobe Fahrlässigkeit entstehen, ist der Praktikant haftbar. **Alle elektrischen Schaltungen müssen daher vor dem Einschalten vom Betreuer überprüft werden.**
5. Die Ausarbeitung der Versuche geschieht noch während der Arbeitszeit. Wird die Versuchsauswertung nicht rechtzeitig fertig, so kann **in Ausnahmefällen** ein Vortestat gegeben werden. Dieses muss jedoch am nächsten Praktikumstag zum Endtestat vorgelegt werden, ansonsten verfällt der Versuch.
6. Jede Gruppe hat ihren Versuchsplatz sauber und aufgeräumt zu verlassen.
7. Am Ende des Praktikums ist der Testatschein bei der Oberbetreuung abzugeben, nur so kann der die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum in FlexNow eingetragen werden.

Sicherheitshinweis: Sie werden von den Betreuern individuell bei jedem Versuch auf das jeweilige Gefahrenpotenzial hingewiesen.

Allgemeine Literaturhinweise

Lehrbücher der Physik:

- Tipler
- Gerthsen
- Halliday

Bücher für physikalische Praktika:

- W. Walcher: Praktikum der Physik
- D. Geschke: Physikalisches Praktikum
- Eichler, Kronfeldt, Sahm: Das Neue Physikalische Grundpraktikum

Neben den hier aufgeführten Büchern gibt es noch eine Vielzahl guter Lehrbücher der Experimentalphysik, insbesondere auch für Studierende im Nebenfach. Diese sind, wie auch die o.a. Werke, im allg. in der Universitätsbibliothek erhältlich.

E. Einleitung

Physikalische Größen

Diese dienen zur Beschreibung von Zuständen und Zustandsänderungen und werden durch einzelne Buchstaben (Symbole) dargestellt.

Länge (l), Masse (m), Zeit (t), Kraft (F), Ladung (Q),
Temperatur (T) usw.

Aufgrund von Definitionen können *alle* physikalischen Größen untereinander verknüpft und so auf eine kleine Zahl von *Basisgrößen* zurückgeführt werden. Beispiele für solche *abgeleitete Größen* sind

$$\begin{aligned}\text{Fläche} &= \text{Länge} \cdot \text{Länge} \\ \text{Volumen} &= \text{Länge}^3 \\ \text{Dichte} &= \text{Masse} / \text{Volumen} = \text{Masse} \cdot (\text{Länge})^{-3} \\ \text{Kraft} &= \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung} = \text{Masse} \cdot \text{Länge} \cdot (\text{Zeit})^{-2} \\ &\text{usw.}\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Größen Länge, Masse und Zeit als Basisgrößen gewählt.

Alle in der Physik auftretenden Zusammenhänge zwischen physikalischen Größen (Formeln) nennt man *Größengleichungen*. Sie gelten immer, unabhängig vom Einheitensystem (sh.unten), das für die quantitative Auswertung verwendet wird. So etwa die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\text{Kinetische Energie} & E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Linsengleichung} & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \\ \text{Absorptionsgesetz} & I = I_0 e^{-ax} \\ & \text{usw.}\end{aligned}$$

Einheiten

Zur *quantitativen Beschreibung* einer physikalischen Größe G (z.B. bei ihrer Messung im Praktikum) ist die Wahl einer *Einheit* erforderlich. Der Wert für die Größe G wird dann in Form eines Produktes aus Maßzahl und Einheit geschrieben

$$\begin{array}{lcl} \text{Phys. Größe} & = & \text{Maßzahl} \times \text{Einheit} \\ \text{symbolisch} & G & = \{G\} \times [G] \end{array}$$

Dabei sind abhängig von Wahl der Einheit verschiedene unter sich jedoch gleichwertige Schreibweisen möglich. Beispiel:

$$l = 0,023 \text{ m} = 2,3 \text{ cm} = 23 \text{ mm}$$

Es ist ratsam, die Einheit stets so zu wählen, dass die Maßzahl etwa zwischen 0,1 und 10 liegt. Dazu können Vorsätze zur Grundeinheit benützt werden, die einen dezimalen Teil oder ein dezimales Vielfaches bezeichnen. Auch die Schreibweise mit Potenzen von 10 in Verbindung mit der Grundeinheit ist möglich und für die Auswertung von Größengleichungen sogar zu empfehlen. Legt man sich von vornherein auf die Verwendung bestimmter Einheiten fest (Einheitensystem), dann erübrigt sich das Mitführen der Einheiten bei der Durchrechnung. Bei der Angabe des Ergebnisses ist die Einheit jedoch unbedingt erforderlich.

Beispiel:

Mit $m = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ und $v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ ergibt sich

$$E_{\text{kin}} = (1,2 \cdot 10^3) 30^2 / 2 = 5,4 \cdot 10^5 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 0,54 \cdot 10^6 \text{ J} = 0,54 \text{ MJ}.$$

In der folgenden Tabelle sind diese Abkürzungen zusammengestellt:

Vorsatz	Symbol	Faktor	Vorsatz	Symbol	Faktor
Kilo	k	10^3	Deci	d	10^{-1}
Mega	M	10^6	Zenti	c	10^{-2}
Giga	G	10^9	Milli	m	10^{-3}
Tera	T	10^{12}	Mikro	μ	10^{-6}
			Nano	n	10^{-9}
			Piko	p	10^{-12}

Man muss beachten, dass diese Vorsätze bei der Bildung von Potenzen immer zur Einheit gehören.

$$1\mu\text{m}^2 = 1(\mu\text{m})^2 = 1 \cdot (10^{-6}\text{m})^2 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2.$$

Einheitensysteme

Die Wahl der Basisgrößen und deren Einheiten ist willkürlich. Sie wird einzig von der Zweckmäßigkeit bestimmt. Heute wird in der Physik in zunehmenden Maße das „Internationale Einheitensystem“ verwendet. Es baut sich auf folgenden Basisgrößen auf:

<i>Basisgröße</i>	<i>Basiseinheit</i>	<i>(Symbol)</i>
Länge	Meter	(m)
Masse	Kilogramm	(kg)
Zeit	Sekunde	(s)
Elektr. Stromstärke	Ampere	(A)
Temperatur	Kelvin	(K)
Lichtstärke	Candela	(cd)

Die genauen Werte dieser Basiseinheiten sind durch Definition festgelegt und finden sich in allen einschlägigen Büchern. Die SI-Einheiten (SI = *Système International*) für alle abgeleiteten Größen können entsprechend ihrer Definition (sh. oben) aus diesen Basiseinheiten hergeleitet werden. Einige von ihnen haben Eigennamen.

<i>Phys. Größe</i>	<i>Definition</i>	<i>SI-Einheit</i>
Geschwindigkeit	$v = \Delta l / \Delta t$	1 m/s
Kraft	$F = m \cdot \Delta l / (\Delta t)^2$	Newton 1 N = 1m· kg/s ²
Druck	$p = F/A$	Pascal 1 Pa = 1 N/m ²
Arbeit, Energie	$W = F \cdot l$	Joule 1 J = 1 N· m
El. Ladung	$Q = I \cdot t$	Coulomb 1 C = 1 A· s
El. Spannung	$U = W/Q$	Volt 1 V = 1 J/A· s
usw.		

Neben den SI-Einheiten werden im Praktikum an verschiedenen Stellen zur Übung noch andere systemfremde Einheiten verwendet, da sie in der Fachliteratur noch häufig anzutreffen sind.

Es sind z.B.

cgs-Einheiten wie dyn und erg;

Kalorie (cal); Kilopond (kp); Torr; Oersted (Oe); usw.

Die Umrechnungsfaktoren der wichtigsten systemfremden Einheiten in SI-Einheiten sind hier zusammengestellt:

Einheiten für

Kraft:	1 dyn	= 10 ⁻⁵ N
	1 kp	= 9,807 N
Energie:	1 erg	= 10 ⁻⁷ J
	1 m kp	= 9,807 J
	1 cal	= 4,187 J
	1 eV	= 1,602· 10 ⁻¹⁹ J
Druck:	1 bar	= 10 ⁵ Pa
	1 Torr	= 1,333·10 ² Pa
	1 phys. Atm.	
	=760 Torr	= 1,013· 10 ⁵ Pa
	1 techn. Atm.	
	= 1kp/cm ²	= 0,9807· 10 ⁵ Pa
Magn.Feldstärke:	1 Oersted	= (1/4π) · 10 ³ A/m
Magn.Flussdichte:	1 Gauss	= 10 ⁻⁴ Vs/m ²
		= 10 ⁻⁴ T (Tesla)

Magnetische Flussdichte wird teilweise auch als magnetische Feldstärke bezeichnet, beides sind aber verschiedene physikalische Größen.

Besonders in der Atomphysik sind noch drei weitere Einheiten sehr nützlich und daher in ständigem Gebrauch.

Das Mol

Das Mol ist ein Maß für die Stoffmenge (Symbol ν) und basiert auf der atomaren Struktur der Materie. Die Einheit 1 Mol ist definiert als die Menge eines Stoffes, die aus ebenso vielen Teilchen (Atomen, Molekülen, Ionen usw.) besteht, wie Atome in 12 g des reinen Kohlenstoffisotops ^{12}C enthalten sind. Das heißt

$$1 \text{ mol } ^{12}\text{C} \equiv 12,0000 \text{ g } ^{12}\text{C}$$

Auf die Stoffmenge bezogene Größen bezeichnet man als molare Größen. Die molare Teilchenzahl (Teilchenzahl pro Mol) nennt man Avogadrosche (Loschmidtsche) Konstante. Man erhält sie, wenn man die Masse eines Mols ^{12}C ($= 12,000 \text{ g}$) durch die Masse eines ^{12}C -Atoms ($= 1,9925 \cdot 10^{-23} \text{ g}$) dividiert:

$$N_A = \frac{12,000 \text{ g}}{1,9925 \cdot 10^{-23} \text{ g}} = 6,0225 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Die molare Masse (Molmasse) ist demnach die Masse von N_A Molekülen bzw. Atomen, von denen ein jedes die Masse m besitzt.

$$M = N_A \cdot m$$

mit der Einheit $[\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}]$.

Das Elektronenvolt (eV)

In der Atom- und Kernphysik wird als Energieeinheit oft das Elektronenvolt verwendet. Man versteht darunter die Energie, die ein einfach geladenes Teilchen (d.h. mit einer Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, z.B. ein Elektron) besitzt, nachdem es eine Potentialdifferenz von 1 Volt durchlaufen hat. Diese Energie berechnet sich zu

$$E = e \cdot U = (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \cdot (1 \text{ V})$$

Es gilt daher die folgende Umrechnungsbeziehung:

$1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Dies findet im Praktikum insbesondere Anwendung in den Versuchen 18, 19 und 20.

Atomare Masseneinheit und relative Molekülmasse

Die atomare Masseneinheit (Atommassenkonstante) u ist definiert als der zwölfte Teil der Masse eines ^{12}C -Atoms. Da nach der Moldefinition 12 g ^{12}C N_A Teilchen enthalten, ist

$$u = \frac{1}{12} \cdot 1,9925 \cdot 10^{-23} \text{ g} = 1,660 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

Auf diese Konstante bezieht man alle übrigen Atom- bzw. Molekülmassen. Wenn m die Masse eines Moleküls (Atoms) ist, dann wird die relative Molekülmasse (rel. Atommasse) definiert als

$$M_r = \frac{m}{u} = \frac{\text{Masse eines Teilchens}}{\text{atomare Masseneinheit}}$$

Physikalische Konstanten

Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$= 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Elektronenmasse	m_e	$= 9,10956 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Protonenmasse	m_p	$= 1,6727 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmann Konstante	k	$= 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Loschmidt Zahl	N	$= 6,02217 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaskonstante	R	$= 8,3143 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$
Elementarladung	e	$= 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Plancksches Wirkungsquantum	h	$= 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Gravitationskonstante	G	$= 6,664 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
Faradaykonstante	F	$= 9,649 \cdot 10^4 \text{ C/val}$
Induktionskonstante	μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
(Magn. Feldkonstante)		$= 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$
Influenzkonstante	ϵ_0	$= 1/\mu_0 c^2$
(Elektr. Feldkonstante)		$= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

Wichtige Grundbegriffe aus der Dosimetrie

In Laufe des Praktikums werden verschiedene Versuche mit ionisierender Strahlung durchgeführt. Die Anwendung ionisierender Strahlung ist als Untersuchungsmethode in allen Naturwissenschaften etabliert. Sie findet Verwendung bei so unterschiedlichen Fragestellungen wie der Untersuchung von Stoffwechselvorgängen oder der Struktur von Kristallen. Eine fundierte Kenntnis der relevanten Kenngrößen ist daher imminent wichtig. Der Umgang mit ionisierender Strahlung stellt infolge ihrer möglichen Wirkung auf den Organismus besondere Anforderungen an den Experimentator, auch um mögliche eigene Gefährdungen abschätzen zu können. Im folgenden werden die zentralen Begriffe der Dosimetrie stellvertretend für alle Versuche zusammengefasst. Die im Praktikum verwendeten Präparate und Apparaturen sind in ihrem Umgang vergleichsweise unbedenklich. Zur Übung der experimentellen Handgriffe ist sorgfältiger Umgang dennoch unabdingbar.

Mit Hilfe von sogenannten Dosisgrößen lässt sich die Wirkung einer Strahlung auf unterschiedliche Materialien (organisch oder anorganisch) charakterisieren. Insbesondere wird dies bei Angaben der Wirksamkeit der Strahlung auf Körpergewebe gemacht. Die wichtigsten Dosisgrößen sind dabei die Energiedosis, die Ionendosis und die Äquivalentdosis.

Aktivität

Die Aktivität ist definiert als die Anzahl N der Kernumwandlungen pro Zeit t :

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad (\text{E.1})$$

Die Dimension bzw. die Einheit der Aktivität ist das Becquerel (Bq). Früher wurde für die Aktivität die Einheit Curie (Ci) benutzt, wobei

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} \quad (\text{E.2})$$

sind. Einem Becquerel entspricht eine Kernumwandlung pro Sekunde (1/s).

Spezifische Aktivität

Die spezifische Aktivität ist definiert als die Aktivität A pro Masse:

$$A_{\text{sp}} = \frac{A}{m} \quad (\text{E.3})$$

Somit gibt sie die Anzahl der Kernumwandlungen pro Zeit und Masse an. Ihre Einheit ist $1/(\text{kg} \cdot \text{s})$.

Ionendosis

Die Ionendosis ist definiert als die erzeugte Ladung Q eines Vorzeichens pro Masse m der durchstrahlten Luft, wobei eine Temperatur von $T = 0^\circ\text{C}$ ($= 273,15 \text{ K}$) und ein Druck von $p = 1013 \text{ mbar}$ herrschen:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta m} \quad (\text{E.4})$$

Ihre Einheit ist J/kg. Früher wurde die Einheit Röntgen (R) benutzt:

$$1 \text{ R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}. \quad (\text{E.5})$$

Energiedosis

Die Energiedosis einer ionisierenden Strahlung ist definiert als die pro Masse m eines durchstrahlten Stoffes absorbierte Energie W:

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m} \quad (\text{E.6})$$

Ihre Einheit ist das Gray (Gy):

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}. \quad (\text{E.7})$$

Äquivalentdosis

Durch die physikalische Größe der Äquivalentdosis wird der unterschiedlichen biologischen Wirksamkeit der verschiedenen Strahlungsarten Rechnung getragen. Obwohl die gleiche Energiedosis vorliegt, zeigen die einzelnen Strahlungsarten eine unterschiedliche Wirkung auf Organismen usw. Die Äquivalentdosis ergibt sich als das Produkt aus Energiedosis und einem Qualitätsfaktor, der aus vielen Experimenten gewonnen wurde:

$$H = d \cdot Q \quad (\text{E.8})$$

Dieser Qualitätsfaktor Q nimmt je nach Strahlungsart unterschiedliche Werte an:

Photonen, Elektronen: 1

langsame Neutronen: 5

schnelle Neutronen: 15

Protonen: 10

α -Teilchen, schwere Ionen: 20

Um die Werte der Äquivalentdosis von denen der Energiedosis unterscheiden zu können, hat man für die Äquivalentdosis eine eigene Einheit, das Sievert (Sv) eingeführt. Früher wurde die Einheit rem benutzt:

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem.} \quad (\text{E.9})$$

F. Fehlerabschätzung

Alle gemessenen Größen (nicht nur in der Physik!) sind mit Fehlern behaftet. Die Abschätzung des Fehlers bildet einen wesentlichen Bestandteil der Versuchsauswertung. Sie setzt uns erst in die Lage, etwas über die Güte des unter den gegebenen Umständen gewonnenen Versuchsergebnisses auszusagen und ist daher in jedem Fall geeignet, den Experimentator vor einer Über- oder Unterschätzung seiner Leistung zu bewahren und ihn zur Kritik anzuhalten.

Die folgenden Ausführungen genügen für die Anforderungen des Anfängerpraktikums. Die genaueren Einzelheiten sowie die Begründung der angegebenen Formeln sind den einschlägigen Fachbüchern zu entnehmen.

Wir bevorzugen die Bezeichnung „Fehlerabschätzung“ gegenüber dem manchmal verwendeten Ausdruck „Fehlerrechnung“. Den exakten Fehler kennen wir nicht, sonst könnten wir das Messergebnis korrigieren! Daher darf der Fehler maximal zwei signifikante Stellen enthalten! Die Präzision des Messergebnisses und des Fehler ist die gleiche. Gemäß ihres Ursprungs unterscheidet man prinzipiell zwei Arten von Fehlern, den systematischen und den statistischen Fehler.

Der systematische Fehler

Systematische Fehler sind die schlimmsten Fehlerquellen. Sie treten auf durch unbekannte, unberücksichtigte oder vernachlässigte Effekte; z.B. bei der Benutzung falsch geeichter Messgeräte, durch die Verwendung unreiner Substanzen, bei mangelnder Wärmeisolation, aber auch durch die Anwendung von Nahrungsformeln außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches. Sie verfälschen das Messergebnis bei gleicher experimenteller Anordnung stets in der gleichen Richtung. Kennt man den Effekt, so ist er prinzipiell vermeidbar und kann korrigiert werden. Korrekturen dieser Art werden auch in den Praktikumsversuchen eingesetzt.

Leider kann man **nie** sagen, es gibt keine weiteren Fehler, lediglich, man kennt keine weiteren. Daher ist es prinzipiell unmöglich auszuschließen, dass ein Messergebnis trotz großer Sorgfalt auch grob falsch sein kann.

Daher werden systematische Fehler oft ignoriert. Auch im Praktikum werden wir so verfahren. Eine Diskussion von Fehlermöglichkeiten systematischer Herkunft ist trotzdem stets sinnvoll.

Der statistische Fehler

Gegenüber dem systematischen Fehler ist der statistische Fehler eher harmlos. Er verändert das Resultat in beiden Richtungen und hat seine Ursache im Beobachter selbst (Einstell- und Ablesefehler) oder in veränderlichen äußeren Einflüssen (Temperatur- und Netzspannungs-

schwankungen, usw.). Er ist daher prinzipiell unvermeidbar, kann jedoch durch wiederholte Messungen und geeignete Auswertungsmethoden verringert werden.

Die statistischen Einflüsse lassen sich mit mathematischen Modellen behandeln und täuschen daher eine wissenschaftliche Absicherung vor, die oft nicht berechtigt ist. Meist wird der vielleicht viel größere systematische Fehler ignoriert, da er sich einer Abschätzung widersetzt und mit Akrebie der viel kleinere statistische Fehler überbetont.

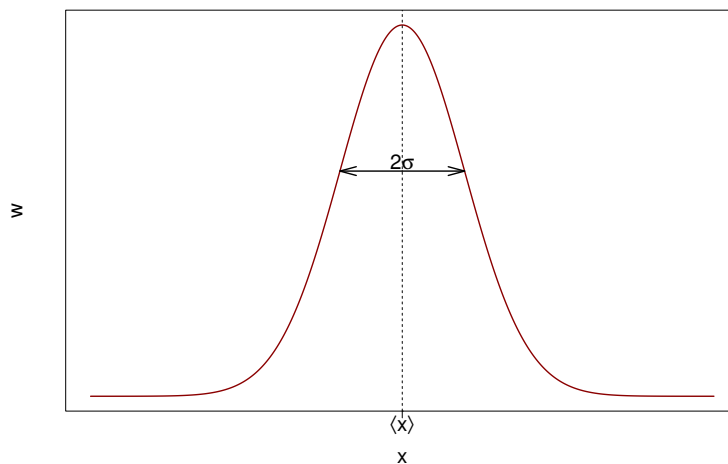
Trotzdem wollen wir im folgenden auf die Methoden zur Bestimmung des statistischen Fehlers eingehen, da er in vielen wissenschaftlichen Arbeiten eingesetzt wird und viele Computerprogramme oder Taschenrechner Hilfe bieten.

Dennoch kann man nie genug vor der Überschätzung statistischer Methoden warnen.

Der Erwartungswert

Die Theorie der Behandlung des statistischen Fehlers von Messungen geht von der folgenden Annahme aus:

Führt man mit einer bestimmten Messanordnung und unter konstant gehaltenen Messbedingungen sehr viele Messungen (im Idealfall unendlich viele) der gleichen Größe durch, dann ergeben die Messwerte eine Verteilung, die durch eine Gaussfunktion (Abbildung F.1) beschrieben werden kann.



$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{F.1})$$

$w(x)$ = Wahrscheinlichkeit, dass x als Messwert auftritt.

$\langle x \rangle$ = Erwartungswert von x (= Mittelwert aus unendlich vielen Messungen).

$\sigma(x)$ = Standardabweichung der Einzelmessung.

$\sigma(x)$ ist ein Maß dafür, in welchem Bereich die Messwerte im wesentlichen um den Erwartungswert streuen. Sie hängt nur von den experimentellen Gegebenheiten ab. Kleines (großes) σ bedeutet genaue (ungenauere) Messapparatur. Würden wir unter identischen Bedingungen diese (unendlich lange) Messreihe wiederholen, dann würden wir die gleiche

Verteilung und damit auch den gleichen Erwartungswert erhalten. Man könnte diesen Wert daher auch als den „wahren Wert“ der Messgröße x bezeichnen.

Mittelwert und Standardabweichung

In der Praxis können keine unendlich langen Messreihen durchgeführt werden. Aufgabe der statistischen Fehlertheorie ist es, aus einer Messreihe von n Werten (oder einer Stichprobe von Umfang n) einen *Näherungswert* für den Erwartungswert sowie den *Grad seiner Zuverlässigkeit* zu ermitteln.

Werden n Messungen einer Größe x durchgeführt $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dann ist zu erwarten, dass der Mittelwert $\bar{x}$ einen Näherungswert für den Erwartungswert darstellt, da für $n \rightarrow \infty$ $\bar{x}$ in $\langle x \rangle$ übergeht.

Wir sehen daher den Mittelwert aus einer Messreihe als Bestwert für das Ergebnis an. Er wird folgendermaßen gebildet:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{F.2})$$

Die Standardabweichung für die Einzelmessung $\sigma(x)$ erhält man (ebenfalls näherungsweise, d.h. exakt für $n \rightarrow \infty$):

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (\text{F.3})$$

Standardfehler des Mittelwertes

Für die Beurteilung der Genauigkeit einer Messung kommt es auf den möglichen Fehler des Mittelwertes an.

Denken wir uns eine sehr große Anzahl gleicher Messreihen ausgeführt (Umfang n), so hat jede Messreihe ihren eigenen Mittelwert. Die Mittelwerte aller Messreihen bilden ebenfalls eine Verteilung, die einer Gaussfunktion entspricht und die durch eine Standardabweichung $\sigma(\bar{x})$ charakterisiert ist. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Verteilung, die durch die Gesamtheit aller Einzelmesswerte gebildet und durch die Standardabweichung für die Einzelmessung $\sigma(x)$ charakterisiert wird.

Es kann gezeigt werden, dass zwischen diesen beiden Größen der folgende Zusammenhang besteht:

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}} \quad (\text{F.4})$$

Berücksichtigen wir den Ausdruck für $\sigma(x)$, dann ergibt sich

$$\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n - 1)}} \quad (\text{F.5})$$

Diese Größe gibt uns die Grenzen an, innerhalb derer der Mittelwert einer neuen Messreihe mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,7 zu erwarten ist.

$\sigma(\bar{x})$ kann dadurch verkleinert werden, dass viele Messungen der Größe x (großes n) durchgeführt werden und man außerdem dafür sorgt, dass $\sigma(x)$ klein wird. Da der Wert von der Genauigkeit der Einzelmessung und nicht von deren Anzahl abhängt, $\sigma(\bar{x})$ aber nur mit der Wurzel aus n kleiner wird, ist eine geringe Anzahl sorgfältiger Messungen einer größeren Zahl oberflächlicher Messungen vorzuziehen.

Das Messresultat für die Größe x wird folgendermaßen angegeben:

$$x = \bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) \quad (\text{F.6})$$

Anstelle von $\sigma(\bar{x})$ wird häufig auch $\Delta\bar{x}$ geschrieben.

Fehlerfortpflanzung

In der Regel ist die im Experiment zu bestimmende Größe f eine Funktion einer oder mehrerer voneinander unabhängiger unmittelbar gemessener Größen x, y, z , usw., die alle mit einem Fehler behaftet sind ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$, usw.):

$$f = f(x, y, z, \dots) \quad (\text{F.7})$$

Es stellt sich dann die Frage, wie die Fehler der unmittelbar gemessenen Größen $x, y, z, \dots$ den Fehler der Größe f beeinflussen. Liegen die Fehler als Standardabweichungen der Mittelwerte vor, so gilt das **Fehlerfortpflanzungsgesetz**:

$$\sigma(\bar{f}) = \Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots} \quad (\text{F.8})$$

$\partial f / \partial x$ usw. sind die partiellen Ableitungen (Ableitungen unter Konstanthaltung der übrigen Variablen). Bei diesem Gesetz ist berücksichtigt, dass sich Fehler zum Teil auch kompensieren können.

Größtfehler (Maximalfehler)

Wird eine Größe nur einmal gemessen, dann kann man auf Grund statistischer Überlegungen keine Aussage über die Größe des Fehlers machen. In diesem Falle ist man auf die Angabe eines geschätzten Größtfehlers angewiesen, der sich aus der Ablesegenauigkeit auf der benutzten Skala und aus anderen Erwägungen ergibt.

Die Aufstellung einer Messreihe und die Berechnung des mittleren Fehlers erfordern jedoch einen erheblichen Zeitaufwand und werden deshalb im Rahmen des Praktikums nicht durchgeführt werden können, wenn zur Ermittlung des Endergebnisses mehr als eine Größe gemessen werden muss. Andererseits bringt die Schätzung eines Größtfehlers nach einer einmaligen Messung oft große Unsicherheiten, da hierbei nur der reine Ablesefehler berücksichtigt wird. Deshalb wird in den Fällen, in denen andere Einflüsse zu

erwarten sind, der folgende Kompromiss empfohlen:

- Aufnahme einer Messreihe (3 – 5 Messungen),
- Ermittlung des Bestwertes (Mittelwert),
- Fehlerangabe aus der größten absoluten Abweichung eines Einzelwertes vom Mittelwert.

Absoluter und relativer Fehler

Außer dem **absoluten Fehler** Δx verwendet man oft den **relativen Fehler** $\Delta x/x$, der üblicherweise in % ($\Delta x/x \cdot 100$) angegeben wird. Unter der Voraussetzung $\Delta x \ll x$, $\Delta y \ll y$, usw. kann man auf Grund des Taylorschen Satzes den Gesamtfehler wie folgt berechnen:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots \quad (\text{F.9})$$

Die $|\partial f/\partial x|$ usw. sind die Beträge der partiellen Ableitungen von f nach den gemessenen Größen $x, y, z, \dots$. Die Betragsstriche bewirken, dass alle Summanden positiv werden, wodurch eine mögliche gegenseitige Kompensation von Einzelfehlern unberücksichtigt bleibt. So erhält man stets den größtmöglichen Fehler der Größe f . Für ein Potenzprodukt

$$f = A \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c \dots \quad (\text{F.10})$$

erhält man daraus für den Größtfehler den einfachen Zusammenhang:

$$\frac{\Delta f}{f} = |a| \frac{\Delta x}{x} + |b| \frac{\Delta y}{y} + |c| \frac{\Delta z}{z} + \dots \quad (\text{F.11})$$

Ist eine der mit $x, y, z, \dots$ bezeichneten Größen selbst schon ein zusammengesetztes Ergebnis, dann muss der relative Fehler einer solchen Größe gesondert berechnet werden. Für den Fall, dass es sich um eine Summe oder Differenz handelt ($x = x_1 \pm x_2$), gilt für den absoluten Fehler:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad (\text{F.12})$$

Stehen in der Funktion $f(x, y, z, \dots)$ Winkelfunktionen, e-Funktionen usw. dann muss bezüglich der im Argument auftretenden Größen die partielle Differentiation tatsächlich ausgeführt werden.

Hinweise zur Angabe von Ergebnis und Fehler

Der ermittelte Fehler ist nicht als exaktes Ergebnis zu werten, eine zu genaue Fehlerangabe ist Unsinn und daher **falsch**. Fehler werden immer in runden Zahlen angegeben und auf **höchstens zwei zählenden Stellen** aufgerundet. Dies gilt sowohl für den absoluten als auch für den relativen Fehler. Ebenso muss die Stellenzahl im Ergebnis auf

den Fehler abgestimmt werden. Es hat keinen Sinn, Stellen anzugeben, die bereits völlig unsicher sind. Es ist üblich, außer den auf Grund der Fehlerabschätzung als zuverlässig erkannten Stellen noch die erste unsichere Stelle anzugeben. Da die Auswertung heute fast stets mit Taschenrechnern geschieht (was dazu verleitet, viele Kommastellen anzugeben), ist dieser Hinweis besonders zu beachten.

Beispiele:

E-Modul (Versuch 2)	$E = (10,50 \pm 0,35) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
Oberflächenspannung (Versuch 6)	$\sigma = (71,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Brechzahl (Versuch 15)	$n = (1,6422 \pm 0,0015)$
Rydbergkonstante (Versuch 15)	$R = (1,098 \pm 0,007) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Bei allen Ergebnissen verwende man (wie in den Beispielen) die wissenschaftliche Schreibweise: Zahl mit höchstens zwei Stellen vor dem Komma mal einer Potenz von 10.

Im übrigen beachte man bezüglich der Fehlerabschätzung die speziellen Hinweise in den Versuchsanleitungen. Es empfiehlt sich jedoch, diese Angaben nicht kritiklos zu verwenden, sondern sich stets eigene Gedanken bezüglich der Fehlerformeln und des entstandenen Messfehlers zu machen.

G. Graphische Darstellungen

Das Zeichnen der Darstellung

Die graphische Darstellung dient zur Veranschaulichung des funktionellen Zusammenhangs zweier Größen und zur quantitativen Auswertung einer Messreihe.

Beim Zeichnen einer graphischen Darstellung beachte man die folgenden Punkte:

- Verwendung von Millimeterpapier und gespitztem, nicht zu hartem Bleistift
- Wahl der Koordinatenmaßstäbe und –nullpunkte nach Möglichkeit so, dass der ganze auf dem Blatt zur Verfügung stehende Achsenbereich ausgenützt wird und ein bequemer Umrechnungsfaktor verwendet werden kann
- Korrekte Beschriftung der Achsen (Abb. 1a).
- Sorgfältiges Eintragen der Messpunkte (kleine Kreuze) und Zeichnen einer Kurve unter Berücksichtigung eventuell zu erwartender funktioneller Zusammenhänge (Gerade, Parabel, usw.)
- Die Darstellung muss mindestens das Format DIN A5 haben

Die Auswertung einer Geraden

Bei der Auswertung (Bestimmung von Steigung und Achsenabschnitten) einer Geraden wird folgendermaßen vorgegangen (Abb. 1b):

Die Geradengleichung hat die allgemeine Form

$$y = A + S \cdot x \quad (\text{G.1})$$

A = Achsenabschnitt; S = Steigung

Man wähle *auf der gezeichneten Geraden* etwa in Höhe des ersten und letzten Messpunktes zwei Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$. Man verwende auf keinen Fall Messpunkte, die zufällig auf der Geraden liegen.

Dann ergibt sich die Steigung zu

$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (\text{G.2})$$

Die Achsenabschnitte A_x und A_y erhält man (falls benötigt) aus

$$A_x = x - \frac{y}{S} \quad \text{und} \quad A_y = y - S \cdot x \quad (\text{G.3})$$

$P(x, y)$ ist ein beliebiges Wertepaar *auf der Geraden* (z.B. P_1 oder P_2).

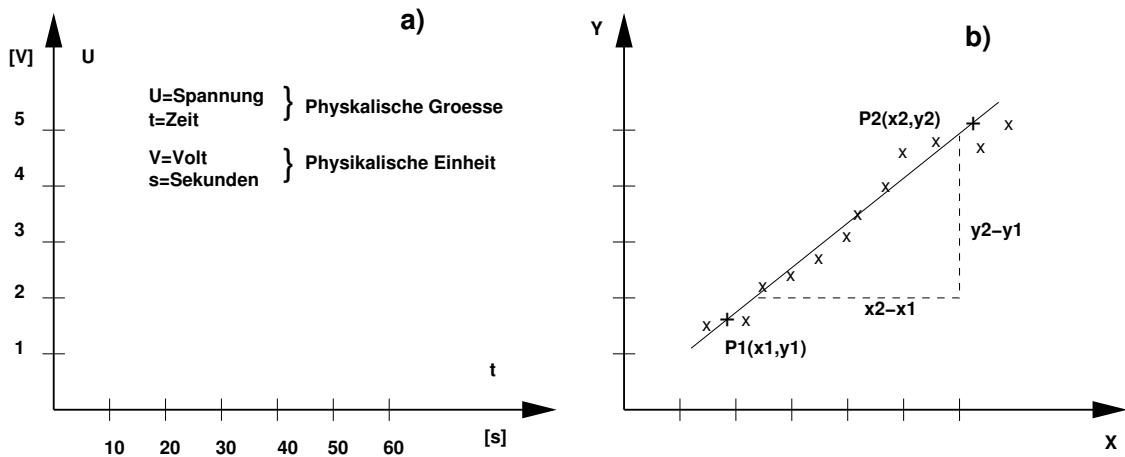


Abbildung G.1: Beschriftung der Achsen (a); Zeichnen der Geraden (b)

Logarithmische Abhängigkeiten

Exponentialgesetze liegen meist in der Form

$$y = y_0 \cdot e^{-ax}$$

vor. y_0 ist der Wert für y , wenn man $x = 0$ setzt.

Gemessen wird y als Funktion von x , gesucht wird die Größe a . Um einen linearen Zusammenhang zu erhalten, bildet man auf beiden Seiten der Gleichung den natürlichen Logarithmus:

$$\ln y = \ln y_0 - ax, \quad a > 0. \quad (G.4)$$

Trägt man also den $\ln y$ (dieser wird mit dem Taschenrechner errechnet) gegen x auf normales Millimeterpapier auf, dann erhält man eine fallende Gerade, deren Steigung gleich der gesuchten Größe a ist.

$$a = S = \frac{(\ln y)_2 - (\ln y)_1}{x_2 - x_1} \quad (G.5)$$

Auswertung funktioneller Zusammenhänge mit dem Taschenrechner

Fast alle Taschenrechner bieten heute die Möglichkeit, statistische Berechnungen durchzuführen. Man sollte dies zur Übung stets nutzen und die gesuchten Größen (Steigung, Achsenabschnitte) mit Hilfe von Regressionsverfahren (Lineare bzw. logarithmische Regression) berechnen. Dies ersetzt jedoch im Praktikum nicht das Zeichnen einer grafischen Darstellung und deren Auswertung, da dies das Verständnis für solche Diagramme nebst deren Interpretation fördert.

Fehlerabschätzung bei graphischen Darstellungen

Für die Bestimmung des Fehlers von S , A_x und A_y benötigt man zunächst die absoluten Fehler der Einzelmessungen Δx und Δy . Man verwendet dazu zweckmäßigerweise die größte Abweichung eines Messpunktes von der gezeichneten Geraden (Figur 1b).

Beachte: Diese dürfen nicht verwechselt werden mit der Abszissendifferenz $x_2 - x_1$ bzw. der Ordinatendifferenz $y_2 - y_1$ bei der Bestimmung von S , die oft auch mit Δx bzw. Δy bezeichnet werden!

Wenn man annimmt, dass jeder Punkt der Geraden mit der gleichen Unsicherheit behaftet ist (also auch P_1 und P_2), dann ergibt sich für die Änderung von S , die innerhalb dieser Grenzen möglich ist

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{2 \cdot \Delta x}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta S}{S} = \frac{2 \cdot \Delta y}{y_2 - y_1}. \quad (\text{G.6})$$

Diese Fehler sind annähernd gleich. Man wähle den, der sich leichter berechnen lässt. Die Unsicherheit ΔS der Steigung bewirkt auch einen Fehler bei den Achsenabschnitten. Diese sind

$$\Delta A_x = \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \frac{\Delta S}{S^2} \quad \text{und} \quad \Delta A_y = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \cdot \Delta S \quad (\text{G.7})$$

M. Tutorium Mathematik

Rechnen mit Zahlen

Das genaue Ergebnis einer Rechnung kann man mit dem Taschenrechner ermitteln, jedoch sollte man immer einen groben Näherungswert abschätzen. Das vermeidet Tippfehler, hilft bei Prüfungen und vielen anderen Gelegenheiten.

Runden

Zahlen auf eine, (2 Ziffern bei Ziffernfolge 1...) runden:

$$\begin{aligned}\text{z.B. } 7,32 &\approx 7 \\ 365,3 &\approx 400 \\ 1178 &\approx 1200\end{aligned}$$

Produkte abschätzen

$$\begin{aligned}\text{z.B. } 7 \cdot 3 &\approx 20 \\ 8 \cdot 6 &\approx 50 \\ 6 \cdot 6 &\approx 40\end{aligned}$$

ebenso Quotienten

$$\text{z.B. } 7/3 \approx 2$$

wissenschaftliches Format

Zweckmäßigerweise schreiben wir die Zahlen im wissenschaftlichen Format (mit Zehnerpotenzen) : $\text{Mantisse} \cdot 10^{(\text{Exponent})}$ (siehe dazu auch „Potenzrechnung“).

Für Mantisse 1 gilt :	:
10^{-3}	= 0,001
10^{-2}	= 0,01
10^{-1}	= 0,1
10^0	= 1
10^1	= 10
10^2	= 100
10^3	= 1000
	:

Allgemein:

Verschieben des Kommas um eine Stelle nach rechts erhöht Exponent um 1.

Verschieben des Kommas um eine Stelle nach links vermindert Exponent um 1.

$$\begin{aligned}\text{z.B. } 769,28 &= 7,6928 \cdot 10^2 \approx 8 \cdot 10^2 \\ 0,005076 &= 5,076 \cdot 10^{-3} \approx 5 \cdot 10^{-3} \\ 739 \cdot 10^3 &= 7,39 \cdot 10^5 \approx 7 \cdot 10^5 \\ 218 \cdot 10^{-3} &= 2,18 \cdot 10^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-1} \\ 0,04105 \cdot 10^1 &= 4,105 \cdot 10^{-1} \approx 4 \cdot 10^{-1}\end{aligned}$$

Multiplizieren zweier Zahlen

Die Multiplikation ist kommutativ, also $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$. Im wissenschaftlichen Format ergibt sich das Produkt durch multiplizieren der Mantissen, addieren der Exponenten, gegebenenfalls Komma verschieben und runden (siehe oben).

$$\begin{array}{rclclclcl} \text{z.B. } 6 \cdot 10^3 \cdot 7 \cdot 10^2 & = & 6 \cdot 7 \cdot 10^{3+2} & = & 42 \cdot 10^5 & \approx & 40 \cdot 10^5 & = & 4 \cdot 10^6 \\ 3 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^2 & = & 3 \cdot 8 \cdot 10^{-2+2} & = & 24 \cdot 10^0 & \approx & 20 \cdot 10^0 & = & 2 \cdot 10^1 \\ 4 \cdot 10^1 \cdot 6 \cdot 10^{-2} & = & 4 \cdot 6 \cdot 10^{1-2} & = & 24 \cdot 10^{-1} & \approx & 20 \cdot 10^{-1} & = & 2 \end{array}$$

Quotient zweier Zahlen (Division)

Die Division ist nicht kommutativ, also $3/4 \neq 4/3$. Das Ergebnis der Division ist der Quotient. Die Zahl, die geteilt wird (Zähler) nennt man Dividend, die Zahl unter dem Bruchstrich (Nenner) den Divisor. Siehe dazu auch Abschnitt „Bruchrechnung“. Die Mantisse des Quotienten gewinnt man durch Division der Mantissen. Zieht man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividenden ab, erhält man den Exponenten des Quotienten. (gegebenenfalls Komma verschieben)

$$\begin{array}{rclclclcl} \text{z.B. } \frac{6 \cdot 10^4}{8 \cdot 10^2} & = & \frac{6}{8} \cdot \frac{10^4}{10^2} & = & \frac{6}{8} \cdot 10^{4-2} & \approx & 0,8 \cdot 10^2 & = & 8 \cdot 10^1 \\ \frac{3 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^2} & = & \frac{3}{8} \cdot \frac{10^{-2}}{10^2} & = & \frac{3}{8} \cdot 10^{-2-2} & \approx & 0,4 \cdot 10^{-4} & = & 4 \cdot 10^{-5} \\ \frac{1,3 \cdot 10^1}{6 \cdot 10^{-2}} & = & \frac{1,3}{6} \cdot \frac{10^1}{10^{-2}} & = & \frac{1,3}{6} \cdot 10^{1-(-2)} & \approx & 0,2 \cdot 10^3 & = & 2 \cdot 10^2 \end{array}$$

Eine Division durch 0 ist nicht erlaubt, doch durch eine sogenannte Grenzwertbetrachtung kann der Wert des Quotienten abgeschätzt werden: Wird der Divisor immer kleiner wächst der Quotient stark an. Man erkennt, der Quotient (Dividend $\neq 0$) wird immer größer, falls der Divisor sich der 0 nähert.

Summe zweier Zahlen

Die Addition ist kommutativ, also $2 + 4 = 4 + 2$. Sind die Summanden sehr unterschiedlich groß (ein Exponent mindestens um 2 größer als der andere), so kann der kleinere vernachlässigt werden.

$$\begin{array}{rclcl} \text{z.B. } 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^2 & \approx & 7 \cdot 10^4 \\ 5 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^1 & \approx & 8 \cdot 10^1 \end{array}$$

Vergleichbar große Summanden müssen normiert werden (Exponent gleich), danach werden die Mantissen addiert.

$$\begin{array}{rclclcl} \text{z.B. } 5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 & = & 5 \cdot 10^4 + 0,8 \cdot 10^4 & \approx & 6 \cdot 10^4 \\ 2 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} & = & 2 \cdot 10^{-2} + 0,7 \cdot 10^{-2} & \approx & 3 \cdot 10^{-2} \\ 6 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-1} & = & 14 \cdot 10^{-1} & = & 1,4 \end{array}$$

Differenz zweier Zahlen

Die Differenz ist das Ergebnis einer Subtraktion. Die Zahl, von der abgezogen wird, nennt man Minuend; die Zahl die abgezogen wird den Subtrahend. Auch bei der Subtraktion wird wie bei der Addition bei sehr unterschiedlich großen Partnern der kleinere

vernachlässigt und vergleichbar große werden normiert.

$$\begin{aligned} \text{z.B. } 6 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^1 &\approx 6 \cdot 10^4 \\ 9 \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^1 &\approx -5 \cdot 10^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^2 &= 6 \cdot 10^3 - 0,6 \cdot 10^3 \approx 5 \cdot 10^3 \\ 9 \cdot 10^{-1} - 7 \cdot 10^{-2} &= 9 \cdot 10^{-1} + 0,7 \cdot 10^{-1} \approx 8 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Doch Vorsicht! Sind Subtrahend und Minuend fast gleich groß, darf vor der Subtraktion nicht gerundet werden.

$$\begin{aligned} 5,34 \cdot 10^4 - 5,32 \cdot 10^4 &= 0,02 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^2 \\ 6,47 \cdot 10^{-1} - 6,26 \cdot 10^{-1} &= 0,21 \cdot 10^{-1} \approx 2 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Bruchrechnung

Ein Bruch beschreibt eine Division, besteht aus Bruchstrich, Zähler (Z , Dividend) und Nenner (N , Divisor). Das Ergebnis der Division ist der Quotient Q .

$$Q = \frac{Z}{N}$$

Kehrwert

Beim Kehrwert (K) sind Zähler und Nenner vertauscht. Wir schreiben:

$$K(Q) = \frac{N}{Z}$$

Es gelten die folgenden Regeln:

$$K(Q) \cdot Q = 1$$

Produkt von Quotient mit Kehrwert ist 1

$$K(Q) = 1/Q$$

$$K(K(Q)) = Q$$

Kehrwert vom Kehrwert ist ursprünglicher Quotient

$$K(Q) = Q^{-1}$$

siehe auch „Potenzrechnung“

Rechenregeln:

$$\text{Kürzen: } \frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

gemeinsame Faktoren fallen weg

$$\text{Erweitern: } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

gemeinsamen Faktor zufügen

$$\text{Produkt: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{Quotient: } \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot K\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Multiplikation mit Kehrwert des Divisors

$$\text{Doppelbruch: } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot K\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc}$$

wie Quotient

$$\text{Summe: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$$

Zuerst durch erweitern beide Nenner gleich

$$\text{Differenz: } \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$$

machen. Danach addieren (Subtrahieren)

Beispiele

$$\begin{array}{ll}
\text{Kehrwert von} & 4/3 : \quad 3/4 \\
& 1/3 : \quad 3/1 = 3 \\
& 5 = 5/1 : \quad 1/5 \\
\text{Kürzen :} & \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{6} = \frac{4}{3} \\
\text{erweitern :} & \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{14}{6} \\
& 3 = \frac{3}{1} \\
\text{Produkt :} & \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} \\
\text{Quotient:} & \frac{12}{7} / \frac{3}{7} = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\
\text{Doppelbruch:} & \frac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \\
\text{Summe:} & \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12} \\
& \frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{g}{bg} + \frac{b}{bg} = \frac{g+b}{bg} \\
\text{Differenz:} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}
\end{array}$$

Prozentrechnung

Die Prozentangabe bezeichnet einen Teil (T) einer Gesamtmenge (Grundwert G). Dabei bezeichnet 1% den hundertsten Teil des Grundwertes und ist daher gleichwertig zur Angabe $1/100$ des Grundwertes. Neben dem Prozent verwendet man weitere Unterteilungen:

1%	Prozent	$1/100 = 10^{-2}$
1‰	Promille	$1/1000 = 10^{-3}$
1 ppm	parts per million	$1/1.000.000 = 10^{-6}$
1 ppb	parts per billion	10^{-9}
	$\vdots$	

Der Prozentsatz p eines Teils T ergibt sich aus :

$$p = \frac{T}{G} \cdot 100\%$$

entsprechend ergibt sich für den Anteil T :

$$T = G \cdot \frac{p}{100\%}$$

Zur Umrechnung in andere Unterteilungen müssen die entsprechenden Umrechnungsfaktoren angewandt werden:

$$1\% = 10\text{‰} = 10^4 \text{ ppm} = 10^7 \text{ ppb}$$

Bruchteile B eines Anteils T können wiederum in Prozenten pp von T angegeben werden (letztes Beispiel) :

$$T = G \cdot \frac{p}{100\%}$$

$$B = T \cdot \frac{pp}{100\%}$$

Die Größe des Prozentsatzes hängt manchmal davon ab, welche physikalischen Größen verglichen werden. Z.B. wird der Alkoholgehalt in Getränken in Volumenprozenten (vol.%), der Alkoholgehalt im Blut aber in Gewichtsprozenten (gew.%) angegeben. Da die Dichte von Alkohol $\approx 0,79 \text{ g/cm}^3$ beträgt, unterscheiden sich die beiden Zahlenangaben um $\approx 20\%$.

Beispiele :

Zollstock Länge 2m; Ablesemöglichkeit 1 mm:

Ablesefehler in Prozent $p = \frac{1 \text{ mm}}{2000 \text{ mm}} \cdot 100\% = 0,05\% = 0,5\text{‰}$

Kapital 5000 DM; Zinssatz 4%; Zinsen $Z = 5000 \text{ DM} \cdot \frac{4\%}{100\%} = 200 \text{ DM}$

5 l Blut; 1 l Rotwein 12 vol% Alkohol; Blutprobe 0,8‰; Alkoholmenge $A = 1 \text{ l} \cdot \frac{12\%}{100\%} = 0,12 \text{ l}$
 geht der gesamte Alkohol nur in das Blut $\Rightarrow$ Alkoholgehalt $= \frac{0,12 \text{ l}}{5,12 \text{ l}} \cdot 100\% \approx 2,3 \text{ vol}\% \approx 18\text{‰}$
 der Alkohol verteilt sich im Körper, nur ein Bruchteil B geht in das Blut $\Rightarrow B$

$$B = \frac{1\text{‰}}{18\text{‰}} \cdot 100\% \approx 4,5\%$$

Potenzrechnung

Die abkürzende Schreibweise a^n steht für das n -fache Produkt von a

$$\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

a heißt die Basis oder Grundzahl und n Exponent oder Hochzahl. a^2 nennt man auch Quadrat oder Quadratzahl und a^3 Kubikzahl.

Es gelten die folgenden Gesetze :

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ a^n / a^m &= a^{n-m} \\ \text{speziell für } a^n / a^n &= a^0 = 1 & (a \neq 0) \\ a^0 / a^n &= a^{-n} = 1/a^n & (a \neq 0) \\ a^{1/2} \cdot a^{1/2} &= a^1 = a & a^{1/2} = \sqrt[2]{a} \quad (a > 0) \\ a^{1/3} \cdot a^{1/3} \cdot a^{1/3} &= a & a^{1/3} = \sqrt[3]{a} \quad (a > 0) \\ (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Achtung : Die Schreibweise a^{-1} entspricht der Schreibweise F^{-1} für die Kehrfunktion von F (siehe auch „Funktionen“), meint aber hier den Kehrwert von a , nämlich $a^{-1} = \frac{1}{a}$!

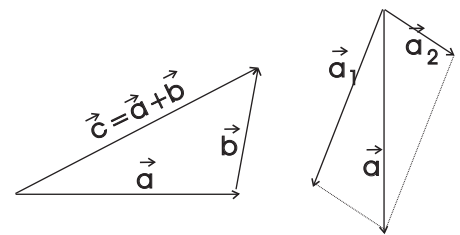
$$\begin{aligned} \text{Beispiele : } (2 \cdot 10^2)^4 &= 2^4 \cdot (10^2)^4 = 16 \cdot 10^8 \\ (3 \text{ m})^2 &= 9 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Skalare, Vektoren

Viele Größen sind nicht nur durch ihre Stärke sondern auch durch ihre Richtung festgelegt (Kraft, Geschwindigkeit, Weg, ...) Wir markieren solche gerichteten Größen (Vektoren) durch einen Pfeil über dem Symbol ($\vec{K}$). Im Gegensatz sind Skalare ungerichtete Größen (Volumen, Energie, ...)

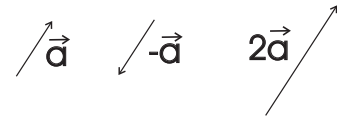
Addition von Vektoren

Vektoren addiert man am anschaulichsten grafisch (siehe Bild links). Auch lassen sich Vektoren in Komponenten zerlegen (rechts $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$).



Multiplikation mit Vektoren

Ein Produkt Skalar mit Vektor liefert immer einen Vektor gleicher Richtung (Skalar > 0; entgegengesetzter Richtung falls Skalar < 0), aber anderer Länge.



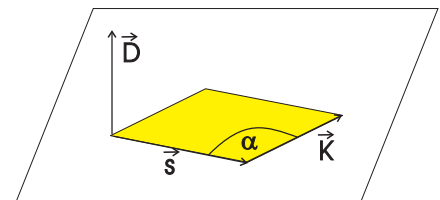
Das Produkt zweier Vektoren ist abhängig vom Winkel α zwischen den Vektoren und liefert entweder einen Skalar (Skalarprodukt). Z. B. Arbeit ist Kraft mal Weg:

$$A = \vec{K} \cdot \vec{s} = |\vec{K}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$$

oder wieder einen Vektor (Vektorprodukt). Z.B. Drehmoment ist Kraftarm mal Kraft:

$$\vec{D} = \vec{K} \times \vec{s} \quad |\vec{D}| = |\vec{K}| \cdot |\vec{s}| \cdot \sin(\alpha)$$

$\vec{D}$ steht senkrecht auf der Ebene, die von den beiden Vektoren $\vec{K}$ und $\vec{s}$ aufgespannt wird. $|\vec{D}|$ = Fläche des Parallelogramms. (Achtung: Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ ($\vec{K} \times \vec{s} \neq \vec{s} \times \vec{K}$)).



Formeln

Formeln dienen dazu, die realen Vorgänge der Natur zu beschreiben und anschaulich zu machen. Meist ist es sinnvoll komplexe Zusammenhänge zu vereinfachen. Prüfen Sie stets, ob die von Ihnen gewählte Formel mit Ihren Erfahrungen über die Natur übereinstimmen kann.

In den Formeln werden Buchstaben für die physikalischen Größen und mathematische Konstanten benutzt. Bei der Wahl der Buchstaben versucht man einen Zusammenhang zu der Größe zu finden (eventuell auch aus anderen Sprachen). Leider reicht die Anzahl unterschiedlicher Symbole nicht aus. Gleiche Symbole beschreiben oft unterschiedliche Größen.

		griechische Buchstaben	
T	für Temperatur	α alpha	μ my
t	für Zeit (time)	β beta	ν ny
D, d	für Durchmesser	γ Γ gamma	ξ Ξ Xi
l	für Länge	δ Δ delta	π Π pi
v	für Geschwindigkeit (velocity)	ε epsilon	ρ, ϱ rho
e	für Elementarladung	ζ zeta	σ Σ sigma
		η eta	τ tau
π	für Kreiszahl 3,14...	ϑ Θ Theta	υ Υ Ypsilon
e	für Eulersche Zahl 2,71...	ι jota	φ Φ phi
Δ	für Differenz	κ kappa	χ chi
d	für infinitesimal kleine Differenz, z.B. dx	λ Λ lambda	ψ Ψ psi
Σ	für Summe		ω Ω omega

Zwei Werte einer gleichen Größe werden oft mit Indizes unterschieden: h_1, h_2 .

Umformen einer Formel

Ziel des Umformens von Formeln und Gleichungen ist es, das Verhalten einer gesuchten Größe zu veranschaulichen bzw. deren Wert zu berechnen. Um die gesuchte Größe auf eine Seite der Gleichung zu bringen, wird auf beiden Seiten der Gleichung die gleiche Operation durchgeführt. Die wichtigsten sind :

aus	soll	mit der Aktion	wird daraus
$y = x - M$	Minuend auf die andere Seite	Addiere Wert M	$y + M = x$
$y = x + A$	Summand auf die andere Seite	Subtrahiere Wert A	$y - A = x$
$y = x \cdot F$	Faktor auf die andere Seite	Dividiere durch Wert F	$\frac{y}{F} = x$
$\frac{x}{D} = y$	Divisor auf die andere Seite	Multipliziere mit Wert D	$x = y \cdot D$
$F(x) = y$	nach x auflösen	Kehrfunktion anwenden	$x = F^{-1}(y)$
$\sqrt{x} = y$	Wurzel auflösen	Quadrieren	$x = y^2$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes : $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$ lassen sich gemeinsame Faktoren ausklammern, wie z.B. in

$$a\rho_{\text{Fl}}gh_1 - a\rho_{\text{Fl}}gh_2 = a\rho_{\text{Fl}}g(h_1 - h_2)$$

Rechnen mit Einheiten

Beim Einsetzen von physikalischen Größen in die Formeln müssen auch die Einheiten (m, kg, s, ...) eingesetzt werden. Dabei sollte man sich angewöhnen, sofort identische Einheiten zu verwenden, da das die Rechenfehler stark reduziert!

Z.B. Volumen einer quadratischen Scheibe der Dicke $d=1\text{cm}$ und der Kantenlänge $l=2\text{m}$:

$$V = l \cdot l \cdot d = 200 \cdot 200 \cdot 1 \text{ cm}^3 = 4 \cdot 10^4 \text{ cm}^3$$

oder

$$V = l \cdot l \cdot d = 2 \cdot 2 \cdot 0,01 \text{ m}^3 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

aber möglichst nicht

$$V = l \cdot l \cdot d = 2 \cdot 2 \cdot 1 \text{ m}^2 \text{ cm} = 4 \text{ m}^2 \text{ cm}.$$

Funktionen

Funktionen beschreiben die Abhängigkeit Y von einem Parameter X . Allgemein schreiben wir $Y = F(X)$. Viele Funktionen lassen sich umkehren (X und Y sind vertauscht). Wir bezeichnen die Kehrfunktion mit $Y = F^{-1}(X)$. Der Graph der Kehrfunktion ist an der Diagonalen ($y=x$) gespiegelt. Es gilt $Y = F(F^{-1}(Y))$.

Achtung : Die Schreibweise F^{-1} für die Kehrfunktion entspricht der Schreibweise a^{-1} für den Kehrwert von a (siehe auch „Potenzrechnung“), meint aber hier die Kehrfunktion von $F : Y = F(X) \Leftrightarrow X = F^{-1}(Y)$!

Hier folgt eine kleine Auswahl der wichtigsten Funktionen:

lineare Funktion (Gerade)

Eine Gerade ist durch 2 Punkte $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$ bzw. einen Punkt und die Steigung m bestimmt. Sie schneidet die y-Achse im Punkt $(0, n)$ und die x-Achse im Punkt $(-\frac{n}{m}; 0)$. Die Geradengleichung lautet:

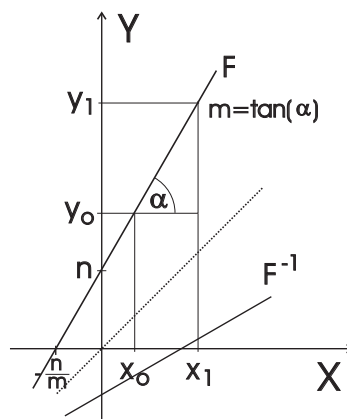
$$F : Y = m \cdot X + n$$

m und n lassen sich aus den gegebenen Werten berechnen :

$$2 \text{ Punkte : } m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad n = y_1 - m \cdot x_1$$

$$\text{Punkt, Steigung : } n = y_0 - m \cdot x_0$$

Die Steigung m gibt den Tangens des Neigungswinkels an. Die Kehrfunktion ist wieder eine Gerade mit der Steigung $1/m$ und dem Achsenabschnitt $-n/m$.



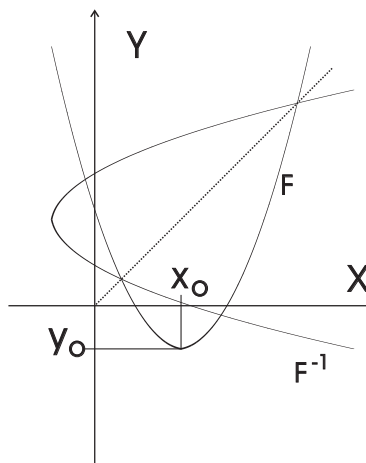
Parabel

Die Parabel ist ein Spezialfall der sogenannten Kegelschnitte, zu denen noch Kreise, Ellipsen und Hyperbeln zählen. Hier soll nur die Parabel in ihrer einfachsten Form behandelt werden. Der Scheitel liegt im Punkt (x_0, y_0) mit der Öffnung $2p$. Mit der Öffnung nach oben ($p > 0$) lautet die Parabelgleichung :

$$Y = 2p \cdot (X - x_0)^2 + y_0$$

Die Kehrfunktion dieser Parabel ist die Quadratwurzel-Funktion (wiederum eine Parabel aber mit der Öffnung seitlich):

$$Y = \sqrt{\frac{X - y_0}{2p}} + x_0$$

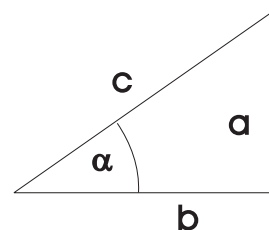


Betrag

Die Betragsfunktion $y = |x|$ (sprich Betrag von x) entnimmt von der Größe x nur den Zahlenwert ohne das Vorzeichen; ist die Größe x ein Vektor, so wird durch die Betragsfunktion nur die Länge, nicht die Richtung des Vektors betrachtet.

sin, cos und tan, cot

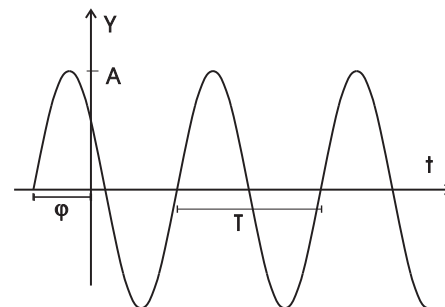
Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens legen den Winkel fest: In einem rechtwinkligen Dreieck berechnet sich $\sin \alpha = \frac{a}{c}$; $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ und $\tan \alpha = \frac{a}{b}$; $\cot \alpha = \frac{b}{a}$. Zwischen den Winkelfunktionen gibt es vielfältige Umrechnungsmöglichkeiten. Die Kehrfunktionen berechnen den Winkel, z.B: $\alpha = \arcsin(x)$.



Harmonische Schwingungen und Wellen werden durch Sinus und Cosinus beschreiben.

$$Y = A \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right)$$

beschreibt die zeitliche Abhängigkeit der Auslenkung Y einer Schwingung mit der Periodendauer T und Phasenlage φ .

**Exponentialfunktion; Logarithmus**

Immer, wenn die Änderung eines Funktionswertes (Anstieg oder Abfall) proportional zum Momentanwert ist, handelt es sich um eine Exponentialfunktion.

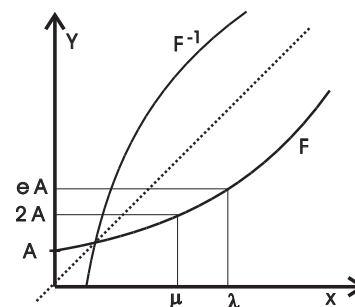
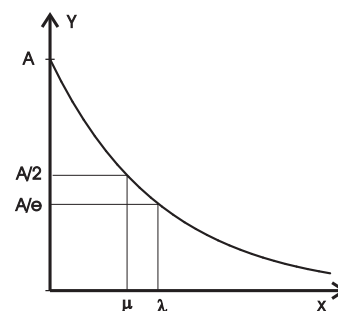
$$Y = A \cdot e^{x/\lambda}$$

Der exponentielle Verlauf startet vom Ausgangswert A und steigt ($\lambda > 0$) nach $x = \lambda$ um den Faktor e (exponentielles Wachstum) oder fällt ($\lambda < 0$) nach $x = |\lambda|$ auf $1/e$ des Ausgangswertes.

Da der Faktor e ein krummer Zahlenwert ist, wird häufig die Form

$$Y = A \cdot e^{x/\mu \ln(2)}$$

gewählt. In dieser Schreibweise ändert sich der Funktionswert nach $x = |\mu|$ auf das Doppelte (die Hälfte für $\mu < 0$). Die Kehrfunktion der Exponentialfunktion ist der Logarithmus: $Y = 1/\lambda \cdot \ln(X/A)$.

**Differential- und Integralrechnung**

Beides ist unabdingbare Voraussetzung in vielen Arbeitsgebieten, besonders in den Naturwissenschaften (Physik, Biologie, Chemie, Geologie, ...) sowie in den Wirtschafts-

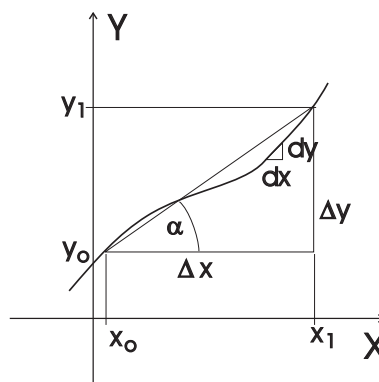
wissenschaften.

Differentialrechnung

Die Differentialrechnung beschreibt die **Veränderung** einer Größe y in Abhängigkeit von einem Parameter x . Während sich x von einem Anfangswert x_a zu einem Endwert x_e ändert, verändert sich y von y_a nach y_e . Dabei bezeichnet man die Änderung ($x_e - x_a$) von x mit Δx , die von y mit Δy . So ändert sich bei einem 100m-Lauf der Weg s um $\Delta s = 100m$, während die Zeit t um $\Delta t = 10sec$ weiterläuft. Pro Jahr (Δt) ändert sich die Anzahl ΔN von Individuen einer Tierart. Diese Änderung hängt von vielen Parametern ab, aber natürlich auch von der Anzahl N der bereits vorhandenen Tiere.

Der Anstiegswinkel α einer ansteigenden Straße berechnet sich aus dem Höhenunterschied Δh längs der Wegdifferenz Δs : $\alpha = \arctan(\Delta h / \Delta s)$. Den Differenzenquotienten $(\Delta h / \Delta s)$ bezeichnet man auch mit „Steigung“.

Meist ist eine Straße über eine längere Strecke mal steiler mal flacher, die Größe $\frac{\Delta h}{\Delta s}$ gibt daher die Durchschnittssteigung an. Zur Angabe der lokalen Steigung muß zur Bestimmung der Differenzen der Ausschnitt so klein wie möglich gewählt werden, am besten eine winzig (infinitesimal) kleine Differenz, die man an Stelle des Symbols Δ mit dem Symbol d angibt. Damit erhält man den **Differentialquotient** $\frac{dh}{ds}$ (sprich d h nach d s). Das Bestimmen des Differentialquotienten heißt differenzieren oder ableiten, das Ergebnis auch 1. Ableitung. Häufig schreibt man kürzer h' und speziell $\dot{h}$ für die 1. Ableitung nach der Zeit.



Die im Beispiel oben genannte Änderung des Weges mit der Zeit $\frac{ds}{dt}$ beschreibt die Geschwindigkeit v des Läufers, die normalerweise nicht konstant ist. Eine Beschleunigung (Abbremsung) b bewirkt eine Änderung der Geschwindigkeit. Sie bestimmt man durch Differenzieren der Geschwindigkeit: $b = \frac{dv}{dt}$ oder durch zweimaliges Differenzieren des Weges s nach der Zeit t : $b = \frac{d^2s}{dt^2}$ (sprich d 2 s nach d t Quadrat) oder kürzer $\ddot{s}$ (2. Ableitung nach der Zeit)

partielle Ableitung

Manchmal besteht eine Abhängigkeit von mehr als einem Parameter $y = y(x_0, x_1, \dots)$. Hier differenzieren wir, in dem wir alle Parameter konstant lassen, und nur nach einem einzigen differenzieren. Wir nennen dies partielle Ableitung und schreiben: $\frac{\partial y}{\partial x_i}$

Regeln :

Summenregel	$y = u \pm v$	$y' = u' \pm v'$
Produktregel	$y = u \cdot v$	$y' = u \cdot v' + u' \cdot v$
Quotientenregel	$y = u/v$	$y' = (u' \cdot v - u \cdot v')/(v^2)$
Funktion einer Funktion	$y = u(v)$	$y' = du/dv \cdot v'$
konstanter Faktor	$y = a \cdot u$	$y' = a \cdot u'$
konstanter Summand	$y = u + a$	$y' = u'$

Ableitung der wichtigsten Funktionen :

$$y = x^n \quad y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y = \sin x \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x$$

$$y = e^x \quad y' = e^x$$

$$y = \ln x \quad y' = 1/x$$

Beispiele :

$$y = x^2 \quad y' = 2x$$

$$y = 3x \quad y' = 3$$

$$y = 7/x = 7 \cdot x^{-1} \quad y' = -7 \cdot (x^{-2}) = -7/(x^2)$$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad y' = 1/2 \cdot x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x})$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad \dot{y} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

$$y = A \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad \dot{y} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Integrieren

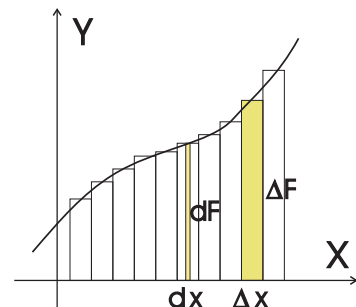
Die Integration dient zur Berechnung eines Ganzen, das aus vielen kleinen Segmenten zusammengesetzt ist. In dem Bild ist als Beispiel das Berechnen einer Fläche dargestellt. Die Gesamtfläche setzt sich aus der Summe vieler kleiner Flächensegmente ΔF zusammen:

$$F = \sum \Delta F = \sum y_i \cdot \Delta x$$

Δx ist die Breite, und y_i die Höhe jedes einzelnen Flächensegments ΔF .

Man erkennt, dass Fehler entstehen, wenn die Segmente zu groß gewählt werden. Daher wählt man auch hier infinitesimal kleine Flächensegmente dF mit entsprechenden Breiten dx . An Stelle des Summensymbols verwendet man jetzt das Integralsymbol und man erhält:

$$F = \int dF = \int y \cdot dx$$



Integrieren und Differenzieren sind komplementäre Operation, Integrieren kann durch Differenzieren und Differenzieren durch Integrieren rückgängig gemacht werden. Man

erkennt das leicht, y ist die Ableitung von F und F ergibt sich durch integrieren von y :

$$F = \int y \cdot dx \iff F = \int dF \iff dF = y \cdot dx \iff \frac{dF}{dx} = y$$

Die Gesetze und Formeln für das Integrieren lassen sich daher aus denen für das Differenzieren ableiten.

unbestimmtes und bestimmtes Integral

Alle Funktionen (Stammfunktionen) $F(x) + C$ ergeben beim Differenzieren den Integranden $f(x)$ mit $F' = f(x)$. Die Integration liefert daher eine Schar parallelverschobener Lösungen (**unbestimmtes Integral**).

Beispiele Integrand $f(x)$ Stammfunktion $F(x)$

A	$A \cdot x$	
$A \cdot x$	$\frac{1}{2} A \cdot x^2$	
$A \cdot x^n$	$\frac{1}{n+1} A \cdot x^{n+1}$	
$A \cdot x^{-n}$	$\frac{1}{1-n} A \cdot x^{1-n}$	$(n \neq 0)$
$A \frac{1}{x}$	$A \cdot \ln(x)$	
$A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$-\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$	
$A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$	
$A \cdot e^{x \cdot \lambda}$	$\frac{A}{\lambda} e^{x \cdot \lambda}$	

Wird die Integration des Integranden $f(x)$ von einem Anfangswert $x = a$ zu einem Endwert $x = e$ ausgeführt, ergibt das Integral die Differenz zwischen $F(e) - F(a)$. Dadurch fällt die Konstante C heraus und man erhält das **bestimmtes Integral** :

$$\int_a^e f \, dx = F(e) - F(a)$$

Beispiele

$$\begin{aligned} \int_a^e A \, dx &= A \cdot (e - a) \\ \int_a^e Ax \, dx &= \frac{A}{2} (e^2 - a^2) \\ \int_a^e A \frac{1}{x} \, dx &= A \cdot \ln \frac{e}{a} \\ \int_0^{2\pi} A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \, dt &= 0 \\ \int_0^{2\pi} A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \, dt &= 0 \end{aligned}$$

1. Dichtebestimmung mit hydrostatischer Waage

Das muss man wissen

- *Dichte – Hydrostatischer Druck – Auftrieb – Gesetz des Archimedes*
- *Kraft – Drehmoment – Hebelgesetz*
- *Gleichgewicht von Kräften und Drehmomenten – Waage*

Anwendungen:

- Schwimmen, Schweben, Sinken oder Steigen von Körpern in Flüssigkeiten wird durch das Archimedische Prinzip bestimmt
- Vögel besitzen Luftkammern, durch die ihre Dichte verringert ist
- Fische besitzen eine Schwimmblase, durch die sie den Auftrieb und damit ihre Schwimmtiefe beeinflussen und somit regulieren können
- *Spermaceti*-Organ: Wale besitzen eine gallertartige Blase im Schädelbereich, wodurch sie durch Veränderung der Dichte ihre Eintauchtiefe beeinflussen und somit regulieren können

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Dichte, Masse, Kraft, Gewicht, Drehmoment,

Druck und Auftrieb? Was sind die zugehörigen Einheiten?

Wie groß ist die Dichte von Wasser? Dichte von anderen Stoffen?

Was hat das Hebelgesetz mit der Balkenwaage zu tun?

Leiten Sie die Formel für den Auftrieb ab!

Wovon hängt der hydrostatische Druck ab?

Wieso kompensieren sich die Kräfte links und rechts?

Wieso ist die Empfindlichkeit eine Funktion der Belastung?

1.1 Physikalische Grundlagen

Dichte

Die Dichte ρ eines Körpers ist definiert als das Verhältnis der Masse eines Körpers zu seinem Volumen:

$$* \quad \rho = \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

Um die Dichte eines Körpers zu messen, benötigt man neben seiner Masse (diese erhält man aus einer Wägung des Körpers) auch sein Volumen. Dieses kann bei regelmäßig geformten Körpern mit Hilfe entsprechender Längenmessungen berechnet werden. Bei komplizierten Oberflächenformen oder Flüssigkeiten nutzt man (neben anderen Methoden) den Auftrieb, um das Volumen zu bestimmen.

Auftrieb

Jeder Körper, der in eine Flüssigkeit eintaucht, erfährt eine Kraft nach oben, den Auftrieb. Sie ist z.B. dafür verantwortlich, daß ein Schiff schwimmt oder ein Luftballon fliegt. Welche Ursache hat sie?

Im Inneren einer strömungsfreien Flüssigkeit (oder eines Gases) herrscht ein Druck, der gleichmäßig nach allen Richtungen wirkt. Ursachen dieses (**hydrostatischen**) **Drucks** können z.B. Kräfte von Gefäßwandung (Druck im Innern eines Fahrradschlauchs) oder das Eigengewicht der Flüssigkeit oder des Gases sein. Letzteres ist der **Schweredruck**, der von der Dichte ρ des Mediums, der Erdbeschleunigung g und von der Tiefe h unter der Oberfläche abhängt.

$$* \quad p = \rho g h$$

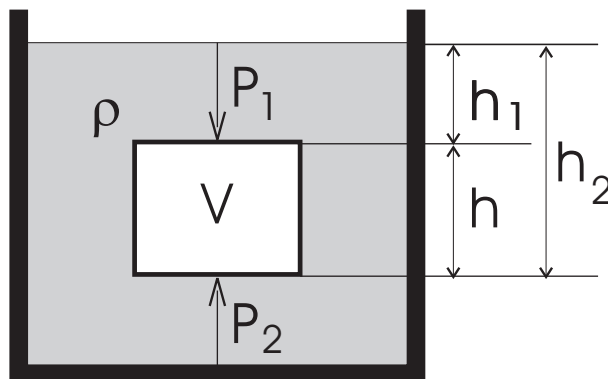


Abbildung 1.1: Druckverhältnisse für einen eingetauchten Körper.

Der hydrostatische Druck - und damit auch der Schweredruck - wirkt in alle Richtungen, auf einen eingetauchten Körper, also auch auf die Seitenflächen und von unten auf die Unterseite, wie in Abb. 1.1 gezeigt. Berechnet man die resultierende Kraft auf diesen

Körper, dann ergibt sich stets eine Kraft nach oben, da sich die seitlichen Kräfte aufheben und die Kraft F_2 von unten größer ist als die auf die Oberseite wirkende Kraft F_1 . Die quantitative Herleitung ergibt für den Auftrieb F_A die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} * \quad F_A &= F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) = A\rho_{\text{Fl}}g(h_2 - h_1) = Ah\rho_{\text{Fl}}g = V\rho_{\text{Fl}}g \\ &= m_{\text{Fl}}g \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dabei bedeuten: h = Höhe des Körpers
 A = Grundfläche des Körpers
 ρ_{Fl} = Dichte der Flüssigkeit
 m_{Fl} = Masse der verdrängten Flüssigkeit

Dieses Ergebnis gilt auch für beliebig geformte Körper, da man sich diese in kleine Quader zerlegt denken kann. Das *Archimedische Prinzip* kann wie folgt formuliert werden: Der Auftrieb, den ein Körper beim Eintauchen in eine Flüssigkeit erfährt, ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dies gilt in analoger Weise auch für das Eintauchen eines Körpers in Gase.

1.2 Apparative Grundlagen

Die Balkenwaage

Zwei wichtige Begriffe und Größen, die beim Arbeiten mit einer Balkenwaage eine große Rolle spielen, sind die Gleichgewichtslage und die Empfindlichkeit.

Bei der **Gleichgewichtslage** s handelt es sich um den Punkt auf der Skala, um den der Zeiger Pendelbewegungen ausführt und langsam zur Ruhe kommt. Aufgrund von Erschütterungen oder weiteren störenden Einflüssen wird der Zeiger kaum wirklich zur Ruhe kommen. Möchte man diesen Punkt aber bestimmen, so tippt man dazu die Waage leicht an den Hebelarmen an und liest zwei Umkehrpunkte des Zeigers links (l_1 und l_2) sowie einen Umkehrpunkt rechts (r) ab oder auch umgekehrt. Die so angenäherte Gleichgewichtslage erhält man anhand Mittelung:

$$s = \frac{1}{2} \left(\frac{l_1 + l_2}{2} + r \right) \quad (1.3)$$

Die **Empfindlichkeit** E einer Waage ist definiert als das Verhältnis der Differenz zweier Gleichgewichtslagen und der diese Differenz verursachenden Masse:

$$E = \frac{s_2 - s_1}{\Delta m} \left[\frac{\text{Skt}}{\text{mg}} \right] = \frac{a}{\Delta m} \left[\frac{\text{Skt}}{\text{mg}} \right] \quad (1.4)$$

Man erhält sie durch Bestimmen der Gleichgewichtslagen mit (s_2) und ohne (s_1) zusätzlicher Belastung, d. h. der Masse Δm . Die Empfindlichkeit einer Waage ist zumeist eine Funktion der Belastung und nimmt mit steigender Belastung ab.

Die hydrostatische Waage

Die hydrostatische Waage ist eine Balkenwaage, die so gebaut ist, dass mit ihr ein Körper sowohl in Luft (durch Auflegen auf die Waagschale), als auch in einer Flüssigkeit (durch Anhängen an diese Schale) gewogen werden kann, siehe Abb.1.2.

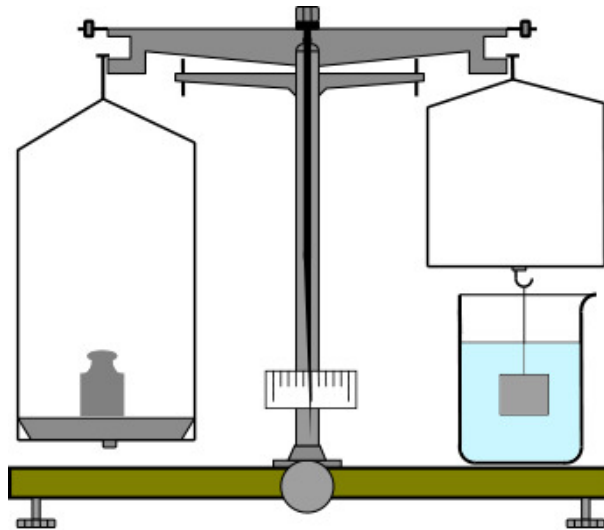


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung der hydrostatischen Waage.

Aus diesen beiden Wägungen kann unmittelbar die Dichte des Körpers berechnet werden, wenn die Dichte der verwendeten Flüssigkeit bekannt ist.

Bezeichnen wir mit ρ_K die unbekannte Dichte eines Körpers, mit ρ_{Fl} die bekannte Dichte der Flüssigkeit, mit V das unbekannte Volumen des Körpers sowie mit G_L das Gewicht in Luft, mit G_{Fl} das Gewicht in Flüssigkeit und mit F_A den Auftrieb, so gelten folgende Beziehungen:

$$G_L = mg = \rho_K V g$$

$$G_{Fl} = G_L - F_A = \rho_K V g - \rho_{Fl} V g$$

Eliminieren wir das Volumen, dann erhalten wir die gesuchte Größe:

$$\rho_K = \rho_{Fl} \frac{G_L}{G_L - G_{Fl}}. \quad (1.5)$$

1.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Man bestimme die Dichte der Probekörper durch Wägung in Wasser und Luft.

2. Danach bestimme man die Dichte von Polystyrol, durch Wägung eines bekannten Volumens einer Dichtegleichen Flüssigkeit.

Versuchsdurchführung

Die im Versuch verwendete Apparatur ist in Abb. 1.3 gezeigt. Zu 1.)

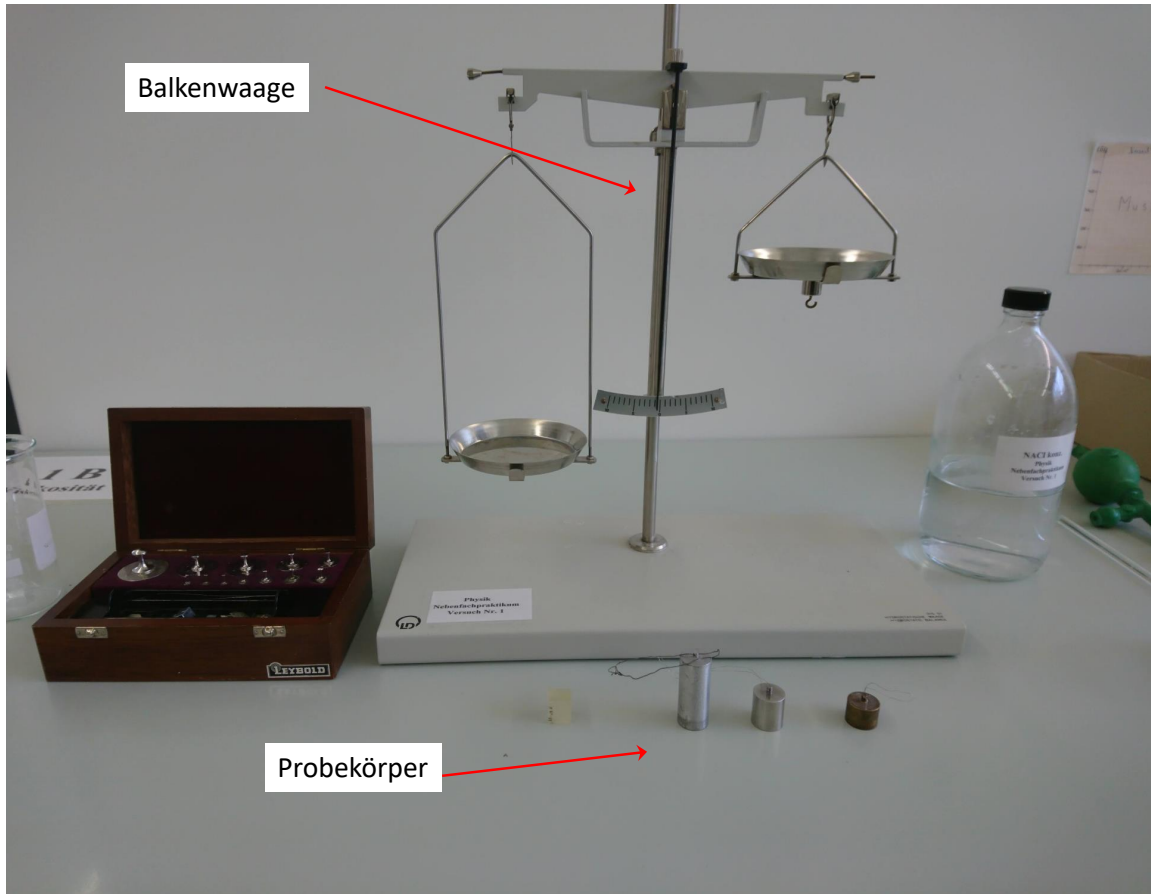


Abbildung 1.3: Versuchsaufbau mit der Balkenwaage.

Zunächst bestimme man bei unbelasteter Waage die Ruhelage des Zeigers (in Skalenteilen). Zum Wägen des Probekörpers verwende man die Gewichte bis herunter zu 100 mg und tariere damit aus, bis der Zeiger innerhalb der Skala bleibt und man ermittle nun die Gleichgewichtslage. Dann bestimmt man die Empfindlichkeit der belasteten Waage, indem man das aufgelegte Gewicht um 100 mg verändert und die dadurch bewirkte Änderung der Zeigerstellung feststellt (a Skt). Die Bestimmung der Gleichgewichtslagen bei belasteter Waage werden nun bei in Wasser getauchtem Probekörper wiederholt. Mit Hilfe der anfangs bestimmten Nulllage und E kann man nun anschließend das genaue Gewicht ermitteln. Die für in Luft bestimmte Empfindlichkeit kann für alle Wägungen benützt werden. Die Dichte des Wassers entnehme man der Tabelle. Alle zu ermittelnden Gleichgewichtslagen werden 3 Mal bestimmt.

°C	g/cm ³	°C	g/cm ³	°C	g/cm ³
15	0,999101	19	0,998407	23	0,997540
16	0,998944	20	0,998206	24	0,997300
17	0,998776	21	0,997994	25	0,997047
18	0,998597	22	0,997772	26	0,996786

Tabelle 1.1: Dichtewerte von Wasser bei verschiedenen Temperaturen

Tipp: Bereiten Sie eine Tabelle vor, die Spalten für die Messwerte, Mittelwerte usw. besitzt. Dies wird Ihnen die Auswertung eindeutig erleichtern und verkürzen.

Zu 2.)

Zunächst stellt man eine Kochsalzlösung her, in der der Polystyrol gerade schwebt. Praktisch verfährt man dabei so: In der Flasche I befindet sich konzentrierte Kochsalzlösung, in der Flasche II ist Kochsalzlösung geringerer Dichte, in der der Polystyrol gerade sinkt. Man füllt etwas Lösung II in das Becherglas und gibt unter ständigem Rühren konzentrierte Kochsalzlösung zu, bis der Körper gerade schwebt. Hat man aus Versehen zu viel konzentrierte Lösung zugegeben, so kann mit destilliertem Wasser korrigiert werden. Anschließend werden 10 ml der Flüssigkeit, mit der Pipette, entnommen. Die Flüssigkeit wird komplett in eine Waagschale gegeben und wie schon die Probekörper gewogen. Aus dem Verhältnis der nun gewogenen Masse der Flüssigkeit und dessen bekannten Volumen, kann nun die Dichte bestimmt werden.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Der absolute Fehler ergibt sich dann aus den bekannten Regeln der Fehlerrechnung. Dabei wird zuerst der absolute Fehler der Empfindlichkeit, dann der der Massenwägung und dann abschließend der der Dichte, bzw. des Volumens berechnet.

Bitte beachten:

- Die Waage muss sorgfältig behandelt werden!
- Die gebrauchte Lösung unbedingt in die Flasche mit der verdünnten Lösung zurückgießen!
- Benutzte Gläser und Gegenstände mit dest. Wasser reinigen und danach trocknen!
- Den Arbeitsplatz sauber verlassen und verschüttete Salzlösung gegebenenfalls aufrocknen!

2. Elastizitätsmodul

- *Bindungskräfte – Elastische Kräfte – Federkräfte – Hookesches Gesetz*
- *Zusammenhang Potenzielle Energie $\Leftrightarrow$ Kraft – Elastizitätsmodul*
- *Harmonische Schwingung – Herleitung der Schwingungsgleichung – Federpendel*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 3 und 4.

Anwendungen:

- unterschiedliche Teile einer Pflanze können sich verschieden stark dehnen, da sie aus einem anderen Material sind
- Strohhalme sind innen hohl
- Schilf
- Türstürze
- Deckenbalken

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was beschreibt das Hooke'sche Gesetz?

Welche Analogie besteht zwischen Translations- und Rotationsbewegung?

Was ist elastisch und plastisch (inelastisch)?

Wohin geht die Energie bei einem inelastischen Stoß?

Was ist Kraft, Energie? Was ist potenzielle Energie?

Was beschreibt der E-Modul?

Was beschreibt das Flächenträgheitsmoment?

Was ist die neutrale Faser?

Wie hängen Kraft und Potenzial zusammen?

Wie sieht der Potenzialverlauf aus?

Leiten Sie das Hooke'sche Gesetz aus dem Potenzial ab (und umgekehrt)!

Was bedeutet Gleichgewichtsabstand?

Was ist eine harmonische Schwingung?

Was sind Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer?

Wieso entsteht beim Feder- und Torsionspendel eine harmonische Schwingung?

2.1 Physikalische Grundlagen

Bindungskräfte

Unter Bindungskräften versteht man Kräfte, die ein System aus zwei (oder mehreren) Einzelkörpern zusammenhalten. Dies können Gravitationskräfte sein (Planetensystem), Kräfte elektrischer Natur (Kerne und Elektronen in Atomen und Molekülen, Atome im Festkörper) oder Kernkräfte (Nukleonen im Kern).

Feste Körper bestehen aus regelmäßig (dreidimensional periodisch) angeordneten Bausteinen (Atome, Ionen, Moleküle), dem sogenannten Kristallgitter. Zusammengehalten wird das Ganze durch Bindungskräfte, die elektrischer Natur sind. Entscheidende Bedeutung für die mechanischen Eigenschaften eines solchen Systems ist die Abhängigkeit dieser Kraft (oder des dazugehörenden Potentials) vom Abstand benachbarter Teilchen. Voraussetzung für die Möglichkeit eines stabilen Zustandes ist, dass bei einem bestimmten Abstand die Kraft zwischen benachbarten Bausteinen verschwindet bzw. das Potential an dieser Stelle ein Minimum besitzt. Für stabile Systeme d.h. für Festkörper (aber auch etwa für zweiatomige Moleküle) erwarten wir daher im Prinzip für das Potential $V(r)$ den folgenden Kurvenverlauf (Abb.1):

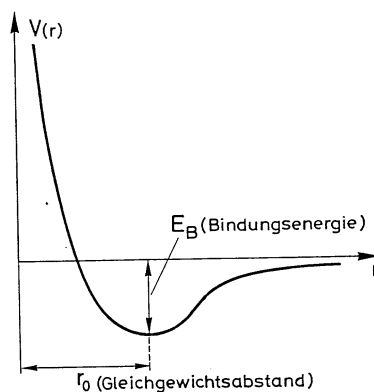


Abbildung 1. Potenzialkurve für atomare Bindungskräfte

Er ist qualitativ leicht zu verstehen:

Versuchen wir ausgehend vom **Gleichgewichtsabstand** den Abstand zu verringern, dann wird eine abstoßende Kraft wirksam, die letzten Endes von der Coulomb-Abstoßung der positiv geladenen Kerne der Bausteine herrührt. Das Potential verläuft gegen unendlich, da es natürlich unmöglich ist, beide Teilchen bis auf den Abstand Null anzunähern. Vergrößern wir den Abstand, dann müssen anziehende Kräfte der Elektronenhüllen überwunden werden. Diese gehen bei genügend großem Abstand gegen Null. Die Energie, die nötig ist, um die Bindung zu lösen, nennt man die Bindungsenergie.

Elastische Kräfte und Federkräfte

Wenn wir annehmen, daß der Potenzialkurvenverlauf im Bereich der Gleichgewichtslage durch eine Parabel angenähert werden kann und berücksichtigen, daß die Kraft zwischen

den beiden Körpern des Systems durch die negative Ableitung des Potentials nach dem Abstand gegeben ist,

$$* \quad \begin{aligned} V(r) &= \frac{c}{2}(r - r_0)^2 && \text{und damit} \\ F(r) &= -\frac{dV}{dr} = -c(r - r_0), \end{aligned}$$

dann erhalten wir das folgende Ergebnis:

Auslenkung und Kraft sind zueinander proportional.

Auf den ganzen Körper (lineare Kette aus elastisch gebundenen Massenpunkten) angewendet, erklärt sich damit das Hookesche Gesetz, allgemein in der Form: (Abb.2).

$$* \quad F = -kx, \quad k = \text{Federkonstante}$$

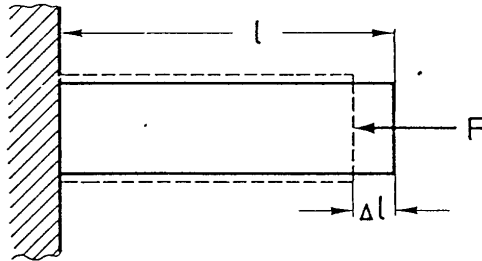


Abbildung 2. Zur Definition des E-Moduls

$$* \quad \frac{F}{A} = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$* \quad F = -k\Delta l, \quad k = \text{Federkonstante}$$

Für die Längenänderung Δl eines Stabes mit der Länge l und dem Querschnitt A unter dem Einfluß einer Kraft F gilt: E nennt man den **Elastizitätsmodul**. Die Federkonstante k ergibt sich aus der Form (Länge l , Querschnittsfläche A) des Körpers, sowie aus den Materialeigenschaften E :

*

$$k = E \cdot A/l$$

Da sich aber letzten Endes jede Deformation auf eine Abstandsänderung benachbarter Gitterbausteine zurückführen läßt, gehorcht auch eine Spiralfeder dem Hookeschen Gesetz. Dehnen wir eine Feder um einen Betrag Δx , dann wirkt die Federkraft F entgegen. Die gleichen Überlegungen können auch auf Torsionsdeformationen angewendet werden. Die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ist auf kleine Deformationen beschränkt. Dehnen wir einen Körper stärker, dann bleibt die Verformung zunächst **elastisch**, d.h. sie bildet sich beim Wegfall der Kraft wieder voll zurück, jedoch geht die Proportionalität zur Auslenkung verloren.

Bei noch stärkerer Belastung kommen wir zunächst in einen nicht elastischen Bereich (die Verformungen sind nicht reversibel), schließlich reißt das Material. Im Einzelnen verhalten sich verschiedene Stoffe sehr unterschiedlich.

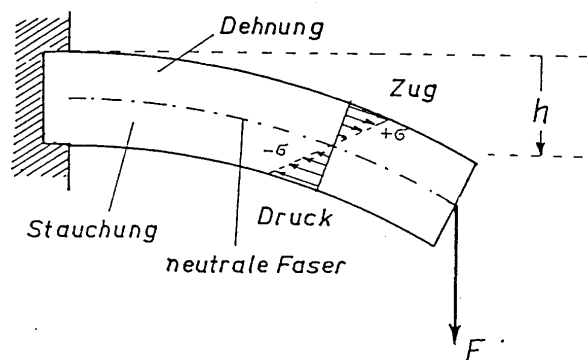


Abbildung 3. Biegung eines Stabes unter dem Einfluss einer Kraft

2.2 Apparative Grundlagen

Biegung

Wirkt die Kraft F am Stabende nicht in Stabrichtung sondern senkrecht zum Stab, so wird der Stab gebogen. Dabei wird der obere Teil des Stabes gedehnt, der untere gestaucht. Zwischen beiden Bereichen gibt es eine Zone – die **neutrale Faser** –, die weder gestaucht noch gedehnt wird, ihre ursprüngliche Länge also beibehält (Abb.3).

Wie sich die Zug- und Druckbeanspruchung über die Querschnittsfläche verteilen, ist

in der Abbildung an einer Stelle dargestellt. Diese Verteilung ist in allen Querschnittsflächen entlang des Stabes die gleiche. Die Betrachtungen beim Biegevorgang lassen erkennen, daß die maßgebende elastische Konstante bei der Biegung der E-Modul ist. Für die Senkung h des freien Stabendes liefert die Theorie für den einseitig eingespannten Stab:

$$h = \frac{l^3}{3EJ} F \quad (2.1)$$

Die Größe J heißt **Flächenträgheitsmoment**. J ist ganz entscheidend von der Querschnittsform des Stabes abhängig. Ohne auf die genaue Definition und Berechnungsmethode für J einzugehen, werden in der Abbildung für einige Profile die Flächenträgheitsmomente angegeben. Dabei wird eine in Richtung von F wirkende Belastung angenommen. Großes Flächenträgheitsmoment und damit hohe Steifigkeit ergibt sich

$$J = \frac{1}{12}(A^3 B) \quad J = \frac{\pi}{64}d^4 \quad J = \frac{1}{12}(A^3 B - a^3 b) \quad (2.2)$$

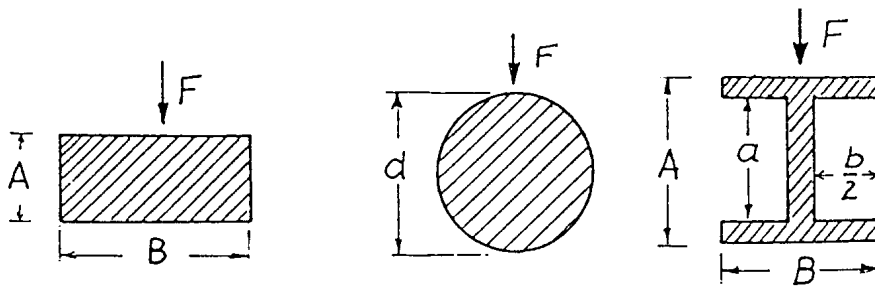


Abbildung 2.4: Flächenträgheitsmoment verschiedener Stabprofile

bei solchen Profilen, deren beanspruchten Zonen möglichst weit von der neutralen Faser entfernt sind.

Komplexe Formen (Doppel-T-Profil, Hohlrohr, ...) erhält man durch Subtraktion eines entsprechenden Anteils.

Man kann den Stab auch an beiden Enden auf Schneiden auflegen und die Kraft in der Mitte angreifen lassen. Diesen Fall kann man dadurch beschreiben, dass man sich die Mitte festgehalten denkt und die Kraft auf die beiden Enden verteilt. In diesem Fall entsteht die gleiche Durchbiegung, wenn man den halben Stab (aus l wird $l/2$) mit der halben Kraft auslenkt (aus F wird $F/2$):

$$E = \frac{l^3}{48 \cdot J} \cdot \frac{F}{h} \quad (2.3)$$

l = Schneidenabstand

2.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Man bestimme den E-Modul von Aluminium und Messing. (Dabei beachte man, dass es sich bei dem Alu-Stab um ein Hohlrohr handelt; das heißt, die entsprechenden Flächenträgheitsmomente sind voneinander abzuziehen, so dass dasjenige eines Hohlrohrprofils übrig bleibt.)

Versuchsdurchführung

Da der Schneidenabstand l sehr empfindlich (3. Potenz) in die Durchbiegung eingeht, muss er möglichst genau gemessen werden (pro Stab 3 Mal). Auch müssen die Messuhr und die Kraft genau in der Mitte zwischen den Schneiden angreifen. Man markiert sich die Lage der Schneiden auf dem Stab mit einem dünnen Bleistiftstrich und zeichnet sich die Mitte zwischen den Strichmarken an. Der Fühler der Messuhr muss genau auf dieser Mittelmarke sitzen. Die Querdimensionen der Stäbe misst man mit der Mikrometerschraube (wo nicht möglich mit der Schublehre) an jeweils drei verschiedenen Stellen und bildet den Mittelwert.

Für zwei Stäbe soll die Durchbiegung in Abhängigkeit von der angreifenden Kraft bestimmt werden. Den rechteckigen Messingstab lege man flach auf, den Alustab belaste man in der gezeichneten Lage. Die Belastung steigere man beim Messingstab in 10 g – Schritten bis 100 g, beim Alustab in 50 g – Schritten bis 500 g. Es empfiehlt sich, vor jeder Ablesung leicht an den Tisch zu klopfen, um eine zuverlässige Einstellung der Messuhr zu erreichen (äußere Skala ablesen, ein Skalenteil entspricht 0.1 mm).

Auswertung und Fehlerabschätzung

Auf Millimeterpapier trägt man dann die Durchbiegung h in Abhängigkeit der belastenden Masse m in einem Diagramm auf und ermittelt zunächst graphisch die Steigung $S^* = h/m$, welche dann in die Steigung $S = h/F$ umgerechnet wird. Man berechne J für das Hohlrohr.

Zusammen mit l und J ergibt sich daraus der E-Modul.

Für die Anfertigung der graphischen Darstellung und die Auswertung bezüglich S und ΔS beachte man die Hinweise im Abschnitt Fehlerabschätzung.

Um den Fehler für das Flächenträgheitsmoments des Hohlrohrprofils zu bestimmen, muss Gleichung (F.9) angewendet werden. Damit erhält man:

$$\Delta J = \frac{\pi}{64} \{ 4d_i^3 \Delta d_i + 4d_a^3 \Delta d_a \}$$

3. Torsionsmodul

Das muss man wissen

- *Fundamentale Wechselwirkungen*
- *Hookesches Gesetz – Harmonische/Nichtharmonische Schwingung*
- *Schwingungsgleichung – Schwingungsdauer – Frequenz*
- *Drehbewegung: Trägheitsmoment – Drehmoment – Elastizitäts-/Torsions-Modul*
- *Physikalische Grundlagen, siehe Versuch 2*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 1, 2 und 4

Anwendungen:

- Drehbewegungen
- Pflanzen drehen sich dem Licht zu

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Kraft und Drehmoment, Energie und potenzielle Energie? Einheiten?

Was beschreibt das Hooke'sche Gesetz und was der „Satz von Steiner“?

Beschreiben Sie die Analogie zwischen lin. und Rotationsbewegung!

Wovon hängt das Trägheitsmoment ab und wie leitet man es her?

Was ist elastisch und plastisch?

Was beschreibt das E-Modul und das Flächenträgheitsmoment?

Wie hängen Kraft und Potenzial zusammen?

Ableiten das Hooke'schen Gesetzes aus Potenzial?

Was ist eine harmonische Schwingung?

Was sind Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer?

Wovon hängt die Schwingungsdauer ab?

Wieso entsteht beim Feder- und Torsionspendel eine harmonische Schwingung?

3.1 Physikalische Grundlagen

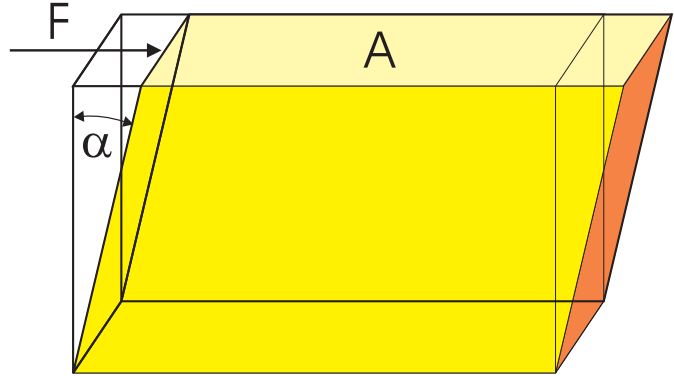
Torsionsmodul

Während es für Flüssigkeiten und Gase nur eine elastische Konstante gibt (Volumenelastizität), sind für feste Körper mehrere Größen nötig, um das elastische Verhalten vollkommen zu

beschreiben (Formelastizität). Dies ist im Gitteraufbau begründet, der nicht nur einer Annäherung der Gitterbausteine einen Widerstand entgegensetzt, sondern auch einer seitlichen Verschiebung. Das Verhalten eines Festkörpers gegenüber einer tangentialen Kraft wird beschrieben durch den sogenannten Scherungs-, Schub- oder Torsionsmodul.

Wirkt auf die Deckfläche A eines Quaders bei festgehaltener Grundfläche eine tangentiale Kraft F (Schub- oder Scherkraft), dann werden die zu A und F senkrechten Seitenflächen um den Winkel α geschert. Dieser ist für kleine α proportional zur Schubspannung $\tau = F/A$:

$$\alpha = \frac{1}{\phi} \tau \quad (3.1)$$



Der Proportionalitätsfaktor ϕ ist eine Materialkonstante und heißt **Torsionsmodul**. Seine Einheit ist N/m^2 .

Harmonische Schwingungen

Diese Bewegungsform ist von sehr großer praktischer Bedeutung, da sie bei vielen Situationen in der Physik auftritt. Ein Körper führt stets dann Schwingungen aus, wenn er durch rücktreibende Kräfte an eine stabile Ruhelage gebunden wird. Sind diese rücktreibenden Kräfte proportional zur Größe der Auslenkung des Körpers aus seiner Ruhelage, erhält man eine exakt sinusförmige Schwingung. Man nennt diese Schwingung auch harmonisch.

Wir wollen als einfaches Beispiel ein sogenanntes Federpendel betrachten (Abb.1).

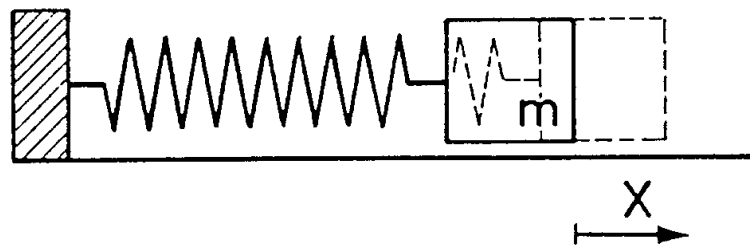


Abbildung 1. Federpendel

Eine Masse m ist an einer Feder mit der Federkonstanten k befestigt und kann sich reibungsfrei über eine horizontale Unterlage bewegen. Wird die Feder gedehnt oder zusammengepresst, dann wirkt eine rücktreibende Kraft der Größe

*

$$F = -k x$$

Was für eine Bewegung führt die Masse nun aus, wenn sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen wird?

Um diese Frage beantworten zu können, muß man von der **Grundgleichung der Mechanik** (II. Newtonsches Axiom) $F = m a$ ausgehen. Für die obige Kraft lautet diese Gleichung:

*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x \quad (3.2)$$

(Die Beschleunigung a ist gleich der zweiten Ableitung des Weges nach der Zeit!)

Die Lösung dieser Gleichung gibt uns $x(t)$, den Ort der Masse als Funktion der Zeit. Sie lautet ("überzeugen Sie sich durch Einsetzen!):

*

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

A nennt man die Amplitude, φ die Phase der Schwingung. Beide hängen von den Anfangsbedingungen ab. φ besitzt jedoch nur eine Bedeutung, wenn zwei (oder mehrere) Schwingungen gleichzeitig betrachtet werden. Besitzen zwei Schwingungen die Phasendifferenz φ , dann heißt das, daß sie zeitlich verschoben schwingen. Sie erreichen dann stets eine Zeitspanne $\Delta t = (T/2\pi)\varphi$ nacheinander den gleichen Schwingungszustand (z.B. den Wert null oder die maximale Auslenkung).

Abb.2 zeigt zwei um die Phase φ verschobene harmonische Sinusschwingungen mit der Amplitude A . ω_0 nennt man die **Eigenfrequenz** der Schwingung.

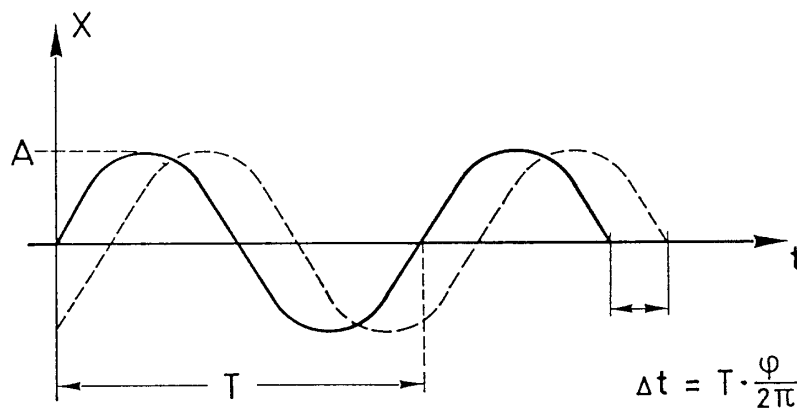


Abbildung 2. Die harmonische Schwingung (Sinusschwingung)

Sie hängt in der folgenden Weise von den Pendelgrößen ab:

$$* \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (3.3)$$

ν ist die Frequenz, T die **Schwingungsdauer** der Schwingung.

Differentialgleichungen, wie wir sie oben für die Auslenkung x einer Masse an einer Feder kennengelernt haben, treten bei vielen Problemen für andere Variablen auf. Stets liefert dann die mathematische Lösung eine zeitliche Änderung der betreffenden Größe, die durch eine Sinusfunktion beschrieben wird.

Drehschwingungen

In vielen physikalischen Meßgeräten (Galvanometer, Gravitationswaage) ist ein um eine festgelegte Achse drehbarer Körper mit einer Spiralfeder oder einem verdrillbarem Draht verbunden (Abb.3).

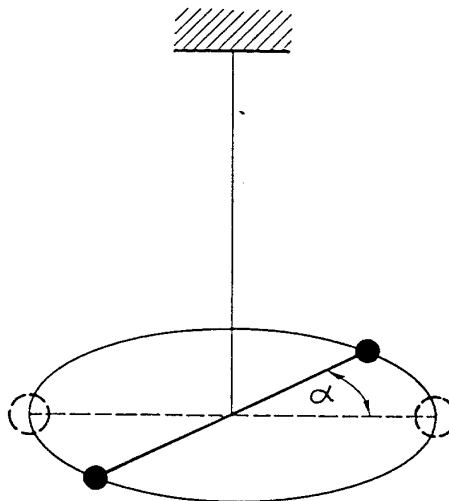


Abbildung 3. Drehpendel

Wird es um den Winkel α aus der Ruhelage herausgedreht, dann erzeugt der Draht (oder die Feder) ein rücktreibendes Drehmoment, das der Ausdrehung proportional ist

$$* \quad M = -D\alpha$$

D nennt man das Direktions-(oder Richt-)moment. Besitzt der Körper außerdem das Trägheitsmoment J (in manchen Büchern auch mit I benannt), dann lautet die Bewegungsgleichung

$$* \quad J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -D \alpha$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.2) liefert uns für die Eigenfrequenz eines Drehpendels

$$* \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \quad (3.4)$$

3.2 Apparative Grundlagen

Bei der Drillung eines Drahtes wirken nur Schubkräfte. Zur Bestimmung des Drehmomentes M , das erforderlich ist, um einen Draht zu verdrillen, denkt man sich diesen durch koaxiale Zylinderschnitte in Hohlzylinder der Wandstärke dr und diese wieder in Segmente der Grundfläche dA und mit der Länge L (Drahtlänge) zerlegt (Abbildung 3.4).

$$dA = dr(r d\varphi) \quad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{r\varphi_0}{L} \quad (3.6)$$

Dazu ist eine Kraft F nötig, die an der Fläche dA tangential angreift und aus den Gleichungen (3.1), (3.5) und (3.6) berechnet werden kann:

$$dF = \alpha \phi dA = \frac{\phi}{L} r^2 dr d\varphi \cdot \varphi_0$$

Diese Kraft erzeugt ein auf die Drahtachse bezogenes Drehmoment

$$dM = r dF = \frac{\phi}{L} r^3 dr d\varphi \cdot \varphi_0$$

Durch Integration über den Drahtquerschnitt erhält man das am Draht (Länge L , Durchmesser d) angreifende Drehmoment

$$M = \frac{\phi}{L} \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} r^3 dr d\varphi \cdot \varphi_0 = \frac{\pi \phi d^4}{32 L} \cdot \varphi_0 \quad (3.7)$$

Das sogenannte Direktionsmoment D ist das pro Winkeleinheit φ_0 bezogene Drehmoment :

$$D = \frac{M}{\varphi_0} = \left(\frac{\pi}{32} \right) \frac{\phi d^4}{L}. \quad (3.8)$$

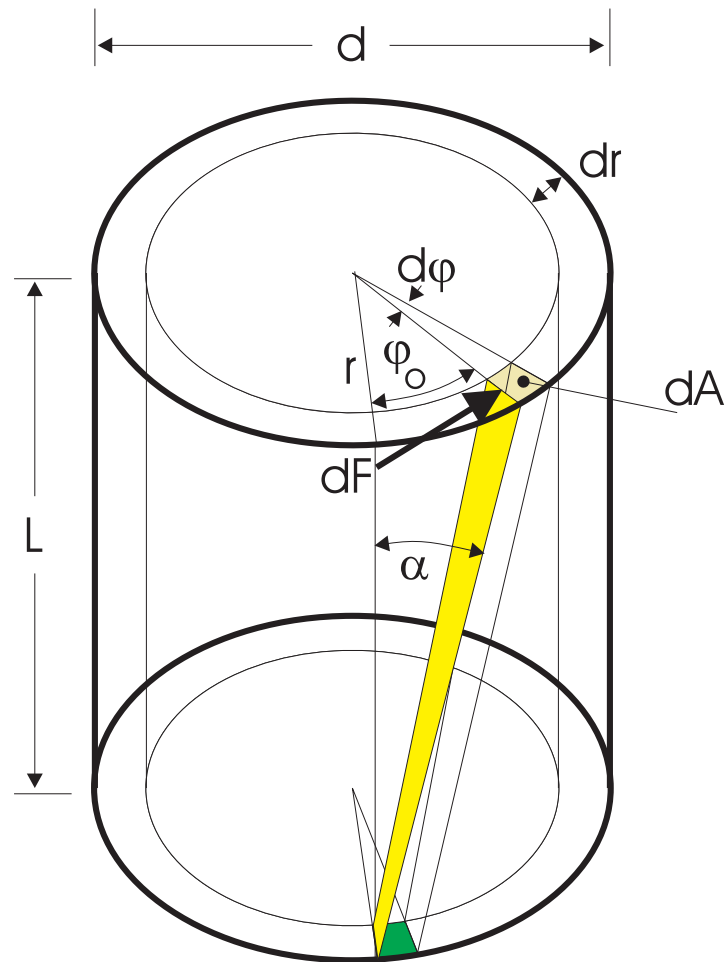


Abbildung 3.4: Torsion eines Drahtes: Werden die Endflächen des Drahtes um den Winkel φ_0 gegeneinander gedreht, so werden alle Hohlzylinder um den Winkel α geschert.

Das Torsionspendel

Damit ist das rückstellende Drehmoment M proportional zur Verdrillung φ_0 : $M = D\varphi_0$. Wir können also den Draht zu harmonischen Drehschwingungen anregen und aus der Schwingungszeit T_0 die Größe D ermitteln. Dazu hängt man an den Draht, dessen Torsionsmodul ϕ bestimmt werden soll, einen beliebigen Körper, z.B. eine Metallscheibe, mit dem (unbekannten) Trägheitsmoment J_0 und mißt die Schwingungsdauer T_0 . Für diese gilt

*

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{D}} \quad (3.9)$$

Nun befestigen wir zusätzlich einen Körper, dessen Trägheitsmoment leicht ausgerechnet werden kann, z.B. einen zum Draht coaxialen Metallring mit dem Trägheitsmoment J . Damit misst man die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J}{D}} \quad (3.10)$$

Eliminiert man das unbekannte J_0 aus den Gleichungen (3.9) und (3.10), so erhält man für das Direktionsmoment

$$D = \frac{4\pi^2 J}{T^2 - T_0^2} \quad (3.11)$$

und mit Gleichung (3.8)

$$\phi = 128 \pi \frac{LJ}{d^4(T^2 - T_0^2)} \quad (3.12)$$

Das Trägheitsmoment J eines Ringes (Außenradius R_a , Innenradius R_i , Höhe h , Masse m , Volumen V und Dichte ρ) ergibt sich zu

$$J = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV = 2\pi\rho h \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr = \frac{\pi}{2}\rho h(R_a^4 - R_i^4)$$

*	$J = \frac{m}{2}(R_a^2 + R_i^2) \quad (3.13)$
---	---

Damit lautet das Endergebnis:

*	$\phi = 64 \pi \frac{mL(R_a^2 + R_i^2)}{d^4(T^2 - T_0^2)} \quad (3.14)$
---	---

3.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Man bestimme den Torsionsmodul von Eisen mit Hilfe von Drehschwingungen eines Eisendrahtes.

Versuchsdurchführung

Es ist jeweils die Dauer von 10 kompletten Schwingungen zu messen und daraus die Schwingungsdauer T_0 (Messung mit Schraube) und T (mit Schraube und bekanntem Trägheitsmoment) zu berechnen. Diese Messungen sind 10 mal zu wiederholen und die erhaltenen Werte zu mitteln. Die Winkelauslenkung zu Beginn sollte nicht mehr als 90° betragen.

Der Durchmesser d des Drahtes wird an 10 verschiedenen Stellen mit einer Mikrometerschraube gemessen und die Werte ebenfalls gemittelt.

R_i und R_a werden mit einer Schublehre bestimmt, wobei jeweils drei Werte gemittelt werden.

Die Länge L des Drahtes wird mit einem Maßband mehrmals gemessen und der Mittelwert gebildet.

Zur Bestimmung der Masse m steht eine Küchenwaage zur Verfügung.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Entsprechend Gleichung (3.14) errechnet sich der relative Fehler des Torsionsmoduls zu

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + 4\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta(R_a^2 + R_i^2)}{(R_a^2 + R_i^2)} + \frac{\Delta(T^2 - T_0^2)}{(T^2 - T_0^2)}$$

Außerdem gilt:

$$\Delta(R_a^2 + R_i^2) = 2(R_a\Delta R_a + R_i\Delta R_i)$$

$$\Delta(T^2 - T_0^2) = 2(T\Delta T + T_0\Delta T_0)$$

Die Fehler Δ ergeben sich als größte Abweichung innerhalb der Meßreihe vom Mittelwert. Bei der Bestimmung von L achte man besonders auf die beiden Befestigungen, um Anfang und Ende von L genau zu finden. Δm schätze man aus der Empfindlichkeit der Waage sinnvoll ab.

4. Bestimmung der Gravitationskonstanten

Das muss man wissen

- *Harmonische Schwingung – Herleitung der Schwingungsgleichung - gedämpfte Schwingung*
- *Torsionsmodul – Drehmoment – Trägheitsmoment*
- *Gravitationsgesetz – Vergleich mit Coulombgesetz – Erdbeschleunigung*

Anwendungen:

- Einschätzung des Größenverhältnisses zwischen elektrostatischer und Gravitationskraft
- Fluchtgeschwindigkeit von Planeten
- Massenverteilung im Universum und dunkle Materie
- Gravitationswellen

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Masse, Kraft, Gewicht und Drehmoment und in welchen Einheiten werden sie gemessen?

Wie funktioniert die Gravitationswaage?

Wieso entsteht aus der Gravitations-Kraft eine Drehbewegung?

Wie lautet das Gravitationsgesetz? Was genau besagt es?

Welche fundamentalen Wechselwirkungen gibt es außerdem?

Was sind Beschleunigung und Erdbeschleunigung?

Wieso fällt der Mond nicht auf die Erde?

Was beschreibt das Hooke'sche Gesetz?

Was ist eine harmonische Schwingung?

Was sind Amplitude, Frequenz und Schwingungsdauer?

Was ist eine gedämpfte Schwingung?

Wie liest man aus einem Graphen die Schwingungsdauer ab?

Wovon hängt die Schwingungsdauer ab?

4.1 Physikalische Grundlagen

Das Gravitationsgesetz

Zwei Massen m_1 und m_2 , deren Schwerpunkte den Abstand r voneinander haben, ziehen sich mit einer Kraft F (Massenanziehung, Gravitation) an, für deren Betrag gilt:

*	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4.1)$
---	---

Der Proportionalitätsfaktor G hat den Wert: $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$. Man nennt ihn die Gravitationskonstante.

Man kann G bestimmen, indem man für eine Anordnung die Werte für F , m_1 , m_2 und r misst.

4.2 Apparative Grundlagen

Die Gravitationsdrehwaage (Abb. 4.1)

Zwei kleine Bleikugeln (Masse m_1) sind an den Enden einer dünnen Stange befestigt. Die Stange ist waagrecht an einem dünnen vertikalen Draht (Torsionsdraht T) aufgehängt. In Abwesenheit anderer Massen stellt sich eine bestimmte Ruhelage (0) ein.

Bringt man zwei große Bleikugeln (Masse m_2) seitlich in gleicher Höhe neben den kleinen Kugeln ortsfest an (z.B. in Stellung P1), dann werden durch die auftretenden Anziehungskräfte Drehmomente erzeugt. Diese führen zu einer Verdrillung des Drahtes um einen Winkel α_0 , der mit Hilfe eines am Draht befestigten Spiegels und eines Lichtzeigers gemessen werden kann.

Die Drehwaage kommt in einer neuen Lage zur Ruhe (I), die sich um den Winkel α_0 von der Ausgangslage unterscheidet. In dieser Stellung muss die Summe aller wirkenden Drehmomente gleich null sein. Es sind dies:

1. Das durch die Anziehungskraft der benachbarten großen Kugel erzeugte Drehmoment M_1

*	$M_1 = 2dF_1 = 2dG \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (4.2)$
---	---

(r = Abstand der Kugelmittelpunkte, d = Abstand der kleinen Kugeln vom Drehpunkt; Faktor 2, weil zwei Kugelpaare zum Drehmoment beitragen)

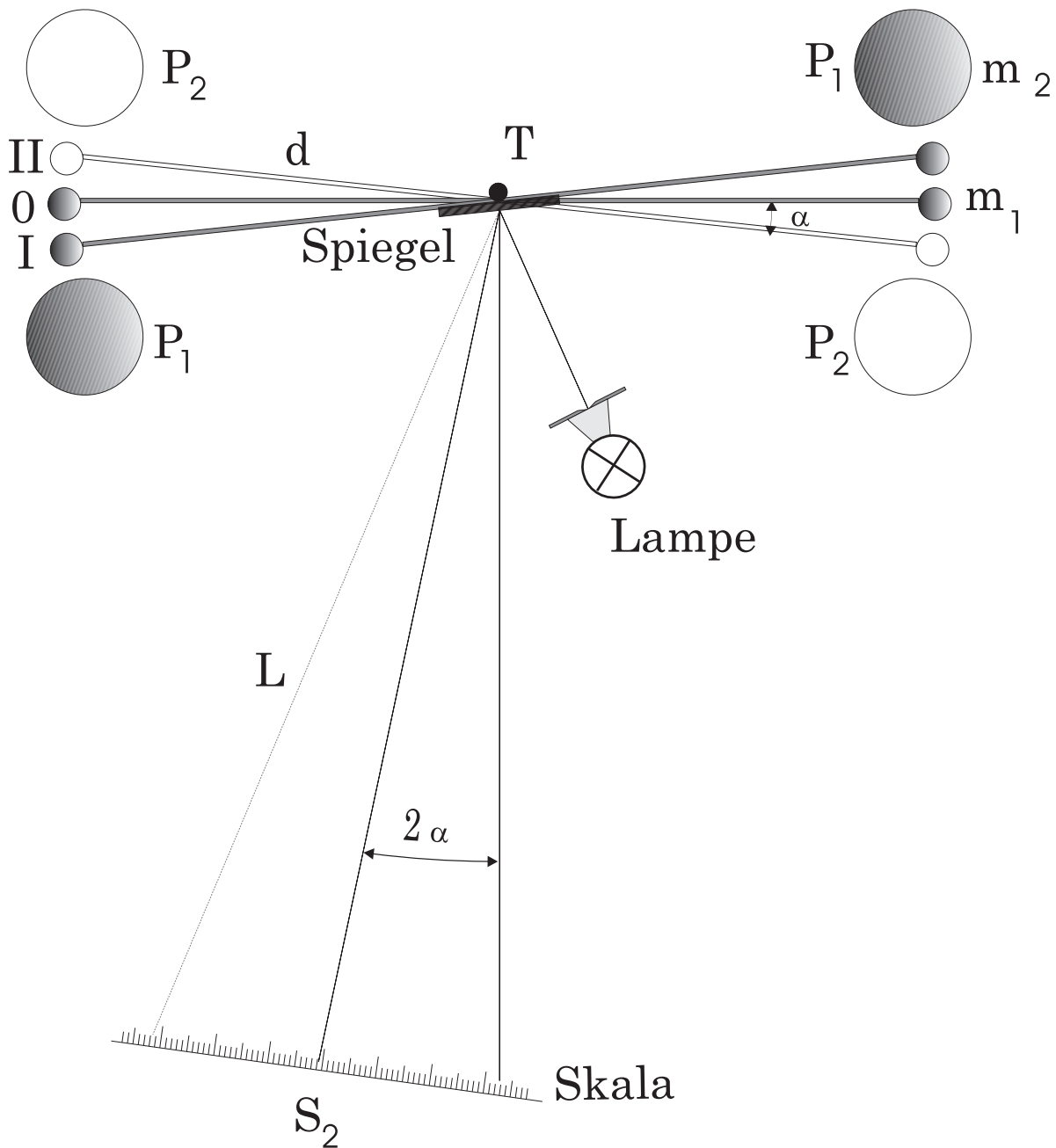


Abbildung 4.1: Die Gravitationswaage.

2. Das durch die entferntere große Kugel hervorgerufene Drehmoment M_2 (siehe auch systematische Fehler). Die Anziehungskraft zwischen diesen Kugeln ist

$$F_2 = G \frac{m_1 m_2}{b^2}, \quad \text{wobei} \quad b = \sqrt{r^2 + 4d^2} \quad \text{ist.}$$

Jedoch nur die zur Verbindungslinie zwischen den beiden kleinen Kugeln senkrechte

Komponente erzeugt ein Drehmoment (Abb. 4.2). Man erhält F'_2 aus

$$\frac{F'_2}{F_2} = \frac{r}{b} \quad \text{zu}$$

$$F'_2 = F_2 \frac{r}{b} = G \frac{m_1 m_2}{b^2} \cdot \frac{r}{b} = F_1 \cdot \frac{r^3}{b^3}.$$

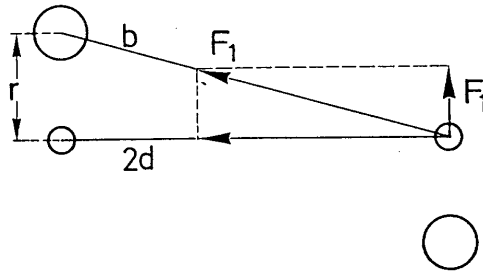


Abbildung 4.2: Komponentenzzerlegung der Kraft F zwischen den entfernten Kugeln.

Insgesamt ergibt dies ein durch die großen Massen verursachtes Drehmoment von

$$M = M_1 - M_2 = 2dG \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \beta \quad (4.3)$$

Dabei wurde für den Ausdruck $(1 - r^3/b^3)$ der Buchstabe β geschrieben.

3. Im Gleichgewicht wird dieses Drehmoment kompensiert durch das rücktreibende Drehmoment M' des verdrehten Drahtes.

*

$$M' = D\alpha_0 \quad (4.4)$$

Das Direktionsmoment D lässt sich aus der Schwingungsdauer T des Systems ermitteln.

*

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}},$$

wobei das Trägheitsmoment $J = 2m_1 d^2$ ist.

Zur Bestimmung von α_0 werden die Kugeln in Stellung P2 gebracht und die Differenz S_0 der Ausschläge des Lichtzeigers auf der L Meter entfernten Skala abgelesen. Da der vom Lichtstrahl überstrichene Winkel doppelt so groß ist wie der Drehwinkel des Spiegels, gilt

$$4\alpha_0 = \frac{S_0}{L} \quad \text{und} \quad \alpha_0 = \frac{S_0}{4L}.$$

Für den Gleichgewichtszustand muss mit (4.3) und (4.4) gelten:

$$M = M'$$

und nach Einsetzen aller Größen und Auflösen nach G ergibt sich:

$$G = \frac{4\pi^2 dr^2 \alpha_0}{T^2 m_2 \beta} = \frac{\pi^2 dr^2 S_0}{T^2 m_2 L \beta}. \quad (4.5)$$

4.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Man bestimme die Gravitationskonstante G mit der Gravitationswaage. Es sollte bereits *während* der Messung protokolliert, gezeichnet und die **weiteren Aufgaben** gelöst werden.

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 4.3 gezeigt.

Zu Beginn werden die großen Kugeln in die Stellung P1 gebracht. Das System der kleinen Kugeln führt dann eine gedämpfte Drehschwingung aus, die in einem Diagramm (Skalenteile gegen die Zeit auftragen) dargestellt wird. Sollte die angeregte Schwingung zu groß sein, so dass der Lichtstrahl über die Skala geht muss so lange gewartet werden bis die Schwingung wieder komplett registriert werden kann. Es sollen jeweils drei komplette Schwingungen aufgezeichnet werden. **Vor** dem 1. Umkehrpunkt beginnen und **nach** dem letzten Umkehrpunkt beenden! Dazu wird der Lichtzeiger alle 30 Sekunden abgelesen und der Wert protokolliert und ins Diagramm eingetragen. Beachten Sie bei der zeichnerischen Ermittlung der Umkehrpunkte unbedingt den Abschnitt “Graphische Darstellungen” ! (Ein einfaches Verbinden der Messpunkte ist **falsch**!) Die Ruhelage S_1 ergibt sich dann näherungsweise durch mitteln der Amplitudenmaxima und minima. Dann werden die großen Kugeln in Stellung P2 gedreht, die neue gedämpfte Schwingung in das gleiche Diagramm eingetragen und auf die gleiche Weise die Ruhelage S_1 berechnet.

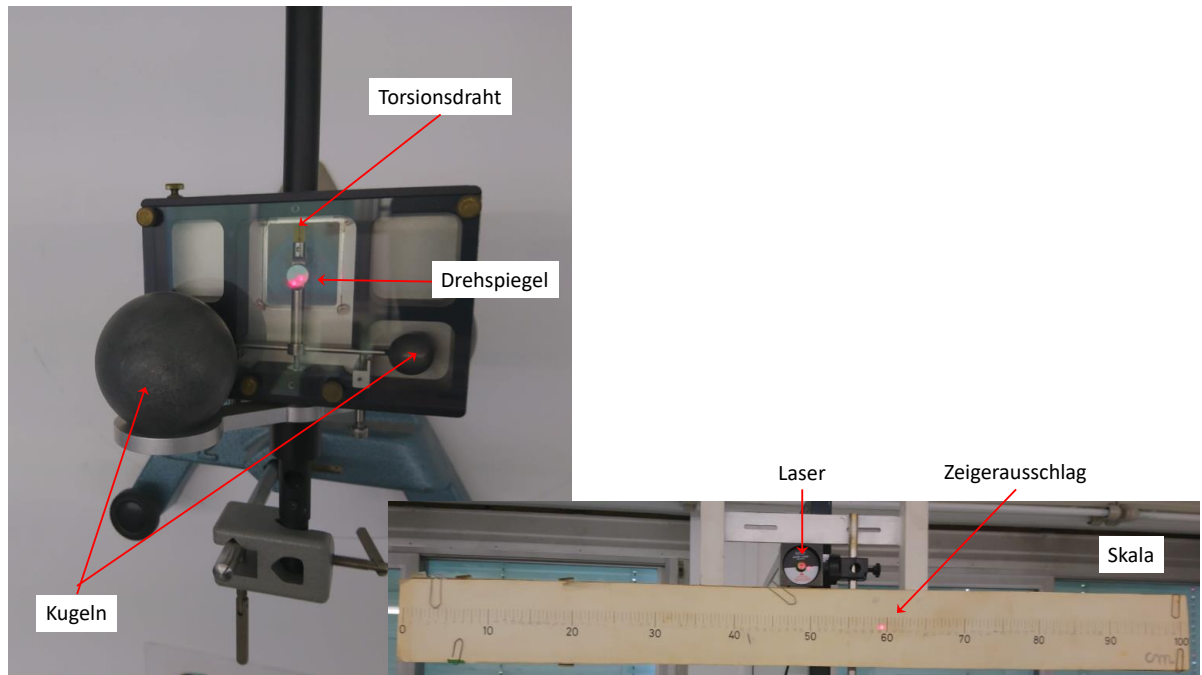


Abbildung 4.3: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Bitte beachten:

Beim Umlegen der schweren Kugeln ist streng darauf zu achten, dass diese dabei nicht gegen das Gehäuse stoßen. Dadurch können die kleinen Kugeln zu unkontrollierten Schwingungen angeregt werden, die nur sehr langsam abklingen. Eine ordnungsgemäße Durchführung des Versuches ist dann unmöglich!

Das Umlegen vom Assistenten durchführen lassen !!

Auswertung und Fehlerabschätzung

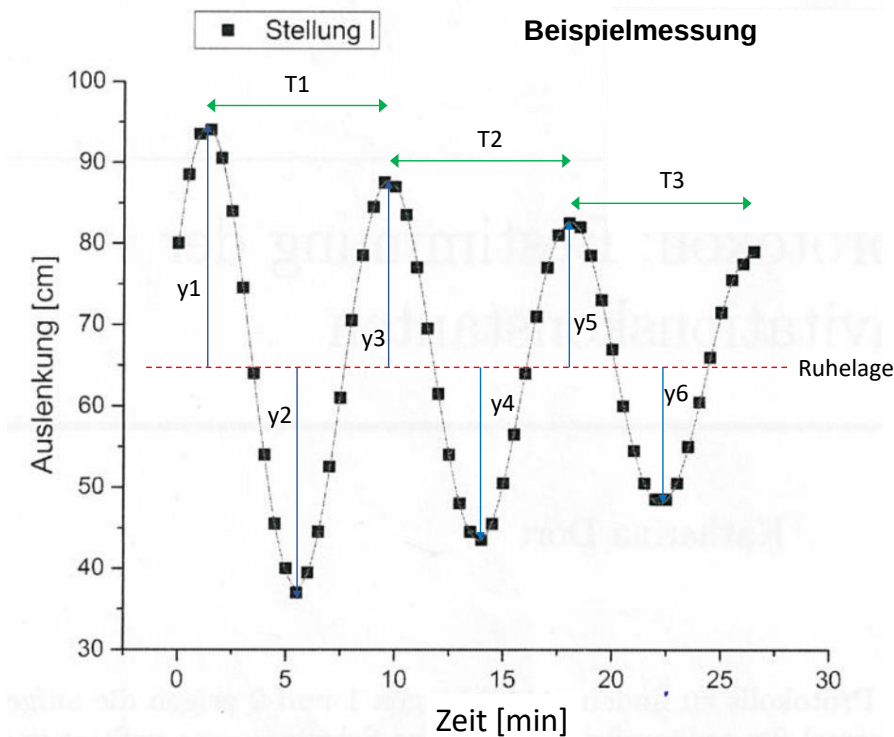
S_0 erhält man aus dem Betrag der Differenz zwischen den Mittellagen. Der Fehler ΔS_0 ist 0.5 cm.

Aus den insgesamt sechs Schwingungen werden die Periodendauern gemittelt. Die größte Abweichung eines Wertes vom Mittelwert ergibt ΔT .

Die Gravitationskonstante wird gemäß Gleichung (4.5) mit Hilfe der folgenden apparativen Kennwerte berechnet:

Masse der großen Kugeln	m_2	1,5 kg
Masse der kleinen Kugeln	m_1	38,3 g
Abstand der Kugelzentren	r	46,5 mm
Abstand kleinen Kugeln zum Drehpunkt	d	50 mm
Länge des Lichtzeigers	L	(464 ± 3) cm

Das Verfahren zur Bestimmung der Auslenkung S_0 und der Schwingungsdauer ist in Abb. 4.4 anhand einer symbolischen Beispielmessung erläutert.



Hinweise zur Auswertung:

Die Ruhelage S ergibt sich aus den maximalen Zeigerausschlägen wie folgt:

$$S = \frac{1}{3} \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2} + \frac{y_5 + y_6}{2} \right)$$

Aus den Messungen in Stellung 1 (S_1) und in Stellung 2 (S_2) wird die Auslenkung S_0 berechnet:

$$S_0 = |S_2 - S_1|$$

Die Periodendauer T wird direkt aus den gezeichneten Schwingungen berechnet:

$$T = \frac{1}{6} (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6)$$

wobei in Stellung 1 T_1 - T_3 wie in der Beispielmessung gemessen werden und sich T_4 - T_6 aus der Stellung 2 ergeben.

Abbildung 4.4: Beispielmessung zur Erklärung des Messverfahrens. .

Weitere Aufgaben

- Man berechne mit Hilfe der Gravitationskonstanten die Masse und die mittlere Dichte der Erde. Hinweis: Man setze die Gewichtskraft eines Körpers gleich der Gravitationskraft. (Literaturwert von G verwenden; Erdradius = 6360 km)
- Wie groß ist das Verhältnis Gravitationskraft zu elektrostatischer Abstoßung zwischen zwei Elektronen?

5. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit der Kundtschen Röhre

Das muss man wissen

- *Harmonische Wellen – Reflexion von Wellen – Stehende Wellen*
- *Welle – Frequenz – Ausbreitungsgeschwindigkeit – Wellenlänge – Phase*
- *Schallwellen – Schallgeschwindigkeit in Gasen und Festkörpern – Elastizitätsmodul*
- *spezifische Wärmekapazität – adiabatische Zustandsänderung – Freiheitsgrade*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 7 und 8

Anwendungen:

- Physiologie des Ohrs und der Sprachorgane
- Fourieranalyse
- Durchbrechen der Schallmauer
- unterschiedliche Stimmhöhe beim bzw. nach dem Einatmen verschiedener Gase
- Stehende Wellen in Musikinstrumenten
- Bestimmung des Adiabatenexponenten

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was ist eine harmonische Schwingung?

Was sind Amplitude, Phase Frequenz und Schwingungsdauer?

Was ist eine Welle?

Was bedeutet Reflexion (offenes - geschlossenes Ende)?

Was sind stehende Wellen, Knoten und Bäuche?

Was ist die thermische Bewegung der Moleküle?

Wie und mit welcher Geschwindigkeit wird der Schall in Gasen transportiert?

Was sind Kelvin und Grad Celsius? Wie rechnet man um?

Was sind Freiheitsgrade?, Was ist der Adiabatenexponent?

5.1 Physikalische Grundlagen

Harmonische Wellen

Wellen sind Störungen, die sich in Raum und Zeit ausbreiten. Lässt sich diese Störung zeitlich und räumlich durch eine Sinusfunktion beschreiben, dann spricht man von einer **harmonischen Welle**. Dabei wird zwischen **transversalen** und **longitudinalen** Wellen unterschieden. Bei transversalen Wellen breitet sich die Störung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle aus, longitudinale Wellen schwingen in Ausbreitungsrichtung.

Aus der Abb. 5.1 ist zu erkennen, dass sich ein bestimmter Schwingungszustand (z.B. ein Wellenberg) in der Zeit T (Schwingungsdauer) um die Strecke λ (Wellenlänge) weiterbewegt. Bezeichnen wir mit v die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** der Welle, dann

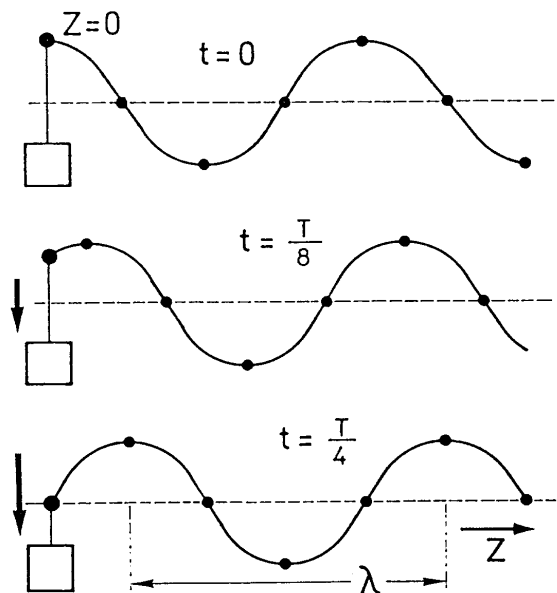


Abbildung 5.1: Ausbreitung einer Welle.

gilt:

$*$	$\lambda = vT$	oder	$\lambda = \frac{v}{\nu},$
-----	----------------	------	----------------------------

wobei ν die Erregerfrequenz ist. Daraus ergibt sich der wichtige Zusammenhang

*	$v = \lambda\nu$	(5.1)
---	------------------	-------

Um die mathematische Darstellung für die harmonische Welle zu finden, betrachten wir eine kontinuierliche, homogene Saite, die an einer Stelle $z = 0$ von einer harmonischen Kraft

$$F(t) = A \sin(\omega t)$$

auf und ab bewegt wird. Die Störungen sollen sich in der positiven z -Richtung bewegen. Wie ist der zeitliche Verlauf der Auslenkung $y(z, t)$ an der Stelle z ?

Wir wissen aus Erfahrung, dass sich die Wellen mit konstanter Geschwindigkeit ausbreiten, solange sich die Eigenschaften des Mediums (z.B. des Seiles) nicht ändern.

Da die Auslenkung bei $z = 0$ in Phase mit der treibenden Kraft ist, kennen wir dort den zeitlichen Verlauf

$$y(0, t) = A \sin(\omega t)$$

Wir können sagen, dass die Bewegung eines Teiles des Seiles an einer beliebigen Stelle z dieselbe ist wie die des Seiles an der Stelle $z = 0$ zum früheren Zeitpunkt t' , wobei t' um die Zeit vor t liegt, die die Welle zum Durchlaufen der Strecke z mit der Geschwindigkeit v benötigt.

$$t - t' = \frac{z}{v} \qquad \text{oder} \qquad t' = t - \frac{z}{v}$$

So erhalten wir die raum-zeitliche Beschreibung einer laufenden harmonischen Welle:

$$y(z, t) = y(0, t') = A \sin(\omega t') = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right]$$

Führen wir noch den Begriff der Wellenzahl k ein ($k = 2\pi/\lambda = \omega/v$), dann lautet der Zusammenhang:

*	$y(z, t) = A \sin(\omega t - kz)$
---	-----------------------------------

Reflexion von Wellen

Treffen Wellen auf eine Stelle, wo sich die Eigenschaften des Mediums, das als Träger der Wellen dient, ändern, dann tritt im allgemeinen Fall eine **Reflexion** ein. Die Welle kehrt ihre Ausbreitungsrichtung um und läuft zurück. Dabei hängt das Verhalten der reflektierten Welle entscheidend vom Charakter der Übergangsstelle ab.

Ist die Übergangsstelle so beschaffen, dass dort die Amplitude der Welle stets Null sein muss (festgebundenes Seilende), dann wird die Welle mit umgekehrtem Vorzeichen reflektiert. Ist an dieser Stelle die rücktreibende Kraft auf das Seilende gleich Null (freies Ende), dann erfolgt keine Vorzeichenumkehr.

Stehende Wellen

Lassen wir eine Welle gegen eine Reflexionsstelle laufen, dann überlagern sich im Raum davor die einfallende (gestrichelt) und die reflektierte (strichpunktiert) Welle. Das Ergebnis dieser Überlagerung (durchgezogene Kurve) soll an Abb. 5.2 verdeutlicht werden. Teilbild (1) zeigt die Situation, bei der sich die beiden Wellen gerade überdecken, d.h.

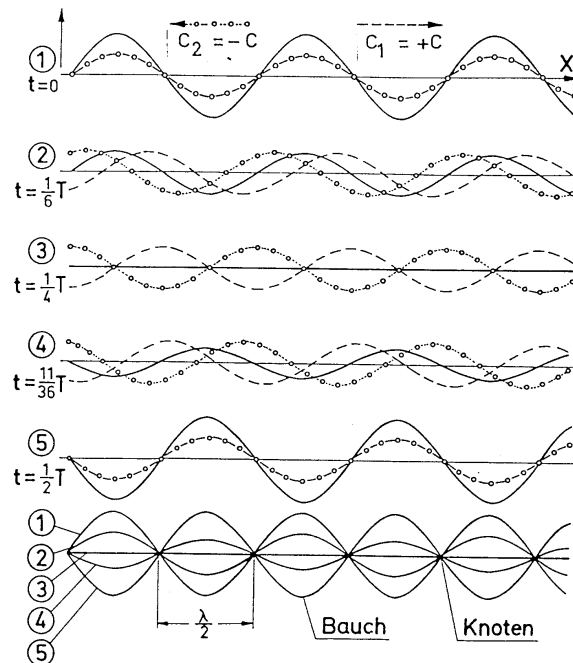


Abbildung 5.2: Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen.

einen Gangunterschied von Null haben (der Zeitpunkt wurde hier willkürlich $t = 0$ gesetzt).

Teilbild (2) zeigt die Wellen zur Zeit $t = T/6$ ($T =$ Schwingungszeit): Die Welle c_1 ist um $\lambda/6$ nach rechts und die Welle c_2 um $\lambda/6$ nach links gewandert.

In Teilbild (3) haben die Wellen einen Gangunterschied von $\lambda/2$, und die Addition zu diesem Zeitpunkt ergibt an allen Orten Null.

Die Teilbilder (4) und (5) zeigen die Wellen zu zwei späteren Zeitpunkten. Im untersten Teilbild sind zum besseren Vergleich alle fünf Zustände der Überlagerung zusammen gezeichnet. Man sieht, dass in regelmäßigen Abständen von $\lambda/2$ zu keiner Zeit eine Auslenkung des Seiles erfolgt (Knoten der Bewegung).

Die mathematische Addition der beiden Wellen ergibt folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 y(z, t) &= \text{einf. Welle} + \text{refl. Welle} \\
 &= A \sin(\omega t - kz) + A \sin(\omega t + kz) \\
 &= A \sin(\omega t) \cos(kz) - A \cos(\omega t) \sin(kz) + \\
 &\quad A \sin(\omega t) \cos(kz) + A \cos(\omega t) \sin(kz) \\
 &= 2A \sin(\omega t) \cos(kz).
 \end{aligned}$$

Das ist keine laufende Welle mehr. Es gibt nämlich Zeiten ($\cos(\omega t) = 0$), zu denen die Welle überall verschwindet und es gibt Orte, an denen die Auslenkung immer verschwindet ($\sin(kz) = 0$, Schwingungsknoten). Da diese eine feste Lage im Raum haben, spricht man von einer **stehenden Welle**.

Eigenfrequenz einer stehenden Welle

Schließt man eine stehende Welle zwischen zwei reflektierenden Wänden im Abstand L ein (z.B. Festhalten des Seiles im Abstand L), dann können nur Wellen entstehen, wenn gilt:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots$$

Für ein bestimmtes L sind stehende Wellen nur mit bestimmten Wellenlängen (bzw. Frequenzen) möglich.

Schallwellen

Bei Schallwellen in Gasen handelt es sich um periodische Druck-(oder Dichte-) Schwankungen, die in Fortpflanzungsrichtung auftreten. Die Gasmoleküle führen dabei keine Schwingungen aus (dazu wäre eine rücktreibende Kraft nötig). Die Fortpflanzung der Druckwelle entsteht durch Stöße der Moleküle, die sich mit ihrer thermischen Energie bewegen. Die **Schallgeschwindigkeit** ist daher die Geschwindigkeit der thermischen Bewegung der Moleküle.

Da sich die Gasteilchen in der Nähe einer festen Wand nicht ungehindert bewegen können, entspricht dies bei der Reflexion dem Fall des festgehaltenen Seiles (Bewegungsknoten). Dies führt andererseits zur Ausbildung von starken Druckschwankungen an dieser Stelle (Druckbauch). Dieser Zusammenhang gilt für den gesamten Bereich der stehenden Schallwelle: An den Stellen geringster Teilchenbewegung (Bewegungsknoten) liegen die Druckbäuche (Orte größter Druckschwankungen) und umgekehrt.

Schallgeschwindigkeit

Die Ausbreitung einer Welle in Gasen oder Flüssigkeiten entspricht einer Änderung des Drucks in dem Medium. In den Verdichtungen (Verdünnungen) des Mediums wird jedoch nicht nur der Druck p , sondern auch die Temperatur T erhöht (erniedrigt). Diese Temperaturschwankungen können jedoch den Druckschwankungen nicht so schnell folgen: Es handelt sich hier also um einen **adiabatischen Prozess**.

Dadurch werden die Druckunterschiede in der Schallwelle noch vergrößert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwelle in Gasen ist gegeben durch:

*	$v = \sqrt{\frac{\kappa \cdot p}{\rho}}, \quad (5.2)$
---	---

wobei der **Adiabatexponent** $\kappa = c_p/c_V$ das Verhältnis der Wärmekapazitäten des Gases bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen angibt, und p für den Druck sowie ρ für die Dichte stehen. Betrachtet für ein Mol ergibt sich mit $pV = RT$ die Schallgeschwindigkeit:

$$* \quad v = \sqrt{\kappa RT/M} \quad . \quad (5.3)$$

In dieser Beziehung bedeuten:

M : Molmasse in [g/mol]

R : allgemeine Gaskonstante (8,314 J/mol K)

T : absolute Temperatur [K]

5.2 Apparative Grundlagen

Mit Hilfe von stehenden Wellen in einem Glasrohr lässt sich die Schallgeschwindigkeit in Gasen und festen Stoffen durch Vergleichsmessung mit einem Gas bekannter Schallgeschwindigkeit bestimmen.

Das Kundtsche Rohr

Ein Glasrohr ist an einem Ende mit einem verschiebbaren Metallstempel S verschlossen, wie in Abb. 5.3 gezeigt. Am anderen Ende befindet sich ein Glasstab der Länge

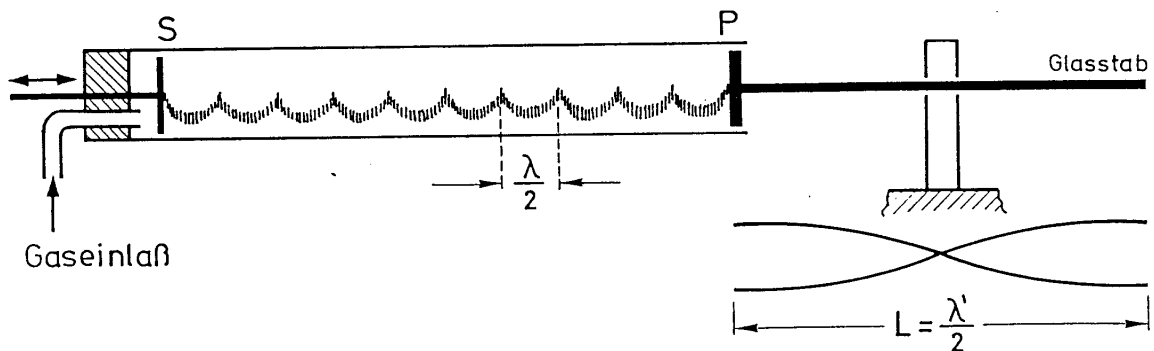


Abbildung 5.3: Schematische Darstellung des Kundtschen Rohrs.

L mit einer ebenen Platte P (als Schall abstrahlende Fläche) an der in das Rohr hineinragenden Stirnseite des Stabes. Dieser ist in der Mitte eingeklemmt. Reibt man den Stab mit einem mit Alkohol befeuchteten Lappen, so gerät er in **stehende Longitudinalschwingungen** (Reflexion der im Stab laufenden Welle an den freien Enden ohne

Vorzeichenumkehr), die sich durch lautes Quietschen manifestieren. Die festgeklemmte Stelle ist ein Schwingungsknoten im Glasstab. Die stehende Welle im Stab hat dann eine Wellenlänge λ' , die gleich der doppelten Stablänge L ist (Grundschwingung).

Die von P in das Rohrinne laufende Schallwelle wird an S reflektiert und läuft zurück. Wenn der Abstand $\overline{SP}$ gerade ein Vielfaches von $\lambda/2$ der im Gas laufenden Welle ist, bildet sich im Rohr eine stehende Welle aus.

Um die stehende Welle sichtbar zu machen, verteilt man trockenes Korkpulver in einem langen, gleichmäßig dünnen Strich unten in der Röhre. An den Knotenstellen ist das Gas dauernd in Ruhe; dort bleibt das Korkpulver liegen. In den Schwingungsbäuchen (starke Gasbewegung) wird das Korkpulver verweht. Man dreht am besten das Rohr etwas um seine Achse, so dass das Pulver angehoben wird. In den Bäuchen fällt es dann herab und es entstehen girlandenartige Bögen. Das Abstimmen durch Verschieben des Stempels S geschieht während des Reibens am Glasstab. Mit einem Maßstab misst man dann den Abstand a von der ersten zur Messung geeigneten Knotenstelle bis zur letzten verwertbaren.

Wenn n Bögen dazwischen liegen, ist

$$\lambda = \frac{2a}{n}.$$

5.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Man bestimme

1. die Frequenz ν und die Geschwindigkeit v_G der im Glas angeregten Schallwelle.
2. den Elastizitätsmodul E von Glas
3. die Schallgeschwindigkeit in Luft v_L , in Argon v_A und in CO_2 v_{CO_2}
4. den Adiabatenkoeffizienten von Luft, Argon und CO_2 aus dessen Zusammenhang mit der Schallgeschwindigkeit.

Versuchsdurchführung

Die im Versuch verwendete Apparatur ist in Abb. 5.4 gezeigt.

Zunächst misst man auf die beschriebene Weise die Schallwellenlänge in Luft (λ_L) und Argon (λ_A) sowie die Länge des Glasstabes $L = \lambda_G/2$.

Argon und CO_2 lässt man während der Messung **langsam** durch das Rohr strömen. Bitte sparsam mit dem Gasverbrauch umgehen und nach der Messung das Flaschenventil **sofort** schließen. Der Lappen wird zum Reiben des Glasstabes etwas mit Alkohol angefeuchtet.

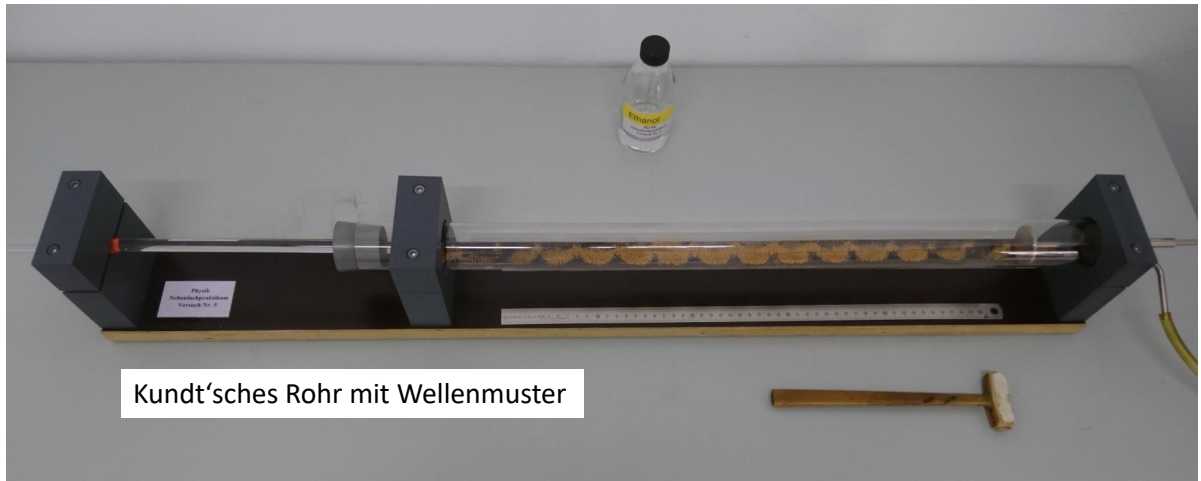


Abbildung 5.4: Versuchsaufbau zum Kundtschen Rohr.

Jede Messung wird fünfmal wiederholt, indem das Korkpulver wieder sorgfältig und vorsichtig zusammengeklopft wird und man von neuem mit dem Stempel S eine Resonanzstelle sucht. Der Mittelwert ergibt die gesuchte Wellenlänge λ , die größte Abweichung den Fehler $\Delta\lambda$. Danach misst man in gleicher Weise die Schallwellenlänge in CO_2 und Argon (λ_{CO_2} , λ_{Ar}).

Bitte beachten:

- Man achte darauf, dass der Gasverbrauch möglichst gering gehalten wird, d.h. **nur leichten Gasstrom** einstellen und **Gashahn** nach Beendigung des Versuchs **stets sofort zudrehen!**
- Beim Reiben des Glasstabes darf **keine Auf-, bzw. Abbewegung** oder **Links-, bzw. Rechtsbewegung** durchgeführt werden.
Bruchgefahr !

Auswertung und Fehlerabschätzung

Zu 1.)

Die Werte für Luft, in Gleichung (5.1) eingesetzt liefert die Frequenz

$$\nu = \frac{v_L}{\lambda_L} \quad (5.4)$$

λ_L wurde gemessen, v_L ist temperaturabhängig und kann aus der folgenden Formel berechnet werden:

$$v_L = v_{L0} \sqrt{T/T_0}$$

(T in $^{\circ}K$; $T_0 = 0^{\circ}C = 273^{\circ}K$; v_{L0} Schallgeschwindigkeit bei $0^{\circ}C$: $v_{L0} = 331 \text{ m/s}$)

Die Schallgeschwindigkeit im Glasstab ergibt sich dann aus der Beziehung

$$v_G = \lambda_G \nu \quad (5.5)$$

Zu 2.)

Bei einer Schallwelle pflanzen sich Verdichtungen und Verdünnungen fort. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit wird daher in einem Festkörper von der Zusammendrückbarkeit und der Dehnbarkeit also dem **Elastizitätsmodul** E abhängen. Es gilt:

$$v_G = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (5.6)$$

ρ bezeichnet die Dichte des Glases: $\rho_{\text{Glas}} = 2,6 \text{ g/cm}^3$. Damit kann der Elastizitätsmodul von Glas ermittelt werden.

Zu 3.)

Da die anregende Frequenz ν konstant ist, ist analog zu Gleichung (5.5)

$$v_{CO_2} = \lambda_{CO_2} \nu \quad (5.7)$$

In gleicher Weise erhält man v_{Ar} .

Zu 4.)

Die zu Gleichung 5.6 äquivalente Gleichung für die Schallgeschwindigkeit in Gasen ist in Gleichung 5.3 gegeben. Die Molmassen betragen für Argon 40 g/mol, für CO_2 44 g/mol und für Luft 29 g/mol.

κ hängt bei Gasen nur von der Anzahl der Atome im Molekül und vom Molekülaufbau durch die Anzahl der **Freiheitsgrade** f ab. Die Theorie liefert für κ :

$$\kappa = \frac{f + 2}{f}$$

Stoff	Freiheitsgrade f	κ
einatomige Gase	3	5/3
zweiatomige Gase	5	7/5
drei- und mehratomige Gase	6	8/6

Die **Fehlerabschätzung** ergibt sich unmittelbar aus dem Rechengang.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda_L}{\lambda_L}$$

(den Fehler der berechneten Schallgeschwindigkeit in Luft kann vernachlässigt werden)
und

$$\frac{\Delta v_G}{v_G} = \frac{\Delta\lambda_G}{\lambda_G} + \frac{\Delta\nu}{\nu}$$

usw. Die Fehlerrechnung für E und κ folgen gemäß Gleichung (F.9) des Kapitels „Fehlerabschätzung“.

Tipp für die Versuchsdurchführung: In der Zeit, in der Sie bis auf die Durchführung der nächsten Messung warten müssen, können sie die schon möglichen Berechnungen ausführen und weitere Tabellen vorbereiten.

6. Oberflächenspannung

Das muss man wissen

- *Atomare Bindungskräfte*
- *Zustandsdiagramm – Phasengleichgewicht*
- *Oberflächenspannung – spez. Oberflächenenergie – Temperaturabhängigkeit*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 1

Anwendungen:

- Wasserläufer können auf der Wasseroberfläche laufen
- Aggregatzustände
- chemische Bindungen
- Verbrennungsprozesse
- Stoffwechsel
- Osmose
- Schwitzen
- Kavitation

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Kraft, Arbeit und Energie? (Einheiten)?

Was sind Druck, Dichte? was atomare Bindungskräfte?

Was beschreibt ein Zustandsdiagramm?

Was bedeutet Phasengleichgewicht?

Wie ändert sich die Temperatur von Wasser, wenn man Energie zuführt?

Was geschieht bei der kritischen Temperatur?

Wie groß ist die kritische Temperatur für Wasser?

Welcher Zusammenhang besteht zwischen Oberflächenspannung und Temperatur?

Wieso versucht die Natur, die Oberfläche klein zu machen?

Wie wird in diesem Versuch der Druck gemessen?

Wie unterscheidet sich eine Wasser- von einer Hg-Säule?

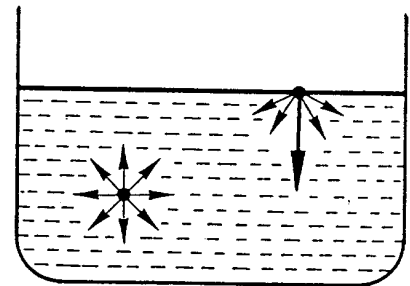
Was sind Kelvin und Grad Celsius und wie rechnet man sie um?

6.1 Physikalische Grundlagen

Oberflächenspannung

Zwischen neutralen Molekülen wirken Anziehungskräfte (**van-der-Waals-Kräfte**), die mit der Entfernung sehr rasch abnehmen. Das bedeutet, dass sie zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit viel stärker sind als zwischen den Gasmolekülen der gleichen Substanz. Die Konsequenz ist, dass wir einer Flüssigkeit Energie zuführen müssen (die **Verdampfungswärme**), um sie in den gasförmigen Zustand überzuführen. Bei diesem Vorgang muss Arbeit gegen diese Kräfte geleistet werden, um den gegenseitigen Abstand zu vergrößern.

Ein Flüssigkeitsmolekül ist um so fester gebunden, je mehr Atome es in geringem Abstand umgeben. Da ein Teilchen an der Oberfläche einer Flüssigkeit nur etwa halb so viel Nachbaratome hat wie ein Teilchen im Innern, muss Energie zugeführt werden, um ein Atom aus dem Innern an die Oberfläche zu bringen. Viele Atome an die Oberfläche bringen heißt aber, die Oberfläche vergrößern. Verändern wir also die Form einer Flüssigkeit so, dass dabei die Oberfläche vergrößert wird, dann muss Energie aufgewendet, d.h. Arbeit geleistet werden. Die auf die Flächeneinheit bezogene Arbeit heißt die **spezifische Oberflächenenergie** ϵ .



*

$$\epsilon = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{Zunahme der Oberfläche}} = \frac{W}{\Delta A} \quad (6.1)$$

Diese Erscheinung ist auch die Ursache für das Bestreben einer Flüssigkeit, die Oberfläche nach Möglichkeit zu verkleinern. Dies kann auch als gespannte Haut interpretiert werden. Die Spannung der Oberfläche der Haut nennt man die **Oberflächenspannung**. Um einen quantitativen Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung und der spezifischen Oberflächenenergie zu erhalten, kann die folgende Überlegung angestellt werden.

Eine ebene Flüssigkeitslamelle zwischen den Schenkeln eines U-förmig gebogenen Drahtes mit einem beweglichen Querbügel versucht ebenfalls, ihre Oberfläche zu verkleinern (Abb.1).

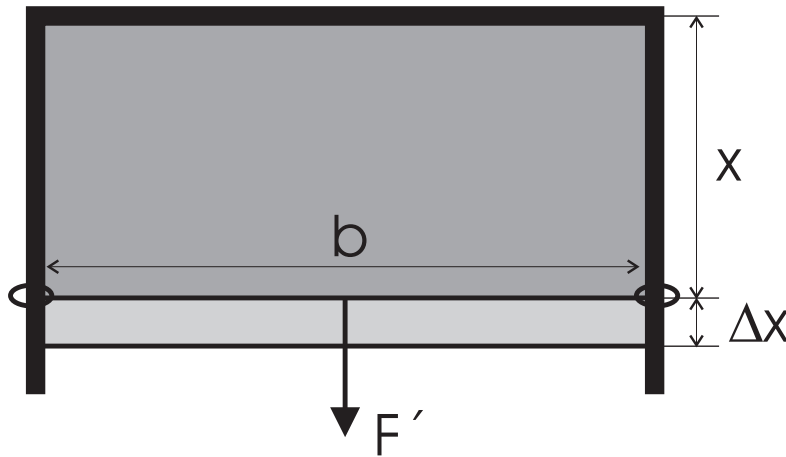


Abbildung 1. Zur Definition der Oberflächenspannung

Der Bügel wird dadurch mit einer zur Oberfläche tangentialen Kraft nach oben gezogen, wenn dies nicht durch eine gleich große Gegenkraft F' verhindert wird. Diese Kraft ist abhängig von der Breite b der Haut aber unabhängig von der Länge x . Die am Bügel angreifende Kraft bezogen auf die Längeneinheit ist die Oberflächenspannung σ . Es gilt also

$$\sigma = \frac{F}{2b}. \quad (6.2)$$

Der Faktor 2 tritt auf, weil Vorder- und Rückseite der Lamelle jeweils mit der Länge b an den Bügel angrenzen. Wird der Bügel um die Strecke Δx nach unten gezogen, so wird die Oberfläche vergrößert um :

$$\Delta A = 2b \Delta x$$

Die aufzuwendende Arbeit ist

$$W = F \Delta x = \sigma 2b \Delta x.$$

Damit ist der gesuchte Zusammenhang gefunden:

$$\epsilon = \frac{W}{\Delta A} = \frac{\sigma 2b \Delta x}{2b \Delta x} = \sigma. \quad (6.3)$$

Oberflächenspannung und spezifische Oberflächenenergie bezeichnen die gleiche Materialkonstante, die jedoch auf zwei verschiedene Weisen gedeutet werden kann.

Die Temperaturabhängigkeit der Oberflächenspannung

σ nimmt bei allen Flüssigkeiten mit steigender Temperatur ab, im allgemeinen linear. Dabei ist der folgende Zusammenhang recht gut erfüllt:

$$\sigma(t) = k(t_k - t). \quad (6.4)$$

t_k ist die sogenannte **kritische Temperatur**. Bei dieser Temperatur wird die Oberflächenspannung null. k ist eine für jede Flüssigkeit charakteristische Konstante.

Auch dieses Verhalten lässt sich leicht verstehen. Zunehmende Temperatur bedeutet größere kinetische Energie der Flüssigkeitsmoleküle. Der zusätzlich nötige Energiebetrag, um ein Molekül an die Oberfläche zu bringen, wird daher mit wachsender Temperatur immer kleiner, d.h. die spezifische Oberflächenenergie sinkt.

Schließlich ist die mittlere kinetische Energie der Teilchen in der Flüssigkeit so hoch, dass Moleküle ohne weitere Energiezufuhr an die Oberfläche gelangen können. Die Teilchen an der Oberfläche unterscheiden sich dann energetisch nicht mehr von denen im Innern der Flüssigkeit. Damit verliert der Begriff der Oberfläche seinen Sinn ($\sigma = 0$). Die Temperatur, bei der dies eintritt, nennt man die kritische Temperatur.

Oberflächenspannung und molekulare Eigenschaften der Substanzen

Um vergleichende Aussagen über molekulare Eigenschaften verschiedener Flüssigkeiten machen zu können, muss man Oberflächen betrachten, die die gleiche Anzahl von Molekülen enthalten.

Bezeichnen wir mit ρ die Dichte und mit M die Molmasse einer Flüssigkeit, dann ist $V = M/\rho$ das Volumen, das von einem Mol dieser Flüssigkeit eingenommen wird (Molvolumen). Denken wir uns dieses Volumen als Würfel, dann besitzt eine Seitenfläche dieses Würfels einen Flächeninhalt von $A = V^{2/3}$, auf dieser Fläche befinden sich $N_A^{2/3}$ ($= 7,13 \cdot 10^{15}$) Teilchen. N_A ist die Teilchenzahl pro Mol, die Loschmidtsche Zahl. Vergrößert man also die Oberfläche einer Flüssigkeit um $V^{2/3}$, dann werden stets gleich viel Moleküle an die Oberfläche gebracht. Dazu ist die Arbeit (Gleichung (6.3))

$$W = \Delta A \sigma = V^{2/3} \sigma = \sigma_M$$

erforderlich. σ_M nennt man die molare Oberflächenspannung. Sie bezeichnet die Energiemenge, die man braucht, um $7,13 \cdot 10^{15}$ Moleküle an die Oberfläche zu bringen.

Fasst man dies zusammen, so erhält man für die **molare Oberflächenspannung** die Beziehung

$$\sigma_M(t) = V^{2/3} \sigma(t) = \left(\frac{M}{\rho}\right)^{2/3} k(t_k - t) = a(t_k - t),$$

die Größe $\left(\frac{M}{\rho}\right)^{2/3} k$ nennt man a

$$a = k \left(\frac{M}{\rho}\right)^{2/3}. \quad (6.5)$$

Für viele Flüssigkeiten hat a nahezu den gleichen Wert von etwa $2,1 \cdot 10^{-7}$ J/K (Regel von Eötvös). Dies bedeutet, dass auch die zwischenmolekularen Kräfte für viele Substanzen gleiche Eigenschaften besitzen (Stärke, Reichweite usw.).

Abweichungen vom Zahlenwert für a nach unten lassen darauf schließen, dass weniger Moleküle vorhanden, bzw. in dieser Substanz die Flüssigkeitsmoleküle zu größeren Komplexen assoziiert sind. Man kann daraus den **Assoziationsgrad** bestimmen.

Wenn wir annehmen, dass im Durchschnitt b Moleküle in einem Komplex vereint sind, dann beträgt die tatsächliche Molmasse der Flüssigkeit (bM) und das Molvolumen $V = (bM/\rho)$. Korrekt müsste daher geschrieben werden:

$$\sigma_M(t) = \sigma(t) \left(\frac{bM}{\rho} \right)^{2/3} = a(t_k - t).$$

Die Annahme der (falschen!) Molmasse M führte zum Wert a' :

$$\sigma_M(t) = \sigma(t) \left(\frac{M}{\rho} \right)^{2/3} = a'(t_k - t).$$

Durch Vergleich dieser beiden Beziehungen erhält man den Assoziationsgrad b zu

$$b = \left(\frac{a}{a'} \right)^{3/2} = \left(\frac{2,1 \cdot 10^{-7}}{a'} \right)^{3/2}. \quad (6.6)$$

Dabei ist für a' der mit (6.5) berechnete Wert für a einzusetzen.

6.2 Apparative Grundlagen

Messung der Oberflächenspannung mit der Blasenmethode

Drückt man eine Luftblase aus einer engen Kapillare (Kapillardurchmesser der Versuchsanordnung 0,4 mm) in eine Flüssigkeit, so steht der Innenraum der Blase infolge der zusammenziehenden Kraft der Oberflächenspannung unter dem Druck p_σ der außer von der Oberflächenspannung vom momentanen Radius R der Blase abhängt:

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R}.$$

R durchläuft bei der Blasenbildung den minimalen Wert $R = r$ (r = Kapillarenradius) und dementsprechend p_σ den maximalen Wert $p_{\sigma m} = 2\sigma/r$.

Der Druck, der in der Kapillare herrschen muss, um die Luftblase in die Flüssigkeit austreten zu lassen, ist daher gleich dem Druck $p_{\sigma m}$ (hervorgerufen durch die Oberflächenspannung) vermehrt um den Schweredruck des Wassers p_s , der von außen auf die Blase drückt:

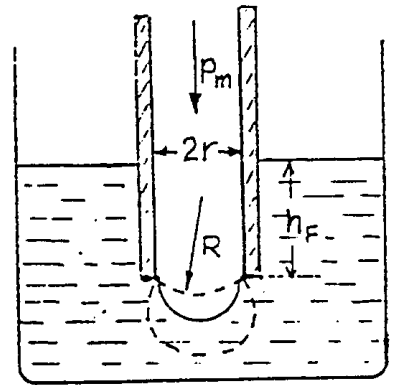
$$p = p_{\sigma m} + p_s = \frac{2\sigma}{r} + \rho_W g h_F.$$

h_F ist die Eintauchtiefe der Kapillare in das Wasser, ρ_W die Dichte des Wassers. Da p mit einem wassergefüllten U-Rohr-Manometer gemessen wird, gilt für die Druckmessung

$$p = \rho_W g \Delta h.$$

Δh ist die Differenz der Wassersäulen. Wird dies für p eingesetzt und die Beziehung nach σ aufgelöst, dann ergibt sich:

$$\sigma = \frac{r g \rho_W}{2} (\Delta h - h_F). \quad (6.7)$$



6.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Es ist die Oberflächenspannung von Wasser als Funktion der Temperatur im Bereich zwischen 20 °C und 80 °C zu messen. Daraus errechne man:

1. die kritische Temperatur t_k von Wasser,
2. die Oberflächenspannung von Wasser bei 20 °C,
3. die Konstante a für Wasser und
4. den Assoziationsgrad b für Wasser.

Versuchsdurchführung

Die Versuchsanordnung ist in der Abb.2 dargestellt.

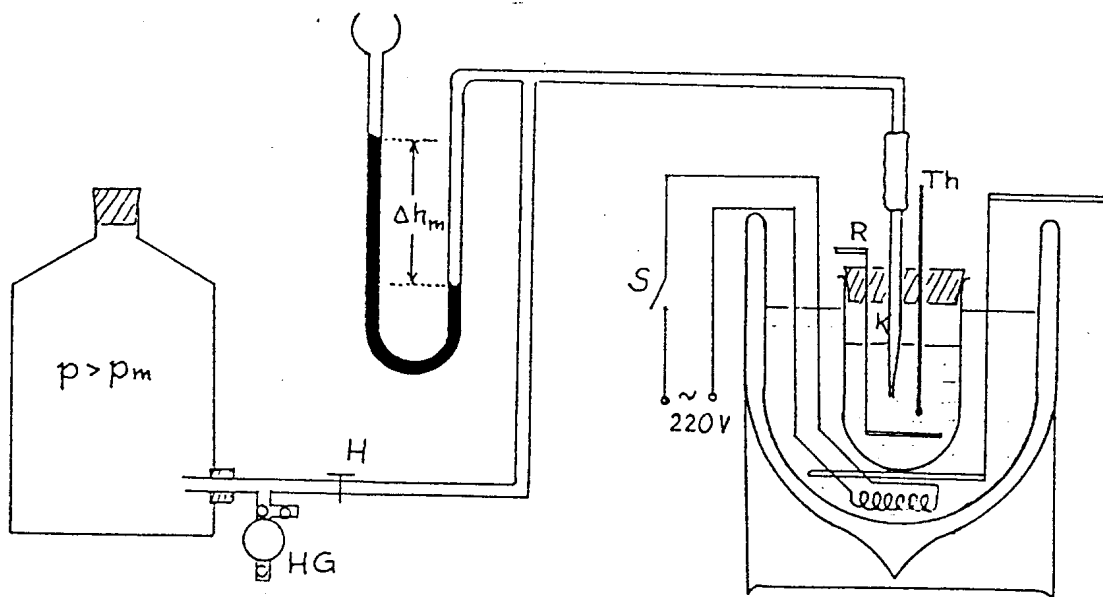


Abbildung 2. Versuchsanordnung zur Messung der Oberflächenspannung

Zunächst wird bei geschlossenem Hahn mit dem Handgebläse HG in der Flasche ein Überdruck erzeugt. Dann öffnet man den Hahn H nur so weit, dass die Wassersäule langsam steigt. Wenn p_m erreicht ist, perlt die erste Blase ab, und die Säule fällt einige Millimeter, um sofort wieder bis zum Wert p_m bzw. Δh_m anzusteigen. H wird während der ganzen Messung so eingestellt, dass die Wassersäule ständig steigt und fällt. Bevor Δh_m jeweils abgelesen wird, ist die Heizung abzuschalten und abzuwarten, bis sich eine konstante Temperatur eingestellt hat. Ständiges und gleichmäßiges Rühren ist unbedingt erforderlich.

Die Kombination Reagenzglas mit Kapillare, Thermometer, Rührer und Messflüssigkeit ist bereits zusammengestellt und darf nicht auseinandergebaut werden. Es ist auf äußerste Sauberkeit zu achten, da geringste Verunreinigungen die Oberflächenspannung erheblich verändern.

Man führe im Bereich zwischen 20 °C und 80 °C für etwa 10 Temperaturwerte jeweils zwei Ablesungen der oberen (h_2) und der unteren (h_1) Wassersäule durch und middle die Differenz. h_F ist zu Beginn bei Zimmertemperatur mit einem Maßstab zu bestimmen.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Für die Datenaufnahme und Auswertung empfiehlt sich eine Tabelle:

t	h_2	h_1	$\Delta h = h_2 - h_1$	$\overline{\Delta h}$	$\overline{\Delta h} - h_F$	σ (6.7)
$^{\circ}\text{C}$	mm	mm	mm	mm	mm	10^{-3} J/m^2
20,5	120,4	31,8	88,6			
	120,0	31,6	88,4	88,5	70,3	72,3
28,4	usw.					

Die gemessenen Werte werden dann in eine Grafik (σ gegen t) eingetragen. Man zeichnet die beste Gerade durch die Punkte und bestimmt nach den Angaben im Abschnitt "Grafische Darstellungen" die Steigung S . Damit hat man die Größe k gefunden. Die übrigen gesuchten Größen lassen sich dann (ebenfalls mit Kenntnis des Abschnitts "Grafische Darstellungen"!) leicht errechnen:

1. Der Achsenabschnitt A_t auf der t -Achse liefert die kritische Temperatur t_k ,
2. $\sigma(20^{\circ}\text{C})$ aus (6.4),
3. die Konstante a aus (6.5) und
4. die Größe b aus (6.6).

Zur Fehlerabschätzung nehme man für $\Delta\sigma$ die größte Abweichung eines Messpunktes von der gezeichneten Geraden. Daraus lässt sich sowohl der Fehler für die Steigung k als auch der für den Achsenabschnitt t_k bestimmen.

Den Fehler für $\sigma(20^{\circ}\text{C})$ schätze man aus der Streuung der Messpunkte um die gezeichnete Gerade ab.

Die Fehler für die restlichen berechneten Größen ergeben sich unmittelbar aus den Formeln, die für ihre Bestimmung benutzt wurden.

7. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität von Metallen

Das muss man wissen

- 1. Hauptsatz der Wärmelehre – Innere Energie – Druck-Volumen-Arbeit
- Wärmekapazität – spez./molare Wärmekapazität – Dulong-Petitsches Gesetz
- Freiheitsgrade und Gleichverteilungssatz
- Mischungs-Kalorimetrie

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 5.

Anwendungen:

- unterschiedliche Materialien können verschieden große Mengen an Energie aufnehmen
- Wärmekapazität von Wasser, Einfluss auf das Klima durch Meeresströmungen, Anwendungen in der Klimatechnik

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was beschreibt der 1. Hauptsatz der Wärmelehre?

Was sind Energie, Wärmeenergie und innere Energie?

Was bedeutet isotherm und adiabatisch?

Was ist die Wärmekapazität?

Was sind c_p und c_v und warum ist c_p grösser als c_v ?

Was beschreiben die Freiheitsgrade (1-3atomige Gase; Festkörper)?

Was sind Kelvin und Grad Celsius, und wie rechnet man um?

Was beschreibt der Gleichverteilungssatz?

Wann gilt die Dulong-Petitsche Regel?

7.1 Physikalische Grundlagen

Der erste Hauptsatz der Wärmelehre

Der erste Hauptsatz beinhaltet die Tatsache, dass Wärme eine Energieform ist und stellt lediglich eine besondere Form des Energieerhaltungssatzes dar, in der speziell die

bei thermodynamischen Prozessen auftretenden Energieformen berücksichtigt werden. Er kann so formuliert werden:

ΔU	=	Q	+	W
(Zunahme der inneren Energie eines Systems)	=	(dem System zugeführte Wärmeenergie)	+	(am System geleistete Arbeit)

*

Dabei kann jedes der Glieder der Gleichung auch negativ sein (Abnahme der inneren Energie, abgegebene Wärme, vom System geleistete Arbeit).

Auf Grund dieser Beziehung können wir bei spezieller Führung eines Prozesses drei Fälle unterscheiden:

- 1) $W = 0$: Es wird zwischen dem System und der Umgebung keine Arbeit umgesetzt. Dies ist stets dann der Fall, wenn alle äußeren Parameter des Systems (z.B. das Volumen, das einem Gas zur Verfügung steht) konstant gehalten werden. Die zugeführte (abgeführte) Wärme erzeugt ausschließlich Änderungen der **inneren Energie** (Temperaturänderungen) des Systems. Wir sprechen in diesem Fall von *thermischer Wechselwirkung* zwischen dem System und der Umgebung.
- 2) $Q = 0$: Es wird zwischen dem System und seiner Umgebung kein Wärmeaustausch zugelassen. Dies kann realisiert werden durch gute Isolation oder dadurch, dass der Prozess so schnell abläuft, dass während dieser Zeit kein nennenswerter Wärmeaustausch stattfinden kann. Prozesse dieser Art nennen wir **adiabatisch**.
- 3) $\Delta U = 0$: Die innere Energie des Systems bleibt konstant, die Temperatur des Systems darf sich nicht ändern. Wird also etwa Arbeit am System geleistet, dann muss dafür gesorgt werden, dass gleichzeitig diese zugeführte Energie als Wärme wieder an die Umgebung abgegeben wird. Dies bezeichnet man als einen **isothermen** Prozess.

Wärmekapazität

Um das thermische Verhalten einer Substanz zu beschreiben, definiert man den Begriff der Wärmekapazität. Unter der Wärmekapazität C eines Körpers versteht man die Wärmemenge, die man braucht, um ihn um 1 K zu erwärmen.

*	$C = \frac{\text{zugeführte Wärmemenge}}{\text{Temperaturerhöhung}} = \frac{Q}{\Delta T} \quad (7.1)$
---	---

Die Einheit für die Wärmekapazität ist 1 J/K. Um ein bestimmtes Material bezüglich dieser Eigenschaft zu charakterisieren, bezieht man die Wärmekapazität auf bestimmte

Substanzmengen.

Mit der Stoffmenge m ergibt sich die **spezifische Wärmekapazität** c als Wärmekapazität pro Kilogramm Substanz.

$$c = \frac{C}{m}, \quad (\text{Einheit: } 1 \text{ J/kg K}). \quad (7.2)$$

Aus der Anzahl der Mole Stoff ν ergibt sich die **molare Wärmekapazität** c_{mol} :

$$c_{mol} = \frac{C}{\nu}, \quad (\text{Einheit: } 1 \text{ J/mol K}). \quad (7.3)$$

Im allgemeinen muss unterschieden werden, ob eine rein thermische Wechselwirkung vorliegt oder ob gleichzeitig vom System Arbeit geleistet wird (d.h. es kann sich z.B. ausdehnen und dadurch Expansionsarbeit leisten). Im letzten Fall ist ersichtlich mehr Energie nötig, um eine bestimmte Temperaturerhöhung zu erreichen. Diese Unterscheidung machen wir mit Indizes deutlich, die die jeweils konstant bleibenden Parameter angeben (c_p bei konstantem Druck, c_V bei konstantem Volumen usw.). In fast allen Fällen ist c_p größer als c_V .

Erheblich ist dieser Unterschied nur bei Gasen. Betrachten wir feste Körper oder Flüssigkeiten, dann kann er wegen der geringen Volumenänderungen bei Erwärmung vernachlässigt werden.

Wollen wir also m Kilogramm eines Stoffes um Δt Grad erhitzen (abkühlen), dann wird ein Energiebetrag von

*	$Q = cm\Delta t$	(7.4)
---	------------------	-------

benötigt (frei). c ist die spezifische Wärmekapazität des Stoffes.

Freiheitsgrade und der Gleichverteilungssatz

Infolge der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Teilchen eines Makrosystems (Atome oder Moleküle eines Festkörpers oder einer Flüssigkeit) verteilt sich die zugeführte Energie auf alle vorhandenen Teilchen. Dabei ist es sehr entscheidend, welche Möglichkeiten ein bestimmtes Teilchen besitzt, um Energie aufzunehmen. Diese Möglichkeiten nennt man die **Freiheitsgrade** f des Moleküls.

Die Teilchen eines einatomigen Gases können sich bei Energiezufuhr nur schneller bewegen (kinetische Energie des Schwerpunkts in den drei Raumrichtungen = 3 Freiheitsgrade). Zweiatomige Gase haben daneben noch die Möglichkeit, um die beiden Achsen senkrecht zur Kernverbindungsline zu rotieren (zusammen 5 Freiheitsgrade). Die Bausteine eines Kristallgitters (Festkörpers) können auf Grund ihrer elastischen Bindung an einen festen Gitterplatz in die drei Raumrichtungen schwingen. Da jede Schwingung im zeitlichen Mittel sowohl kinetische als auch potenzielle Energie besitzt, ergibt dies insgesamt 6 Freiheitsgrade.

Der Gleichverteilungssatz macht dazu eine quantitative Aussage: Im thermischen Gleichgewicht besitzt jeder Freiheitsgrad bei der absoluten Temperatur T im zeitlichen Mittel die Energie $(1/2)kT$ (oder $(1/2)RT$ bezogen auf ein Mol). Für Festkörper ergibt sich daraus die *Dulong-Petitsche Regel*: Bei Zimmertemperatur besitzen alle festen Körper die gleiche molare Wärmekapazität von ca.

$$* \quad C = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} R \right) = 3R \approx 25 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}. \quad (7.5)$$

Gültigkeitsbereich des Gleichverteilungssatzes

Der Gleichverteilungssatz wurde aus klassischen Überlegungen hergeleitet. Die Quantenmechanik lehrt jedoch, dass die Energie nur in bestimmten Beträgen aufgenommen werden kann, deren Größe vom jeweiligen System (Atom, Molekül, usw.) und von der betrachteten Bewegung abhängen (Translation, Rotation, Schwingung). Ein bestimmter Freiheitsgrad wird daher nur solange an der Energieaufnahme teilnehmen können, solange die bei einem Zusammenstoß zweier Gasteilchen zur Verfügung stehende kinetische Energie (Größenordnung kT) mindestens gleich der Anregungsenergie des betreffenden Freiheitsgrades ist. Für Zimmertemperatur gilt: Bei Gasen werden die Freiheitsgrade der Translation und Rotation angeregt, nicht jedoch die gleichfalls möglichen Schwingungen. Bei Festkörpern werden die Schwingungsfreiheitsgrade angeregt, solange es sich nicht um sehr leichte Atome (C oder Si) handelt. Allgemein kann man sagen, dass um so mehr Freiheitsgrade an der Energieaufnahme teilnehmen, je höher die Temperatur ist. Bei abnehmender Temperatur „frieren sie mehr und mehr ein“.

7.2 Apparative Grundlagen

Kalorimetrie

Wenn man unter Benutzung von Gleichung (7.4) die unbekannte spezifische Wärmekapazität c eines Stoffes bestimmen will, müssen die übrigen Größen in dieser Gleichung gemessen werden. Dies ist leicht für die Massen und Temperaturdifferenzen, nicht jedoch für die Wärmemenge Q . Um Wärmemengen zu messen, ist es üblich, das folgende Verfahren anzuwenden:

Bringt man zwei Körper verschiedener Temperaturen miteinander in Kontakt, so erfolgt ein Wärmeübergang vom wärmeren zum kälteren Körper so lange, bis beide Körper die gleiche Temperatur angenommen haben. Infolge des Energieerhaltungssatzes muss die vom wärmeren Körper abgegebene Wärmemenge Q_{ab} genau so groß sein wie die vom kälteren Körper aufgenommene Wärmemenge Q_{auf} . Ist nun von einem der beiden Körper die Wärmekapazität bekannt, dann kann daraus diese Größe für den anderen

Körper ermittelt werden. Man nennt dieses Verfahren Kalorimetrie und verwendet ein isoliertes, mit Wasser gefülltes Gefäß (Kalorimeter), dessen Wärmekapazität in einem ersten Schritt bestimmt wird. Bei Wärmezufuhr durch einen Testkörper wird sich nicht nur das Wasser, sondern auch das Innere des Gefäßes erwärmen und dabei Wärme aufnehmen. Bei Mischungsversuchen mit dem Kalorimeter muss daher dessen Wärmekapazität C_{Kal} berücksichtigt werden.

Um nun die unbekannte Wärmekapazität c eines Stoffes (Masse m) zu messen, wird dieser auf t_s erhitzt und in das mit kaltem Wasser gefüllte Kalorimeter (Temperatur t_0) gebracht. Es stellt sich eine Mischungstemperatur t_m ein.

Die vom Metall abgegebene Wärmemenge beträgt:

$$Q_{ab} = cm(t_s - t_m).$$

Die von Wasser und Kalorimeter aufgenommene Wärmemenge ist

$$Q_{auf} = C_{Kal}(t_m - t_0).$$

Das unbekannte c ergibt sich sodann durch Gleichsetzen aus der Beziehung:

$$C_{Kal}(t_m - t_0) = cm(t_s - t_m). \quad (7.6)$$

Die Wärmekapazität C_{Kal} wird im ersten Teil des Versuches bestimmt, in dem über einen Heizdraht eine definierte Wärmemenge in das Kalorimeter gebracht wird und dessen Temperaturänderung gemessen wird. Damit sind alle anderen Größen mit Ausnahme von c bekannt und diese Größe kann nun bestimmt werden. Es ist natürlich unwesentlich, ob ein wärmerer oder ein kälterer Körper in das Kalorimeter gebracht wird. Darauf muss man nur bei der Bildung der Temperaturdifferenzen achten.

7.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Eichung der Wärmekapazität des Kalorimeters
2. Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität für 3 Metalle und Berechnung der jeweiligen molaren Wärmekapazitäten. Die Ergebnisse vergleiche man anschließend mit den theoretischen Vorhersagen bzw. mit den Literaturwerten.

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 7.1 gezeigt.

Zu 1) Man messe den Widerstand des Heizdrahtes mit einem Multimeter. Das Kalorimeter wird mit etwa 150 ml Wasser befüllt. Anschliessend wird eine Heizspannung von 6 V Gleichstrom angelegt und der Temperaturanstieg im Kalorimeter gemessen. Man messe gleichzeitig die Spannung am Heizdraht. Die Messung wird über 15 Minuten ausgeführt,

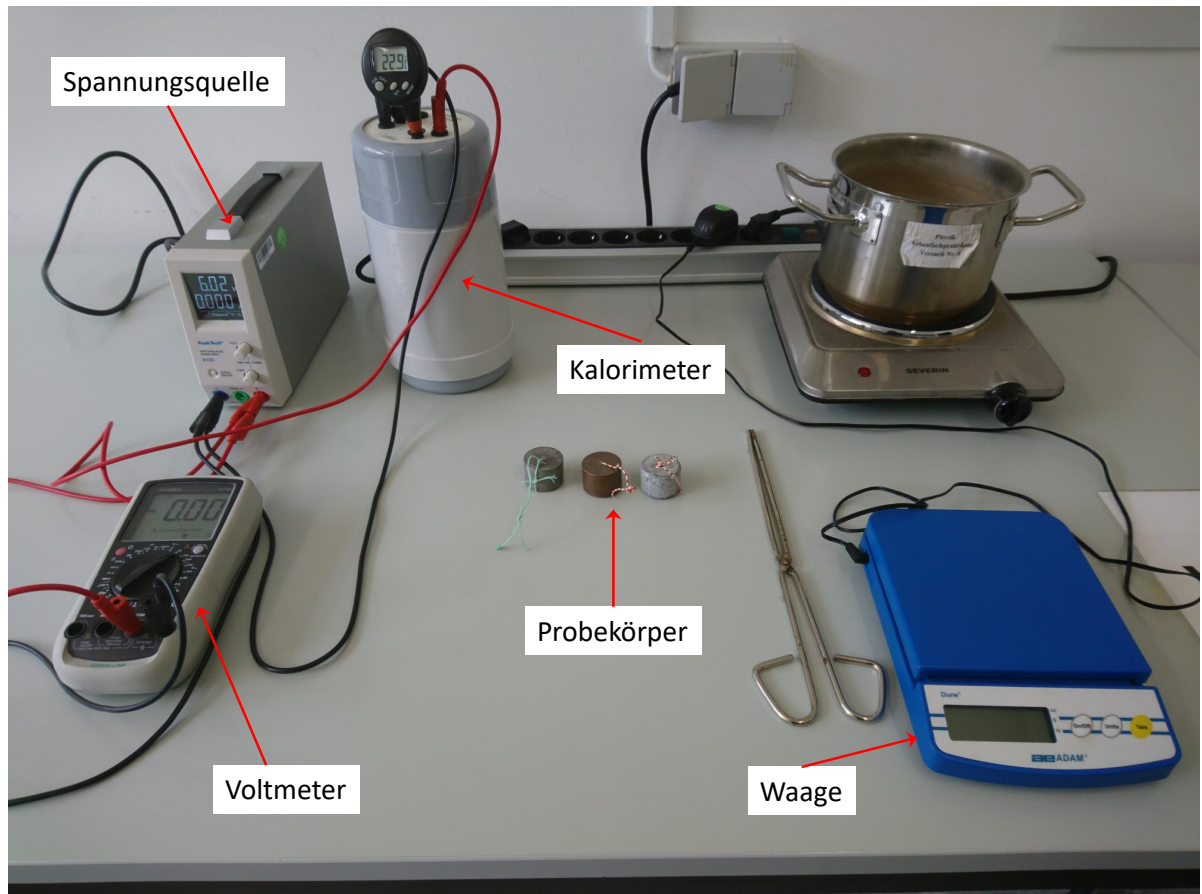


Abbildung 7.1: Versuchsaufbau zur Messung der Wärmekapazität.

wobei eine Messung pro Minute durchgeführt wird und die Heizung nach 10 Minuten abgestellt wird. Beispielhaft ist in Abb. 7.2 der Temperaturverlauf bei der Eichung dargestellt. Im mittleren Bereich ist ein linearer Anstieg der Temperatur mit der Zeit zu beobachten, welcher für die Bestimmung von ΔT im Zeitraum Δt zu verwenden ist. Mit diesem Verfahren wird eine elektrische Energie $E = U \cdot I \cdot \Delta t$ der inneren Energie des Kalorimeters hinzugefügt und wir erhalten die Wärmekapazität des Kalorimeters, inklusive des Wassers als Wärmetauschers, aus:

$$C_{Kal} = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{\Delta T}. \quad (7.7)$$

Zu 2) Das Metall, dessen spezifische Wärmekapazität gemessen werden soll, liegt als kompaktes Metallstück vor. Da Metalle in Wasser nahezu die gleichen Temperaturen annehmen, messe man die Temperatur des Metallstücks über die Wassertemperatur mit einem Thermometer. Bevor die Probekörper erhitzt werden ist ihre Masse zu messen. Man lese die Temperatur des Wassers im Kalorimeter ab bevor die Metallstücke vorsichtig hinzugegeben werden, dann warte man einige Minuten und notiere bei Stabilisierung die Mischtemperatur.

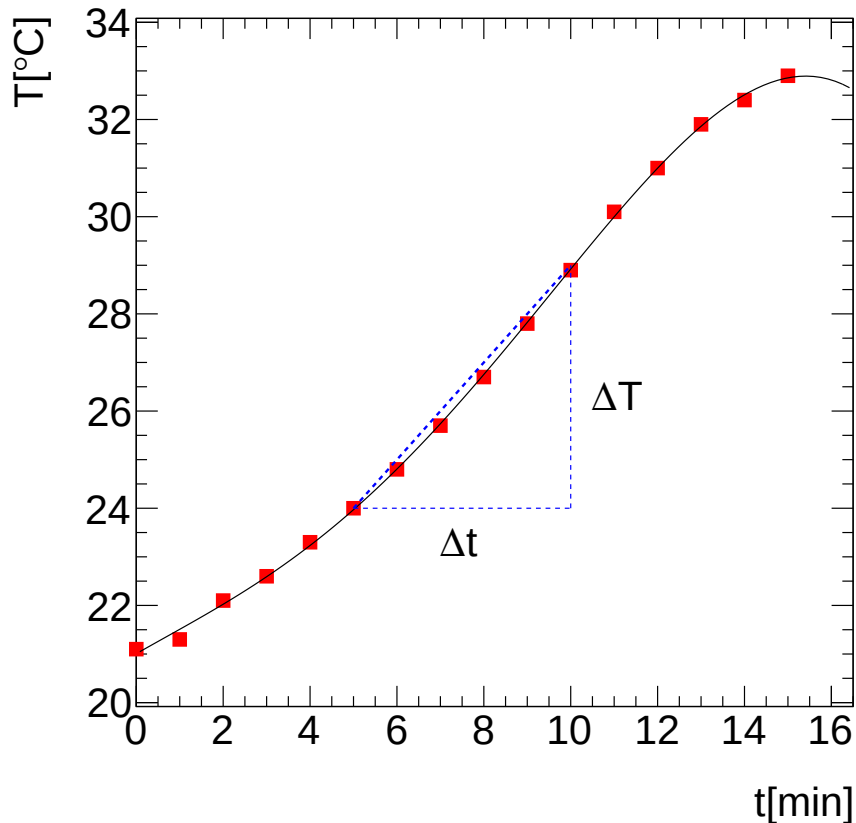


Abbildung 7.2: Typischer Verlauf des Temperaturanstiegs im Kalorimeter.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Aus Gleichung (7.6) ergibt sich :

$$c = \frac{C_{Kal}(t_m - t_0)}{m(t_s - t_m)}$$

Da alle Massen und Temperaturen mit Fehlern behaftet sind, ergibt sich der relative Fehler von c zu

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta C_{Kal}}{C_{Kal}} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta t_m + \Delta t_0}{t_m - t_0} + \frac{\Delta t_s + \Delta t_m}{t_s - t_m}$$

Die Unsicherheiten der Massen- und Temperaturmessungen (Δt und Δm) ergeben sich aus der Genauigkeit der verwendeten Messgeräte, die Unsicherheit für C_{Kal} werde aus der Eichkurve abgeschätzt.

Die molaren Massen betragen für Aluminium:	$M_{Al} = 27,0 \text{ g/mol}$
Kupfer	$M_{Cu} = 63,5 \text{ g/mol}$
Blei	$M_{Pb} = 207,2 \text{ g/mol}$

8. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten von Luft

Das muss man wissen

- *Ideales Gas – Zustandsgleichung*
- *Dampfdruckkurve*
- *Isobare/isochore/isotherme Prozesse – Ausdehnungskoeffizient*
- *Zusammenhang: Absolute Temperatur $\Leftrightarrow$ Celsius-Temperatur – Fixpunkte*
- *Thermometerprinzip – Thermometertypen*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen mit Versuch 5.

Anwendungen:

- Funktionsweise und Umgang mit einem Quecksilberbarometer
- Eichung von Thermometern
- Thermisches Verhalten fester und flüssiger Körper führt zu Besonderheiten bei der Temperaturregelung der Tiere
- kinetische Gastheorie und auch Aero- und Hydrodynamik ermöglichen das bessere Verstehen vom Vogelflug oder auch der Strömung von Blut in den Gefäßen
- Anomalie des Wassers

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was ist ein ideales Gas?

Wie lautet die Zustandsgleichung für ideale Gase?

Was bedeutet die Größe α in diesem Versuch?

Was bedeuten isobar, isotherm und isochor

Was ist die innere Energie?

Was sind absoluter Nullpunkt und absolute Temperatur

Was sind Kelvin und Grad Celsius und wie rechnet man das um?

Was sind Fixpunkte einer Temperaturskala?

Was zeigt ein mit Wasser gefülltes Thermometer in der Nähe von 4°C ?

Wie arbeitet das Quecksilberbarometer?

8.1 Physikalische Grundlagen

Das ideale Gas

Das ideale Gas ist ein Modell, das von der Annahme ausgeht, dass Gasteilchen *ausdehnungslose Massepunkte* sind, die *keine Wechselwirkung* aufeinander ausüben. Jedes Gas kann daher als **ideales Gas** angesehen werden, wenn

1. das tatsächlich vorhandene Eigenvolumen der Gasmoleküle gegenüber dem Gesamtvolumen, das dem Gas zur Verfügung steht, vernachlässigt werden kann (d.h. großer gegenseitiger Abstand = geringe Dichte), und wenn
2. die tatsächlich vorhandenen Anziehungskräfte zwischen den Gasteilchen nicht wirksam werden können, da die hohe kinetische Energie der Teilchen dies verhindert (d.h. wenn sie sehr schnell sind = hohe Temperatur).

Unter Normalbedingungen werden diese Bedingungen von den meisten Gasen erfüllt, im besonderen auch für Luft.

Die Zustandsgleichung für ideale Gase (Allgemeine Gasgleichung)

Zur Beschreibung des Zustandes eines idealen Gases dienen die Zustandsgrößen Druck, Temperatur und Volumen. Zwischen ihnen besteht der allgemeine Zusammenhang, wenn n die Anzahl der betrachteten Mole des Gases ist:

$* \qquad pV = nRT \qquad R = 8,31 J/mol \cdot K \qquad (8.1)$
--

Wir können also für ein Gas nicht alle drei Größen frei wählen, sondern durch zwei ist die dritte bestimmt. Man merke sich, dass die Gleichung für alle Gase in gleicher Form gilt, solange sie sich wie ideale Gase verhalten. Dies ist natürlich nicht erstaunlich, da die Individualität der einzelnen Gasarten durch die beiden oben genannten Voraussetzungen ausgelöscht ist.

Gesetzmäßigkeiten zwischen den Zustandsgrößen

Die gegenseitigen Abhängigkeiten der Zustandsgrößen lassen sich am besten wiedergeben, wenn jeweils eine von ihnen konstant gehalten wird. Daraus erhält man drei Beziehungen:

- **V = const** ergibt:
Der Druck ist proportional zur absoluten Temperatur. Führt man die Celsiusskala ein, dann lautet die Formel:

*	$p(t) = p_0(1 + \alpha t).$	(8.2)
---	-----------------------------	-------

(**Gay-Lussacsches Gesetz**)

- **p = const** ergibt:
Das Volumen ist proportional zur absoluten Temperatur oder

*	$V(t) = V_0(1 + \alpha t).$	(8.3)
---	-----------------------------	-------

- **T = const** ergibt:
Das Produkt aus Druck und Volumen ist konstant:

*	$pV = \text{const.}$	(8.4)
---	----------------------	-------

(**Boyle-Mariottesches Gesetz**)

p_0 und V_0 sind die Werte bei 0 °C, α ist der **Ausdehnungskoeffizient** oder Spannungskoeffizient für Gase. Eine einfache Überlegung zeigt, dass der theoretische Wert für α gleich $1/273,15 \text{ K}^{-1}$ sein muß.

Dampfdruck

Der Dampfdruck ist ein stoff- und temperaturabhängiger Gasdruck. Anschaulich gesprochen ist der Dampfdruck der Umgebungsdruck, unterhalb dessen eine Flüssigkeit beginnt, bei konstanter Temperatur in den gasförmigen Zustand überzugehen. In der Technik hat der Dampfdruck im System Wasser-Luft eine besondere Bedeutung.

Stoffe treten in drei Aggregatzuständen auf, nämlich: fest, flüssig und gasförmig. Existiert neben dem Gas noch eine flüssige Phase, so bezeichnet man das Gas als Dampf. Der Dampfdruck ist also der Gasdruck in einem mehrphasigen System. Hält man die Temperatur eines geschlossenen Systems konstant, so stellt sich ein Gleichgewicht zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase ein. Die Gasphase ist gesättigt und man misst den Dampfdruck. Wenn sich das Gleichgewicht vollständig eingestellt hat, spricht man auch von Sättigungsdampfdruck. Wenn die flüssige Phase verschwindet und nur noch eine gasförmige Phase existiert, messen wir keinen Dampfdruck mehr, sondern den Gasdruck.

Im Phasendiagramm ist der Sättigungsdampfdruck der Wert des Druckes entlang der hier als schwarz gekennzeichneten Phasengrenzlinie zwischen der Gasphase und der korrespondierenden festen bzw. flüssigen Phase. Diese Phasengrenzlinie wird daher auch als **Dampfdruckkurve** bezeichnet.

Wasser hat eine besondere Eigenschaft, die es von fast allen anderen Flüssigkeiten unterscheidet. Es hat bei 4°C sein kleinstes Volumen und damit seine größte Dichte. Geht man von 4°C aus, so vergrößert sich sowohl bei Temperaturerhöhung als auch bei Temperaturerniedrigung das Volumen. Die Dichte wird damit kleiner. Dieses nicht normale thermische Verhalten von Wasser wird als **Anomalie des Wassers** bezeichnet. Eine qualitative Darstellung der Dampfdruckkurve von Wasser ist in Abb. 8.1 gezeigt.

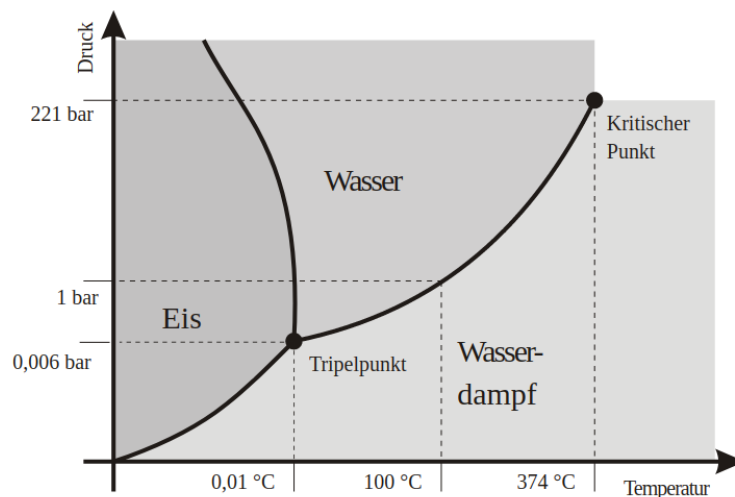


Abbildung 8.1: Dampfdruckkurve des Wassers.

8.2 Apparative Grundlagen

Thermometer

Als Thermometer können physikalische Systeme verwendet werden, die zwei Eigenschaften besitzen:

1. Sie müssen so klein sein, dass sie die Temperatur des zu untersuchenden Systems durch die Messung nicht wesentlich verändern.
2. Durch die Erwärmung des Thermometers muss sich ein Parameter in messbar reproduzierbarer Weise verändern, während alle anderen Parameter des Systems möglichst konstant bleiben sollen. Gemeint ist damit etwa die Länge der Hg-Säule eines Quecksilberthermometers, der elektrische Widerstand eines Widerstandsthermometers oder der Gasdruck in einem Gasthermometer.

Alle Thermometer müssen an **Fixtemperaturen** geeicht werden, z.B. Schmelzpunkt des Eises oder Siedepunkt des Wassers. Da jedoch im allgemeinen zwischen dem Messparameter und der Temperatur kein linearer Zusammenhang besteht, ist eine Interpolation zwischen diesen Punkten nicht ohne weiteres möglich.

Das Gasthermometer

Eine Ausnahme bilden hier die idealen Gase, bei denen auf Grund der Gasgleichung (8.1) eine *exakte* einfache Beziehung zwischen der Temperatur und dem Messparameter (Druck oder Volumen) besteht, wobei darauf zu achten ist, dass die andere Variable jeweils konstant gehalten wird. Ein Gasthermometer besteht typischer Weise aus einem gasgefüllten Kolben mit festem Volumen, der an ein Manometer angeschlossen ist, wie in Abb. 8.2 gezeigt. Ist die Größe α bekannt, dann kann durch Messen des Druckes



Abbildung 8.2: Gasthermometer. Der Schlauch führt zu einem Manometer zur Druckmessung.

eines bestimmten Gasvolumens die Temperatur angegeben werden. Die Bestimmung der Größe α kann dadurch erfolgen, dass man den Druck eines bestimmten (konstanten) Gasvolumens bei zwei Eichtemperaturen bestimmt (p_1 = Druck am Schmelzpunkt des Eises; p_2 = Druck am Siedepunkt des Wassers) und α nach (8.2) daraus berechnet.

$$\alpha = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t}. \quad (8.5)$$

Volumenkorrektur beim Gasthermometer

Voraussetzung für die Gültigkeit der obigen Formel ist die Konstanz des Volumens. Diese Bedingung ist jedoch aus zwei Gründen nicht exakt erfüllt:

1. Der Glaskolben dehnt sich bei Erwärmung aus. Dieser Fehler liegt unter 1%, da die Ausdehnung des Glases mehr als 100 mal kleiner ist als diejenige des Gases.
2. Die in der Kapillare zwischen Kolben und Meßgerät befindliche Luft bleibt auf Zimmertemperatur, wird jedoch bei Druckänderungen zusammengepresst bzw. expandieren. Dieser Fehler ist etwa in der Größe des Verhältnisses beider Volumina (Kapillare und Kolben) d.h. ebenfalls sehr klein.

Beide Einflüsse wirken sich also in einer unerwünschten Vergrößerung des Gasvolumens im Kolben aus, der Druckunterschied wird also zu klein gemessen und damit auch α . Der Fehler kann jedoch rechnerisch erfasst und Gleichung (8.5) entsprechend korrigiert werden.

Führt man die folgenden Bezeichnungen ein,

V_1, p_1	= Kolbenvolumen und Druck im Kolben beim Schmelzpunkt T_1 ,
V_2, p_2	= Kolbenvolumen und Druck im Kolben beim Siedepunkt T_2 ,
T_R	= Raumtemperatur,
v	= Volumen des schädlichen Raums in der Kapillare und
$V (\approx V_1, V_2)$	= Kolbenvolumen,

dann erhält man für α in besserer Näherung:

$$\alpha = \frac{p_2 - p_1}{p_1 t} + \frac{p_2}{p_1} \left(\gamma + \frac{v}{V} \frac{1}{T_R} \right) \quad (8.6)$$

Hierbei ist γ der thermische Ausdehnungskoeffizient des Glases. Er beträgt für die verwendete Glassorte $2,45 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

8.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Eichung eines Gasthermometers, d.h. Bestimmung des Ausdehnungskoeffizienten von Luft α .

Versuchsdurchführung

Die im Versuch verwendete Apparatur ist in Abb. 8.3 gezeigt. Die Druckmessung erfolgt

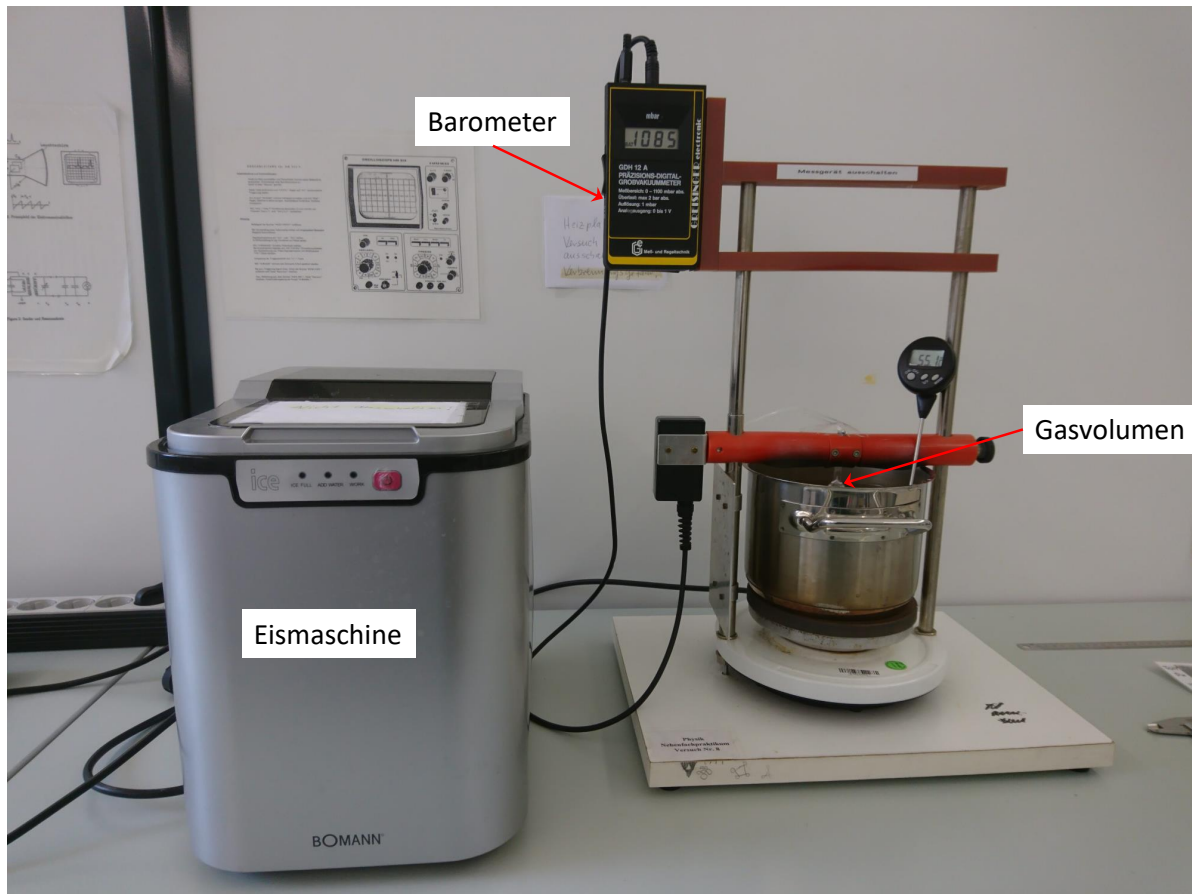


Abbildung 8.3: Versuchsaufbau zum Gasthermometer.

mit einem digitalen Druckmessgerät.

Zunächst wird der Kolben in Eiswasser eingetaucht und unter leichtem Rühren (warum?) solange gewartet, bis sich die Anzeige nicht mehr ändert ($= p_1$). Dann wird der Kolben in siedendes Wasser eintaucht und wiederum der Druck ($= p_2$) abgelesen. Zur Bestimmung der Siedetemperatur wird erst der Außendruck am **Quecksilberbarometer** abgelesen, (bringen sie nötige Korrekturen laut Anweisungen der Betreuer an) und dann die dazugehörige Siedetemperatur der am Arbeitsplatz aufliegenden **Dampfdruckkurve**

entnommen. Die für die Korrektur benötigten Volumina v und V werden gemessen bzw. abgeschätzt. Mit all diesen Messwerten kann schließlich α errechnet werden.

Bitte beachten:

- Beim Eintauchen des Kolbens in das Eiswasser ist **besondere Vorsicht** geboten, damit die Kapillare nicht abbricht! Am besten ist es, wenn man nur wenig Eiswasser in das Gefäß gibt, dann den Kolben absenkt und jetzt erst mit Eis und Wasser auffüllt.

Fehlerabschätzung

Für die Fehlerabschätzung lasse man den Korrekturterm in (8.6) unberücksichtigt. Der maximale Fehler der Druckmessungen ergibt sich aus der Anzeige (eine Einheit der letzten Stelle). Δt kann aus der Ablesegenauigkeit auf der Dampfdruckkurve abgeschätzt werden.

9. Wärmeleitfähigkeit

Das muss man wissen

- *Konvektion – Wärmestrahlung – Wärmeleitung – Wärmeleitfähigkeit*
- *Thermoelement – Vakuumpumpe*

Anwendungen:

- Wärmeisolierung
- Temperaturmessung durch Thermoelemente
- Wärmetransport in Festkörpern
- Thermodilatation

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Beschreiben Sie die Mechanismen der Wärmeleitung !

Was sind Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung?

Nennen Sie Beispiele für Konvektion, Strahlung und Leitung!

Wie lautet das Stefan Boltzmann Gesetz?

Umrechnen von Kelvin in Grad Celsius

Welche Materialien leiten Wärme gut?

Was ist ein Thermoelement? Und wie ist seine Funktionsweise?

Wie wird beim Versuch störende Konvektion vermieden?

Was sind typische Größenordnungen für λ ?

9.1 Physikalische Grundlagen

Mechanismen des Wärmetransports

In der Natur gibt es drei unterschiedliche Mechanismen, um Wärmemengen zu transportieren:

Konvektion In jedem Körper steckt ein bestimmter Wärmebetrag. Er ist um so größer, je höher seine Temperatur ist. Transport von Materie bedeutet daher stets auch Transport von Wärme.

Besonders geeignet für Konvektion sind Flüssigkeiten und hier speziell das Wasser, da es eine überdurchschnittlich hohe Wärmekapazität besitzt. Mit wenig Wasser kann viel Wärme transportiert werden (Heiz- und Kühlkreisläufe).

Wärmestrahlung Unter Wärmestrahlung versteht man den Wärmetransport durch elektromagnetische Wellen. Wärmestrahlung bedarf daher keines Mediums. Sie breitet sich auch im Vakuum aus, wie z.B. die Sonnenstrahlung).

Die Energie S , die ein Körper pro Sekunde und Quadratmeter abstrahlt, ist proportional zur vierten Potenz seiner absoluten Temperatur:

$$S = \sigma T^4$$

(Gesetz von **Stefan-Boltzmann**).

Wärmeleitung Bei der Wärmeleitung erfolgt der Energietransport innerhalb eines Körpers auf Grund der Energieübertragung zwischen seinen Bausteinen (z.B. Wärmestrom durch eine Wand oder durch eine Fensterscheibe). Besteht zwischen zwei Punkten eines Körpers ein Temperaturunterschied, dann ergibt sich ein Wärmestrom in Richtung zur kälteren Stelle. Wärmeleitung ist **nicht** mit Materietransport verbunden.

Wärmeleitung

Zur Charakterisierung eines Stoffes bezüglich seiner Wärmeleitungseigenschaft definiert man die sogenannte Wärmeleitfähigkeit, siehe Abb. 9.1. Betrachten wir einen Stab, des-

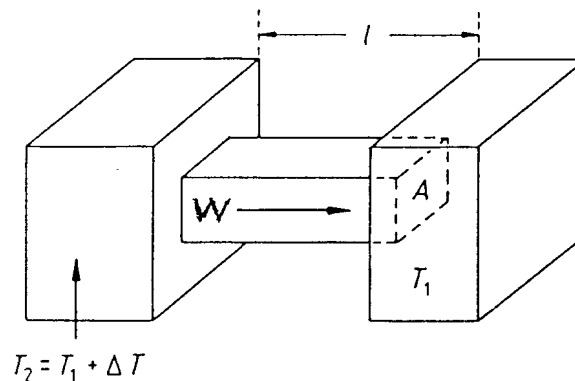


Abbildung 9.1: Zur Definition der Wärmeleitfähigkeit.

sen Enden auf den konstanten Temperaturen T_1 und $T_1 + \Delta T$ gehalten werden und dessen Seiten völlig wärmeundurchlässig sind, so strömt durch diesen Stab im stationären Zustand eine Wärmemenge Q , die proportional zur Zeit t , zum Stabquerschnitt A und zur Temperaturdifferenz ΔT , sowie umgekehrt proportional zur Stablänge l ist:

*

$$Q = \lambda A \frac{\Delta T}{l} t$$

Dividiert man durch die Zeit t , so erhält man eine Beziehung für den Wärmestrom

*

$$W = \frac{Q}{t} = \lambda A \frac{\Delta T}{l} \quad (9.1)$$

Den Quotienten $\frac{\Delta T}{l}$ bezeichnet man als Temperaturgefälle. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine Materialkonstante und heisst **Wärmeleitfähigkeit**. Seine Einheit beträgt $\text{W/m}\cdot\text{K}$.

9.2 Apparative Grundlagen

Wenn die Aufgabe gestellt ist, die Wärmeleitfähigkeit für eine bestimmte Substanz zu bestimmen, so könnte man eine Anordnung aufbauen, wie sie in der Abb. 9.1 gezeigt ist, und λ nach Gleichung (9.1) ermitteln. Dies wäre möglich, wenn alle in der Beziehung auftretenden Größen unmittelbar gemessen werden könnten. Dies trifft zu für die Temperaturen, Querschnitt und Länge des Stabes und die Zeit, nicht jedoch für die geflossene Wärmemenge Q . Wir besitzen kein einfaches Messgerät für diese Größe.

Wir bestimmen daher λ durch Vergleich mit einem Metall bekannter Wärmeleitfähigkeit, z.B. Kupfer ($\lambda_{\text{Cu}} = 398 \text{ W/m}\cdot\text{K}$). Dazu werden drei Körper A, B und C mit gleichem Querschnitt zu einem zylindrischen Stab zusammengebaut, so dass sie guten Wärmekontakt haben, wie in Abb. 9.2 dargestellt. A und C bestehen aus Kupfer (be-

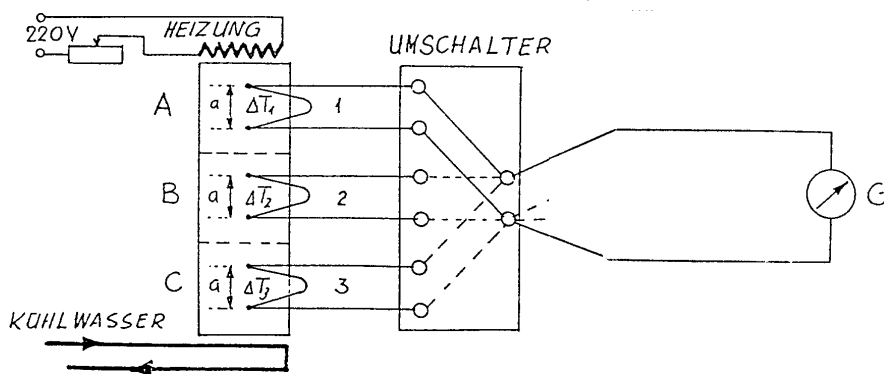


Abbildung 9.2: Schematische Versuchsanordnung.

kanntes λ), B aus dem Material, dessen Wärmeleitfähigkeit bestimmt werden soll (λ_x). In jedem der drei Körper ist ein **Thermoelement** (2 Lötstellen mit 2 Materialien) eingebaut. Die beiden Lötstellen haben jeweils den Abstand a . Die **Thermospannung**, die jeweils angezeigt wird, ist proportional zum Temperaturunterschied (ΔT) zwischen den beiden Lötstellen.

Erhitzt man nun das eine Ende des Stabes bei konstanter Heizleistung, während das andere Ende mit Leitungswasser gekühlt wird, so bildet sich nach einiger Zeit ein stationärer Wärmestrom von oben nach unten aus. Wäre der Stab seitlich vollkommen wärmeisoliert, d.h. keine Wärmeverlust durch Konvektion oder Strahlung, so müsste $W_A = W_B = W_C$ sein, wenn W_A , W_B , W_C die Wärmeströme durch die Teilstäbe A, B und C sind.

Da eine vollkommene Wärmeisolation nicht möglich ist, setzt man näherungsweise

$$W_B = \frac{W_A + W_C}{2}, \quad (9.2)$$

d.h. es wird angenommen, dass die seitlichen Verluste über die gesamte Stablänge konstant sind. Sind ΔT_1 , ΔT_2 und ΔT_3 die an den einzelnen Thermoelementen auftretenden Temperaturdifferenzen, so gilt:

$$W_A = \lambda_{Cu} A \frac{\Delta T_1}{a} \quad W_B = \lambda_x A \frac{\Delta T_2}{a} \quad W_C = \lambda_{Cu} A \frac{\Delta T_3}{a}$$

In Gleichung (9.2) eingesetzt und nach λ_x aufgelöst ergibt:

$$\lambda_x = \lambda_{Cu} \frac{\Delta T_1 + \Delta T_3}{2\Delta T_2}.$$

Bei den verwendeten Thermoelementen ist $\Delta T \propto s$, wenn s die Spannungsanzeige am digitalen Millivoltmeter ist. Man erhält somit:

$$\lambda_x = \lambda_{Cu} \frac{s_1 + s_3}{2s_2} = \lambda_{Cu} \frac{S}{2}. \quad (9.3)$$

9.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Es soll die Wärmeleitfähigkeit von Eisen und Edelstahl bestimmt werden.

Versuchsaufbau und Durchführung

Die Apparatur enthält zwei identische Aufbauten entsprechend Abb. 9.2. Der Versuchsaufbau im Praktikum sind in Abb. 9.3 gezeigt.

Um Wärmeverluste an die Umgebung zu minimieren, wird der Versuch in einer evakuierten Vakuumkammer durchgeführt. Bei Beginn der Messung ist das Belüftungsventil

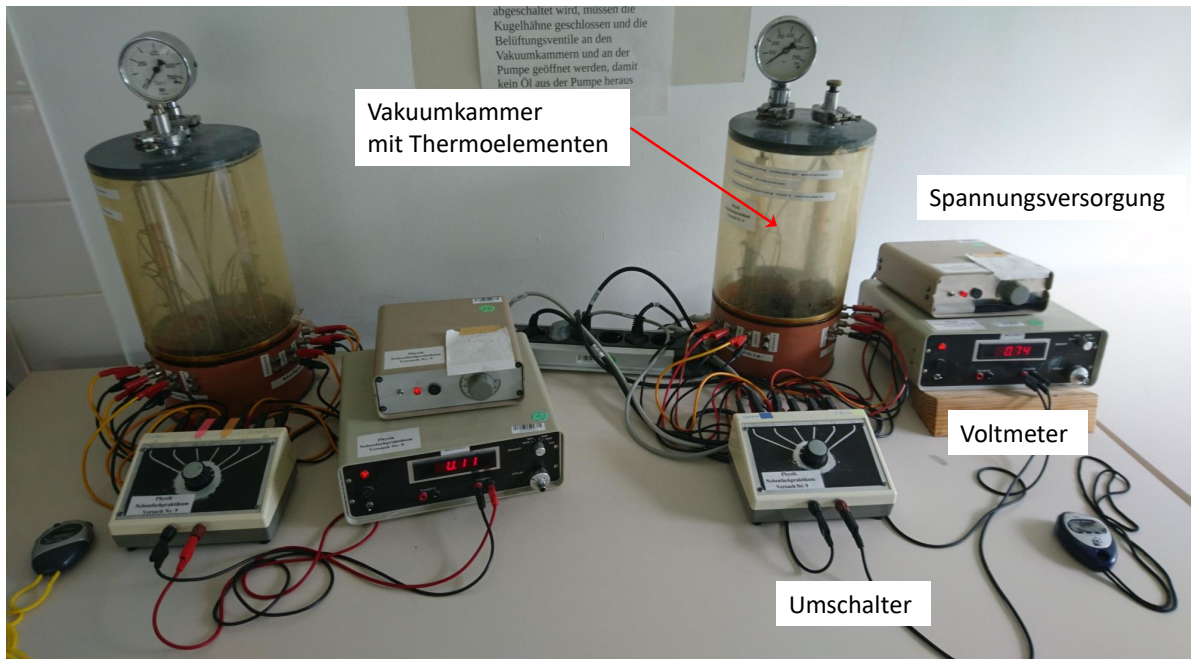


Abbildung 9.3: Ansicht des Versuchsaufbaus.

an der Kammer zu schließen. Mit Hilfe einer einstufigen **Drehschieberpumpe** wird ein Restdruck von ca. 1 mbar erzeugt. Die Pumpe bleibt während der gesamten Messung eingeschaltet. Die Heizung erfolgt über Heizelemente, die nur über einen Dimmer und der Spannungsversorgung leistungsgedrosselt betrieben werden dürfen. Einstellung bitte nicht ändern! Gleichzeitig ist der Kühlwasserkreislauf zu öffnen und der Wasserfluss am Ausfluss zu überprüfen.

Mit Hilfe eines zusätzlichen Thermoelementes wird zunächst die gesamte Temperaturdifferenz zwischen Heizquelle und Kühlkörper gemessen. In einem Zeitabstand von 5 min ist der Spannungswert abzulesen und in einem Diagramm als Funktion der Zeit einzutragen. An diesem Diagramm erkennt man das Erreichen eines stationären Wärmestromes. Nach ca. 45 bis 60 Minuten kann mit der eigentlichen Messung begonnen werden.

Versuchsauswertung und Fehlerabschätzung

Alle 6 Thermoelemente können über einen Wahlschalter mit dem Voltmeter verbunden und sequentiell abgelesen werden. In einem Zeitabstand von 2 Minuten werden die Messwerte am Millivoltmeter abgelesen und entsprechend dem Beispiel in eine Tabelle eingetragen. Dieser Messvorgang wird 15 mal wiederholt. Für jedes Metall wird aus den 3 Thermoelementanzeigen die Größe $S = (s_1 + s_3)/s_2$ berechnet, siehe Gleichung (9.3).

Nr. der Messung	s_1	s_2	s_3	S	ΔS	$(\Delta S)^2$
	mV	mV	mV		10^{-4}	10^{-8}
1	0.29	3.37	0,12	0,1217	44	1936
$\vdots$						

Die Werte der letzten beiden Spalten können natürlich erst errechnet werden, wenn alle Messungen ausgeführt sind.

Bei diesem Versuch soll der mittlere Fehler des Resultats abgeschätzt werden. Aus den $n = 15$ Messungen wird der Mittelwert $\bar{S} = \Sigma S/n$, die absolute Abweichung jeder Einzelmessung vom Mittelwert $\Delta S = |\bar{S} - S|$ und deren Quadrat bestimmt. Damit lässt sich der Fehler des Mittelwertes $\sigma(\bar{S})$ angeben, beachten Sie dazu Gleichung (F.5) im Abschnitt Fehlerabschätzung.

Aus Gleichung (9.3) kann nun die Wärmeleitfähigkeit berechnet werden, der relative Fehler von λ ist gleich demjenigen von $\bar{S}$.

10. Widerstandsmessung

Das muss man wissen

- *Definition des elektrischen Widerstandes – Ohmsches Gesetz*
- *Stromleitung – Temperaturabhängigkeit des Widerstandes*
- *Parallel- und Serienschaltung von Widerständen – Kirchhoffsche Gesetze*
- *Messgeräte zur Strom/Spannungsmessung: Drehspulgalvanometer, Oszilloskop, Digitalmultimeter*
- *Innenwiderstand eines Messgerätes – Messbereichserweiterung*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen mit Versuch 11.

Anwendungen:

- elektrische Gefahren
- Membranpotentiale
- Sensorikz.B. Kohlemikrophon, Temperaturmessung, Helligkeitsmessung, Aufzeichnung der Atembewegungen
- Nervensystem
- Signal- und Energieübertragung

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Wie lautet das Ohmsche Gesetz?

Was sind Strom, Spannung und Widerstand?

Was ist Leistung und Energie?

Wovon hängt der Widerstand eines Drahtes ab?

Was ist der spezifische Widerstand? Was sind gute, was schlechte Leiter?

Wie ändert sich der Widerstand mit der Temperatur?

Was ist der TK?

Was ist der Innenwiderstand bzw. der Widerstand angeschlossener Geräte?

Wie lauten die Kirchhoffschen Gesetze?

Was sind Reihenschaltung und Parallelschaltung? Einfache Schaltungen müssen Sie skizzieren und darin Ströme, Spannungen und Widerstände berechnen können.

Die Funktionsweise eines Digitalvoltmeters sollten Sie kennen.

10.1 Physikalische Grundlagen

Der elektrische Widerstand

Widerstand R und **Leitwert** G eines Leiters werden definiert durch die Gleichungen

$$* \quad R = \frac{U}{I}; \quad G = \frac{I}{U}; \quad G = \frac{1}{R} \quad (10.1)$$

U ist dabei die **Spannung** zwischen den Enden des Leiters, I die **Stromstärke** durch den Leiter.

Ist der Widerstand eines Leiters (bei konstanter Temperatur etc.) unabhängig von Strom und Spannung, dann erfüllt dieser Leiter das **Ohmsche Gesetz**:

$$* \quad R = \frac{U}{I} = \text{konstant (bei } T = \text{konstant}). \quad (10.2)$$

Alle Metalle und die meisten Elektrolyte verhalten sich in weiten Bereichen so.

Der Widerstand hängt für ein bestimmtes Material von der Temperatur und der Geometrie des Leiters ab. Für einen homogenen Leiter der Länge l und überall gleichem Querschnitt A gilt bei konstanter Temperatur

$$* \quad R = \rho \frac{l}{A}. \quad (10.3)$$

ρ heisst **spezifischer Widerstand** und ist eine Materialkonstante.

Widerstandskennlinien

Das Ohmsche Gesetz gilt für alle metallischen Leiter und die meisten Elektrolyte für nicht zu große Belastung, da sonst durch den Strom zuviel **Joulesche Wärme** entwickelt wird, die zu einer Temperaturerhöhung führt. Häufig hängt jedoch der Widerstand von der Stromstärke ab, wie z.B. bei leitenden Gasstrecken, Halbleitern und anderen.

Zeichnet man den Widerstand als Funktion der Stromstärke, so erhält man eine sogenannte **Widerstandskennlinie**. Die Funktion: Strom in Abhängigkeit von der angelegten Spannung heißt **Strom-Spannungs-Kennlinie** oder **Charakteristik**.

$R = R(J)$: Widerstandskennlinie

$J = J(U)$: Charakteristik

10.2 Apparative Grundlagen

10.2.1 Digitale Volt- und Multimeter

Digitale Messgeräte zeigen den Messwert als Zahl an. Dabei werden verschiedene Verfahren eingesetzt, um die **analoge Messgröße** in eine **Digitalzahl** umzusetzen (**Analog-Digital-Converter** oder **ADC**). Die Verfahren unterscheiden sich hinsichtlich Genauigkeit und Umsetzgeschwindigkeit. Für digitale Volt- und Multimeter wird meist das **Rampenverfahren** oder **Integrationsverfahren** eingesetzt. Dieses Verfahren ist zwar das langsamste (ca. 0,01 bis 1 sec), liefert aber die höchste Messgenauigkeit. Selbst preiswerte Handgeräte haben bereits eine Auflösung von 3 1/2 Stellen, Geräte der Spitzenklasse erreichen fast 9 Stellen. Die lange Messdauer, teilweise bis in den Sekundenbereich ist selten störend.

Beim Rampenverfahren wird die zu messende Spannung U_x mit der einer aus einem Rampengenerator verglichen. In jenem Generator wird ein Referenzstrom I_{ref} in einem anfangs entladenen Kondensator C aufgesammelt (integriert). Zum Zeitpunkt T beträgt Ladung Q des Kondensators $Q = \int I_{\text{ref}} dt$ und die Spannung U am Kondensator $U = Q/C$. Ist I_{ref} während der Integration konstant, so entsteht ein linearer Anstieg (Rampe) $Q(t) = I_{\text{ref}} t$ bzw. $U(t) = I_{\text{ref}} t / C$. Damit ist also die Ladezeit T bis zum Erreichen der Eingangsspannung ein direktes Maß für die zu messende Größe U_x und nur abhängig von den beiden Apparategrößen C und I_{ref} . Das Messen der Ladezeit geschieht mit einer Art elektronischer Stoppuhr, die direkt einen Zahlenwert für U_x liefert.

$$T_x = \frac{C}{I_{\text{ref}}} \cdot U_x$$

Die meisten Geräte sind als **Multimeter** ausgebildet. Zusätzliche Komponenten erlauben das Messen von Strömen, Effektivwert von Wechselspannungen und -strömen, Widerstand oder enthalten sogar Linearisierungstabellen zum Anzeigen von Temperaturen in $^{\circ}\text{C}$.

Schaltung von Strom- und Spannungsmessgeräten

Ein Messgerät stört die Messung, da durch den Messvorgang Energie aus der Messanordnung entnommen wird. Eine hohe Messgenauigkeit (geringe Einflüsse) verlangt daher geringe Leistungsentnahme $P_M = U_M \cdot I_M$. Die Spannung an den Klemmen des Messgerätes ist proportional zur Stromstärke durch das Gerät. Die Verknüpfung dieser beiden Größen ist durch den **Innenwiderstand** R_i des Messgerätes gegeben.

*	$R_i = \frac{\text{Spannung an den Geräteklemmen}}{\text{Strom durch das Messgerät}}$
---	---

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt daher für die Leistungsaufnahme

$* \qquad P = U \cdot I \qquad P = I^2 \cdot R \qquad P = \frac{U^2}{R}$
--

Ein Voltmeter sollte daher ein möglichst großen Innenwiderstand (R_V), ein Amperemeter ein möglichst kleinen Innenwiderstand (R_A) besitzen!

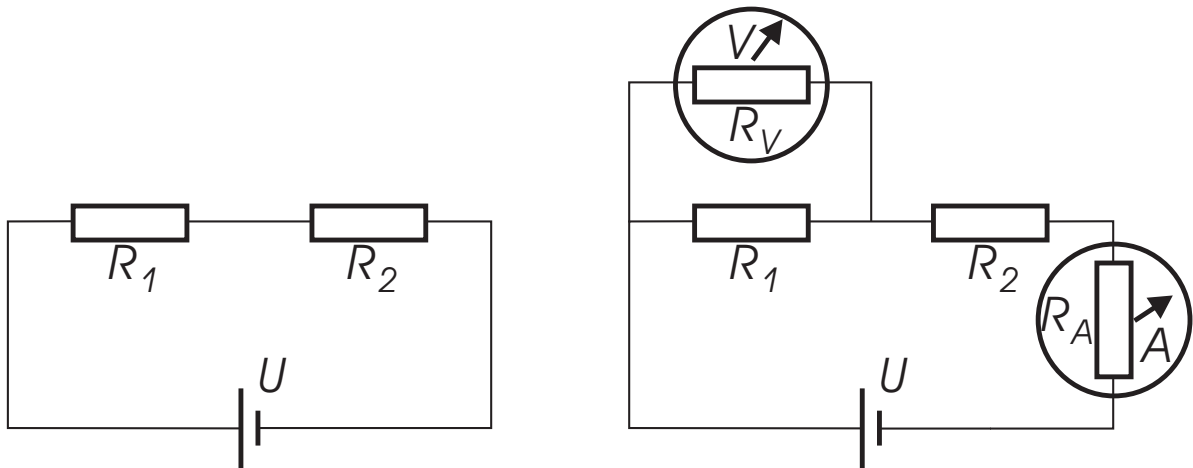


Abbildung 10.1: Schaltungen von Strom- und Spannungsmessgeräten

Zur Messung des **Stromes** in einem Stromkreis (z.B. Spannungsquelle U - Widerstand R_1 - Widerstand R_2 ; Abb. 10.1) muss ein Strommesser in den Stromkreis eingebaut werden. Dadurch wird der Gesamtwiderstand des Kreises um den Innenwiderstand R_A des Strommessers erhöht, das Gerät zeigt einen etwas zu kleinen Strom an. Dieser Umstand könnte zu einem systematischen Fehler der Messung führen, sofern keine Korrektur auf den Innenwiderstand des Messgerätes erfolgt. Damit diese durch das Messinstrument bedingte Änderung klein bleibt, müssen Strommesser einen möglichst *kleinen* Innenwiderstand R_A besitzen.

Soll die **Spannung** am Widerstand R_1 gemessen werden, dann muss ein Spannungsmesser parallel zu diesem Widerstand geschaltet werden. Dieses bedeutet eine Verringerung des Widerstandes R_1 , und wir messen eine zu kleine Spannung (Spannungsteiler zwischen R_1 und R_2). Aus diesem Grund muss man für Spannungsmesser einen möglichst *großen* Innenwiderstand R_V fordern.

Widerstandsmessung durch Strom- und Spannungsmessung

Bei diesem Verfahren müssen die Spannung U_R zwischen den Enden des Widerstandes und der Strom I_R durch diesen Widerstand gemessen werden. Zwei mögliche Schaltungen sind in Abb. 10.2 dargestellt.

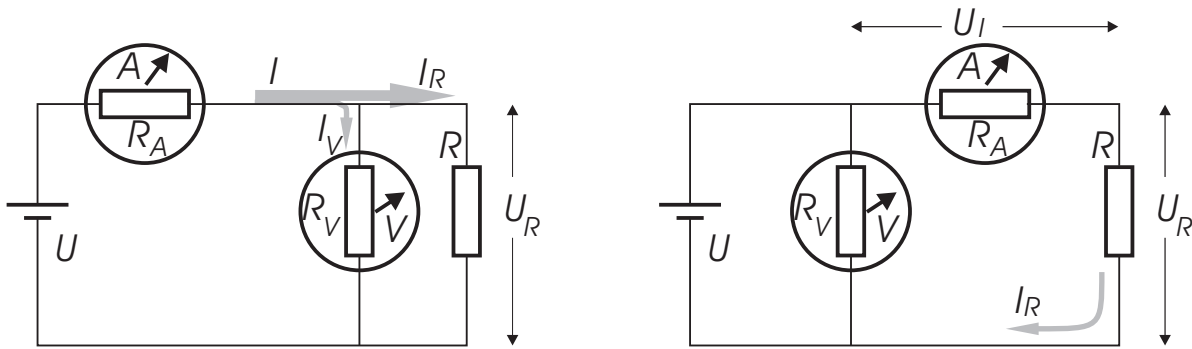


Abbildung 10.2: Bestimmung eines Widerstandes durch Strom- und Spannungsmessung

In der Schaltung links zeigt der Spannungsmesser U_R an, dagegen misst der Strommesser die Summe aus I_R und I_V (I_V ist der Strom durch das Voltmeter). R kann jedoch ermittelt werden, wenn R_V bekannt ist:

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U_R}{I - (U_R/R_V)} \quad (I = I_R + I_V) \quad (10.4)$$

Nur für den Fall, dass R_V sehr groß ist gegenüber R , ist I_R fast gleich I , d.h. R kann dem Verhältnis aus den abgelesenen Werten: $R = U_R/I$ gleich gesetzt werden.

Bei der zweiten Schaltungsmöglichkeit (rechts) zeigt der Strommesser den richtigen Strom I_R an, der Spannungsmesser jedoch $U = U_R + U_I$, wenn U_I die am Messgerät abfallende Spannung bezeichnet.

Auch hier kann der richtige Wert für R errechnet werden, wenn R_A der Innenwiderstand des Amperemeters bekannt ist:

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{U}{I_R} - R_A \quad (10.5)$$

Ist R_A nahezu null, dann ergeben die Messwerte praktisch den richtigen Wert für R .

10.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Messung der spezifischen Widerstände von Eisen und Konstantan sowie des Innenwiderstands des Amperemeters
2. Aufnahme der Widerstandskennlinien eines Hochlastwiderstandes ($1 \text{ k}\Omega$), einer Kohlefadenlampe sowie des Glühfadens einer Glühbirne.

Versuchsdurchführung

Zu 1)

Für diesen Teil der Aufgabe werden verwendet

- ein Niedervoltnetzgerät als Spannungsquelle
- zwei digitale Meßgeräte zur Spannungs- und Strommessung.

Die aufzubauende Schaltung für die Messung des spezifischen Widerstands ist in Abb. 10.3 gezeigt.

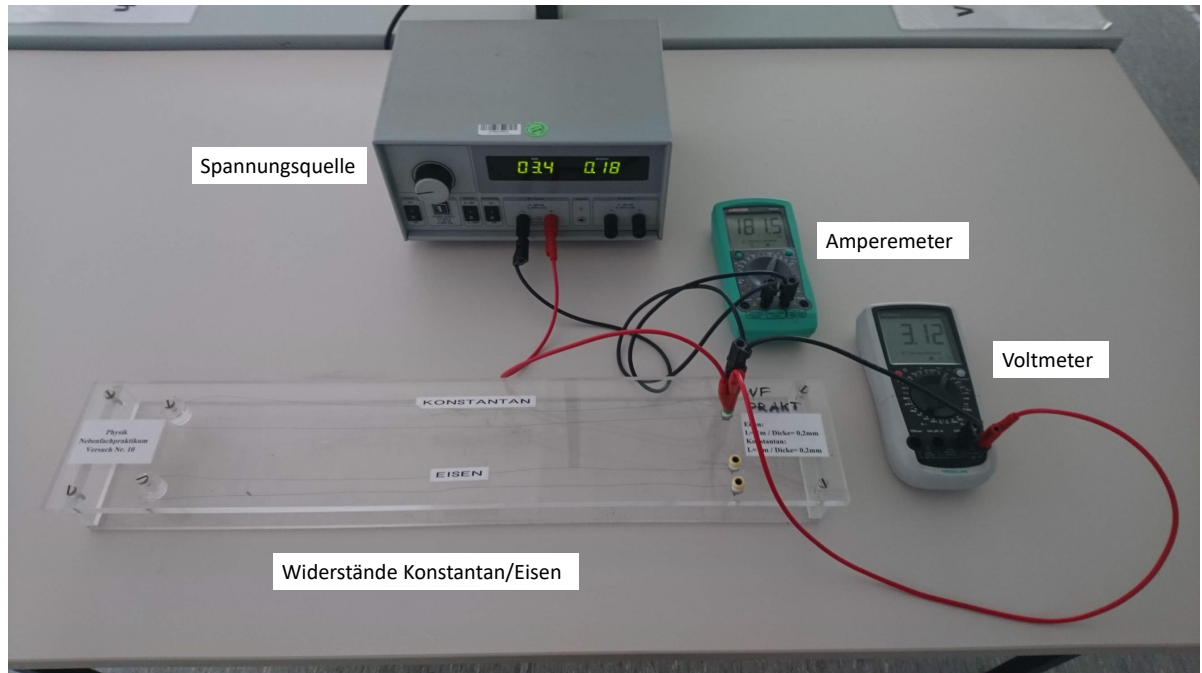


Abbildung 10.3: Ansicht der Schaltung zur Messung des spezifischen Widerstands.

Da durch eingebaute Verstärker der Innenwiderstand eines Digitalgerätes bei Spannungsmessungen sehr hoch ist ($> 10 \text{ M}\Omega$), kann die linke Schaltung von Abb. 10.2 verwendet werden. Für die beiden Metalldrähte wird nun jeweils eine Messreihe $U(I)$ (6 Messpunkte im Bereich zwischen ca. 30 und 180mA) aufgenommen und durch grafische Auswertung der Widerstand ermittelt. Für einen der beiden Drähte wird außerdem eine weitere Messung durchgeführt, wobei jedoch jetzt die rechte Schaltung der Abb. 10.2 verwendet wird. Die Steigung der $U(I)$ -Geraden ergibt hier die Summe $R + R_A$, so dass hieraus der Innenwiderstand des Meßgerätes bei Strommessungen errechnet werden kann.

Um die spezifischen Widerstände zu erhalten, werden noch Länge und Durchmesser der Drähte (mit Maßstab bzw. Mikrometerschraube) gemessen, wobei auch der maximale Messfehler dieser Größen abzuschätzen ist. Nach Gleichung (10.3) können dann die gesuchten Größen nebst Fehler errechnet werden.

Zu 2)

Die Schaltung zur Aufnahme der Widerstandskennlinie ist in Abb. 10.4 gezeigt. Der Innenwiderstand des Amperemeters kann hier vernachlässigt werden. Die Gleichspannung wird aus einem Netzgerät entnommen und kann stufenlos geregelt werden. Für U wähle man etwa die Werte 10 V, 40 V, 80 V, 120 V usw. bis max. 220 V, **wobei man unbedingt beachte dass der Strom im Amperemeter 200 mA nicht überschreitet**,

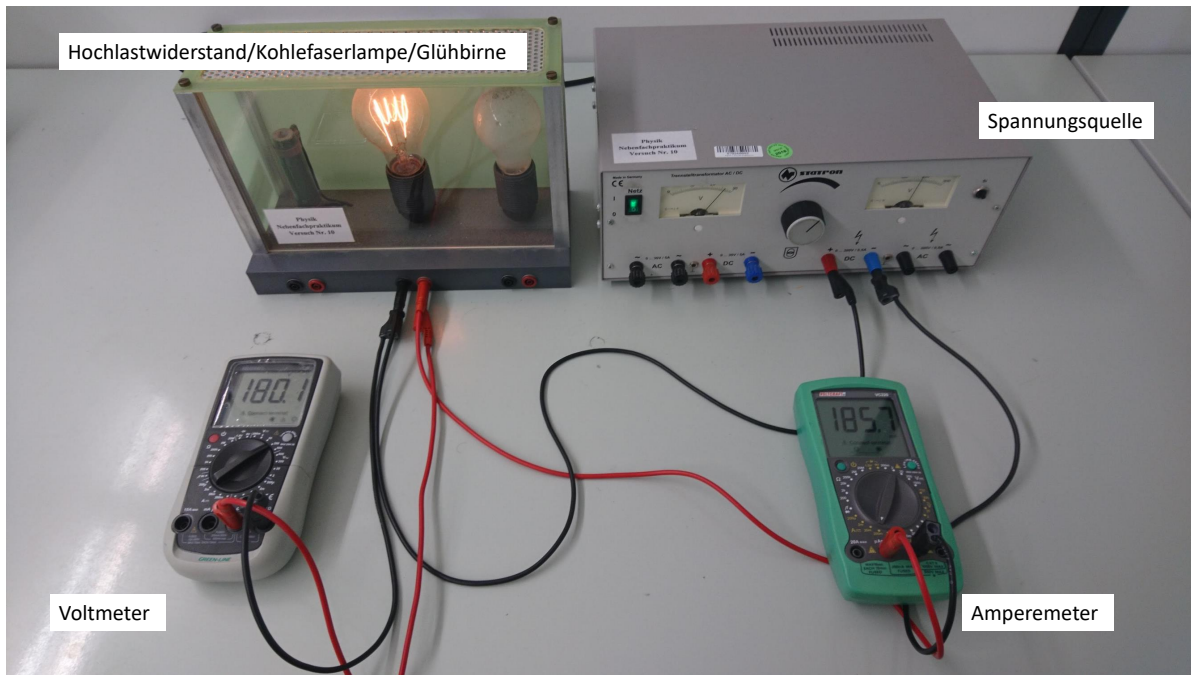


Abbildung 10.4: Ansicht der Schaltung zur Aufnahme der Widerstandskennlinie.

da sonst Schäden am Meßgerät drohen!

Man trage in einem Diagramm auf der Ordinate R , auf der Abszisse U ab und zeichne die Kennlinie.

11. Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke

Das muss man wissen

- *Definition des elektrischen Widerstandes – Ohmsches Gesetz*
- *Stromleitung – Temperaturabhängigkeit des Widerstandes*
- *Parallel- und Serienschaltung von Widerständen – Kirchhoffsche Gesetze*
- *Meßgeräte zur Strom/Spannungsmessung: Drehspulgalvanometer, Oszillograph*
- *Innenwiderstand eines Meßgerätes – Meßbereichserweiterung*
- *Prinzipielle Vorteile der Wheatstoneschen Brückenschaltung*
- *Aufbau und Funktionsprinzip einer Spannungsteilerschaltung*
- *Leitungsmechanismen im Bändermodell*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 10.

Anwendungen:

- Übung zum Verschalten von Widerständen, Kapazitäten und anderer Bauteile miteinander
- richtiges Anlegen von Spannungen
z.B. zur Herstellung von Chromatogrammen (→ Laufbad)

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Wie lautet das Ohmsche Gesetz?

Was sind Strom, Spannung und Widerstand, wie lauten ihre Einheiten?

Was ist Leistung und Energie?

Wovon hängt der Widerstand eines Drahtes ab?

Was ist der spezifische Widerstand? Was sind gute, was schlechte Leiter?

Wie ändert sich der Widerstand mit der Temperatur?

Was ist der Temperaturkoeffizient TK ?

Was ist der Innenwiderstand bzw. der Widerstand angeschlossener Geräte?

Wie lauten die Kirchhoffschen Gesetze?

Was sind Reihenschaltung und Parallelschaltung, was ein Spannungsteiler?

Einfache Schaltungen müssen Sie skizzieren und darin Ströme, Spannungen und Widerstände berechnen können.

Vorteil der Brückenschaltung?

Funktionsweise Drehspulinstrument

11.1 Physikalische Grundlagen

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Mit Hilfe des mikroskopischen Bilds für Metalle können Rückschlüsse auf die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit gezogen werden.

Bei zunehmender Temperatur schwingen die fest verankerten Gitterbausteine in einem **metallischen Festkörper** in zunehmenden Maße. Desweiteren nimmt die ungeordnete thermische Bewegung der freien Leitungselektronen zu. Dementsprechend werden die Zusammenstöße häufiger, welche die Elektronen bei ihrer Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes hindern. Dies entspricht einem zunehmenden Widerstand. **Halbleiter** (z. B. Kohlenstoff, Silizium, Germanium) enthalten bei tiefen Temperaturen nur wenige Ladungsträger, die erst mit zunehmender Temperatur durch Auslösen aus dem Kristallverband zur Verfügung stehen. Dies bedeutet bei diesen Materialien höhere Leitfähigkeit (geringerer Widerstand) mit wachsender Temperatur.

Für moderate Temperaturbereiche gilt ein linearer Zusammenhang zwischen Widerstand und Temperatur.

$$R = R_0(1 + \alpha T) \quad (11.1)$$

R_0 ist der Widerstand bei 0 °C, α ist der **Temperaturkoeffizient** des Widerstandes.

11.2 Apparative Grundlagen

Das Drehspulgalvanometer

Ein Leiter der Länge l , durch den der Strom I fließt, befindet sich in einem Magnetfeld der Feldstärke B . Auf den Leiter wirkt eine Kraft $\vec{F}$.

$$\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})$$

Die Richtung der Kraft steht senkrecht auf der Ebene, die durch die beiden Vektoren $\vec{I}$ und $\vec{B}$ festgelegt ist (zweite rechte Hand Regel). Auf dieser Kraftwirkung beruht die

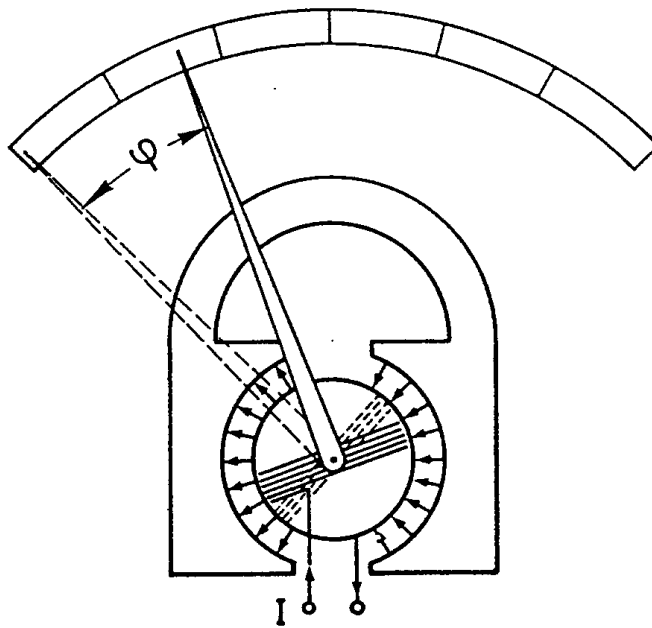


Abbildung 11.1: Schematische Darstellung eines Drehspulgalvanometers

Funktionsweise des Drehspulgalvanometers (Abb. 11.1). Es ist nur für Gleichstrom geeignet, wenn man Wechselströme messen will, ist ein Gleichrichter notwendig.

Im radialsymmetrischen Magnetfeld, das zwischen den zylindrisch geformten Polschuhen eines Permanentmagneten und einem zylindrischen Weicheisenkern besteht, ist eine Spule so angebracht, dass sie den Weicheisenzylinder umschließt und sich um die Zylinderachse drehen kann. Durch eine Feder (oder einen Torsionsfaden) wird sie in einer Ruhelage fixiert. Die zur Zeichenebene senkrechten Teile der Spule liegen dann im Magnetfeld. Fließt nun ein Strom durch die Spule, dann werden auf diese Teile entgegengesetzt wirkende Kräfte ausgeübt und es entsteht ein Drehmoment, das zum Strom proportional ist.

Die Wheatstonesche Brückenschaltung

Zur genauen Bestimmung von Widerständen verwendet man eine Brückenschaltung (Abb. 2a). Diese besteht aus vier Widerständen, an die in den Punkten a und c eine Spannung U angelegt wird. R_1 sei der zu bestimmende Widerstand, Widerstand R_2 sei regelbar. Zwischen b und d befindet sich ein Strommeßgerät G .

Zeigt dieses den Strom $I = 0$ an (d.h. zwischen b und d ist der Spannungsabfall $U_B = 0$), so ist die Brücke abgeglichen. Dies kann durch Verändern von R_2 erreicht werden. Dann gelten folgende Beziehungen, wobei man den oberen und den unteren Zweig als Span-

nungsteiler betrachtet:

$$* \quad \frac{U_2}{U} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad \frac{U_3}{U} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}. \quad (11.2)$$

Wegen $U_B = 0$ ist $U_2 = U_3$ und somit $(R_2 + R_1)/R_2 = (R_3 + R_4)/R_3$.
Man erhält also für die abgeglichene Brücke

$$* \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad \text{und} \quad R_1 = R_2 \frac{R_4}{R_3}. \quad (11.3)$$

Die Wheatstonesche Brücke wird meistens in Form der **Schleifdrahtbrücke** verwendet (Abb.2b).

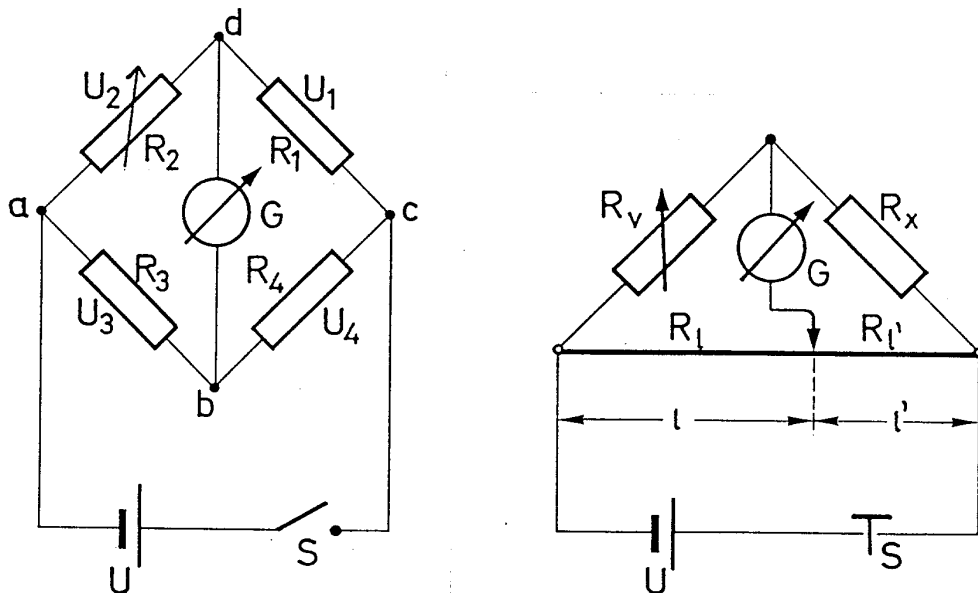


Abbildung 2. a: Brückenschaltung(links); b:Schleifdrahtbrücke (rechts)

Zwei der vier Widerstände werden durch einen homogenen überall querschnittsgleichen Metalldraht der konstanten Länge

$$L = l + l'$$

ersetzt. Werden der spezifische Widerstand des Materials mit ρ und der Querschnitt mit A bezeichnet, dann besitzt der Draht den Widerstand

$$R = R_l + R_{l'} = \frac{\rho}{A}l + \frac{\rho}{A}l'.$$

Als Endformel für den gesuchten Widerstand ergibt sich damit:

$$R_x = R_v \cdot \frac{l'}{l}.$$

R_v ist ein Vergleichswiderstand bekannter Größe, z.B. ein sogenannter **Stöpselrheostat**.

11.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Man bestimme den Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes von Kupfer.

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 11.3 gezeigt.

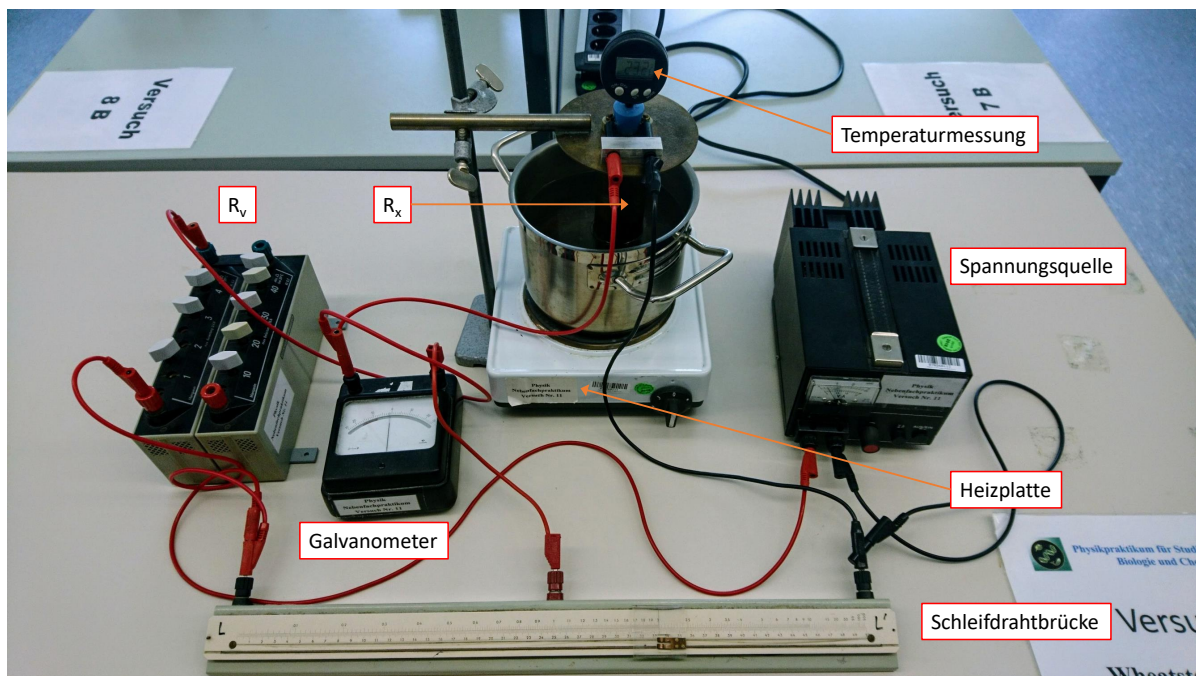


Abbildung 11.3: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Mit Hilfe der Schleifdrahtbrücke wird der Widerstand R_x einer Spule in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen. Der Widerstand R_v wird am Stöpselrheostat auf etwa $3\ \Omega$ eingestellt über die Spannungsquelle etwa $5\ \text{V}$ angelegt. Die Spule ist aus Isolierungsgründen in Öl getaucht, das in einem Wasserbad mit einem elektrischen Kocher langsam erhitzt wird. Der Rührer ist während der Messung ständig zu betätigen. Es erfolgt etwa alle $5\ ^\circ\text{C}$ bis etwa $85\ ^\circ\text{C}$ ein Abgleich der Brücke und das Ablesen der Temperatur T sowie des Verhältnis l'/l abgelesen. Daraus wird der Widerstand R_x berechnet.

Für jeden Messpunkt ist die Heizung kurz abzuschalten, bis sich eine konstante Temperatur eingestellt hat. Dabei ist es nicht erforderlich, dass glatte Temperaturwerte (z.B. 30,0 °C) erreicht werden.

Die Größe l'/l hat einen Fehler, da l nicht fehlerfrei messbar ist. Der Fehler von l'/l wird am kleinsten, wenn $l' = l$ ist (mathematische Begründung?). In einer Feineinstellung sollte der Vergleichswiderstand R_v bei der ersten Messung so eingestellt werden, dass der Abgleich etwa bei $l'/l \approx 1$ erfolgen kann.

Zwischen den Messungen muss die Brücke stromlos geschaltet werden, um Erwärmungen zu vermeiden.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Die ermittelten Werte für R werden gegen T in ein Diagramm eingetragen. Entsprechend den Angaben im Abschnitt über grafische Darstellungen wird zunächst der Achsenabschnitt A_y ($= R_0$) berechnet. Dieser wird benötigt, um aus der Steigung die gesuchte Größe

$$\alpha = \frac{S}{R_0}$$

zu erhalten.

Für die Ermittlung des Fehlers bestimmt man zunächst den größten vertikalen Abstand eines Meßpunktes von der gezeichneten Geraden (ΔR entspricht Δy). Damit kann $\Delta S/S$ und mit bekanntem ΔS auch $\Delta A_y = \Delta R_0$ berechnet werden.

Der relative Fehler des Endergebnisses ist dann gleich

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta R_0}{R_0}$$

12. Kapazität und Selbstinduktion

Das muss man wissen

- *Kondensator – Spule – Wechselstromwiderstand – Schein/Wirkwiderstand*
- *Wechselstrom – Schwingungsdauer – Frequenz – Phase – Induktionsgesetz*
- *Schwingkreis – Resonanz*
- *Funktionsprinzip: Spannungsteiler – Transformator – Oszilloskop (siehe Versuch 13)*

Anwendungen:

- elektrische Gefahren
- Zitteraal
- RFID-Tags
- EMVG
- Einfluß sich bewegender Messleitungen
- Sensorik (z.B. Kondensatormikrophon, dynamisches Mikrophon, kapazitive Luftfeuchtemessung (Silikagel als Dielektrikum), Druckmessung, Materialunterscheidung)
- Energie-/Signalübertragung
- Blindströme als Problemquelle

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Kondensator, Spule, Kapazität, Induktivität und Selbstinduktion?

Was ist Leistung, was Energie?

Was versteht man unter Spitzenwert und Effektivwert?

Wie hängen sie zusammen?

Was sind Phase, Phasenverschiebung, Frequenz und Schwingungsdauer?

Was ist der Wechselstromwiderstand von L und C ?

Was bedeuten die Namen Schein- und Wirkwiderstand?

Skizzieren von einfachen Schaltungen mit Reihen- Parallelschaltung und Spannungsteiler mit Berechnen von Spannungen und Strömen.

Was ist Induktion und welche Anwendungen gibt es?

Was sind Resonanz, Schwingkreis (Saug- und Sperrkreis)?

Wann benötigt man ein Oszilloskop und wie funktioniert es?

Was ist beim Messen mit dem Oszilloskop unbedingt zu beachten?

12.1 Physikalische Grundlagen

Der Kondensator im Wechselstromkreis

Wird an einen Kondensator eine **Gleichspannung** angeschlossen, dann fließt kein Strom mehr, nachdem der Kondensator aufgeladen ist.

Anders ist sein Verhalten gegenüber einer **Wechselspannung**. Man betrachte einen Schaltkreis, der aus einer **Wechselspannungsquelle**, einem Kondensator und einem Widerstand besteht (Abb.1).

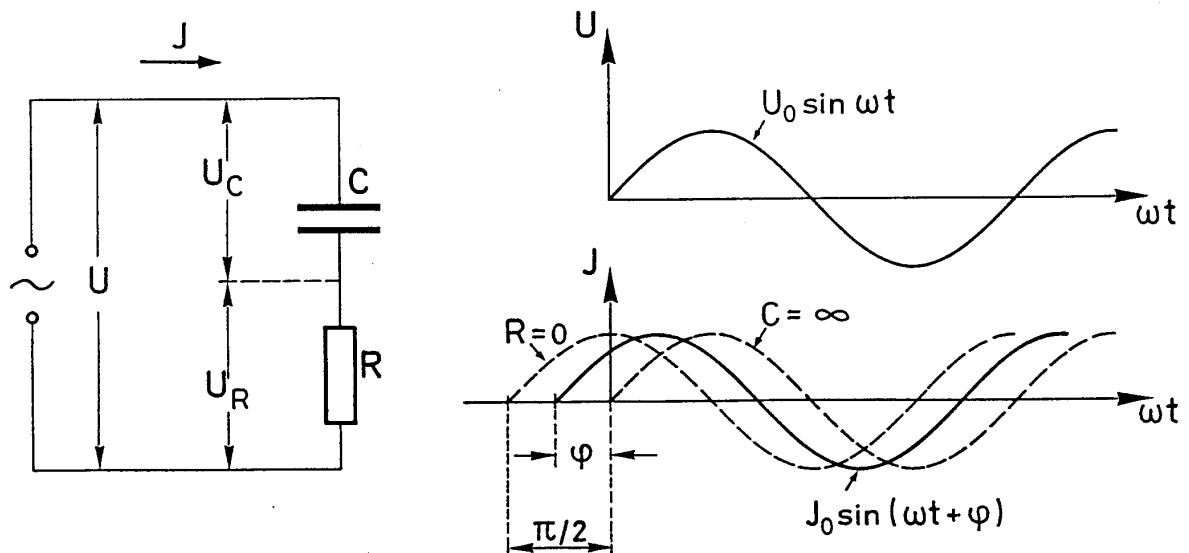


Abbildung 1. Der RC -Kreis

Letzteren fügt man ein, da in jedem Kreis ohmsche Widerstände vorhanden sind und dadurch der allgemeine Fall erfasst wird.

Die mathematische Darstellung für einen **sinusförmigen Wechselstrom** lautet

*

$$U = U_0 \sin(\omega t)$$

Fließt zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Strom I , dann kann folgende Beziehung aufgeschrieben werden:

$$\begin{array}{ll}
 * \text{ Spannung am Kondensator} + \text{Spannung am Widerstand} & = \text{angelegte Spannung} \\
 Q/C + RI & = U_0 \sin(\omega t)
 \end{array}$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass die Summe aller Spannungen in einem geschlossenen Kreis null sein muss (**Kirchhoffsche Maschengleichung**). Sie muss zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein.

Zunächst gilt es, den zeitlichen Verlauf des Stromes in diesem Kreis zu verstehen. Erwartungsgemäß sollte der Strom mit der gleichen Frequenz ω die Richtung wechseln, wobei eine **Phasenverschiebung** zwischen Strom und Spannung möglich ist. Man macht einen Ansatz der Form

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) .$$

Die exakte mathematische Behandlung ergibt folgende Beziehungen für die unbekannten Größen I_0 und φ :

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} = \frac{U_0}{Z} \qquad \tan \varphi = \frac{1}{\omega C R}$$

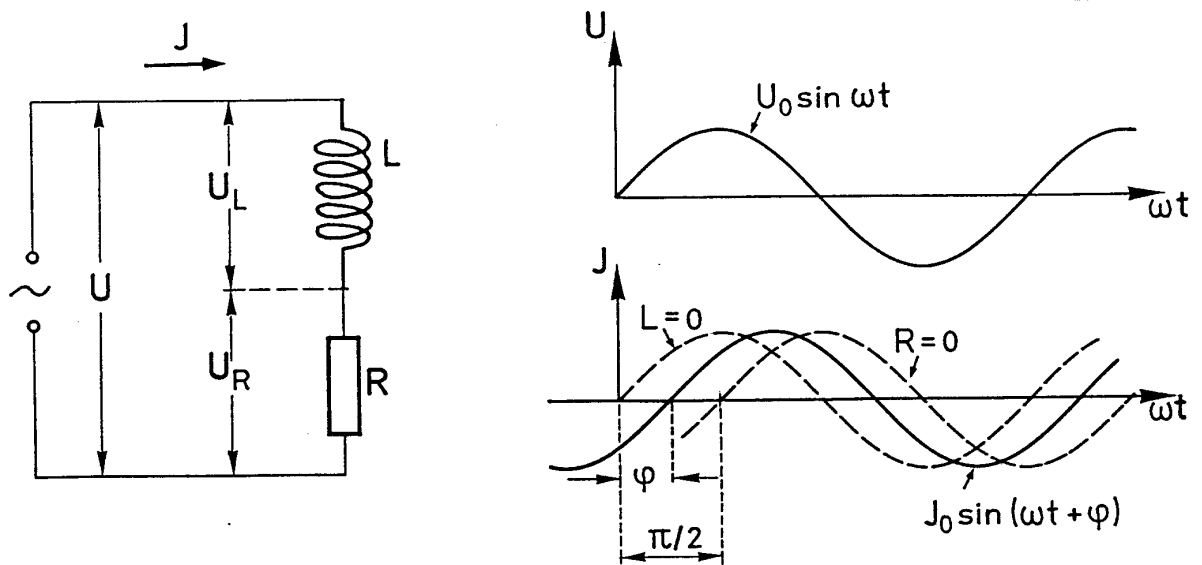
Wie zu erwarten, hängt die Stromamplitude I_0 von U_0 und R ab (wie im Gleichstromfall). Zusätzlich wirkt die Größe $1/\omega C$ wie ein Widerstand. Dieser wird kapazitiver Widerstand des Kondensators genannt.

Wie oben erwähnt, erhält man eine Phasenverschiebung zwischen angelegter Spannung und Strom. Die Werte für $\tan \varphi$ können zwischen 0 und ∞ liegen, φ daher zwischen 0 und $\pi/2$. Diese beiden Grenzwerte entsprechen den Fällen eines rein ohmschen Widerstandes ($C = \infty$) und eines rein kapazitiven Widerstandes ($R = 0$).

Trägt man U und I in ein Zeitdiagramm wie in Abb. 1 ein, dann sieht man, dass der Strom stets früher einen bestimmten Zustand erreicht (Nulldurchgang, Maximum) als die Spannung. Man sagt, **der Strom eilt der Spannung voraus**. Zum Beispiel ist der Strom bereits bei $\omega t = -\varphi$ null.

Die Spule im Wechselstromkreis

Wird an eine Spule eine Gleichspannung angelegt, dann fließt ein Strom, der sich allein aus dem ohmschen Widerstand der Spule ergibt (Abb.2). Auch hier ändern sich die Verhältnisse, wenn statt dessen eine Wechselspannung verwendet wird. Die Überlegungen sind analog zu denen beim Kondensator.

Abbildung 2. Der RL -Kreis

Die Gleichung für die Spannungen lautet hier:

*	Spannung an der Spule + Spannung am Widerstand	= angelegte Spannung
	$L \frac{dI}{dt} + RI$	$= U_0 \sin(\omega t)$

Unter Verwendung des beim Kondensator gemachten Ansatzes für den Strom erhält man das folgende Ergebnis:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{U_0}{Z} \qquad \tan \varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

Die Spule besitzt für eine Wechselspannung der Frequenz ω einen induktiven Widerstand der Größe ωL .

Die Werte für $\tan \varphi$ liegen zwischen $-\infty$ und 0, d.h. φ liegt zwischen $-\pi/2$ und 0. Dies entspricht den beiden Grenzfällen: rein induktiver Widerstand ($R = 0$) und rein ohmscher Widerstand ($L = 0$).

Im Zeitdiagramm von U und I sieht man, dass nun der Strom stets später einen bestimmten Zustand erreicht. Man sagt: **Der Strom eilt der Spannung nach.**

Wechselstrom mit Widerstand und	
Kondensator	Induktivität
$Q/C + RI = U_0 \sin(\omega t)$	$L \frac{dI}{dt} + RI = U_0 \sin(\omega t)$
Wechselstromwiderstand	
Widerstand = $1/\omega C$	Widerstand = ωL
Phasenverschiebung	
$\tan \varphi = \frac{1}{\omega C R}$	$\tan \varphi = -\frac{\omega L}{R}$
$\tan \varphi$ liegt zwischen 0 und ∞	$\tan \varphi$ liegt zwischen $-\infty$ und 0
φ liegt zwischen 0 und $\pi/2$	φ liegt zwischen $-\pi/2$ und 0
Strom eilt der Spannung voraus	Strom eilt der Spannung nach
Grenzfälle	
rein ohmscher Widerstandes ($C = \infty$)	rein induktiver Widerstand ($R = 0$)
rein kapazitiver Widerstandes ($R = 0$)	rein ohmscher Widerstand ($L = 0$)

Der elektrische Schwingkreis

Schwingkreise sind bestimmte Kombinationen von Spule und Kondensator (und dem unvermeidlichen Widerstand), die sich dadurch auszeichnen, dass in ihnen Ströme und Spannungen sinusförmige Schwingungen ausführen. Prinzipiell kann man zwei Schaltungstypen unterscheiden, den Serien- und den Parallelschwingkreis.

Der Serienschwingkreis (Abb.3)

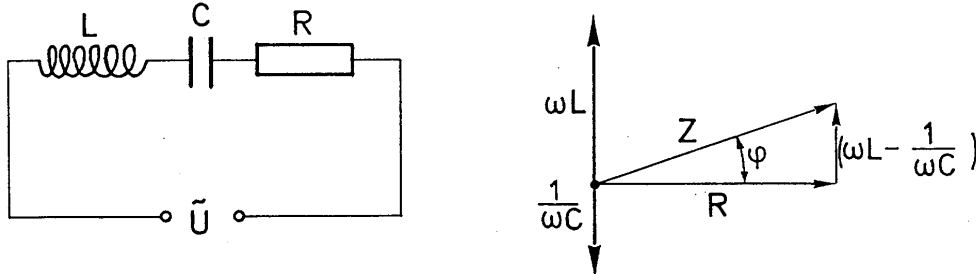


Abbildung 3. Der Serienschwingkreis

Hierbei sind L , C und R hintereinander geschaltet. Da in Spule und Kondensator der Strom um $\pi/2$ phasenverschoben sind, ergibt sich der Gesamtwiderstand Z der Schaltung zu:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}.$$

Der Phasenwinkel zwischen angelegter Spannung und Strom ist

$$\tan \varphi = \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R}.$$

Für eine bestimmte Frequenz $\omega_0^2 = 1/LC$ wird der Widerstand minimal ($Z = R$) und die Phasendifferenz verschwindet, wie rechts in Abb. 3 anschaulich dargestellt ist. Man

bezeichnet diese Frequenz als die **Resonanzfrequenz**.

Verändert man also die Erregerfrequenz eines Schwingkreises, dann ist der Resonanzfall dadurch ausgezeichnet, dass bei Erreichen der Resonanzfrequenz ω_0 der Widerstand der Schaltung minimal, d.h. der auftretende Strom maximal wird.

Der Parallelschwingkreis (Abb.4)

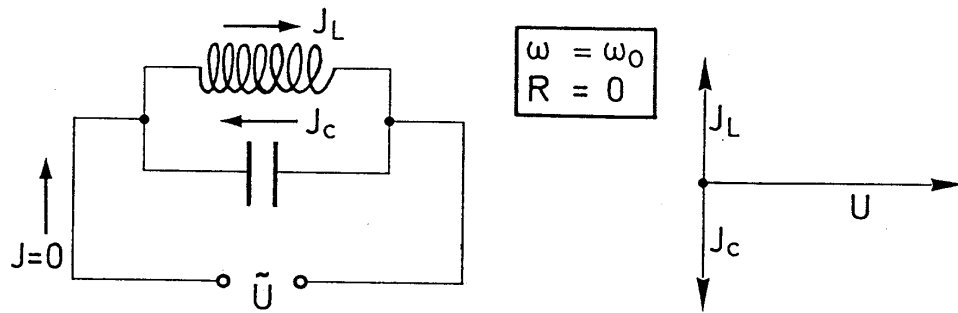


Abbildung 4. Der Parallelschwingkreis

Nun soll die Parallelschaltung von L und C betrachtet werden. An beiden Schaltelementen liegt die gleiche Spannung. Mit Hilfe des oben diskutierten Verhaltens von Spule und Kondensator im Wechselstromkreis erkennt man, dass zwischen den Strömen in den beiden Zweigen I_C und I_L eine Phasenverschiebung von 180° besteht und im Resonanzfall ($1/\omega_0 C = \omega_0 L$) ihre Beträge gleich groß sind.

Der Strom in den Zuleitungen wird 0, während er in den beiden Zweigen (I_L und I_C) höhere Werte annehmen kann.

Die Parallelschaltung stellt im Resonanzfall einen unendlich hohen Widerstand dar. Lässt man einen endlichen Widerstand R zu, dann ändert sich prinzipiell nichts an dieser Überlegung. Der Widerstand des Kreises durchläuft ein Maximum; der Strom I in den Zuleitungen ein Minimum.

12.2 Apparative Grundlagen

Bestimmung einer Kapazität (Abb.5)

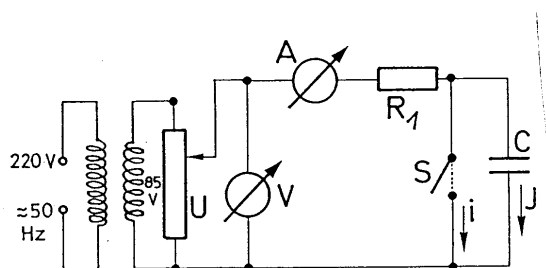


Abbildung 5. Bestimmung einer Kapazität

Der Versuchsaufbau zur Messung der Kapazität ist in Abb. 12.6 gezeigt.

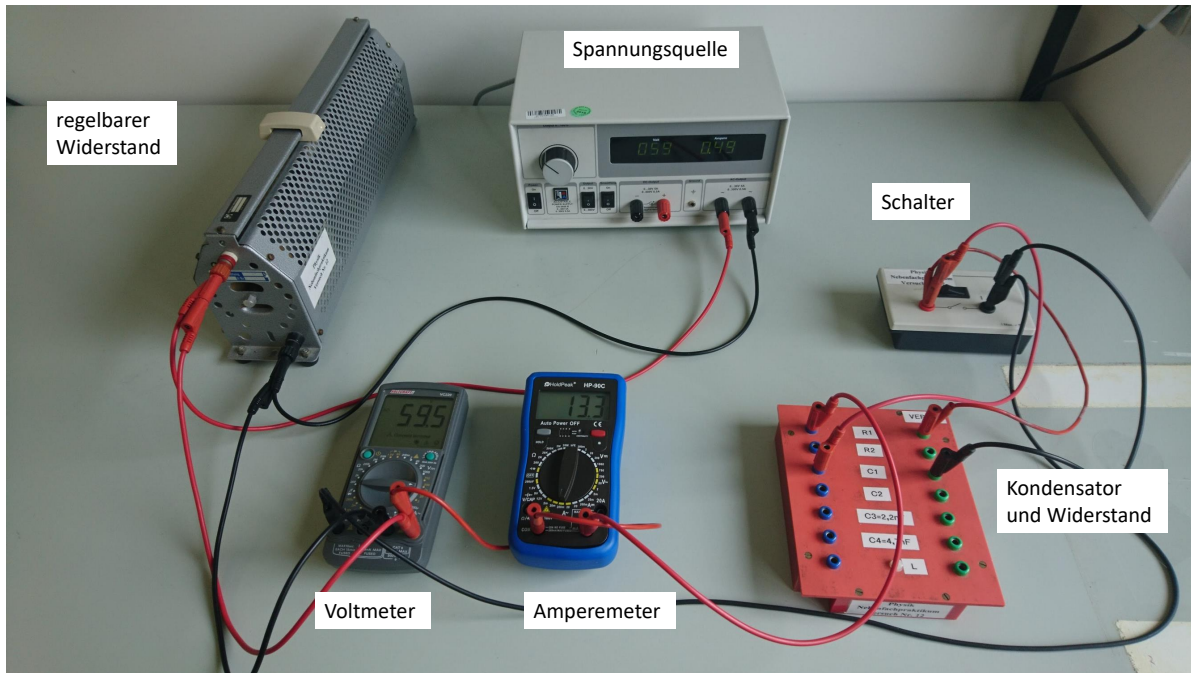


Abbildung 12.6: Ansicht des Versuchsaufbaus zur Messung der Kapazität.

Zur Bestimmung einer Kapazität schaltet man einen ohmschen Widerstand R_1 und den Kondensator in Reihe und erhält für den Gesamtwiderstand:

$$Z = \sqrt{R_1^2 + 1/(\omega C)^2} \quad \text{oder} \quad U = I \cdot Z \quad (12.1)$$

Man misst nun zunächst bei geschlossenem Schalter S den Strom i bei einer frei gewählten Spannung U (man wähle etwa $U = 60 \text{ V}$). Es gilt dann:

$$U = i \cdot R_1 \quad (12.2)$$

Dann messe man bei geöffnetem Schalter und derselben Spannung den Strom I . Aus den gemessenen Werten U , i und I lässt sich C nach Gleichung (12.1) bestimmen, wenn man darin R_1 mit Hilfe von Gleichung (12.2) eliminiert.

Bestimmung einer Induktivität (Abb.6)

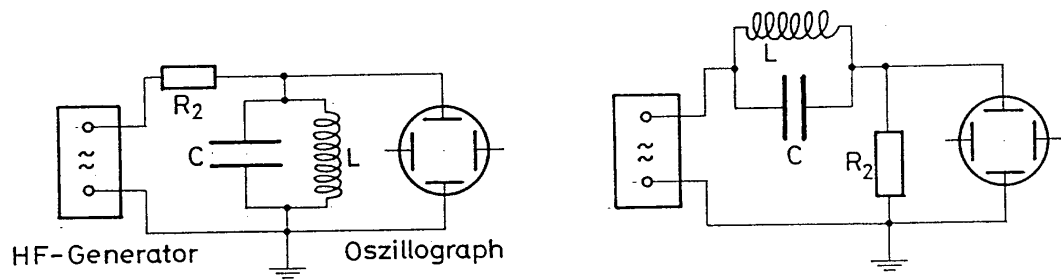


Abbildung 7. Bestimmung einer Induktivität

Der Versuchsaufbau zur Messung der Induktivität ist in Abb. 12.8 gezeigt.

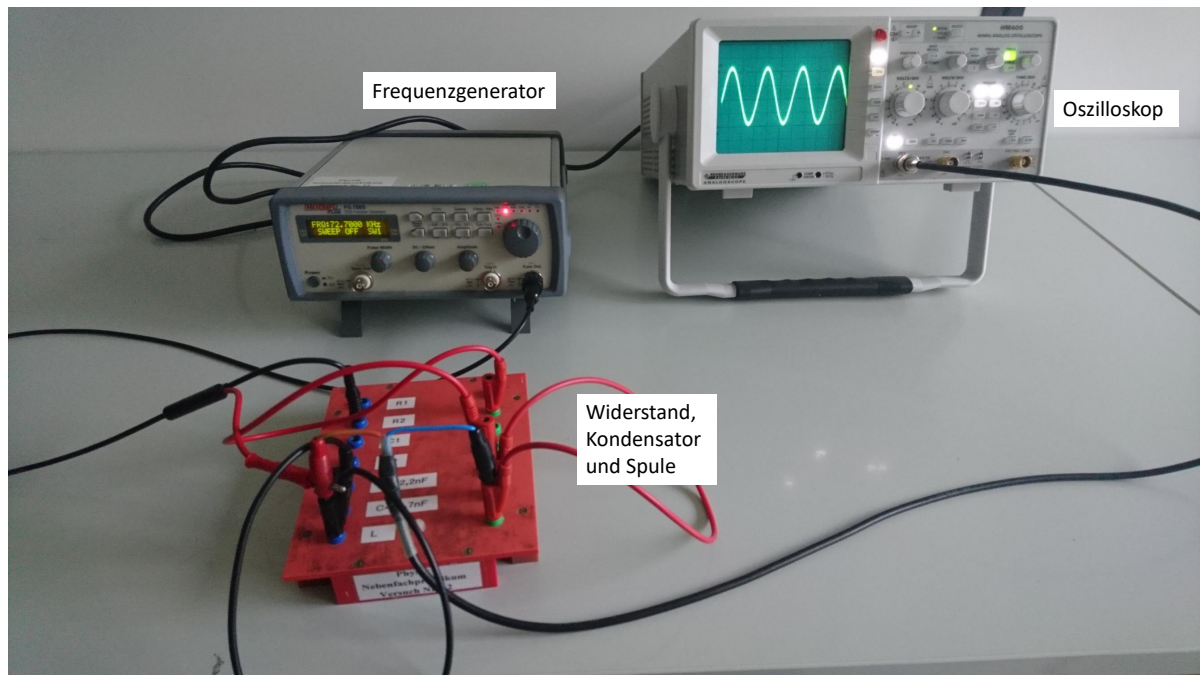


Abbildung 12.8: Ansicht des Versuchsaufbaus zur Messung der Induktivität. In der gezeigten Anordnung wird die Schwingung am LC-Glied abgegriffen.

Eine unbekannte Induktivität L kann durch Messung der Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

eines LC-Schwingkreises mit bekannter Kapazität C bestimmt werden. Als Spannungsquelle dient ein Hochfrequenzgenerator, als Spannungsmesser ein Oszilloskop. Variiert man die Frequenz, so ändert sich auch der Widerstand des Schwingkreises und damit die Spannung. Bei Resonanz wird die Anzeige am Oszilloskop maximal. Da die vom Generator gelieferte Spannung konstant ist, muss gleichzeitig die Spannung am vorgeschalteten Widerstand R_2 minimal werden. Auch dies kann mit dem Oszilloskop gezeigt werden.

12.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Es sind die unbekannten Kapazitäten C_1, C_2 und eine unbekannte Induktivität L zu messen.

Versuchsdurchführung

Zur Bestimmung von ω beachte man folgendes:

Die Frequenz ω_0 kann am HF-Generator nur grob abgelesen werden. Daher muß die Zeit T_0 die benötigt wird um eine volle Schwingung aufzuzeichnen, am Oszilloskopen abgelesen werden.

Auswertung und Fehlerabschätzung

Zur C -Messung:

Im Bereich zwischen 40 und 60 Volt führe man für die zu messende Kapazität für 5 verschiedene Spannungswerte eine Messung von I und i durch und errechne aus zusammengehörenden Werten C , nach der Formel:

$$\frac{1}{\omega C} = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - \left(\frac{U}{i}\right)^2}$$

Man lege eine Tabelle mit den folgenden Spalten an:

U	i	I	$(U/I)^2$	$(U/i)^2$	$(1/\omega C)$	C

Aus den 5 errechneten Werten bilde man das Mittel für jede Kapazität, die größte Abweichung ist wiederum als Fehler anzugeben.

Zur L -Messung:

Man führe für die Kapazitäten (C_3 und C_4) jeweils zwei Messungen mit beiden Schaltungsmöglichkeiten (Oszilloskop am Kondensator bzw. am Widerstand) durch. Dadurch erhält man vier Werte für L , die gemittelt werden. Die größte Abweichung ist als Fehler anzugeben.

13. Permittivität

Das muss man wissen

- *Kondensator - Kapazität - Elektrische Feld - Dielektrikum*
- *Spule und Induktivität*
- *Schwingkreis - Resonanz*
- *Sender - Empfänger*
- *Funktionsprinzip eines Oszillographen*

Anwendungen:

- Resonanzschwingkreis in der Elektronik als Frequenzfilter
- Ablesen und Umgang von Werten vom Oszillograph
- Arbeitsweise eines Oszillographs

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Kondensator, Spule, Kapazität und Induktivität?

Was ist ein Dielektrikum?

Was ist ein elektrisches Feld, was Ladung, Strom, Spannung und Feldstärke?

Was ist Leistung, was Energie?

Was versteht man unter Spitzen- und Effektivwert? Wie hängen sie zusammen?

Was sind Phase, Phasenverschiebung, Frequenz und Schwingungsdauer?

Was ist der Wechselstromwiderstand von L und C ?

Was bedeuten die Namen Schein- und Wirkwiderstand?

Was versteht man unter Resonanz?

Was ist ein Schwingkreis (Saug- und Sperrkreis)?

Skizzieren von einfachen Schaltungen mit Reihen- Parallelschaltung und

Spannungsteiler mit Berechnen von Spannungen und Strömen.

Was ist Induktion und welche Anwendungen gibt es?

Was ist Resonanz?

Was ist ein Schwingkreis (Saug- und Sperrkreis)?

Wann benötigt man ein Oszilloskop und wie funktioniert es?

Was ist beim Messen mit dem Oszilloskop unbedingt zu beachten?

13.1 Physikalische Grundlagen

Kondensator und Kapazität

Unter einem Kondensator versteht man einen Speicher für elektrische Ladung. Wird an zwei isoliert gegeneinander aufgestellte Leiter eine Spannung U gelegt, dann fließt eine bestimmte Ladungsmenge Q auf die Leiter. Man findet, dass das Verhältnis Q/U unabhängig von U konstant ist. Definitionsgemäß bezeichnet man eine solche Anordnung als Kondensator, dieses Verhältnis als die Kapazität C des Kondensators.

$$* \quad C = \frac{\text{Ladung auf den Leitern}}{\text{Spannung zwischen den Leitern}} = \frac{Q}{U}. \quad (13.1)$$

Die SI-Einheit für die Kapazität ist $1 \text{ C/V} = 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F}$.

Der Plattenkondensator

Die einfachste Form eines Kondensators besteht aus zwei zueinander parallelen Leiterplatten. Um seine Kapazität zu bestimmen, betrachten wir zwei Platten mit der Fläche A und dem Abstand d . Wenn man sich anschaulich vorstellt, dass jede elektrische Feldlinie im Inneren eines Kondensators an einer positiven Ladung entspringt und an einer negativen Ladung der anderen Platte endet, dann ist leicht einzusehen, dass die elektrische Feldstärke E (diese ist proportional zur Feldliniendichte) im Kondensator proportional ist zur Ladungsdichte Q/A (gemessen in C/m^2). Quantitativ gilt

$$* \quad E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad (\epsilon_0 = \text{elektrische Feldkonstante}).$$

Da außerdem gilt

$$U = Ed$$

erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen der Ladung auf dem Kondensator und der angelegten Spannung:

$$U = Ed = Q \frac{d}{\epsilon_0 A}.$$

Damit ergibt sich für die Kapazität eines Plattenkondensators die Gleichung:

*

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (13.2)$$

Materie im elektrischen Feld (Dielektrikum)

Bringt man einen Isolator (der ja keine frei beweglichen Ladungsträger besitzt!) in ein elektrisches Feld, so bewirken die elektrischen Kräfte, die an den Ladungen des Atoms (positiver Kern und negative Elektronenhülle) angreifen, eine Verschiebung in entgegengesetzte Richtungen. Die Atome der Substanz werden zu kleinen elektrischen Dipolen. Man bezeichnet diesen Vorgang als **Verschiebungspolarisation**.

Es gibt eine Gruppe von Stoffen, bei denen noch ein weiterer Effekt hinzukommt: **Orientierungspolarisation**. Sie tritt dann auf, wenn die Atome oder Moleküle der Substanz bereits ohne äußeres Feld einen Dipol besitzen (man spricht dann von einem permanenten Dipol). In einem äußeren Feld drehen sich die einzelnen Dipole, sie werden in Feldrichtung ausgerichtet.

Verschiebungs- und Orientierungspolarisation haben nach außen für einen Körper die gleiche Wirkung: Sie schwächen das äußere Feld, das die Polarisation hervorgerufen hat. Wie kann man die Schwächung des Feldes verstehen?

Denken wir uns einen geladenen Kondensator, bei dem der Raum zwischen den Platten mit einem Isolator (in diesem Fall Dielektrikum genannt) erfüllt ist. Im Innern des Stoffes bilden die atomaren Dipole eine regelmäßige Anordnung, bei der sich die benachbarten positiven und negativen Ladungen kompensieren und nur an den Oberflächen Flächenladungen Q' übrigbleiben (Abb.1),

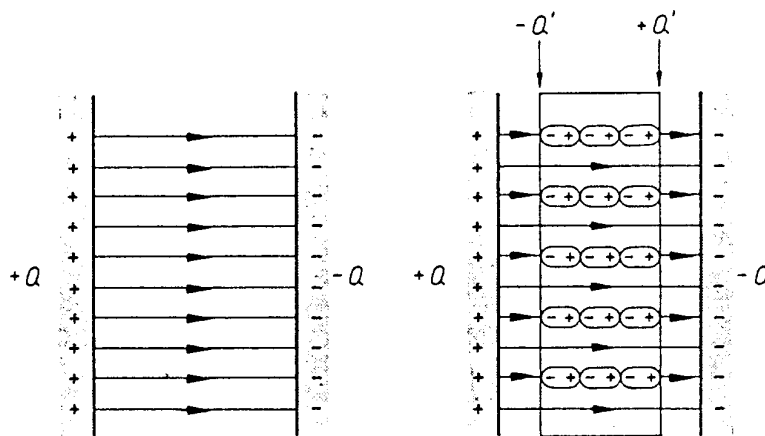


Abbildung 1. Zur Polarisation eines Dielektrikums

und zwar negative Ladungen an der Seite des Dielektrikums, das die positive Kondensatorplatte berührt und umgekehrt. Das heißt aber, dass sich auf Grund dieser Flächenladungen zwischen den beiden Seiten des Dielektrikums ein elektrisches Feld ausbildet, das dem Kondensatorfeld entgegengesetzt ist, dieses also schwächt.

Diese Schwächung des Kondensatorfeldes bewirkt, dass sich die Kapazität eines Kondensators beim Einbringen eines Dielektrikums ändert. Da bei konstant gehaltener Ladung Q auf dem Kondensator mit kleiner werdender Feldstärke auch die Spannung abnimmt, ergibt sich somit (wegen $C = Q/U$) eine Zunahme der Kapazität um einen Faktor ε . Man bezeichnet diese Größe als relative Permittivität (früher auch Dielektrizitätszahl oder relative Dielektrizitätskonstante). Als Definitionsgleichung für die relative Permittivität kann man daher schreiben:

$$* \quad \varepsilon = \frac{\text{Kapazität mit Dielektrikum}}{\text{Kapazität ohne Dielektrikum}} = \frac{C}{C_0}. \quad (13.3)$$

ε ist auf Grund dieser Definition eine dimensionslose Zahl. Ihr Wert beträgt für Vakuum 1, für Materie ist stets $\varepsilon > 1$.

Die Kapazität eines mit Dielektrikum gefüllten Kondensators beträgt somit

$$* \quad C = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{A}{d}. \quad (13.4)$$

Die **Permittivität** ε einer Substanz gibt an, um welchen Faktor sich die Kapazität eines Kondensators erhöht, wenn dieser Stoff den Raum zwischen den Platten ausfüllt.

13.2 Apparative Grundlagen

Das Oszilloskop

Zur bildlichen Darstellung schnell veränderlicher elektrischer Signale $y = y(t)$ sowie zur Frequenz- und Spannungsmessung eignet sich besonders das Oszilloskop, mit den Bestandteilen

- dem X-Verstärker (Horizontalverstärker),
- dem Y-Verstärker (Vertikalverstärker),
- dem Zeitablenkgenerator und
- dem Triggerverstärker

Mit dem Analog-Oszilloskop lassen sich (wegen der Trägheit des Auges) Signale beobachten, die sich schneller als in ca. 10msec wiederholen und deren Verlauf sich langsamer als in ca. 0,1sec verändert.

Funktionsweise

In einer **Braunschen Röhre** erzeugt eine **Glühkathode** K Elektronen. Diese werden zur **Anode** A beschleunigt und mit **Wehneltzylinder** W und einer **Elektronenlinse**

E auf einen **Fluoreszenzschirm** fokussiert. Dadurch entsteht dort ein kleiner Leuchtfleck. Über die Spannungen an der Elektronenkanone kann man Helligkeit und Schärfe (Fokus) des Flecks einstellen. Die x- und y-Verstärker erzeugen Spannungen an zwei **Ablenkkondensatoren** C_y und C_x , die den Leuchtfleck über den Bildschirm schieben. Bei hinreichend schneller Bewegung des Bildpunktes (schneller als 50Hz) entsteht ein flackerfreies Bild. Der y-Verstärker passt das Eingangssignal $y(t)$ an das Bildformat an. Zum Messen wird der Verstärkungsfaktor in kalibrierten Stufen von ca. 1mV/cm bis 10V/cm eingestellt. Ein zusätzlicher variabler Faktor erlaubt gegebenenfalls eine Feineinstellung. Mit dem Offset (y-Pos) kann die y-Position auf dem Bildschirm verändert werden.

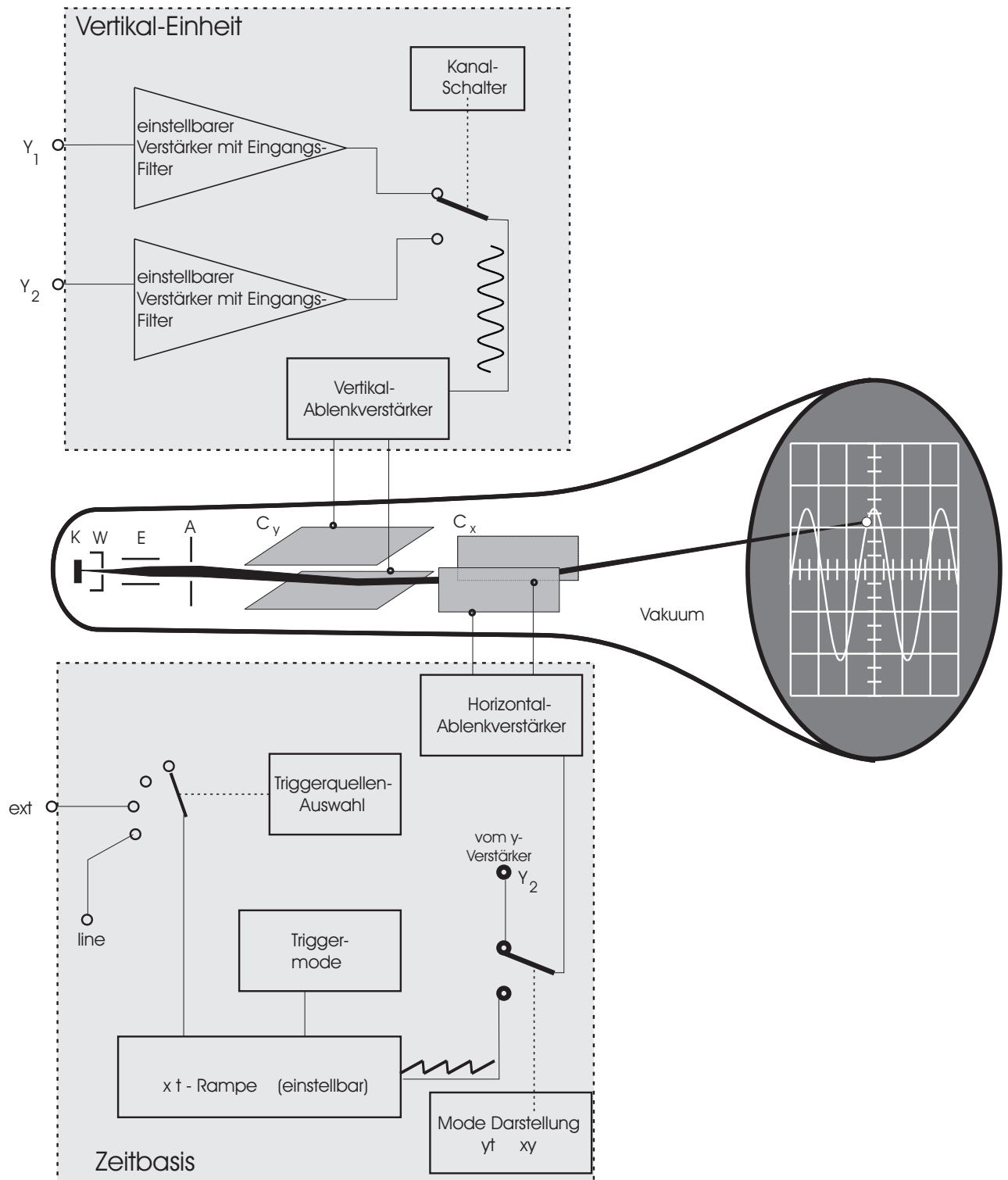


Abbildung 2. Analog-Oszilloskop

Im Normalfall wird das Eingangssignal zur originalgetreuen Darstellung gleichspannungsmäßig (**DC**) gekoppelt. Geringe Gleichspannungsanteile können über y-pos ausgeglichen werden. Bei extremen Gleichspannungskomponenten kann der Gleichspannungs-

anteil mit einem Kondensator im Signalweg unterdrückt werden (**AC**). Um die Nulllage einzustellen, kann der Eingang geerdet werden (**0**).

Standardeinstellung: DC; kalibrierte Stufen Die **Zeitbasis** erzeugt eine linear ansteigende Spannung (Sägezahnspannung oder **sweep**), die über die x-Ablenkung den Leuchtpunkt über den Bildschirm mit konstanter Geschwindigkeit zieht, und ihn am Ende des sweep an den Anfang zurück-springen lässt. Die Geschwindigkeit (Zeit/cm) kann in skalierbaren Stufen eingestellt werden. Auch hier ist ein variabler Feinabgleich möglich.

Standardeinstellung: kalibrierte Stufen

Für ein stabiles Bild eines periodischen Signals muss der sweep immer bei gleicher Phase ausgelöst werden (**Trigger**).

Häufig ist es sinnvoll, zwei oder sogar mehr Signale synchron darzustellen. In einem **Zweikanal-Oszilloskop** werden zwei Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$ in den Eingangsstufen getrennt verstärkt, danach leitet ein Umschalter abwechselnd einmal $y_1(t)$ dann $y_2(t)$ zur y-Ablenkung. Im **Alternate-Mode** wird abwechselnd $y_1(t)$ und $y_2(t)$ jeweils über die volle Bildschirmbreite geschrieben. Durch die Trägheit des Auges entsteht bei Sweepzeiten über ca. 1msec/cm ein stehendes Bild. Im **Chop-Mode** erfolgt die Umschaltung zwischen den Kanälen mit ca. 100kHz. Dieses Zerhacken der Signale bei Ablenkgeschwindigkeiten langsamer als ca. $100\mu\text{sec/cm}$ ist nicht mehr erkennbar.

Neben der getrennten Darstellung von $y_1(t)$ und $y_2(t)$, können über die Funktionen ADD und INV auch die Signale $y_1 + y_2$ sowie $y_1 - y_2$ dargestellt werden. Letzteres ist zur Aufzeichnung von Signalunterschieden besonders wichtig.

Bei Zweikanal-Oszilloskopen kann der zweite y-Kanal zur x-Ablenkung eingesetzt werden. Mit Hilfe dieser **x-y-Darstellung** lassen sich beispielsweise Phasen- und Frequenzbeziehungen zwischen periodischen Signalen (Lissajous-Figuren) untersuchen oder auch Hysteresekurven darstellen.

13.2.1 Speicher-Oszilloskop

Beim Speicheroszilloskop wird die Messgröße $y(t)$ punktweise erfasst und als Wertetabelle in einem digitalen Speicher abgelegt. Der Graf dieser Wertetabelle wird unabhängig von der Messwerterfassung in einer Anzeigeeinheit erzeugt.

Vorteil dieses Aufbaus ist, dass durch die Speicherung auch Signale mit geringer Wiederholrate oder auch einmalige Ereignisse erfasst und dargestellt werden können. Auch die Untersuchung von Ereignissen vor einem auslösenden Trigger (Pretrigger) ist möglich. Weitere Vorteile sind Möglichkeiten zur Bearbeitung der Messdaten (Mittelwertbildung zur Rauschreduzierung, Averaging) und zur Archivierung der Messdaten.

Leider können durch die punktweise Abtastung Fehler entstehen, die ein total falsche Messgröße vortäuschen (**Aliasing**). Da solche Fehldeutungen selbst erfahrenen Experimentatoren unterlaufen, empfehlen wir, nach Möglichkeit einen Analog-Oszilloskop zu verwenden.

Sender und Messschwingkreis (Resonanzkreis)

Entsprechend der Definition der Permittivität kann sie für einen Stoff bestimmt werden, indem man die Kapazität eines Kondensators mit und ohne Dielektrikum misst. Dazu benutzen wir einen Schwingkreis, der von einem Sender zu erzwungenen Schwingungen erregt wird und im Resonanzfall mit der Frequenz

$$* \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{ges}}} \quad (13.5)$$

schwingt. Ist die Induktivität des Schwingkreises bekannt, kann man mit Hilfe der Sendefrequenz f_0 (ca. 500 kHz) eine Kapazität bestimmen. Der Sender besteht in diesem Versuch aus einem Frequenzgenerator der an eine Sendespule gekoppelt wird.

Die Sendespule S (ca. 300 μ H) strahlt elektromagnetische Wellen der Frequenz f_0 aus. Diese regen einen Schwingkreis, der aus der Empfangsspule E und einem Drehkondensator C_d besteht, an. Mit Hilfe des Drehkondensators kann der Kreis auf Resonanz abgestimmt werden, siehe Abb. 3.

Parallel zu diesem Drehkondensator liegen noch zwei Kapazitäten: Die (konstante) Kapazität von Oszilloskop und Kabel (C_z) und ein Messkondensator (C). Der Oszilloskop O gestattet die Abstimmung auf Resonanz (maximale Spannung am Kondensator). Für die Gesamtkapazität kann daher geschrieben werden:

$$* \quad C_{ges} = C_d + C_z + C. \quad (13.6)$$

(Die Kapazitäten parallel geschalteter Kondensatoren addieren sich.)

Da bei gleichbleibender Frequenz des Senders auch C_{ges} für Resonanz konstant bleiben muß, kann über C_d , dessen Wert über eine Eichkurve abgelesen werden kann, der Wert der Messkapazität C ermittelt werden.

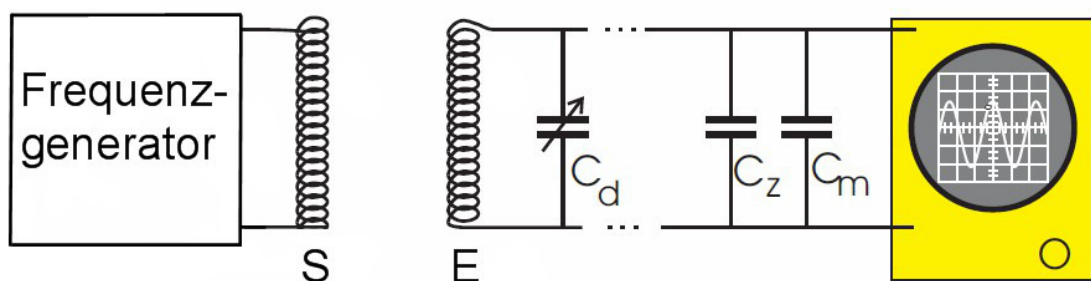


Abbildung 3. Sender und Resonanzkreis

13.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Bestimmung der Zusatzkapazität C_z .
2. Bestimmung der relativen Permittivität eines Stoffes

Versuchsdurchführung und Auswertung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 13.4 gezeigt.

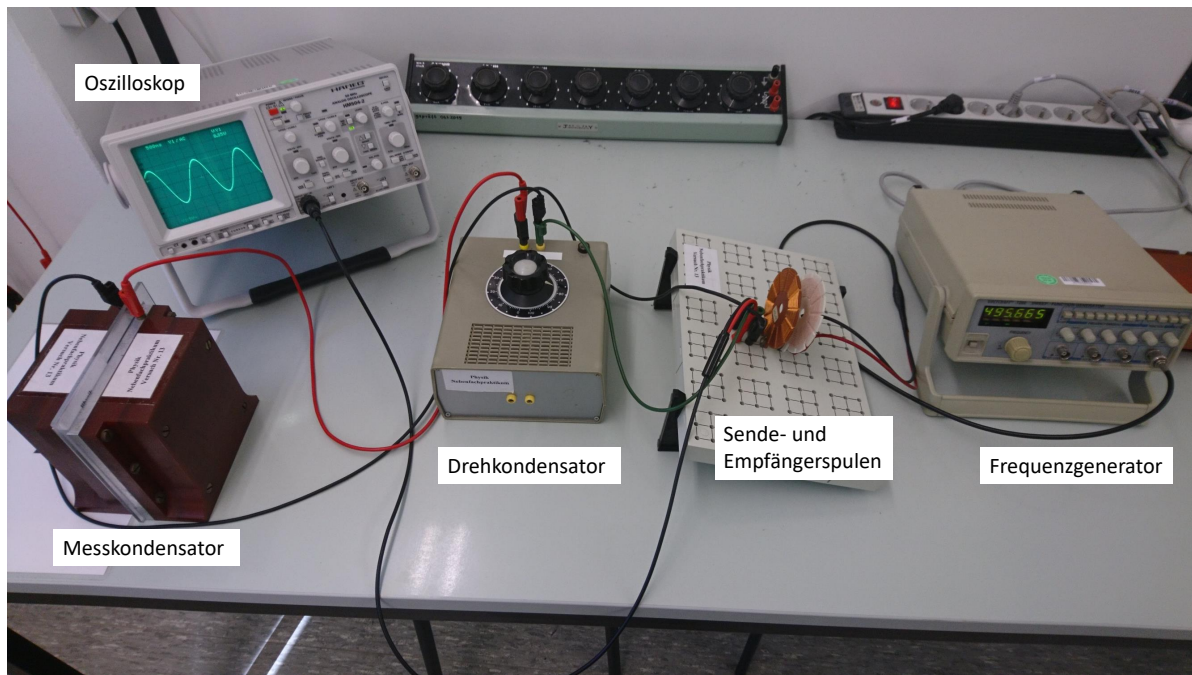


Abbildung 13.4: Ansicht des Versuchsaufbaus.

In den Aufbauten kommen zwei verschiedene Empfängerspulen, E_1 (ca. $125\mu\text{H}$) und E_2 (ca. $260\mu\text{H}$), zum Einsatz. Vergewissern Sie sich welche Spule in Ihrem Aufbau (links/rechts) verwendet wird, da die Frequenz des Generators für den Sender entsprechend gewählt werden muss: 500kHz für E_1 und 400kHz für E_2 . Die Sendefrequenz wird während des gesamten Versuches nicht verändert.

Zu 1)

Berechnen Sie die Kapazität C_{ges} des Schwingkreises, bei der die Resonanz erreicht wird, d.h. mit maximaler Amplitude schwingt. Dies erfolgt nach Gleichung (13.5) unter Benutzung des bekannten Wertes für die Induktivität L , die am Arbeitsplatz angegeben ist und der eingestellten Sendefrequenz f_0 .

Um die Zusatzkapazität C_z zu ermitteln, betreiben wir den Resonanzkreis zunächst ohne den Meßkondensator ($C = 0$) und stimmen mit Hilfe des Drehkondensators auf Resonanz

ab (maximale Amplitude am Oszilloskopen). Man mittele fünf Kapazitätswerte. Nach Gleichung (13.6) ergibt dies unmittelbar

$$C_z = C_{ges} - C'_d.$$

Die Kapazitätswerte des Drehkondensators, an dem nur Skalenteile abgelesen werden können, werden einer Eichkurve am Arbeitsplatz entnommen.

Zu 2)

Zur Bestimmung der relativen Permittivität wird jeweils die Kapazität des Messkondensators mit bzw. ohne das betreffende Dielektrikum bestimmt. Setzen wir die konstante Kapazität $C_{ges} - C_z = C'_d$, dann nimmt Gleichung (13.6) die folgende Form an: $C = C'_d - C_d$, wobei C'_d bereits in Teil 1) bestimmt wurde.

Das Verhältnis dieser Werte liefert die gesuchte Größe:

$$\epsilon = \frac{C'_d - C_{d,mit}}{C'_d - C_{d,ohne}}.$$

$C_{d,mit}$ bzw. $C_{d,ohne}$ sind die Einstellungen des Drehkondensators mit bzw. ohne Dielektrikum.

Man bestimme so die relative Permittivität für die drei vorhandenen Stoffe.

Fehlerabschätzung

Für den Messfehler ΔC_d nehme man die Größte Abweichung des Mittelwertes aus Aufgabe 1 an. Allgemein gilt:

$$\Delta C_z = \Delta C_{ges} + \Delta C'_d$$

Da aber auch in C'_d die Einstellungenauigkeit des Drehkondensators ΔC_d steckt, benutze man als Fehlerformel für die relative Permittivität den Ausdruck:

$$\frac{\Delta \epsilon}{\epsilon} = 2 \frac{\Delta C_d}{C'_d - C_{mit}} + 2 \frac{\Delta C_d}{C'_d - C_{ohne}}$$

Dabei gilt:

$\Delta C_d (= \Delta C'_d = \Delta C_{mit} = \Delta C_{ohne})$ = Einstellgenauigkeit des Drehkondensators.

14. Linsen und Mikroskop

Das muss man wissen

- *Brechungsindex - Brechungsgesetz*
- *Brennweite - Abbildung durch dünne Linsen - Abbildungsgleichung*
- *geometrische Optik - Konstruktion reeller und virtueller Bilder*
- *Vergrößerung*
- *Optische Geräte: Lupe - Mikroskop*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 15.

Anwendungen:

- Verwendung des Mikroskops im täglichen Gebrauch in der Forschung im Bereich der Biologie
- Funktionsweise eines Mikroskops
- unterschiedliche Vergrößerungen
- Physiologie des Sehens
- geometrische Konstruktionen
- Linsenfehler
- Brillouin-Spektroskopie

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was ist Brennweite, Brechkraft und Brennpunkt?

Wie lautet die Abbildungsgleichung? Berechnen von einfachen Beispielen.

Was ist eine Lupe? (Bildkonstruktion)

Was ist ein reelles und ein virtuelles Bild?

Wie arbeitet das System Lupe, Auge (Bildkonstruktion)?

Was ist die Vergrößerung?

Wie ändert sich das Bild (Größe, Position), wenn Gegenstand bewegt wird (z.B. f , $2f$, $<2f$, $>f$)?

Woher kommt der Name Brennpunkt?

Was versteht man unter "deutlicher Sehweite"?

Skizzieren Sie die Funktion vom Mikroskop!

Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Mikroskop und Fernglas?

Was ist das Auflösungsvermögen?

14.1 Physikalische Grundlagen

Dünne Linsen

Linsen sind Glaskörper, die von zwei Kugelflächen begrenzt sind. Sie dienen dazu, die Lichtstrahlen, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen, in einem Bildpunkt wieder zu vereinigen. Sie erzeugen eine **Abbildung**.

Wir betrachten einen achsenparallelen Strahl, der die Linse im Abstand h von der Linsenachse durchsetzt. Der Punkt, an dem dieser Strahl die optische Achse schneidet, nennt man den **Brennpunkt** F , seinen Abstand zur Linsenmitte die **Brennweite** f . Ist h klein gegenüber den beiden Krümmungsradien der Linse und die Dicke der Linse klein gegen f , dann spricht man von einer dünnen Linse. Alle auftretenden Winkel sind dann so klein, dass die Kleinwinkelnäherungen angewendet werden können ($\sin \alpha \approx \alpha$; $\cos \alpha \approx 1$).

Bedingung für die Existenz eines Brennpunktes F ist, dass der Ablenkwinkel δ proportional zu h ist. In diesem Fall schneiden alle achsenparallelen Strahlen nach Durchgang durch die Linse die Linsenachse in F .

Außerdem ist δ unabhängig vom Einfallswinkel gegen das Lot auf die Linsenoberfläche, solange dieser Winkel ebenfalls klein ist. Diese Tatsache ist von Bedeutung für die Bündelung von Strahlen, die nicht achsenparallel ankommen sondern etwa von einem Punkt auf der Linsenachse ausgehen.

Die Linsenformel (Abbildungsgleichung)

Strahlen, die von einem Punkt auf der Achse im Abstand g (ungleich f) von der Linsenmitte ausgehen, ergeben ebenfalls einen Bildpunkt, d.h. einen Vereinigungsort dieser Strahlen, siehe Abb.1.

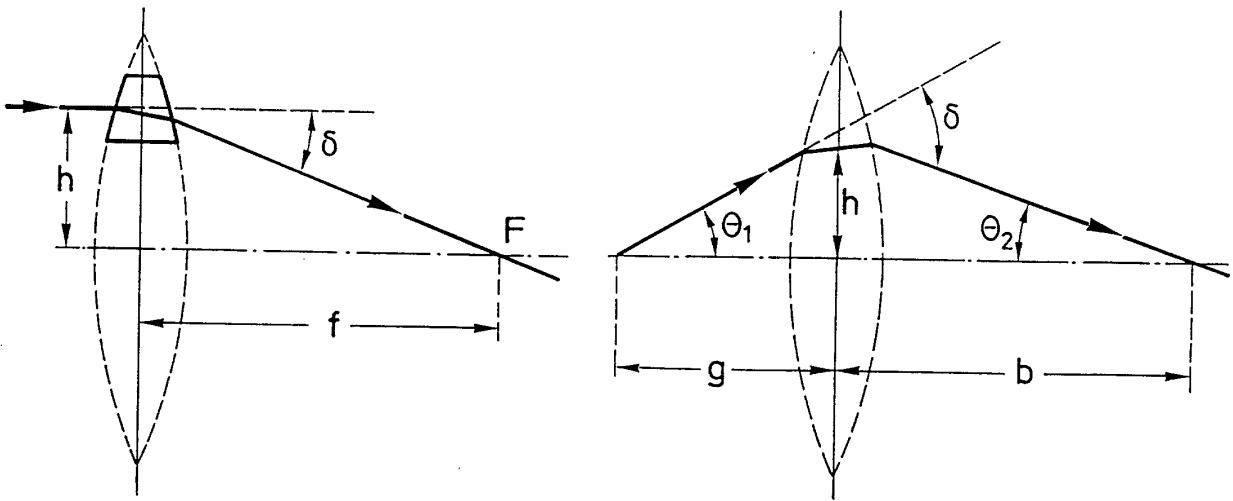


Abbildung 1. Strahlengang durch eine dünne Linse.

Es gilt

$$\theta_1 + \theta_2 = \delta$$

Mit den Beziehungen

$$\theta_1 = \frac{h}{g}; \quad \theta_2 = \frac{h}{b}; \quad \delta = \frac{h}{f}$$

erhalten wir

*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \quad (14.1)$$

Unter der Vergrößerung versteht man das Verhältnis

*

$$V = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}} = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}. \quad (14.2)$$

Geometrische Bildkonstruktion

Aus diesen Überlegungen lässt sich leicht ein konstruktives Verfahren herleiten, um das Bild eines gegebenen Gegenstandes G zu finden. Die Linse ist dabei vollkommen festgelegt durch die Angabe der Mittelebene und die Lage der beiden Brennpunkte F und F', siehe Abb.2.

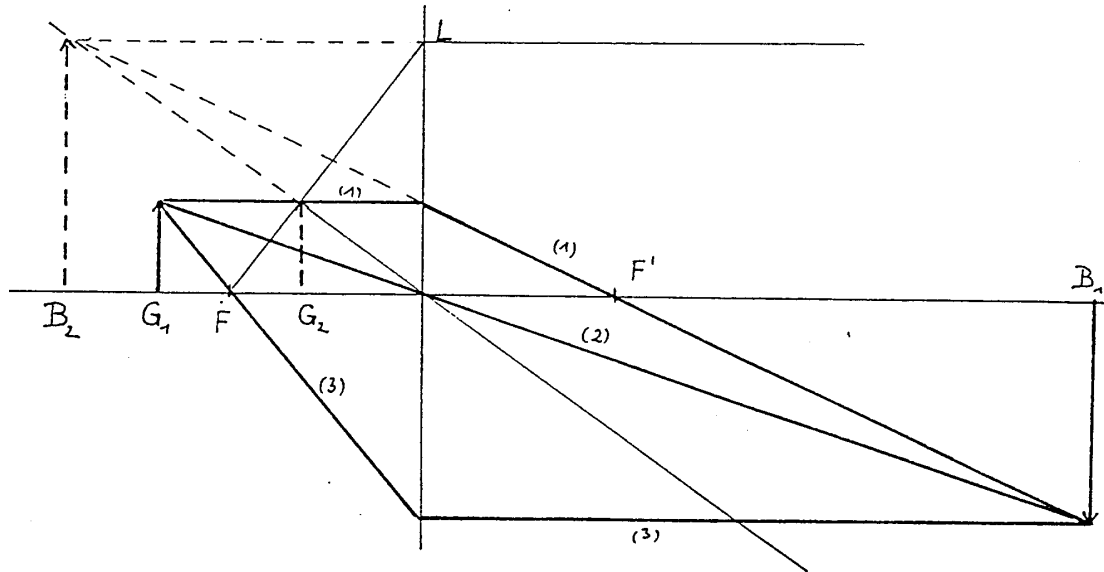


Abbildung 2. Bildkonstruktion

Der Verlauf der folgenden drei von G_1 ausgehenden Strahlen kann sofort angegeben werden, und ihr Schnittpunkt ergibt den gesuchten Bildpunkt B_1 .

Strahl 1: Ein achsenparalleler Strahl geht durch den bildseitigen Brennpunkt F' (Definition von F).

Strahl 2: Ein Strahl durch die Linsenmitte wird nicht gebrochen.
($h = 0 \rightarrow \theta = 0$).

Achtung: Der Mittelpunktstrahl kann nur bei dünnen Linsen zur Bildkonstruktion verwendet werden.

Strahl 3: Entspricht Strahl 1, da der Strahlengang umkehrbar ist.

Ein Strahl durch den Brennpunkt F verläuft nach der Linse achsenparallel.

Die Art des entstehenden Bildes hängt von der Gegenstandsweite g ab. Es kann aufrecht oder umgekehrt, verkleinert oder vergrößert, reell oder virtuell sein. Ein **reelles Bild** entspricht einem tatsächlichen Schnittpunkt der bildseitigen Strahlen und kann auf einem Schirm sichtbar gemacht werden. Fehlt ein solcher (divergentes Strahlenbündel), so ergeben die nach rückwärts verlängerten Strahlen ein scheinbares **virtuelles Bild**, das nicht von tatsächlichen Strahlen erzeugt und daher auch nicht mit einem Schirm sichtbar gemacht werden kann. Dies ist der Fall, wenn G zwischen F und der Linse liegt, d.h. wenn $g < f$ ist (Beispiel: $G_2 \rightarrow B_2$).

Kombination dünner Linsen

Den Reziprokwert der Brennweite f nennt man die **Brechkraft** ϕ der Linse. Ihre Einheit ist eine Dioptrie ($1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$).

$$\phi = \frac{1}{f}$$

Hat man ein System von mehreren dünnen Linsen, die auf einer optischen Achsen hintereinander angeordnet sind, so ergibt sich seine Brechkraft aus der Summe der Brechkräfte der Einzellinsen.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots$$

Eine etwas genauere Formel für die Kombination aus zwei dünnen Linsen berücksichtigt den (nicht zu großen) Abstand d ihrer Mittelebenen.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (14.3)$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht die Bestimmung der negativen Brennweite einer Zerstreuungslinse, indem man sie mit einer stärkeren Sammellinse kombiniert und die Brennweite des Systems misst.

Optische Systeme: Das Auge

Das Auge besteht physikalisch gesehen (in einem ganz einfachen Modell) aus einer Linse, einer Blende (der Pupille) und einem Schirm (der Netzhaut). Die Linse entwirft auf der Netzhaut reelle, umgekehrte und verkleinerte Bilder.

Damit Gegenstände in verschiedenen Entfernungen scharf auf der Netzhaut abgebildet werden können, muss die Brechkraft der Augenlinse veränderlich sein, da der Abstand Netzhaut–Linse nicht verändert werden kann (**Akkommodation**). Bei der Augenlinse wird dies durch eine Veränderung der Krümmungsradien der Begrenzungsflächen erreicht. Dieser Akkomodationsfähigkeit sind natürliche Grenzen gesetzt (kleinste Gegenstandsweite für einen 30-jährigen etwa 15 cm: Nahpunkt).

Wie jedes optische Gerät besitzt auch das Auge ein endliches **Auflösungsvermögen** auf Grund der Beugungserscheinungen an der Pupille. Man versteht darunter den reziproken Wert des kleinsten Winkels, unter dem zwei Punkte sich gerade noch getrennt wahrnehmen lassen. Dieser kleinste Winkel beträgt etwa

$$\Delta\Phi = \frac{\text{Mittlere Wellenlänge des Lichts}}{\text{Mittlerer Pupillendurchmesser}} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Dies entspricht etwa einem Winkel von einer Bogenminute.

Erscheinen dem Auge zwei Gegenstandspunkte P und P₁ unter einem Sehwinkel ϵ (Abb.3), der kleiner ist als dieser Wert, dann liefern sie auf der Netzhaut keine getrennten Bilder mehr, werden daher auch nicht mehr getrennt gesehen. Wollen wir etwas deutlicher sehen, dann bringen wir den Gegenstand näher an das Auge, um den Sehwinkel zu vergrößern. Bei sehr kleinen Dingen genügt dies oft nicht, da der Nahpunkt nicht unterschritten werden kann. Um dann den Sehwinkel noch weiter zu vergrößern, müssen optische Geräte benutzt werden: Lupe und Mikroskop für nahe, Fernrohr für entfernte Gegenstände.

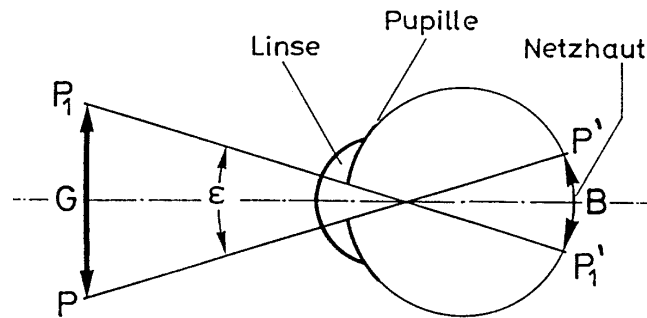


Abbildung 3. Zur Definition des Seh winkels

Unter der Vergrößerung eines optischen Gerätes versteht man das Verhältnis

$$V = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0}, \quad (\text{da } \epsilon \text{ klein ist}).$$

Für die Berechnung des Seh winkels ϵ_0 ohne Instrument hat man vereinbart, dass sich der Gegenstand in der Entfernung von $s = 25 \text{ cm}$ befinden soll (**deutliche Sehweite**).

Die Lupe

Die einfachste Möglichkeit, den Seh winkel zu vergrößern, bietet eine Sammellinse. Liegt der zu betrachtende Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, dann sieht das Auge durch die Linse blickend ein virtuelles, vergrößertes und aufrechtes Bild. Durch die Brechkraft der Augenlinse werden die divergent (oder parallel) in das Auge fallenden Strahlen auf der Netzhaut zu einem reellen Bild vereinigt.

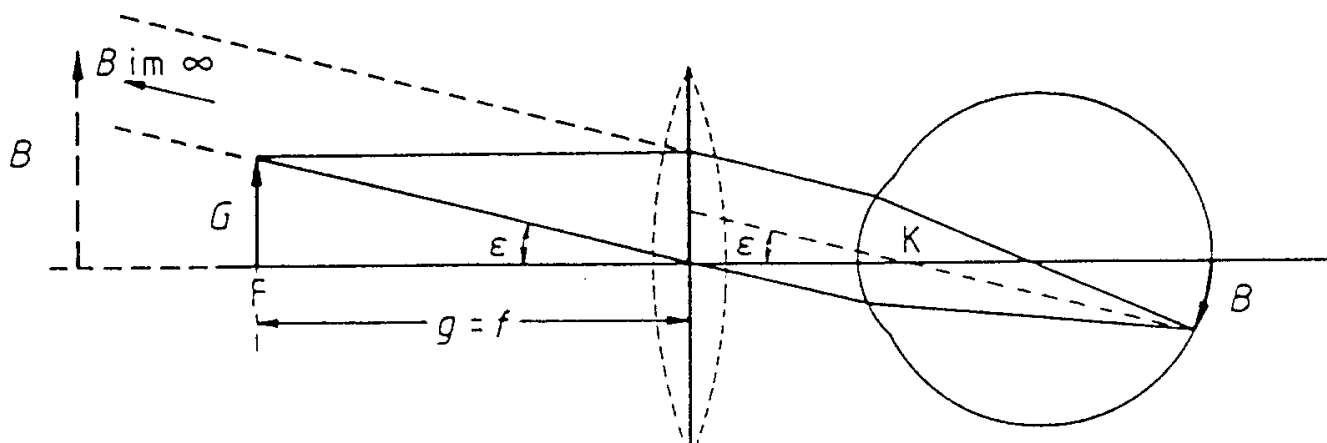


Abbildung 4. Strahlengang durch eine Lupe

Für den Fall, dass der Gegenstand im Brennpunkt liegt, kann die Vergrößerung leicht angegeben werden (Abb.4):

$$V = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \approx \frac{\tan \epsilon}{\tan \epsilon_0} = \frac{G/f}{G/s} = \frac{s}{f}$$

Dieser Spezialfall wird auch in der Praxis meist angestrebt, da dann das Auge in entspanntem Zustand ein im Unendlichen liegendes Bild betrachtet. Auch die Sammellinsen in der Brille eines Weitsichtigen wirken wie zwei Lupen.

Das Mikroskop

Mit dem Mikroskop wird eine zweistufige Abbildung durchgeführt, wodurch eine noch stärkere Vergrößerung erzielt werden kann. Es enthält zwei Sammellinsen (bzw. zwei Linsensysteme): Das **Objektiv** (dem Objekt zugewandt) mit der kleinen Brennweite f_{Ob} (mm bis cm) und das **Okular** (dem Auge zugewandt) mit der Brennweite f_{Ok} (einige cm).

Das Objektiv entwirft vom Gegenstand ein reelles, vergrößertes und umgekehrtes Bild, das Zwischenbild (ZB) genannt wird, siehe Abb.5.

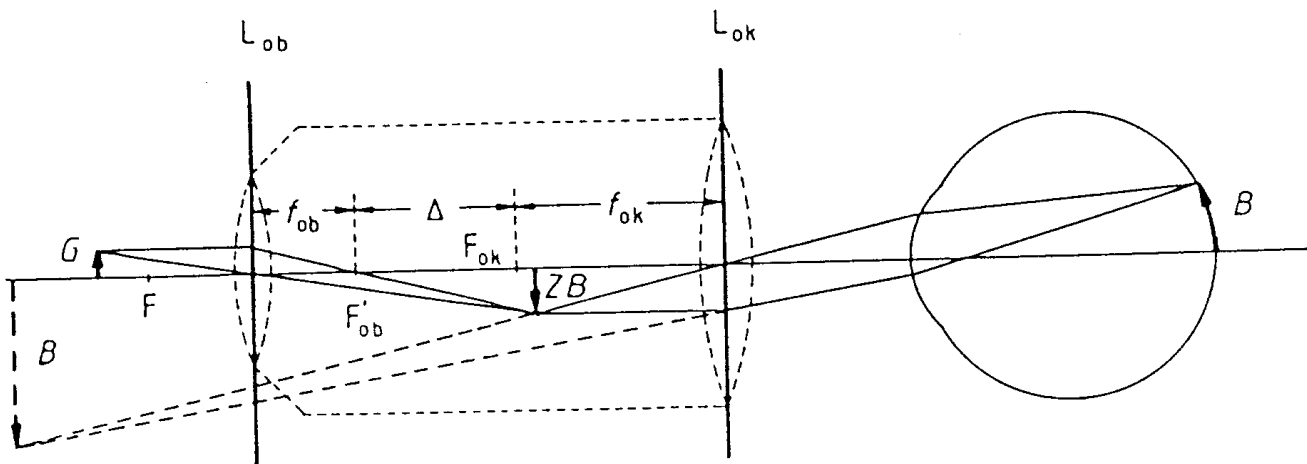


Abbildung 5. Strahlengang durch das Mikroskop

Dieses wird mit dem Okular betrachtet, wobei diese Linse als Lupe wirkt, d.h. das Zwischenbild muss innerhalb der einfachen Brennweite f_{Ok} oder in der Brennebene des Okulars liegen. Das Gesamtbild ist virtuell und verglichen mit dem Gegenstand G umgekehrt.

Die Gesamtvergrößerung V des Mikroskops ergibt sich aus dem Produkt Objektivergrößerung V_{Ob} mal Okularvergrößerung V_{Ok} . Nehmen wir an, dass das Zwischenbild wieder näherungsweise in der Brennebene des Okulars liegt, dann gilt für die Objektivergrößerung

$$V_{Ob} = \frac{ZB}{G} = \frac{t}{f_{Ob}}$$

t (= Abstand der Brennpunkte F'_{Ob} und F_{Ok}) nennt man die Tubuslänge. Für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops erhält man damit

$$V = V_{Ob}V_{Ok} = \frac{ts}{f_{Ob}f_{Ok}}$$

Das Auflösungsvermögen des Mikroskops

Die erreichbare Vergrößerung des Mikroskops ist begrenzt durch das Auflösungsvermögen. Das liegt daran, dass auch ein sphärisch und chromatisch vollkommen korrigiertes Objektiv keine ideale Abbildung liefert (Abb.6).

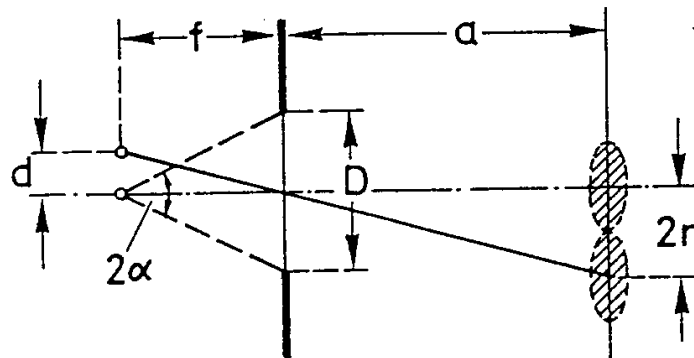


Abbildung 6. Zum Auflösungsvermögen des Mikroskops

Es bildet einen Punkt nicht als Punkt sondern infolge der Beugung des Lichtes an der Begrenzung der Objektivlinse als Lichtscheibchen (**Beugungsscheibchen**). Die Theorie der Beugung an einer runden Öffnung mit dem Durchmesser D liefert die Richtung, in der das 1. Helligkeitsmaximum erscheint, näherungsweise

$$\phi = \frac{\lambda}{D}$$

λ = mittlere Wellenlänge des verwendeten Lichtes.

Der Radius r des Lichtscheibchens in der Entfernung a vom Objektiv ist dann

$$r = \frac{a\lambda}{D} \quad (14.4)$$

Zwei benachbarte Gegenstandspunkte können nur dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn die Lichtscheibchen (Helligkeitsmaxima 1. Ordnung) der beiden Punkte sich gerade berühren, d.h. der Abstand der Mittelpunkte der Scheibchen gleich $2r$ ist. Manchmal wird auch noch der halbe Betrag dieser Größe (r) als Kriterium verwendet, d.h. das Helligkeitsmaximum 0. Ordnung des einen Beugungsbildes fällt in das erste Helligkeitsminimum des anderen.

Zwischen d und r besteht die folgende Beziehung, da der Gegenstand in erster Näherung in der Brennweite des Objektivs liegt:

$$\frac{d}{2r} = \frac{f}{a} \quad (14.5)$$

Zusammen mit Gleichung (14.4) ergibt sich:

$$d = \frac{f\lambda}{D/2} = \frac{\lambda}{\sin \alpha} \quad (14.6)$$

α ist der halbe Öffnungswinkel des Objektivs.

Befindet sich zwischen Objekt und Objektiv eine Flüssigkeit mit dem Brechungsindex n (Immersionssystem), dann lautet die endgültige Formel für d :

$$d = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} \quad (14.7)$$

$n \sin \alpha$ nennt man die **numerische Apertur**.

14.2 Apparative Grundlagen

Messung der Brennweite von dünnen Linsen

Man erzeugt mittels der Linse eine scharfe Abbildung eines Gegenstandes, misst g und b und errechnet daraus mit Hilfe der Linsenformel (Gleichung (14.1)) die Brennweite.

Handelt es sich um eine Zerstreuungslinse, dann muss sie mit einer Sammellinse größerer Brechkraft kombiniert werden. Für dieses System kann prinzipiell das gleiche Verfahren angewendet werden. Aus der Brennweite des Systems f und der bekannten Brennweite f_s der Sammellinse kann die Brennweite der Zerstreuungslinse f_z berechnet werden.

Für eine genaue Bestimmung ist folgendes zu beachten:

Obwohl auch für dieses Zweilinsensystem noch mit guter Näherung angenommen werden kann, dass die beiden Hauptebenen zusammenfallen, ist die genaue Lage dieser Bezugsebene unbekannt. Hier hilft das sogenannte Besselsche Verfahren.

Das Besselsche Verfahren zur Messung der Brennweite

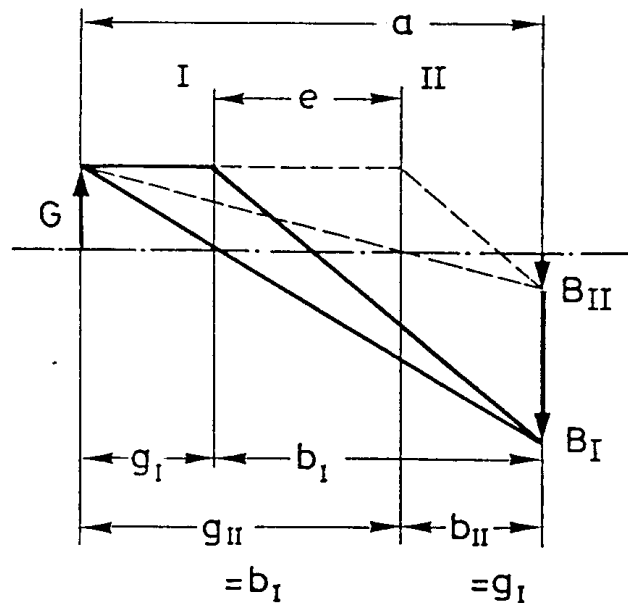


Abbildung 7. Das Besselsche Verfahren

Bei diesem Verfahren bezieht man alle Ablesungen für die Linse auf eine willkürliche Marke am Schlitten der optischen Bank. Bei festem Abstand a zwischen Gegenstand und Bild sucht man nun die beiden Stellungen der Linse, die eine scharfe Abbildung ergeben. Stellung I ergibt ein vergrößertes, Stellung II ein verkleinertes Bild. a muss dabei größer sein als die vierfache Brennweite des Systems (Abb.7). Nun misst man die Größe der Verschiebung der Linse beim Übergang von I nach II. Hierzu wird jeweils der Ort der Marke am Schlitten abgelesen. Die Abweichung der Lage der Hauptebene von der Marke fällt durch die Differenzbildung heraus, der Hauptebenenabstand wird vernachlässigt, was bei dünnen, eng zusammenstehenden Linsen möglich ist. Wie aus der Abbildung abzulesen ist, gelten folgende Beziehungen:

$$e = b_I - b_{II} = b_I - g_I \quad \text{und} \quad a = b_I + g_I$$

Löst man nach b_I und g_I auf und setzt die Linsenformel ein, so ergibt sich

$$f = \frac{a^2 - e^2}{4a} \quad (14.8)$$

Durch Einsetzen von f und f_s in Gleichung (14.3) erhält man die gesuchte Brennweite der Zerstreuungslinse f_z .

14.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Linsensystem: Bestimmung der Brennweite einer Zerstreuungslinse nach dem Bessel-Verfahren
2. Mikroskop: Bestimmung der Okularvergrößerung
3. Bestimmung der Objektivvergrößerung für drei Objektive
4. Bestimmung des Auflösungsvermögens für drei Objektive

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 14.8 gezeigt.

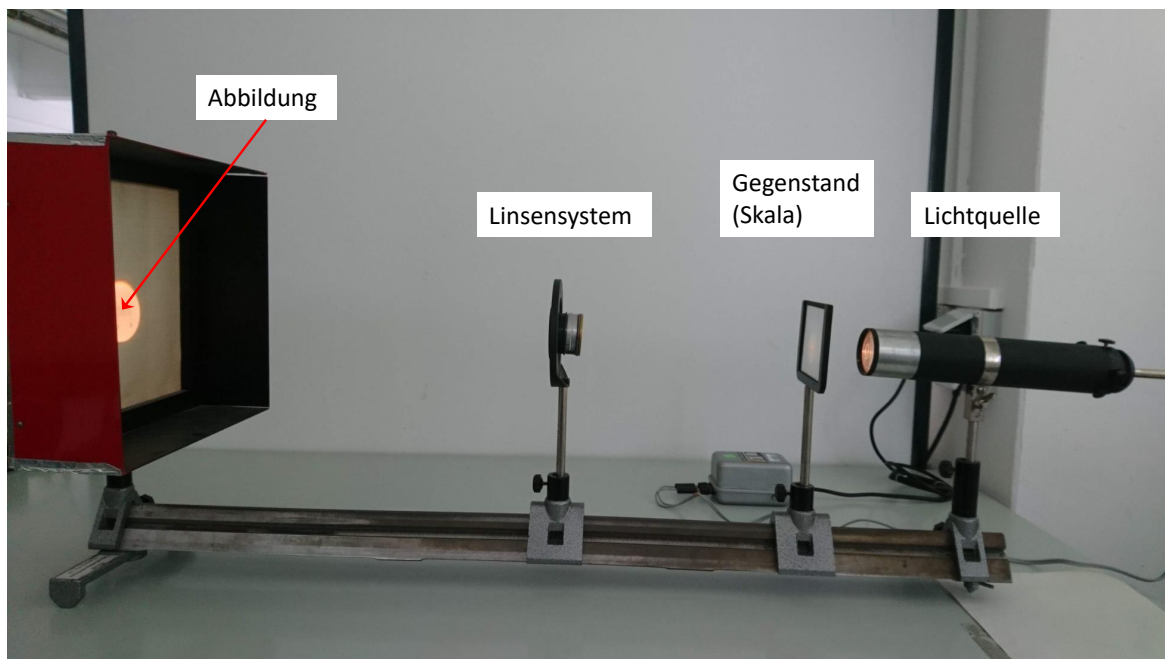


Abbildung 14.8: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Zu 1)

Man kombiniert die Zerstreuungslinse mit der vorhandenen Sammellinse und bestimmt die Brennweite dieses Systems mit Hilfe des Besselschen Verfahrens.

Die Entfernung a muss größer sein als die vierfache Brennweite. Die Stellungen I und II der Linse werden je fünfmal gesucht und die abgelesenen Werte gemittelt. f_s ist am Arbeitsplatz angegeben, d wird ungefähr gemessen.

Zu 2)

Zur Bestimmung der Okularvergrößerung vergleicht man das Okularmikrometer (Länge

1 cm, Teilung 1/10 mm) mit einem in der Entfernung 25 cm (deutliche Sehweite) aufgestellten Zentimetermaßstab M, der über einen auf das Okular aufgesetzten Spiegel S mit der Okularskala zur Deckung gebracht wird (Abb.9).

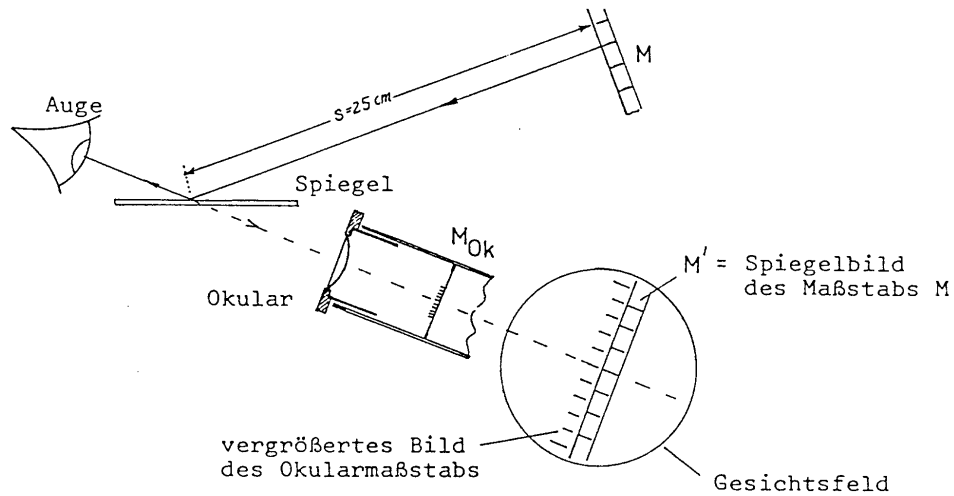


Abbildung 9. Zur Bestimmung der Okularvergrößerung

Wenn b Skalenteile von M auf a Skalenteile des Okularmikrometers fallen, dann ist die Okularvergrößerung

$$V_{Ok} = \frac{b}{a}$$

Zu 3)

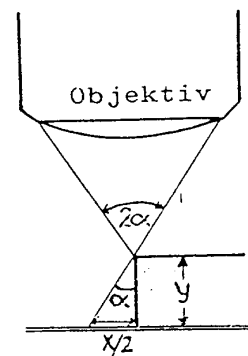
Der Vergleich der Okularskala mit dem Objektmikrometer (Teilung 1/100 mm) gibt in analoger Weise die Objektvergrößerung V_{Ob} . Man berechne die Gesamtvergrößerung des Mikroskops.

Zu 4)

Man bestimmt dazu den Öffnungswinkel 2α des Objektivs. Man legt ein Klötzchen der Dicke y so auf den Objektisch, dass die Kante in der Mitte des Gesichtsfeldes ist und stellt auf die obere Kante scharf ein. Dann nimmt man das Klötzchen weg und legt dafür einen Maßstab (einen Streifen Millimeterpapier) auf den Objektisch.

Entfernt man unter unveränderter Mikroskopeinstellung das Okular, so kann man beim Hindurchschauen durch den Tubus feststellen, dass x Skalenteile des Maßstabes gerade noch Licht in das Objektiv senden. Eine einfache geometrische Betrachtung ergibt α und damit nach Gleichung (14.7) den kleinsten auflösbaren Abstand zweier Gegenstandspunkte d .

$$n = 1; \quad \lambda = 550 \text{ nm}$$



Fehlerabschätzung

Zu 1)

Man setze $\Delta a = 0$; $\Delta e = \Delta b + \Delta g$ (größte Abweichung in den Messreihen vom Mittelwert); $\Delta d = \Delta f_s = 0$.

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta e}{e} \left(\frac{2e^2}{a^2 - e^2} \right)$$

und

$$\frac{\Delta f_z}{f_z} = \frac{\Delta f}{f} \left(\frac{f_s}{f_s - f} \right)$$

15. Dispersion und Spektralapparat

Das muss man wissen

- *Brechungsindex - Brechungsgesetz - Dispersion*
- *Prismen-Spektralapparat*
- *Energie und Frequenz von Elektromagnetischer Strahlung*
- *Bohrsches Atommodell - Entstehung von Licht*
- *Coulomb-Kraft - Zentrifugalkraft - Drehimpuls - Rydberg-Konstante*
- *Niveauschema des Wasserstoff Atoms*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen mit Versuch 14, 16 und 20.

Anwendungen:

- Linsen verschiedener Tiere besitzen einen unterschiedlichen Brechungsindex. So kann z. B. der Hai aufgrund einer Linse mit veränderbarem Brechungsindex genauso gut sehen wie einige Landtiere mit Linsen mit anderem Brechungsindex.
- Auswertung von Emissions- oder Absorptionsspektren: Anwendung z.B. bei der Bestimmung der Absorptionsspektren der Chlorophylle, Carotinoide, Flavonoide usw.
- Photometer
- Physiologie des Sehens
- geometrische Konstruktionen
- für die Beschreibung der Eigenschaften von gestreutem Licht werden statistische Methoden und Fourieranalysen eingesetzt
- Entdeckung des Heliums
- Fraunhofersche und Fresnelsche Beobachtungen

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was sind Brechungsindex, Brechkraft, Brennpunkt und Brennweite?

Wie lautet das Brechungsgesetz?

Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit?

Was versteht man unter Dispersion?

Zirka wie groß sind Wellenlänge, Frequenz, Energie des sichtbaren Lichts?

Was schwingt bei einer elektromagnetischen Welle?

Skizzieren Sie den Aufbau des Prismenspektralapparates!

Erläutern Sie das Bohrsches Atommodell? Wie groß ist ein Atom?

Erläutern Sie den Aufbau des Wasserstoff-Atoms!

Was sind das Niveauschema, die Spektrallinien? was ist Ionisation?

Was ist eine Lupe? (Bildkonstruktion)

Wie lautet die Abbildungsgleichung? Berechnen von einfachen Beispielen.

Was ist ein reelles und ein virtuelles Bild ?

15.1 Physikalische Grundlagen

Brechungsgesetz

In der geometrischen Optik wird die Lichtausbreitung durch Strahlen beschrieben, die sich in einem homogenen Medium geradlinig ausbreiten und an den Grenzflächen dem Brechungsgesetz gehorchen.

Tritt ein Lichtstrahl aus dem Vakuum in ein durchsichtiges Medium ein, dann verringert sich die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** von c_0 auf c . Als Materialkonstante, die dieses Verhalten beschreibt, definiert man die **Brechzahl** n durch die Beziehung

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (15.1)$$

Die Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit hat zur Folge, dass ein Lichtstrahl beim Übergang in ein anderes Medium seine Richtung ändert (Abb.1) (außer für senkrechten Einfall).

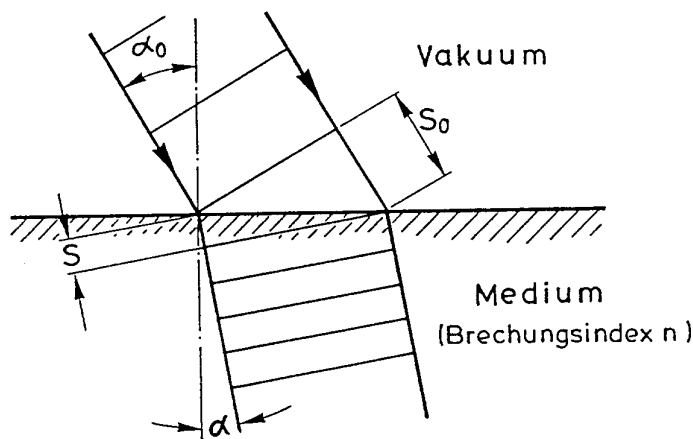


Abbildung 1. Das Brechungsgesetz

Während die Wellenfront im Vakuum eine Entfernung s_0 zurücklegt, läuft sie im Medium in der gleichen Zeit nur die Strecke s , die Fortpflanzungsrichtung hat sich geändert. Daraus ergibt sich das Brechungsgesetz, d.h. der quantitative Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel α_0 und dem Brechungswinkel α . Da gilt

$$* \quad \frac{s_0}{s} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = \frac{c_0}{c},$$

erhält man unter Verwendung der Brechzahl die Gleichung:

$$* \quad \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} = n. \quad (15.2)$$

Dispersion

Im allgemeinen ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit c (und damit auch der Brechungsindex n) in Materie eine Funktion der Wellenlänge λ . Sie nimmt im sichtbaren Bereich bei den meisten durchsichtigen Stoffen (z.B. auch beim Glas) mit der Wellenlänge zu, d.h. der Brechungsindex nimmt ab. Diese Erscheinung nennt man **Dispersion**. Sie erklärt auch, warum weißes Licht durch ein Prisma in die Spektralfarben zerlegt wird.

Brechung am Prisma

Durchläuft ein monochromatischer Lichtstrahl ein Prisma, so wird er zweimal dem Brechungsgesetz entsprechend gebrochen und dabei um den Winkel δ zur Basis hin abgelenkt

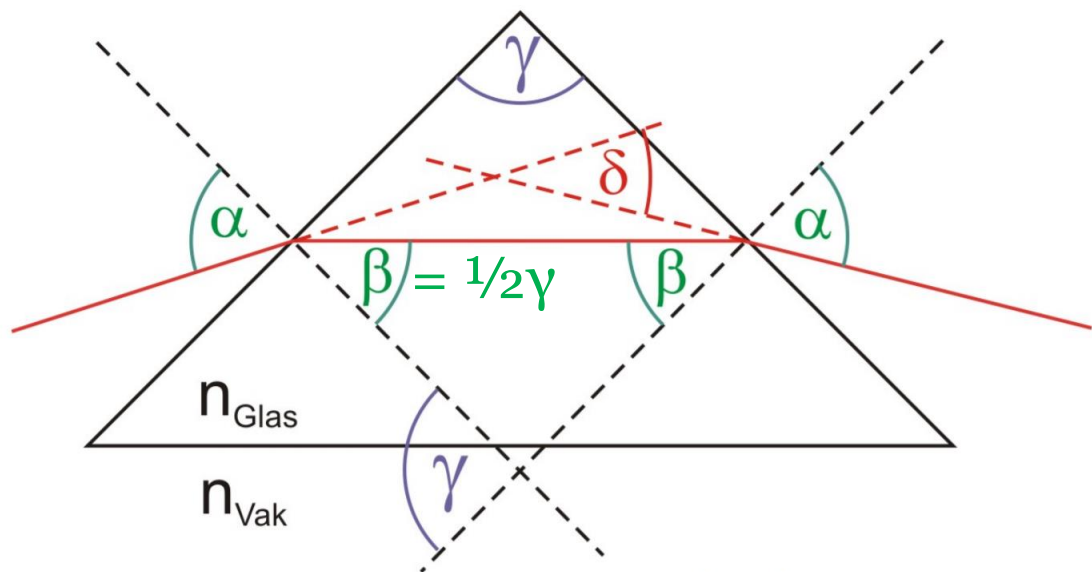


Abbildung 15.2: Symmetrischer Strahlengang im Prisma.

(Abb.15.2). δ ist im allgemeinen eine recht komplizierte Funktion von α , γ und n . Einfacher liegen die Verhältnisse für den sog. symmetrischen Strahlengang. Dabei verläuft der Strahl im Prisma parallel zur Basis, die Ablenkung δ nimmt einen **minimalen** Wert an.

Aus der Abbildung können unmittelbar die folgenden Winkelbeziehungen abgelesen werden:

$$\beta = \frac{\gamma}{2}, \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\delta + \gamma}{2}.$$

Die Anwendung des Brechungsgesetzes liefert damit den folgenden Zusammenhang:

$$n = \frac{\sin(\frac{\delta + \gamma}{2})}{\sin(\frac{\gamma}{2})}. \quad (15.3)$$

Da der brechende Winkel γ und der Winkel der minimalen Ablenkung δ leicht gemessen werden können, kann mit diesem Verfahren die Brechzahl n bestimmt werden.

Verwendet man Licht verschiedener Wellenlänge λ , dann erhält man damit die Dispersionskurve $n(\lambda)$ für das Prismenmaterial.

Das Bohrsche Atommodell

Nach den klassischen Vorstellungen besteht das Atom aus einem **Kern**, in dem praktisch die gesamte Masse vereinigt ist (Durchmesser ca. 10^{-15} m), und einer **Elektronenhülle** (Durchmesser ca. 10^{-10} m), in der negative Elektronen in Kreisbahnen den positiven

Kern umkreisen, wobei Gleichgewicht bestehen muss zwischen der elektrischen Anziehung und der Zentrifugalkraft. Es wurde jedoch bald erkannt, dass dieses Atommodell in zwei Punkten der experimentellen Erfahrung widerspricht:

1) Für solche Kreisbahnen müssen alle Radien möglich sein, d.h. das Atom kann beliebige Energiezustände einnehmen. Aus den Atomspektren wusste man jedoch, dass nur ganz bestimmte, für das jeweilige Element charakteristische Energien (**Spektrallinien**) auftreten können.

2) Auf Kreisbahnen sich bewegend Elektronen führen eine beschleunigte Bewegung aus. Nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik emittieren beschleunigte Ladungen elektromagnetische Wellen, d.h. sie verlieren Energie. Atome sind aber außerordentlich stabile Gebilde, die nur unter bestimmten Bedingungen Strahlung emittieren oder absorbieren.

Durch zwei ad-hoc-Annahmen (Annahmen, die sich zu diesem Zeitpunkt nicht begründen ließen) beseitigte Bohr 1913 diese Schwierigkeiten:

1. Nur diejenigen Kreisbahnen sind für Elektronen zugelassen, auf denen der Drehimpuls L ein Vielfaches von $(h/2\pi)$ ist.

*	$L = mvr = n(h/2\pi)$	(15.4)
---	-----------------------	--------

h = Plancksches Wirkungsquantum = $6,67 \cdot 10^{-34}$ Js.

Auf diesen Bahnen laufen die Elektronen strahlungsfrei um.

2. In jedem dieser erlaubten Zustände besitzt das Atom einen bestimmten Energiewert. Bei Übergängen zwischen zwei verschiedenen erlaubten Zuständen E_1 und E_2 muss der Energiebetrag

*	$E_2 - E_1 = h\nu$	(15.5)
---	--------------------	--------

in Form eines Lichtquants (Photons) der Frequenz ν emittiert oder absorbiert werden.

Die Energiezustände des Wasserstoffatoms

Ausgehend von dieser **Quantisierungsregel** (n wird **Quantenzahl** genannt und kann die Werte 1, 2, 3, usw. annehmen) gelang es Bohr, die für das Elektron erlaubten Bahnen beim Wasserstoff zu berechnen und die genauen Werte für die zugehörigen Energien anzugeben.

Die Gleichsetzung von elektrostatischer Anziehung und Zentrifugalkraft ergibt

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (15.6)$$

Daraus berechnen wir den Radius r der Bahn, indem wir gleichzeitig den Drehimpuls L einführen.

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0}{me^2} L^2$$

An dieser Stelle machen wir Gebrauch vom Bohrschen Quantisierungspostulat für den Drehimpuls und erhalten damit diejenigen Bahnradien, auf denen sich ein Elektron um ein Proton bewegen kann:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \quad (\text{mit } n = 1, 2, \dots \text{ usw.}) \quad (15.7)$$

Um die Gesamtenergie zu berechnen, die ein Elektron auf einer bestimmten Bahn n besitzt, müssen wir seine kinetische und seine potenzielle Energie addieren:

$$E_n = \frac{mv^2}{2} + U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r_n} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

Der Nullpunkt für die Energie liegt dabei bei r_n gleich unendlich.

Mit dem oben gewonnenen Wert für r_n (Gleichung 15.6) ergeben sich die folgenden Energiezustände für das Wasserstoffatom:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (15.8)$$

Durch die Wahl des Energienullpunktes (er entspricht dem völlig losgelösten Elektron) ist die Gesamtenergie negativ. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass wir dem Wasserstoffatom den Energiebetrag E_n zuführen müssen, um das Elektron aus dem Zustand n vom Kern abzutrennen, d.h. das Atom zu **ionisieren**.

Termschema und Spektrum des Wasserstoffs

Die Energiezustände von atomaren Systemen werden in einem sogenannten **Termschema** dargestellt. Es enthält die möglichen Energien des Systems als horizontale Striche auf einer vertikalen Energieskala. Erfolgt ein Übergang zwischen zwei Zuständen, dann wird die Differenzenergie emittiert oder absorbiert. Dafür zeichnet man einen Pfeil zwischen den entsprechenden Niveaus. Das Bohrsche Atommodell gestattet es, die für das Wasserstoffatom zu erwartenden Frequenzen zu berechnen. Erfolgt etwa ein Übergang zwischen den Niveaus mit den Quantenzahlen n_1 und n_2 ($n_2 > n_1$), dann hat das emittierte Photon die Energie

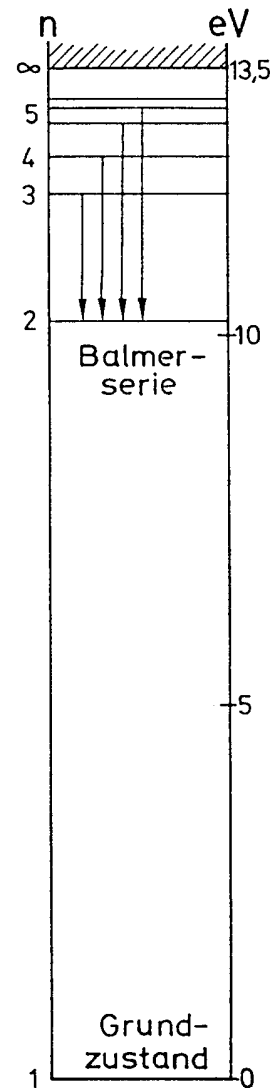
$$E = h\nu = E_2 - E_1 = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = K \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Alle Übergänge, die das gleiche Endniveau besitzen, fasst man zu einer Serie zusammen. Für die im sichtbaren Spektralbereich liegenden Linien des Wasserstoffs hatte Johann Balmer bereits im Jahre 1885 eine rein empirische Formel angegeben, die es erlaubte, mit verblüffender Genauigkeit die Frequenzen der beobachteten Linien zu berechnen (Balmer-Formel):

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{mit } n = 3, 4, \dots$$

R bezeichnet man als Rydberg-Konstante.

Wir erkennen durch Vergleich der Gln.8 und 9, dass die Bohrsche Theorie eine quantitative Erklärung für diese Zusammenhänge und für die Größe R gibt. Man erhält die **Balmer-Serie** aus (15.8) mit $n_1 = 2$ und $n_2 = 3, 4, \dots$



15.2 Apparative Grundlagen

Der Prismenspektralapparat

Der schematische Aufbau des Prismenspektralapparates ist in Abb. 15.3 gezeigt. Ein Spalt S, der von der Lichtquelle L beleuchtet wird, steht in der Brennebene einer Sammel-

linse L_1 , die ein paralleles Lichtbündel erzeugt. Dieses wird im Prisma spektral zerlegt, d.h. verschiedene Wellenlängen verlassen es unter verschiedenen Winkeln. Eine zweite Linse L_2 vereinigt die Bündel gleicher Richtung (= gleiche Wellenlänge) und erzeugt auf diese Weise Bilder des Spaltes in den Farben der verschiedenen Wellenlängen. In

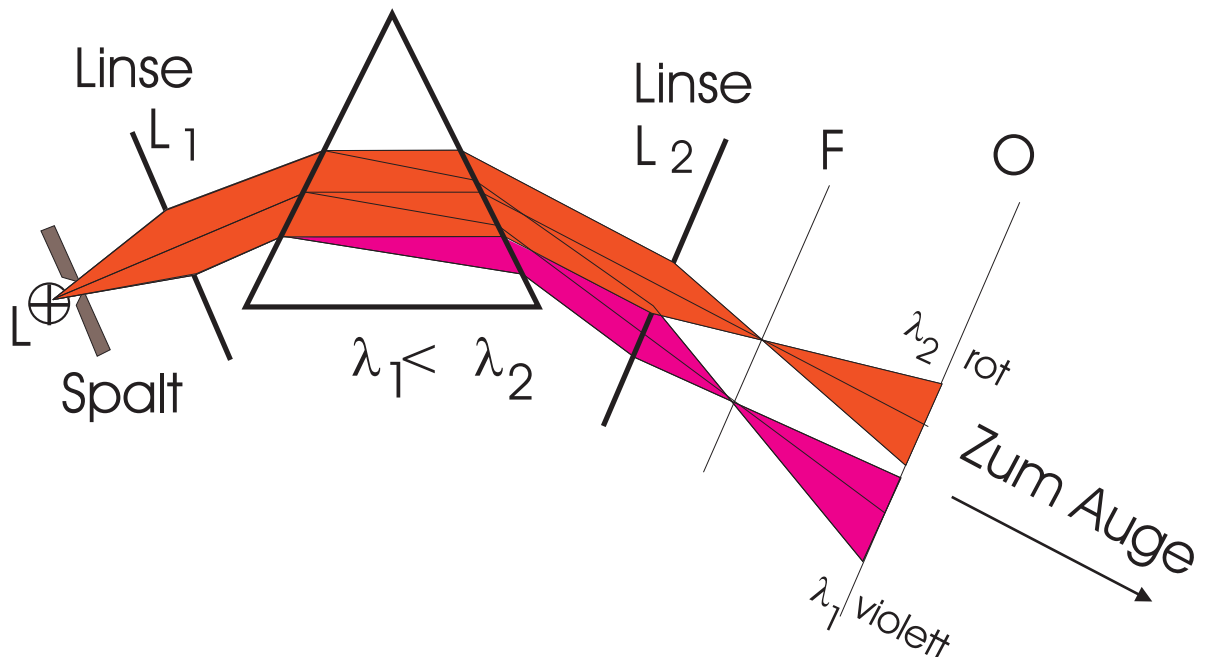


Abbildung 15.3: Schema des Prismenspektralapparates.

der technischen Ausführung eines Spektralapparates werden Spalt und Linse L_1 im sog. Spaltrohr zusammengefasst. Die von der Linse L_2 entworfenen Spaltbilder werden durch eine Okularlinse O betrachtet, in deren Brennebene F sich ein Fadenkreuz befindet. Linse und Okular bilden zusammen ein Fernrohr. Die Entfernungen Spalt – Linse 1 und Linse 2 – Okular müssen so justiert sein, dass

- 1) paralleles Licht durch das Prisma fällt und
- 2) die Spaltbilder der Linse 2 mit dem Fadenkreuz des Okulars in einer Ebene liegen, d.h. gleichzeitig scharf zu sehen sind.

Die Eichung eines Spektralapparates zur Messung der Wellenlänge

Um Wellenlängenmessungen durchzuführen, muss ein solcher Apparat geeicht werden. Zu diesem Zweck wird durch ein zusätzliches Skalenrohr eine Millimeterskala über eine Prismenfläche so eingespiegelt, dass sie durch das Objektiv des Fernrohres ebenfalls in dessen Bildebene abgebildet wird und damit zusammen mit dem Spektrum gleichzeitig scharf beobachtet werden kann. Ob diese Einstellung erreicht ist, erkennt man daran, dass sich die Linien gegen die Skala nicht mehr verschieben, wenn man das Auge vor dem Okular hin und her bewegt. Der Gesamtaufbau aus Spaltrohr, Fernrohr, Drehtisch zur Aufnahme des Prismas und Winkelskala bezeichnet man als Goniometer.

Sollen nun absolute Wellenlängenmessungen gemacht werden, dann muss zuvor mit Hilfe eines bekannten Spektrums (z.B. Helium) eine Eichkurve erstellt werden. Dazu trägt man die Wellenlängen der Linien des Eichspektrums als Abszisse und ihre Lage auf der Skala als Ordinate grafisch auf. Anhand dieser Eichkurve können dann die Wellenlängen unbekannter Linien bestimmt werden.

15.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Dispersionskurve:

Man bestimme die Brechzahl für die Wellenlängen der fünf hellsten Linien des Heliumspektrums:

667,8 nm (rot), 587,6 nm (gelb), 501,6 nm (grün), 471,3 nm (blau), 447,2 nm (violett)

Anschließend ist die Dispersionskurve zu zeichnen. Darunter versteht man die grafische Darstellung der Brechzahl gegen die Wellenlänge.

2. Spektralanalyse:

Mit Hilfe der Helium-Eichkurve, die den Zusammenhang zwischen Wellenlänge Brechzahl angibt, soll die Rydberg-Konstanten aus den Wellenlängen der Balmerlinien des Wasserstoffspektrums bestimmt werden.

Versuchsdurchführung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 15.4 gezeigt.

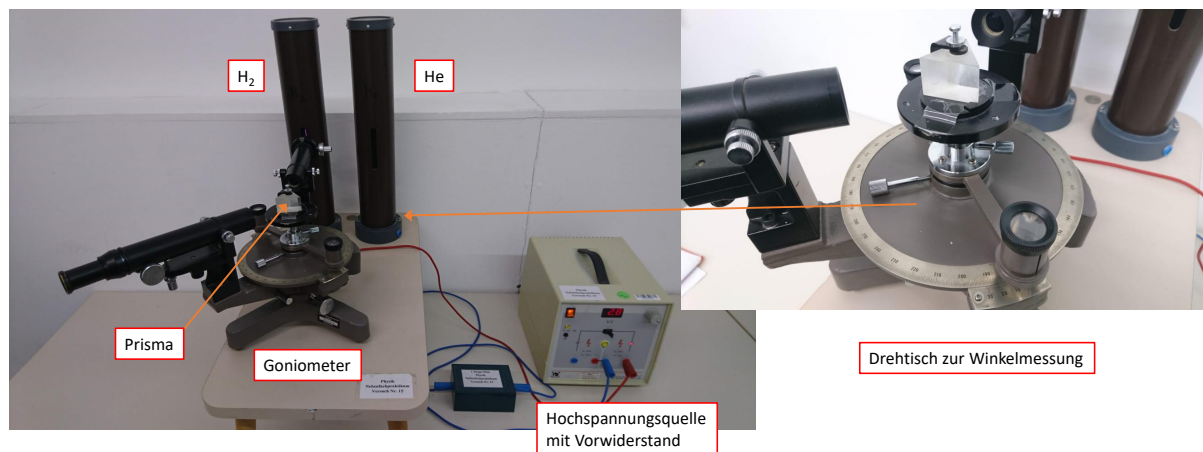


Abbildung 15.4: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Zu 1)

Messung des Ablenkungswinkels δ :

Man bringe Spaltrohr, Prisma und Fernrohr in die in Abb. 15.3 gezeichnete Lage und suche zunächst das Spektrum.

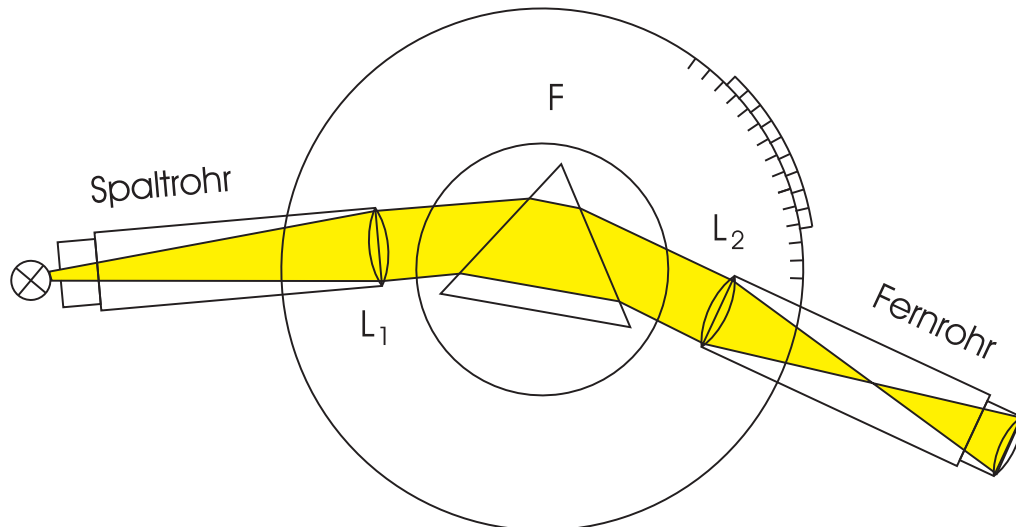


Abbildung 5. Anordnung zur Messung des Ablenkungswinkels δ

Die Stellung der minimalen Ablenkung haben wir dann, wenn beim Drehen des Prismas die betreffende Linie gerade im Schnittpunkt des Fadenkreuzes umkehrt. Die dazugehörige Winkelstellung auf dem Teilkreis wird notiert. Nun dreht man die Kante **F** in eine zur Richtung des Spaltrohres symmetrische Lage und wiederholt die Messung. Der Winkel zwischen den beiden Stellungen ist der doppelte Ablenkungswinkel 2δ .

Für alle Winkelablesungen muss der Nonius an der Skala benutzt werden (eventuell vom Betreuer erklären lassen), da sonst die erreichbare Genauigkeit nicht ausgeschöpft wird.

Zu 2)

In der Abb.5 sind die für die Eichung benötigten Wellenlängen des Heliumspektrums angegeben.

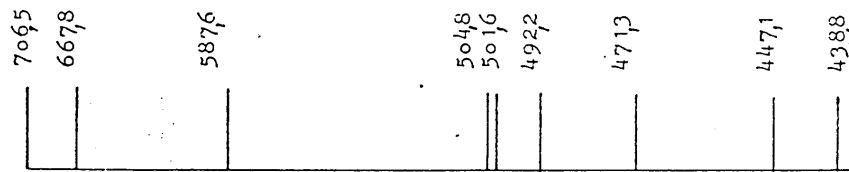


Abbildung 6. Wellenlängen des Heliumspektrums

Nun wird die Heliumlampe gegen die Wasserstofflampe ausgewechselt und die Wellenlängen der ersten drei Balmerlinien gemessen. Ein typisches Beobachtungsbild am Okular ist in Abb. 15.7 gezeigt. Da bei älter werdenden Röhren der Untergrund zunehmend stärker wird und die gesuchten Linien (besonders die kurzwelligen) nicht mehr

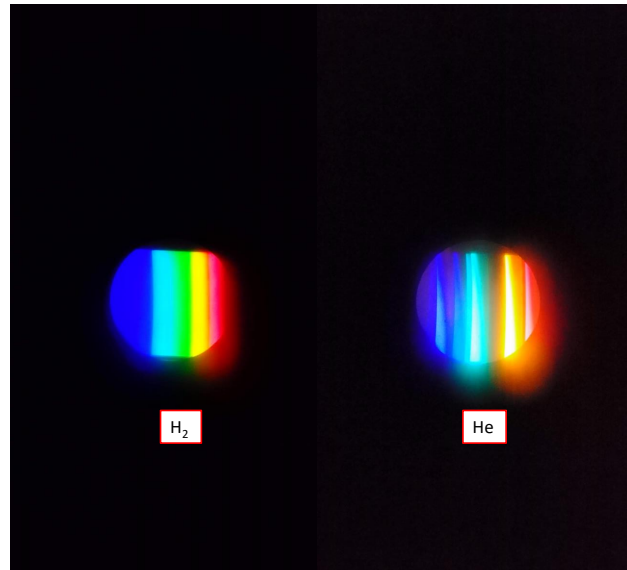


Abbildung 15.7: Beobachtungsbild am Okular für Wasserstoff (links) und Helium (rechts).

eindeutig zu identifizieren sind, ist hier noch ihre ungefähre Lage angegeben:

Übergang		Wellenlänge
von	nach	
$n_2 = 3$	$n_1 = 2$	650 nm
$n_2 = 4$	$n_1 = 2$	490 nm
$n_2 = 5$	$n_1 = 2$	430 nm

Auswertung und Fehlerabschätzung

zu 1)

Der brechende Winkel des Prismas beträgt $\gamma = 60^\circ$.

Für die Messung des Ablenkungswinkels und die anschließende Auswertung empfiehlt sich eine Tabelle, die etwa folgendermaßen aussehen könnte:

	rot	gelb
Winkelstellung I	$250,70^0$	usw.
Winkelstellung II	$155,35^0$	
$I - II = 2\delta$	$95,35^0$	
δ	$47,662^0$	
Brechzahl n (Gl. 15.3)	1,6147	

Zum Schluss ist mit den gewonnenen Werten die Dispersionskurve (n als Funktion von λ) zu zeichnen.

Der absolute Fehler von n ergibt sich aus

$$\Delta n = \left| \frac{\partial n}{\partial \delta} \right| \Delta \delta,$$

wobei aus Gleichung (15.3) folgt

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{n}{2} \cot \frac{\delta + \gamma}{2}.$$

$\Delta \delta$ bestimmt man aus der Ablesegenauigkeit. Diese Größe muß im Bogenmaß ($1 \text{ rad} = 180^\circ/\pi$) in die Fehlerformel eingesetzt werden. Man bestimme den Fehler einmalig für eine Wellenlänge der Farbe Ihrer Wahl (z.B. grün) und trage ihn als Fehlerbalken in die gemessene Dispersionskurve ein.

Zu 2)

Von mindestens zwei Balmerlinien ist die Wellenlänge zu messen und jeweils die Rydberg-Konstante zu berechnen. Der Mittelwert ist als Resultat anzugeben, die größte Abweichung von einer Einzelmessung als Fehler.

16. Beugung

Das muss man wissen

- *Beugung - Erklärung nach dem Huygens'schen Prinzip*
- *Interferenz - Welle - Frequenz - Wellenlänge - Phase*
- *Bragg'sche Bedingung - Auflösungsvermögen optischer Geräte*
- *Messung der Wellenlänge durch Beugung am Spalt oder Gitter*
- *Abbildung durch Linsen*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen mit Versuch 15 und 20.

Anwendungen:

- Auswertung von Emissions- oder Absorptionsspektren: Anwendung z.B. bei der Bestimmung der Absorptionsspektren der Chlorophylle, Carotinoide, Flavonoide usw.
- Photometer
- Physiologie des Sehens
- geometrische Bildkonstruktionen
- Fresnel-Beugung und Fresnel-Linse
- Newtonsche Ringe
- schillernder Ölfilm und schillernde Seifenblasen
- Experiment zum Licht-Welle-Dualismus

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Was ist das Huygensche Prinzip?

Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit?

Wie groß sind ca. Wellenlänge, Frequenz, Energie des sichtbaren Lichts?

Was ist Dispersion?

Was ist Phase, Interferenz, was der Gangunterschied?

Erläutern Sie die Beugung am Spalt und am Gitter!

Was schwingt bei einer elektromagnetischen Welle?

Skizzieren Sie den Aufbau des Gitterspektralapparates!

Wo erscheint rot und wo blau?

Was ist ein Spektrum?

Was ist eine Lupe? (Bildkonstruktion)

Wie lautet die Abbildungsgleichung? Berechnen von einfachen Beispielen.

Was ist ein reelles und ein virtuelles Bild?

Was sind Auflösung und Auflösungsvermögen?

16.1 Physikalische Grundlagen

Beugung und Huygens'sches Prinzip

Eine Wellenfront ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Welle in gleichen Zeiten vom Erregungszentrum aus erreicht werden. Auf einer Wellenfront haben demnach alle Punkte gleiche Phase.

Das Huygenssche Prinzip besagt, dass man jeden Punkt einer Wellenfront als Zentrum einer neuen **Elementarwelle** auffassen kann. Die Einhüllende der Elementarwellen ist wieder eine Wellenfront der vom primären Erregungszentrum ausgehenden Welle (Abb. 16.1). Es erklärt die Tatsache, dass auch in den geometrischen Schatten-

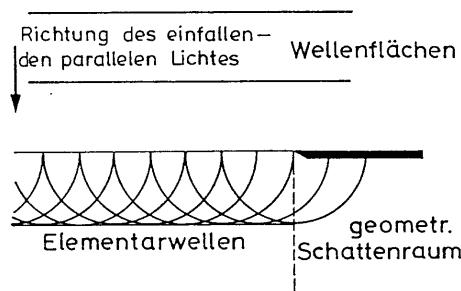


Abbildung 16.1: Wellenausbreitung um ein Hindernis.

raum Elementarwellen gelangen. Diese Abweichung von der geradlinigen Ausbreitung nennt man Beugung. Die Verknüpfung des Huygensschen Prinzips mit der Erscheinung der Interferenz (Überlagerung von Wellen) erklärt die hinter Hindernissen auftretenden **Interferenzmuster**. Dazu muss in jedem Punkt des Wellenfeldes die Überlagerung sämtlicher Elementarwellen unter Berücksichtigung ihrer Phasenlage betrachtet werden.

Beugung am Spalt

Um die Beugungsfigur hinter einem Spalt zu verstehen, wollen wir die in Abb. 16.2 gezeichnete Situation betrachten. Die Breite des Spaltes sei d , seine Länge (senkrecht zur Zeichenebene) sehr groß gegen d . Auf diese Öffnung treffe eine ebene Welle. Sobald eine Wellenfront am Spalt ankommt, erregt sie dort Elementarwellen. Um etwas über die Intensität in einer bestimmten Richtung aussagen zu können, muss die Überlagerung

aller Elementarwellen untersucht werden. Insgesamt erhalten wir durch diese Überlegung eine qualitative Vorstellung von der für einen Spalt charakteristischen Interferenzfigur. Dazu betrachten wir die unter einem bestimmten Winkel α sich ausbreitenden Anteile der verschiedenen Elementarwellen. Beginnend am Rande der Spaltöffnung (bei A) wählen wir aus den beliebig dicht nebeneinander liegenden Quellen für Elementarwellen diejenigen aus, deren Anteile in der betrachteten Richtung genau einen Gangunterschied von einer halben Wellenlänge haben, das heißt

$$\overline{BB'} = \lambda/2$$

Ebenso wählen wir C so, dass $\overline{CC'} = \lambda/2$, usw.

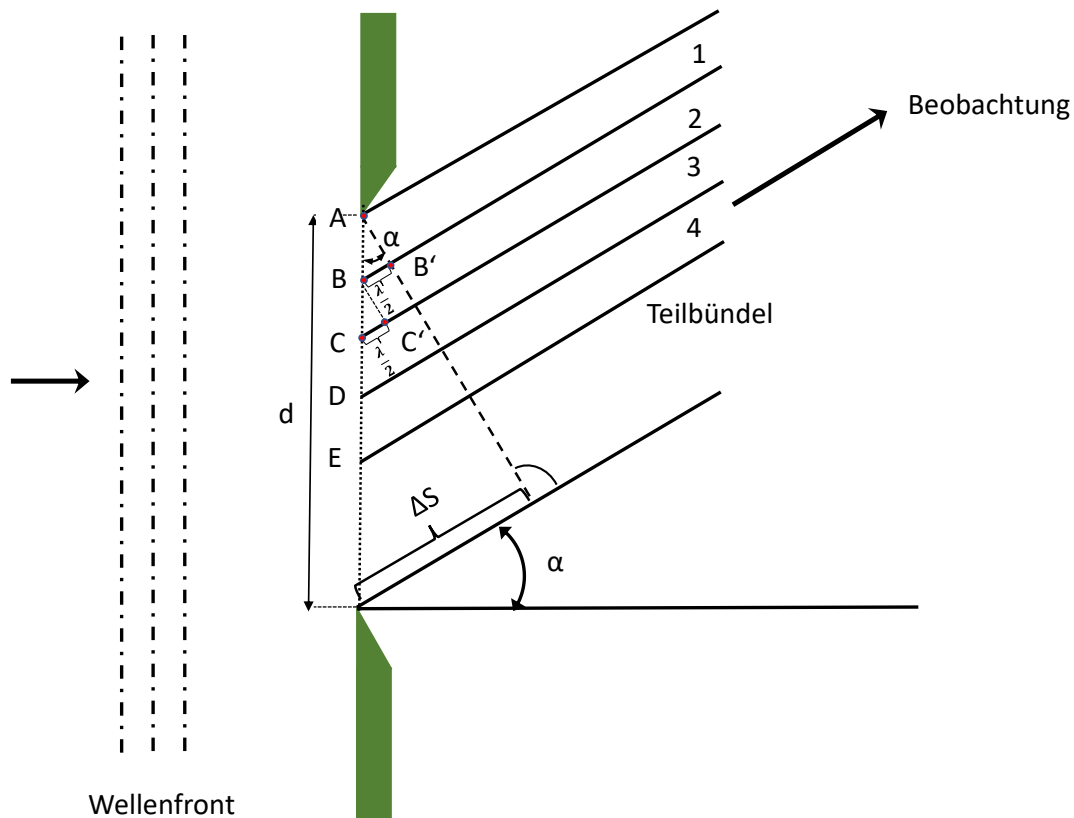


Abbildung 16.2: Beugung am Spalt.

Man erkennt, dass alle im Bereich $\overline{AB}$ liegenden Elementarwellen in dieser Richtung durch diejenigen des Bereiches $\overline{BC}$ ausgelöscht werden. “Teilbündel 1 löscht Teilbündel 2 aus.”

Setzt man dieses Verfahren über die ganze Spaltbreite fort, dann können zwei Sonderfälle unterschieden werden:

Auslöschung (Intensitätsminima)

Passt eine gerade Anzahl von Teilbündeln in den gesamten Spalt, dann löschen sich diese paarweise aus und wir erhalten für diesen Winkel totale Auslöschung.

Dies ist der Fall, wenn der **Gangunterschied** Δs zwischen der 1. und der letzten Elementarwelle gerade eine Vielfaches der Wellenlänge ist. Das ergibt als Bedingung für die Winkel, unter denen keine Intensität zu beobachten ist:

*	$\sin \alpha = \frac{n\lambda}{d}$	$(n = 1, 2, \dots)$	(16.1)
---	------------------------------------	---------------------	--------

Verstärkung (Intensitätsmaxima)

Ist die Anzahl der Bündel ungerade, dann verbleibt stets eines, das eine resultierende Intensität in die betreffende Richtung sendet. Bedingung dafür ist, dass der betrachtete Gangunterschied Δs zwischen erster und letzter Elementarwelle ein Vielfaches der Wellenlänge plus eine halbe Wellenlänge ist:

*	$\sin \alpha = \frac{(n + 1/2)\lambda}{d}$	$(n = 1, 2, \dots)$	(16.2)
---	--	---------------------	--------

Da jeweils das 3., 5., 7. usw. Teilbündel übrig bleibt, werden die Intensitäten der Maxima etwa im Verhältnis $1/3$, $1/5$, $1/7$ usw. abnehmen.

Damit haben wir die Lage der Minima und Maxima sowie deren ungefähre Intensität gefunden. Die genaue Berechnung der Intensitätsverteilung liefert ein Bild, wie es die Abb. 16.3 zeigt.

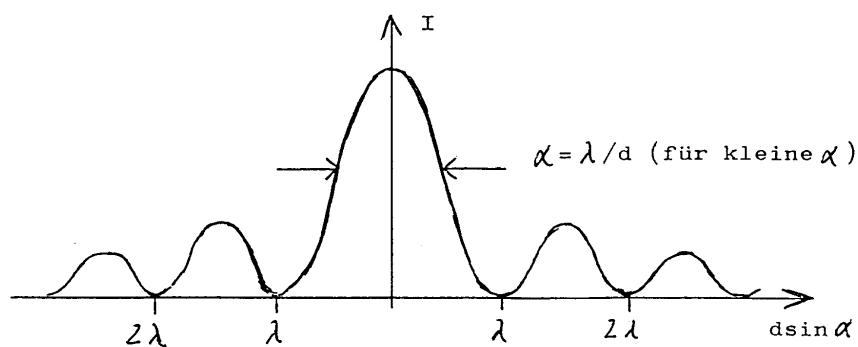


Abbildung 16.3: Beugungsmuster am Spalt.

Das Auflösungsvermögen optischer Geräte

In allen optischen Geräten erfolgt eine Bündelbegrenzung durch Linsen und Blenden. Die Abb. 16.2 zeigt uns, dass jeder "parallele Lichtstrahl" eine endliche Divergenz vom Betrage

$$\alpha = \frac{\lambda}{d} \quad (16.3)$$

hat, wobei wir den Winkel angegeben haben, innerhalb dem die Intensität etwa auf die Hälfte abgefallen ist.

Zwei Gegenstandspunkte werden also durch ein abbildendes Gerät nur dann noch getrennt abgebildet (aufgelöst), wenn ihr **Winkelabstand** mindestens so groß ist, dass das Beugungsmaximum des einen Punktes in das erste Beugungsminimum des anderen Punktes fällt. Diesen minimalen Abstand bezeichnet man mit **Auflösung**. Zur Beurteilung der Qualität eines Gerätes verwendet man das **Auflösungsvermögen**, dieses gibt an, wie viele dieser minimalen Abstände in den Gesamtbereich passen.

Die Winkelauflösung aller optischen Geräte ist auf die Größenordnung $\alpha = \lambda/d$ begrenzt, wobei λ die mittlere Wellenlänge des verwendeten Lichtes und d der durch das optische System abgebildete Bündeldurchmesser ist.

Beugung am Gitter

Unter einem Gitter versteht man eine Anordnung von N parallelen Spaltöffnungen im Abstand D , wobei D sehr groß sein soll gegenüber der einzelnen Spaltöffnung (punktförmige Quellen, Abb. 16.4). Wird ein solches Gitter mit parallelem Licht bestrahlt, dann

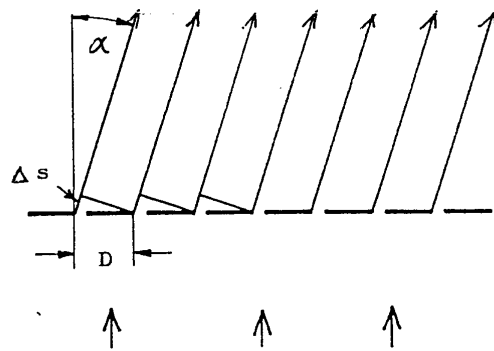


Abbildung 16.4: Beugung am Gitter.

wirken die Öffnungen wie die Quellen für Elementarwellen. Diese interferieren hinter dem Gitter und erzeugen ein für das Gitter typisches Beugungsbild. Die wichtigsten Merkmale dieser Figur wollen wir uns wieder überlegen.

Die entscheidende Größe hier ist der Gangunterschied Δs zwischen benachbarten Gitteröffnungen

*	$\Delta s = D \sin \alpha$	(16.4)
---	----------------------------	--------

Über Gl. (16.4) ist jedem Gangunterschied eine bestimmte Richtung α zugeordnet, die wiederum auf einem entfernten Schirm (nach Bündelung durch eine Linse) eine bestimmte Stelle markiert. Im Falle des Gitters interessieren uns nur die Intensitätsmaxima.

Lage der Hauptmaxima

Diese werden unter den Winkeln α zu beobachten sein, für die der Gangunterschied benachbarter Gitteröffnungen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist.

*	$\Delta s = D \sin \alpha = n\lambda$	$(n = 1, 2, \dots)$	(16.5)
---	---------------------------------------	---------------------	--------

Man bezeichnet diese Richtungen nach dem Wert von n als die Maxima 1. Ordnung, 2. Ordnung, usw. Man sollte beachten, dass die **Lage der Maxima nicht von der Zahl der Gitteröffnungen N** abhängt. Zwischen diesen Hauptmaxima liegen jeweils noch $(N - 2)$ schwächere Nebenmaxima.

Schärfe der Hauptmaxima

Ein Hauptmaximum wird um so schärfer sein, je kleiner der Winkelabstand zum nächsten Minimum ist. Dieser Winkelabstand bzw. den dazugehörenden Gangunterschied findet man durch die folgende Überlegung:

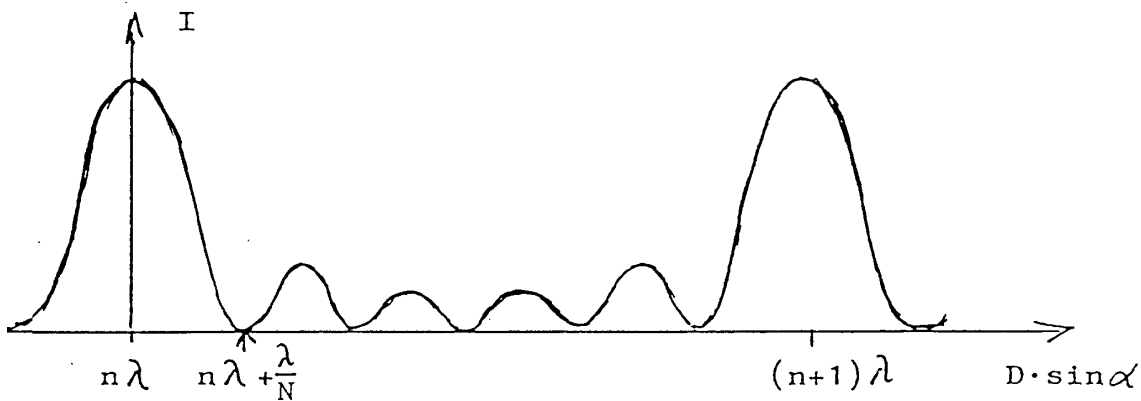
Beim Gangunterschied $\Delta s = n\lambda$ liegt ein Maximum (siehe oben). Die Intensität wird auf null zurückgehen, wenn der Gangunterschied soweit vergrößert wird, dass zwischen der ersten Gitteröffnung und der $(N/2)$ -ten Gitteröffnung ein zusätzlicher Gangunterschied von $\lambda/2$ eintritt. Dann nämlich löschen die Gitteröffnungen der einen Gitterhälfte diejenigen der anderen Hälfte vollkommen aus. Umgerechnet auf den Gangunterschied zwischen benachbarten Gitteröffnungen Δs (das ist unsere Bezugsgröße) ergibt das einen Zuwachs von

$$\frac{(\lambda/2)}{(N/2)} = \frac{\lambda}{N} \quad (16.6)$$

Das dem Hauptmaximum benachbarte Minimum rückt umso näher heran, je mehr Öffnungen N das Gitter hat (Abb. 16.5).

Das Auflösungsvermögen eines Gitters

Da die Lage des Maximums n -ter Ordnung von der Wellenlänge abhängt (Gl. (16.5)), können Gitter zur Trennung von Licht unterschiedlicher Wellenlänge dienen. Je kleiner die Wellenlängenunterschiede sind, die mit einem Gitter noch getrennt werden können,

Abbildung 16.5: Beugungsmuster eines Gitters (hier mit $N = 6$).

um so größer ist dessen Auflösungsvermögen.

Als Kriterium soll gelten, dass das Hauptmaximum der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ in das erste Minimum neben dem Hauptmaximum der Wellenlänge λ fällt. Wenn wir die Gangunterschiede für die beiden Wellenlängen unter dieser Richtung gleichsetzen, dann erhalten wir die gesuchte Bedingung:

Gangunterschied für das Hauptmaximum n -ter Ordnung der Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$	=	Gangunterschied für das 1. Minimum neben dem Hauptmaximum n -ter Ordnung für die Wellenlänge λ
---	---	--

$$n(\lambda + \Delta\lambda) = n\lambda + \lambda/N$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN \quad (16.7)$$

Die Zahl $\lambda/\Delta\lambda$ nennt man das Auflösungsvermögen des Gitters. Es ist gleich dem Produkt aus der Anzahl der Gitteröffnungen N und der Ordnung n , in der beobachtet wird.

16.2 Apparative Grundlagen

Der Gitterspektralapparat

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 16.6 gezeigt. Mit Hilfe der Beugung am Gitter kann die Wellenlänge von Licht bestimmt werden. Der Gitterspektralapparat gleicht dem Prismenspektralapparat (siehe Versuch 15), nur ist das Prisma durch ein Gitter ersetzt.

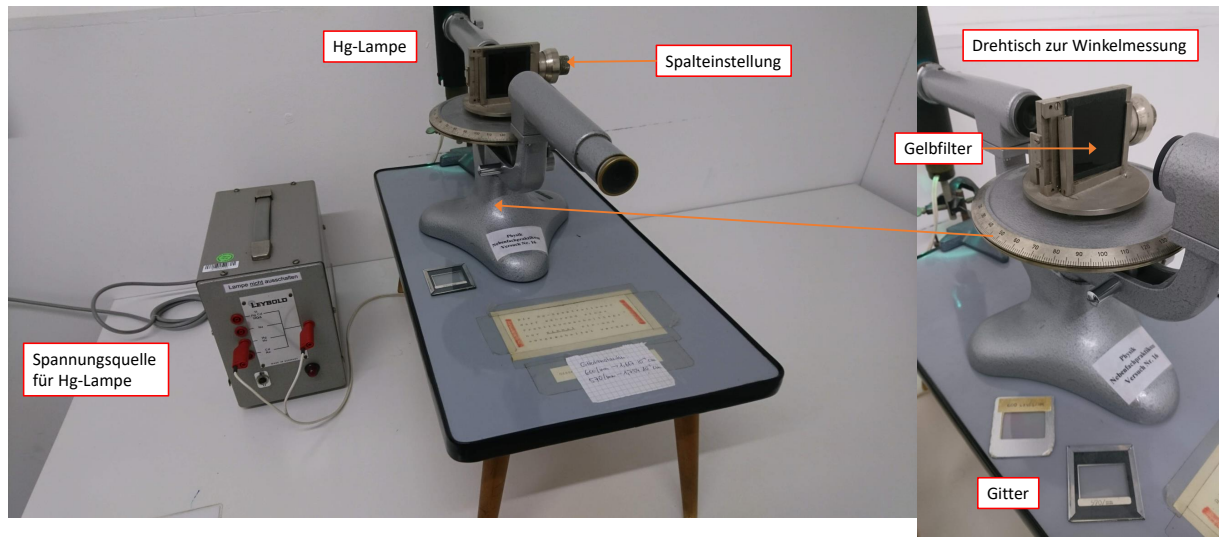


Abbildung 16.6: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Das Gitter ist stets senkrecht zum einfallenden Licht, das analysiert werden soll, orientiert. Mit dem schwenkbaren Fernrohr kann der Winkel, unter dem eine bestimmte Wellenlänge gebeugt wird, gemessen werden. Man stellt dazu das Fadenkreuz des Okulars auf die Spektrallinie der betreffenden Wellenlänge ein und liest mit Hilfe des Nonius den Winkel ab.

16.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Durch Beugung am Spalt bestimme man die Wellenlänge der gelben Quecksilberlinie
2. Mit einem Gitter bestimme man die Wellenlängen der drei hellsten Quecksilberlinien in erster und zweiter Ordnung
3. Durch Veränderung des Auflösungsvermögens eines Gitters bestimme man die Wellenlängendifferenz der beiden gelben Hg-Linien in erster und zweiter Ordnung

Versuchsdurchführung

Man schalte die Hg-Lampe während des gesamten Versuchs nur einmal ein und aus. Mehrmaliges Einschalten verringert die Lebensdauer der Lampe. Außerdem braucht die Lampe nach dem Ausschalten eine gewisse Zeit zum Abkühlen, ehe sie wieder zünden kann. Da das Licht einer Hg-Lampe einen hohen UV Anteil hat, sollte man vermeiden direkt in den ungefilterten Strahl zu schauen.

Zu 1) Man bringe den Gelbfilter in den Strahlengang. Bei zwei verschiedenen Spaltbreiten messe man den Winkel 2α zwischen einander entsprechenden **Minima** rechts und links des Hauptmaximums in erster und zweiter Ordnung (Nonius benutzen!) Die Spaltweite kann am Einstellrad abgelesen werden, wobei dessen toter Gang berücksichtigt werden muss. Mit Hilfe von Gleichung (16.1) kann damit die Wellenlänge λ ausgerechnet werden.

Zu 2) Nun entferne man den Filter, bringe das Gitter in den Strahlengang, öffne den Spalt völlig und messe wie unter 1) den Winkel 2α zwischen den Spaltbildern gleicher Ordnung rechts und links der nullten Ordnung.

Es sind jeweils zwei Messungen für jeden Winkel auszuführen und zu mitteln. Gleichung (16.5) ergibt dann die gesuchte Wellenlänge. Die Gitterkonstante D ist am Arbeitsplatz angegeben.

Ein typisches Beobachtungsbild am Okular ist in Abb. 16.7 gezeigt.

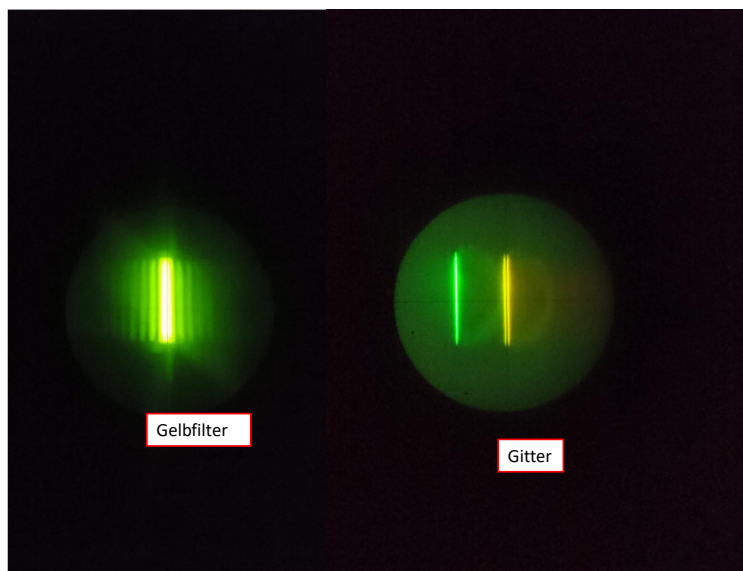


Abbildung 16.7: Beobachtungsbild am Okular für den Gelbfilter (links) und das Gitter (rechts).

Zu 3) Für diesen Versuch benutzen wir den vor dem Gitter angeordneten verstellbaren Spalt, um die Anzahl der Gitteröffnungen zu verändern.

Man bestimme jeweils dreimal in 1. und 2. Ordnung die Breite des Spaltes, bei dem die beiden gelben Hg-Linien gerade noch getrennt zu sehen sind. Aus Spaltbreite und Gitterkonstante ergibt sich die Zahl N der durchstrahlten Gitterstriche. Da die mittlere Wellenlänge der beiden Linien schon gemessen wurde, kann nach Gleichung (16.7) $\Delta\lambda$ bestimmt werden.

Fehlerabschätzung

Für die mehr qualitativen Messungen 1) und 3) ist eine Fehlerangabe nicht sinnvoll. Bei 2) kann man die Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert als $\Delta\alpha$ betrachten und daraus $\Delta\lambda$ abschätzen.

17. Polarisiertes Licht

Das muss man wissen

- *Elektromagnetische Welle - Polarisation*
- *linear bzw. zirkular polarisiertes Licht (Eigenschaft und Erzeugung)*
- *Rotationsdispersion - Funktionsweise eines Polarimeters*
- *optisch aktive Substanzen*

Anwendungen:

- Verständnis dafür, warum bestimmte Rezeptoren nur auf polarisiertes Licht reagieren können
- Physiologie des Sehens
- geometrische Konstruktionen
- Bestimmung von Zuckerkonzentration in Lösungen
- Öchsle
- LCD-Bildschirm
- Sonnenbrille
- Brewster-Winkel

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Wie groß sind in etwa Wellenlänge, Frequenz, Energie des sichtbaren Lichts?

Nennen Sie weitere elektromagnetische Wellen (Energie, Wellenlänge)!

Was ist eine Longitudinal- und was eine Transversalwelle?

Was schwingt bei einer elektromagnetischen Welle?

Was ist die Schwingungsebene, was die Polarisation?

Was bedeutet unpolarisiert, linear polarisiert und zirkular polarisiert?

Was ist ein Polarisationsfilter und wie funktioniert es?

Was ist Rotationsdispersion?

Was bedeutet optisch aktiv?

Erläutern Sie den Aufbau und die Funktionsweise eines Polarimeters!

17.1 Physikalische Grundlagen

Polarisation

Licht als elektromagnetische Welle ist eine Transversalwelle, d.h. der Vektor $\vec{E}$ der elektrischen Feldstärke steht immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung z der Welle. Auf Grund des Entstehungsmechanismus (Emissionsprozesse einzelner Atome) wechselt die Richtung von $\vec{E}$ innerhalb einer Ebene senkrecht zu z in statistischer Weise. Licht, das von natürlichen Quellen ausgesendet wird, ist **unpolarisiert**.

Durch bestimmte Maßnahmen ist es möglich, diesen Zustand so zu ändern, dass für die Richtung von $\vec{E}$ eine definierte Gesetzmäßigkeit gilt. In diesem Fall spricht man von **polarisiertem** Licht.

Polarisationszustände

In der Praxis sind besonders zwei Fälle von Bedeutung: Linear und zirkular polarisiertes Licht. Um den Polarisationszustand zu beschreiben, kann man eine Darstellung des E -Vektors in der zur Ausbreitungsrichtung z senkrechten xy -Ebene wählen. In dieser Darstellung blickt man gegen die Lichtquelle.

Beim linear polarisierten Licht schwingt der E -Vektor an einer bestimmten Stelle im Raum (fester z -Wert) immer in der gleichen Richtung. In einer räumlichen Darstellung liegen die Spitzen der E -Vektoren auf einer Sinuskurve. Beim zirkular polarisierten Licht bewegt sich die Spitze des E -Vektors in der xy -Ebene auf einem Kreis. Das Momentbild von E entspricht einer Spirale, deren Achse die Ausbreitungsrichtung ist. An seiner willkürlich herausgegriffenen Stelle (festes z) rotiert $\vec{E}$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in der xy -Ebene (Abb.1) ¹.

¹In dieser Darstellung sind jedoch Phasensprünge nicht gezeichnet, die in statistischer Folge den Wellenzug unterbrechen (Kohärenzlänge!)

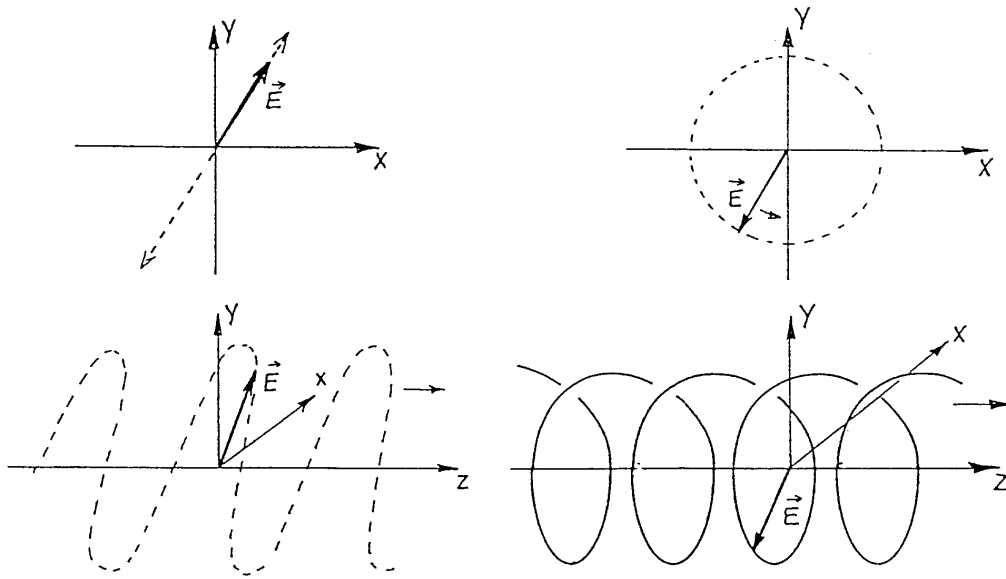


Abbildung 1. Linear und zirkular polarisiertes Licht

Erzeugung von linear polarisiertem Licht

Es gibt Substanzen, die beim Lichtdurchgang eine Richtungsabhängigkeit bezüglich der Absorption zeigen (Dichroismus). Der Grund hierfür liegt in einem anisotropen Kristallaufbau mit einer Vorzugsrichtung (optische Achse). Lässt man auf diese Stoffe Licht senkrecht zur optischen Achse auffallen, dann werden die zwei senkrecht zueinander orientierten Komponenten des E -Vektors, in die man sich $\vec{E}$ stets zerlegt denken kann, unterschiedlich stark geschwächt. Nach Durchlaufen der Substanz bleibt nur eine Komponente übrig, das Licht ist linear polarisiert.

Man versteht das Prinzip am besten, wenn man Mikrowellen (elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge von einigen cm) auf eine Anordnung paralleler in y -Richtung gespannter Drähte fallen lässt. Das elektrische Feld der ankommenden Welle habe eine x - und eine y -Komponente. Die zu den Drähten parallele y -Komponente wird an den Elektronen des Metalls entsprechend dessen ohmschen Widerstands Arbeit verrichten (in den Drähten wird ein Wechselstrom fließen). Diese Komponente wird daher (mehr oder weniger) geschwächt.

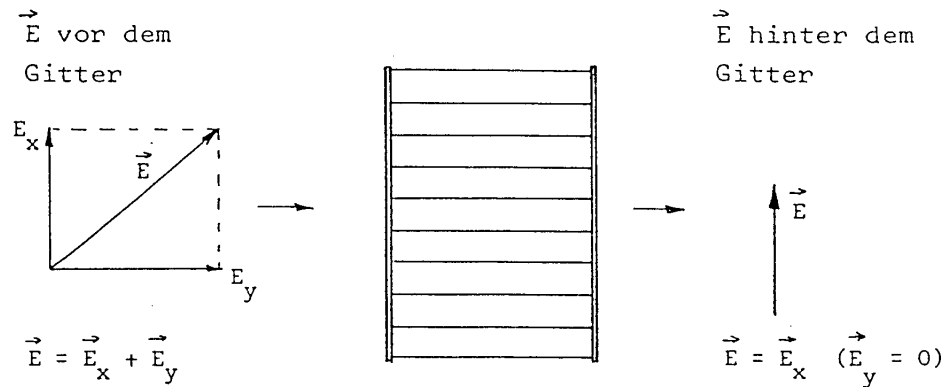


Abbildung 2. Zum Verständnis des Dichroismus

In *x-Richtung* sind diese Vorgänge nicht möglich, da in diese Richtung für die Elektronen keine Bewegungsmöglichkeit besteht. Die *x*-Komponente wird nicht beeinflusst (Abb.2). Dieses Prinzip ist auf alle Arten von elektromagnetischer Strahlung anwendbar, nur muss z.B. für Licht das Drahtgitter durch ein sogenanntes Polaroidfilter ersetzt werden. Dies sind Plastikfolien, bei denen durch mechanische Dehnung eine Ausrichtung der langen Moleküle erreicht wird (diese entsprechen den Drähten). Sorgt man durch entsprechende Wahl der Substanzen und geeignete Zusätze dafür, dass sich längs dieser Moleküle Elektronen bewegen können, dann hat man ein wirksames Filter gebaut.

Optische Aktivität (Rotationsdoppelbrechung)

Stoffe, die die Eigenschaft besitzen, die Schwingungsebene von linear polarisiertem Licht zu drehen, heißen **optisch aktiv**. Auch dieses Phänomen beruht auf baulichen Eigenarten bestimmter Substanzen; sie besitzen eine Vorzugsrichtung (ebenfalls optische Achse genannt), die dadurch ausgezeichnet ist, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von zirkular polarisiertem Licht entlang dieser Richtung vom Drehsinn des elektrischen Vektors abhängt.

Für den Drehsinn einer zirkular polarisierten Welle besteht die folgende Vereinbarung: Blicken wir der Lichtquelle entgegen, dann heißt das Licht **rechtszirkular**, wenn der *E*-Vektor im Uhrzeigersinn umläuft. Im anderen Fall handelt es sich um **linkszirkulares Licht**.

Optisch aktive Substanzen sind z.B. Quarzkristalle und Zuckerlösungen. Wie kann man etwa für Zucker diese Erscheinung verstehen? Zuckermoleküle besitzen eine schraubenförmige Struktur, die für alle Moleküle einer Zuckerart denselben Drehsinn hat. Eine Schraube hat immer denselben Drehsinn, unabhängig davon, von welcher Seite sie betrachtet wird. Eine Lösung von statistisch orientierten Zuckermolekülen weist insgesamt denselben Drehsinn auf wie die einzelnen Zuckermoleküle. Es ist leicht vorstellbar, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Lichtwelle davon abhängt, ob die zirkular polarisierte Welle denselben Drehsinn hat wie die Moleküle oder einen entgegengesetzten. Die Drehung der Schwingungsebene linear polarisierten Lichts kann dadurch erklärt

werden, dass man sich diese Licht als Überlagerung zweier zirkular polarisierter Wellen gleicher Amplitude und Frequenz aber von entgegengesetztem Drehsinn vorstellt. In der Abb.3 ist *l* die linksherum, *r* die rechtsherum (immer gegen die Lichtquelle also gegen die Ausbreitungsrichtung gesehen) kreisende Komponente und *E* der resultierende Feldstärkevektor, dessen Endpunkt immer auf dem Doppelpfeil *AA'* läuft. Besitzt jedoch z.B. die *r*-Welle eine größere Ausbreitungsgeschwindigkeit, dann eilt sie der *l*-Welle nach einer bestimmten Laufstrecke etwa um einen Winkel δ voraus, d.h. *E* hat sich um einen Winkel $\delta/2$ nach rechts gedreht. Eine solche Substanz wird dann als rechtsdrehend bezeichnet. Der resultierende Drehwinkel hängt bei einer Zuckerlösung offensichtlich von der Länge der Laufstrecke in der Lösung und von der Konzentration der Lösung ab.

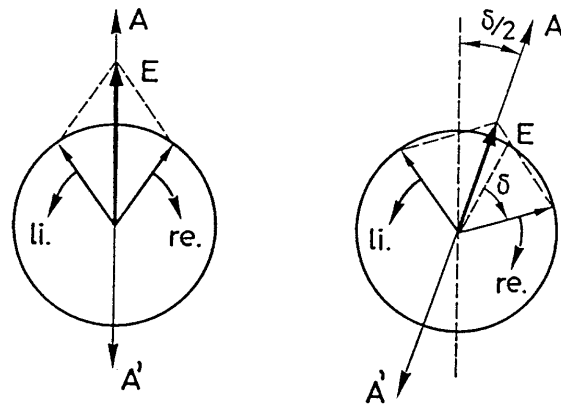


Abbildung 3. Zur Erklärung der Drehung von linear polarisiertem Licht

17.2 Apparative Grundlagen

Schematischer Aufbau des Polarimeters und Messung des Drehwinkels

Die Abb.4 zeigt das Schema eines Polarimeters.

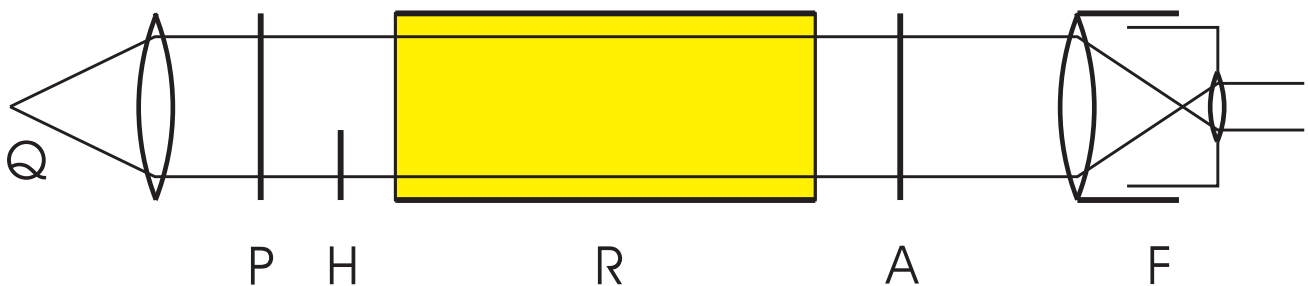


Abbildung 4. Aufbau eines Polarimeters

Das von *Q* ausgehende einfarbige Licht durchsetzt den Polarisator *P*, einen Hilfspolarisator *H*, die Küvette mit der Zuckerlösung *R* und den Analysator *A*. Durch ein Fernrohr

F wird die Helligkeit der Lichtquelle beobachtet.

Wir betrachten die Anordnung zunächst ohne H und R. Stehen P und A parallel zueinander, dann ist das Gesichtsfeld hell, dreht man A um 90° , so erhält man Dunkelheit. Wird nun die Küvette mit der zu untersuchenden Lösung in den Strahlengang gebracht, dann hellt sich das Gesichtsfeld auf, da die Schwingungsebene des Lichtes um einen Winkel α gedreht wurde und nicht mehr senkrecht zu A ist. Durch Nachführen von A bis zur völligen Auslöschung kann man α bestimmen.

Da die Einstellung auf Dunkelheit (oder Helligkeit) mit dieser Anordnung nicht sehr empfindlich ist, wird zusätzlich ein Hilfspolarisator in eine Hälfte des Strahlenganges gebracht, dessen Polarisierungsrichtung gegenüber P um einen kleinen Winkel ε gedreht ist. Dadurch wird das Gesichtsfeld in zwei Hälften geteilt, die im allgemeinen unterschiedliche Helligkeit zeigen.

Der Analysator wird nun in die Stellung gebracht, bei der die beiden Bereiche gleich hell erscheinen. Kleine Abweichungen in der einen oder anderen Richtung führen rasch zu einer vollen Verdunkelung eines Bereiches, während der andere sich aufhellt. Dadurch ist eine sehr scharfe Einstellung möglich.

In der Abb.5 sind die Stellungen von P, H und A für die drei beschriebenen Fälle zusammen dargestellt, die Längen der Pfeile entsprechen der Amplitude des Vektors $\vec{E}$ der elektrischen Feldstärke. In der linken Hälfte des Gesichtsfeldes sehen wir das Licht, das nur P und A, in der rechten Hälfte dasjenige, das P, H und A durchlaufen hat.

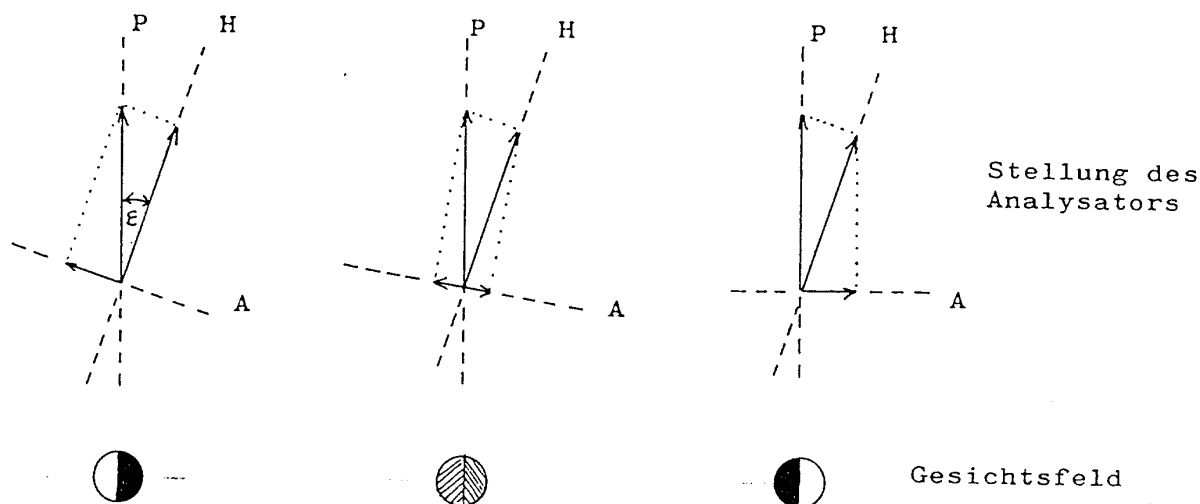


Abbildung 5. Zur Wirkungsweise des Hilfspolarisators

Man beachte die verschiedenen Längen der Vektoren auf P und H. H ist hinter P angeordnet.

Polarimeter zur Bestimmung der Konzentration optisch aktiver Substanzen



Abbildung 17.6: Polarimeter zur Messung der Zuckerkonzentration.

Zur Messung der Zuckerkonzentration wird das in Abb. 17.6 gezeigte Polarimeter verwendet, bei Natriumlicht einer Wellenlänge von 589 nm durch einen Polarisator linear polarisiert wird. Das Licht durchläuft die in eine Küvette gefüllte Substanz und wird durch einen Analysator beobachtet. Durch Ausmessen des Drehwinkels kann die Konzentration der Lösung berechnet werden.

Zunächst muss der optische Nullabgleich des Polarimeters ohne Küvette hergestellt werden. Dazu wird der Analysator mit der Stellschraube auf etwa 90° gedreht und das Okular so eingestellt, dass eine scharf begrenzte helle Kreisfläche zu beobachten ist. Durch eine weitere Rotation des Analysators in die eine oder andere Richtung wird ein heller oder dunkler Streifen in der Mitte des Kreises sichtbar (siehe Abb. 17.7). Der beste Kontrast ergibt sich wenn die Kreisfläche gleichmäßig ausgeleuchtet (dunkel) ist und der Mittelstreifen nicht mehr beobachtbar ist. Diese Einstellung ist als Nullstelle zu wählen und der entsprechende Winkel, der im Bereich von 0° liegen sollte, wird als Nullwinkel notiert. Beim Drehen des Analysators um den Nullwinkel wird der Mittelstreifen wechselweise mit den beiden Randbereichen hell oder dunkel (Halbschattenmethode), wodurch sich eine Abweichung von der Nullstellung sehr deutlich beobachten lässt. Die Ablesung des Winkels mit Hilfe der Noniusskala über die entsprechende Lupe in der Okularumrandung ergibt den Nullwinkel.

Nun kann die Küvette mit der Probe in den Strahlengang gebracht werden, mit der Verdickung nach oben damit sich ggfs. Luftblasen im Bereich der Verdickung sammeln und nicht die Durchleuchtung beeinflussen. Nach Scharfstellung des Okulars ist der Analysator wieder zu drehen bis die Kreisfläche gleichmäßig ausgeleuchtet ist. Der Drehwinkel wird an der Noniusskala beidseits abgelesen und für den Nullwinkel korrigiert. Der Mittelwert wird aus den beiden Ablesungen berechnet.

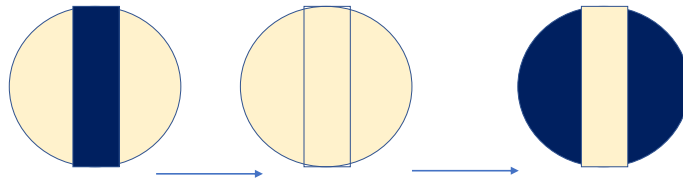
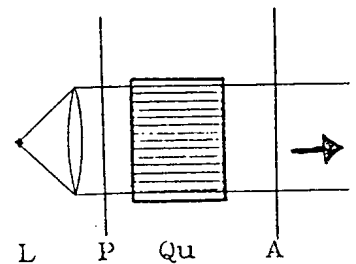


Abbildung 17.7: Beobachtungsbild unter veränderter Anaysatorstellung.

Rotationsdispersion

Eine senkrecht zur optischen Achse geschnittene Quarzplatte dreht linear Polarisiertes Licht ebenfalls, wenn es den Quarz in Richtung der optischen Achse durchsetzt. Der Drehwinkel hängt stark von der Wellenlänge des Lichts ab: Mit zunehmender Wellenlänge nimmt der Drehwinkel ab.

Eine Quarzplatte Qu befindet sich zwischen zwei Polarisationsfiltern P und A. Das von L kommende Licht wird durch P polarisiert und durchsetzt den Quarz und dann A. Anschließend wird das Licht in einem Prismenspektralapparat spektral zerlegt. Im kontinuierlichen Spektrum beobachtet man nun dunkle Streifen. Es sind dies gerade diejenigen Wellenlängen, bei denen die Schwingungsebenen um soviel gedreht wurden, dass sie senkrecht zur Schwingungsebene (Durchlassrichtung) von A stehen, wenn sie den Quarz verlassen und deshalb vom Analysator nicht durchgelassen werden.



Für diesen Zweck wird ein geeichter Spektralapparat verwendet, der die Bestimmung der Wellenlängen erlaubt.

17.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Bestimmung der Konzentration einer Fructose- und Glucose-Lösung mit dem Polarimeter
2. Aufnahme der Rotationsdispersionskurve bei Quarz und Bestimmung der spezifischen Drehwinkel für die Wellenlängen 589 nm und 527 nm.

Die Rotationsdispersionskurve ist die Darstellung des spez. Drehwinkels in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

Versuchsdurchführung, Auswertung und Fehlerabschätzung

Zu 1)

Man mache je 10 Ablesungen des Winkels mit den beiden Lösungen, für die jeweils der Winkel an der linken und rechten Skala abgelesen wird (α_l und α_r), woraus der Mittelwert gebildet wird. Die Konzentration k der Lösung ergibt sich aus dem Drehwinkel α , der Länge der durchstrahlten Schicht l und dem spezifischen Drehvermögen α^* :

$$k = \frac{\alpha}{l \cdot \alpha^*}$$

Für Glucose beträgt $\alpha^* = 52.7^\circ \frac{\text{ml}}{\text{dm} \cdot \text{g}}$ und für Fructose $\alpha^* = -89.5^\circ \frac{\text{ml}}{\text{dm} \cdot \text{g}}$. Als Ergebnis sollen hier Mittelwert und Standardabweichung berechnet werden. Es empfiehlt sich eine Tabelle mit den folgenden Spalten:

α_l	α_r	α	$\Delta\alpha$	$(\Delta\alpha)^2$
12.9	13.1	13.0	0.2	0.04
usw.				usw.
Mittel: z.B. 13.2			Summe der $(\Delta\alpha)^2$: z.B. 0.35	

Zu 2)

Dieser Teil des Versuchs wird mit der in Abb. 17.8 gezeigten Apparatur durchgeführt.

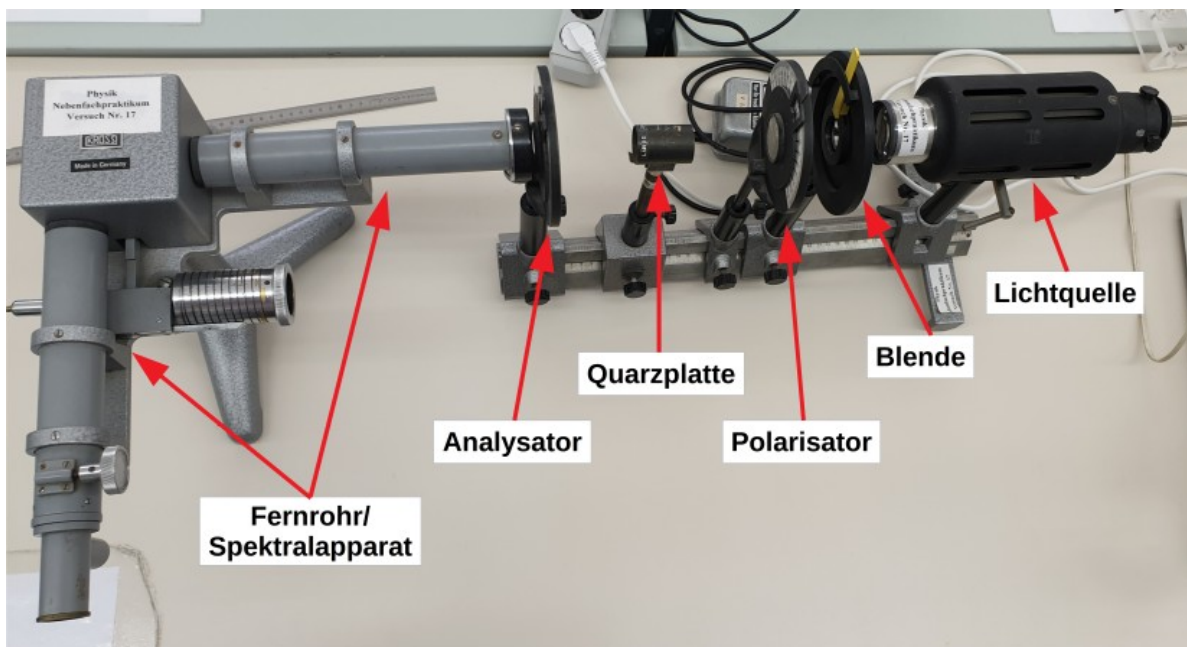


Abbildung 17.8: Polarimeter zur Messung der Rotationsdispersionskurve.

Man bestimmt die Wellenlänge der dunklen Streifen. Für die grafische Darstellung ist folgendes zu beachten: Zunächst weiß man nur, dass bei einer beliebigen aber festen Analysatorstellung die Drehwinkel von einem dunklen Streifen zum nächsten mit steigender Wellenlänge um 180° abnehmen. Auf einen Millimeter Quarzlänge bezogen sind dies $180/d$ [$^\circ/\text{mm}$] (d = Quarzlänge). Wählt man bei beliebigem Nullpunkt auf der Ordinate als Einheit den Betrag $180/d$ [$^\circ/\text{mm}$], so entsprechen diesen Ordinatenpunkten auf der Abszisse diejenigen Wellenlängen, die im Spektrum fehlen. Durch die Angabe, dass der spezifische Drehwinkel bei 486 nm $32,76^\circ/\text{mm}$ beträgt, lässt sich der Nullpunkt auf der Ordinate festlegen.

Man nehme so die Rotationsdispersionskurve für Quarz auf und bestimme daraus den spezifischen Drehwinkel für die Wellenlängen 589 nm und 527 nm. Außerdem überlege man sich, ob es sich um einen rechts- oder linksdrehenden Quarz handelt. Hinweis: Durch Drehen am Analysator wandern die dunklen Streifen je nach Drehrichtung zum kurz- oder langwelligen Ende des Spektrums.

Der Fehler ergibt sich hier im wesentlichen aus der Zeichengenauigkeit beim Erstellen des Diagramms. Daraus resultiert ein Fehler für die beiden abzulesenden Drehwinkel. Man schätze ihn ab.

18. Absorption von γ -Strahlen

Das muss man wissen

- *natürliche Radioaktivität – Isotop – Aufbau eines Atomkerns*
- *Erzeugung von γ -Strahlung*
- *Einordnung von γ -Strahlung in das Spektrum der elektromagnetischen Strahlung*
- *Energie – Wellenlänge – Frequenz von elektromagnetischer Strahlung*
- *Absorptionsgesetz – Photoeffekt – Compton-Effekt – Paarbildung*
- *Abhängigkeit der Absorption von Absorbermaterial und γ -Energie*
- *Nachweisgeräte für γ -Strahlung*
- *Biologische Wirksamkeit von α, β, γ Strahlung*
- *Abschirmung von ionisierender Strahlung*

Anwendungen:

- Abschirmung von radioaktiver Strahlung
- Biologische Wirksamkeit
- Strahlendosis und Strahlenschutz
- Bildgebende Verfahren in der Nuklearmedizin

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Wie groß sind Wellenlänge, Frequenz, Energie von γ -Strahlen (ca.)?

*Nennen Sie weitere elektromagnetische Wellen (Energie, Wellenlänge)!
elektromagnetische Welle, was schwingt?*

Erläutern Sie den Aufbau von Atom und Kern!

Was sind Protonen, Neutronen, Elektronen und Neutrinos?

Wie sind die Massenverhältnisse dieser Elementarteilchen?

Was sind Isotope und Isomere?

Wie groß sind Atomkern und -hülle?

Was sind instabile Kerne?

Welche Zerfallsarten gibt es, was passiert dabei?

Was ist der Massendefekt, was die Ruhemasse (z.B. vom e^-)?
 Erläutern Sie das Absorptionsgesetz anschaulich!
 Auf welchen Mechanismen beruht die Absorption?
 Was beschreibt der Massenschwächungskoeffizient?
 Welcher Zusammenhang besteht zwischen Schichtdicke und Zählrate?
 Nennen Sie ähnliche Gesetze, z.B. aus der Biologie!

18.1 Physikalische Grundlagen

Instabile Kerne

Atomkerne sind aus **Protonen** und **Neutronen** aufgebaut. Beide Arten von **Elementarteilchen** bezeichnet man auch als **Nukleonen**. Ihre Massen sind etwa gleich ($m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_n = 1,6748 \cdot 10^{-27}$ kg). Das Proton trägt eine positive Elementarladung ($e = 1,609 \cdot 10^{-19}$ C), das Neutron ist elektrisch neutral.

Die Zahl der Protonen Z und die Zahl der Neutronen N ergeben zusammen die **Nukleonenzahl** $A = (Z + N)$ (auch als Massenzahl bezeichnet). Z ist die **Ordnungszahl** (oder auch Kernladungszahl), die die Stellung des Nuklids im periodischen System bestimmt. Die Angabe dieser Zahlen erfolgt durch hoch- bzw. tiefgestellte Ziffern am Elementsymbol, z.B. ${}^4_2\text{He}$.

Die Kerne werden durch die sogenannten **Kernkräfte** zusammengehalten. Bei der Bildung von Kernen wird Energie frei (**Bindungsenergie**), die andererseits wieder aufgewendet werden muss, um einen Kern in seine einzelnen Bestandteile zu zerlegen. Die Bindungsenergie ist äquivalent zum **Massendefekt**. Dieser ist gleich der Differenz zwischen der Summe der Massen von Z Protonen und N Neutronen und der Masse des Kernes der Nukleonenzahl $A = Z + N$.

Nicht alle Kerne, die man aus Protonen und Neutronen aufbauen kann, sind stabil. Für diese muss ein bestimmtes Verhältnis angenähert erfüllt sein: Etwa gleich viele Protonen und Neutronen für leichte Kerne und ein leicht zunehmender Neutronenüberschuss für die schweren Kerne. Kerne mit davon abweichenden Nukleonenverhältnis sind instabil und zerfallen unter Aussendung radioaktiver Strahlung oder Spaltung in stabile Kerne. Bei den natürlich vorkommenden Kernen (z.B. Uran, Thorium) können drei Arten von Strahlung beobachtet werden.

Radioaktive Strahlung

α -(Alpha-)Strahlen

α -Strahlen sind Heliumkerne (${}^4_2\text{He}$), die aus dem instabilen Atomkern emittiert werden. Die von einem radioaktiven Element emittierten α -Teilchen sind monoenergetisch (d.h. besitzen die gleiche Energie) oder gehören zu mehreren Gruppen monoenergetischer Teilchen.

Beispiel eines α -Zerfalls:



Bei jedem α -Zerfall eines radioaktiven Elementes nimmt die Ordnungszahl des Elementes um zwei, die Massenzahl um vier Einheiten ab. Bei Wechselwirkung mit Materie verlieren die α -Teilchen ihre Energie in einer Vielzahl von Stößen, vorwiegend mit den Hüllenelektronen des Absorbermaterials. Der kinetischen Energie E_α kann man eine **mittlere Reichweite** in Materie zuordnen, die bei Festkörpern infolge der sehr starken Ionisationswirkung der α -Teilchen aufgrund ihrer doppelten Ladung typisch unter 1 mm liegt.

β -(Beta-)Strahlen

β -Strahlen sind Teilchenstrahlen aus Elektronen (e^-) oder Positronen (e^+). Beispiel eines β -Zerfalls:



Beim β -Zerfall eines radioaktiven Elementes nimmt die Ordnungszahl um eine Einheit zu. Eine Änderung der Massenzahl erfolgt nicht. Die β -Strahlen werden ebenfalls aus dem Kern emittiert. Der Kern enthält jedoch keine Elektronen. Sie entstehen durch Umwandlung eines Neutrons in ein Proton:



Das **Antineutrino** $\bar{\nu}$ ist ein bei diesem Prozess auftretendes Elementarteilchen. Es hat eine sehr kleine Ruhemasse, deren genauer Wert noch gemessen werden konnte, keine Ladung und eine sehr geringe Wechselwirkung mit Materie, aber es besitzt kinetische Energie. Die Existenz des **Neutrinos** wurde ursprünglich auf Grund von Impuls- und Energie-Erhaltung aus der gemessenen kontinuierlichen Geschwindigkeitsverteilung (bzw. Energieverteilung) der emittierten β -Teilchen postuliert. Diese reicht von null bis zu einer Maximalenergie. Da Ausgangskern und Endkern bestimmte feste Energien besitzen, sind die verschiedenen Energiewerte der einzelnen β -Teilchen nur erklärbar, wenn das Antineutrino jeweils den Rest der Energie trägt.

Korrekterweise müsste der beschriebene Prozess als β^- -Strahlung bezeichnet werden. In einigen seltenen Fällen beobachtet man auch die Emission eines sog. **Positrons**, eines positiven Elektrons (β^+ -Zerfall). Hier wandelt sich im Kern ein Proton in ein Neutron um, während ein Positron sowie ein Neutrino emittiert werden.

γ -(Gamma-)Strahlen

γ -Strahlen sind wie auch **Röntgenstrahlen** kurzwellige elektromagnetische Wellen. Die Wellenlängen liegen bei etwa 10^{-12} m ($= 0,01$ Å) und darunter. Da man eine elektromagnetische Welle auch als Strom von Energiequanten auffassen kann, spricht man bei γ -Strahlen auch von γ -Quanten. Die Energie der γ -Quanten liegt bei einigen MeV, im Gegensatz zu keV bei Röntgenstrahlung.

Die γ -Strahlung wird aus Atomkernen emittiert, die von einem angeregten Zustand (vergleichbar mit den Anregungszuständen der Elektronenhülle) unter Abgabe eines γ -Quants in den Grundzustand übergehen. Da bei radioaktiven Zerfallsprozessen oftmals die nach Teilchenemission neu entstehenden Kerne energetisch angeregt zurückbleiben, wird gleichzeitig γ -Strahlung nachgewiesen. Im Gegensatz zur Teilchenemission bleiben Ordnungszahl und Massenzahl des Isotops unverändert.

Absorption von Gammastrahlen

Im Gegensatz zu dem Energieverlust und den vielstufigen Absorptionsprozessen der geladenen Zerfallsprodukte, erfolgt die **Absorption** eines γ -Quants in den meisten Fällen durch eine einmalige oder eine Folge von wenigen Reaktionen.

Es gibt drei wichtige Absorptionsmechanismen für γ -Strahlen:

Photoeffekt Hierbei wird das γ -Quant durch ein Atom absorbiert, wobei ein Elektron aus einer inneren Schale angeregt und dabei meist abgelöst wird. Der die Bindungsenergie des Elektrons übersteigende Energiebetrag wird dem Elektron als kinetische Energie übertragen. Dieser Effekt überwiegt bei kleinen γ -Energien.

Comptoneffekt Darunter versteht man die Streuung eines Gammaquants unter Frequenzänderung an einem Elektron des Absorbermaterials. Das Quant wird gemäß den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls gestreut und überträgt Rückstoßenergie an das Elektron. Dieser Prozess dominiert in einem Energiebereich um 1 MeV.

Paarbildung Oberhalb einer Schwellenenergie von $e_\gamma = 1,02$ MeV kann das γ -Quant im starken Feld des Atomkerns „materialisieren“, d.h. es wandelt sich um in ein Elektron und ein Positron. Der Mindestenergiebetrag entspricht der Ruheenergie der beiden erzeugten Teilchen. Dieser Prozess dominiert bei hohen γ -Energien.

Der jeweilige Beitrag dieser drei Effekte zur Gesamtabsorption hängt von der Energie der Quanten und von der Ordnungszahl des Absorbers ab.

Das Absorptionsgesetz

Die Abnahme $-dI$ der Intensität, d.h. der Zahl der γ -Quanten pro Zeiteinheit und Fläche ist proportional zur einfallenden Intensität I und proportional zur Dicke der durchstrahlten Schicht dx , wie in Abb.18.1 dargestellt.

*

$$-dI = \mu I dx$$

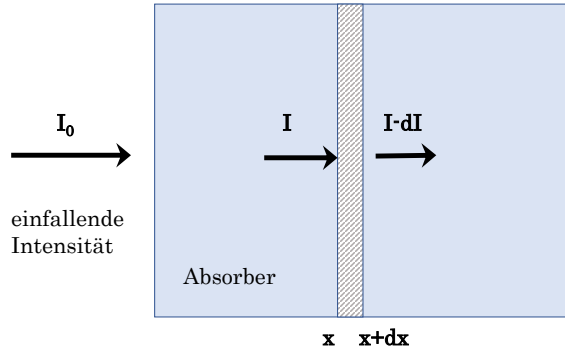


Abbildung 18.1: Zur Herleitung des Absorptionsgesetzes.

Durch Integration erhält man für den funktionellen Zusammenhang zwischen der Zählrate und der durchstrahlten Schichtdicke x :

*

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (18.1)$$

μ nennt man den **Absorptionskoeffizienten**, I_0 ist die anfängliche Intensität (= Zählrate ohne Absorber).

Wie bereits erwähnt, sind drei verschiedene Effekte an der Schwächung des Gammastrahls beteiligt. Der partielle Absorptionskoeffizienten für Blei ist in Abb. 18.2 gezeigt und in Abb. 18.3 ist der Koeffizient für die Gesamtaborption als Funktion der Gammaenergie für einige Stoffe wiedergegeben. Für einige praktische Belange benutzt man den sogenannten **Massenschwächungskoeffizienten** Absorptionskoeffizient/Dichte, der im Bereich der **Comptonstreuung** um 1 MeV für die meisten Stoffe vergleichbare Werte besitzt.

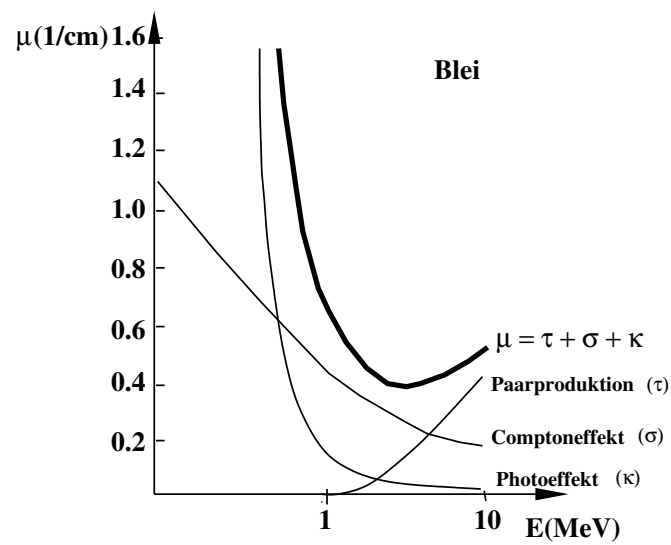


Abbildung 18.2: Partielle Absorptionskoeffizienten als Funktion der γ -Energie für Blei.

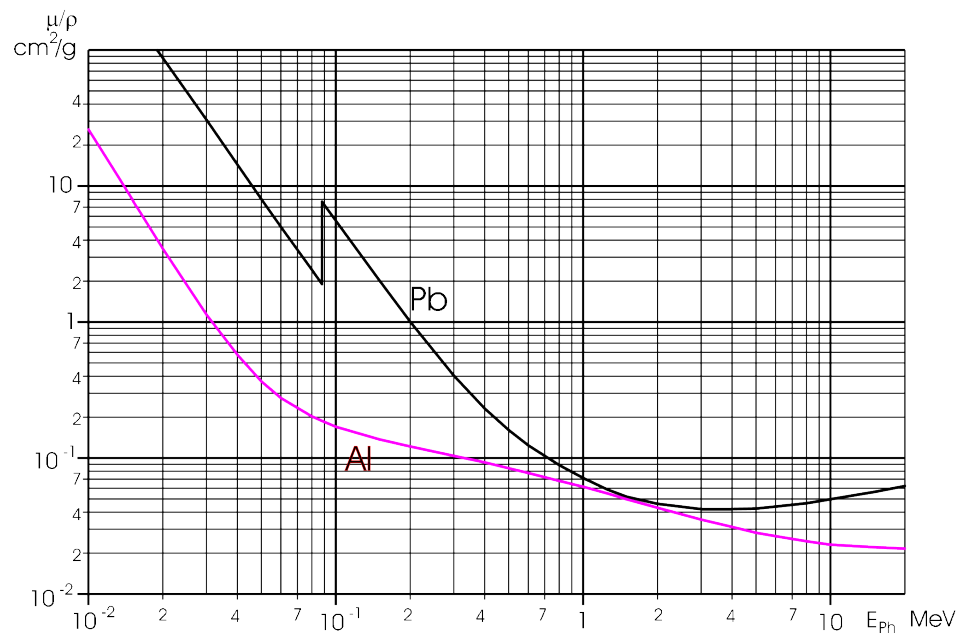


Abbildung 18.3: Massenschwächungskoeffizienten μ/ρ für Aluminium und Blei als Funktion der Photonenenergie E_{Ph} .

18.2 Apparative Grundlagen

Der Szintillationsdetektor

Es gibt eine Vielzahl an Nachweismethoden für radioaktive Strahlung, im Standardverfahren zur Messung von ionisierender Strahlung wird ein Geiger-Müller-Zählrohr verwendet, im vorliegenden Versuch wird jedoch ein Szintillationsdetektor benutzt. Die Funktionsweise des Szintillatorzählers ist in Abb. 18.4 dargestellt. Das einfallende γ -Quant trifft

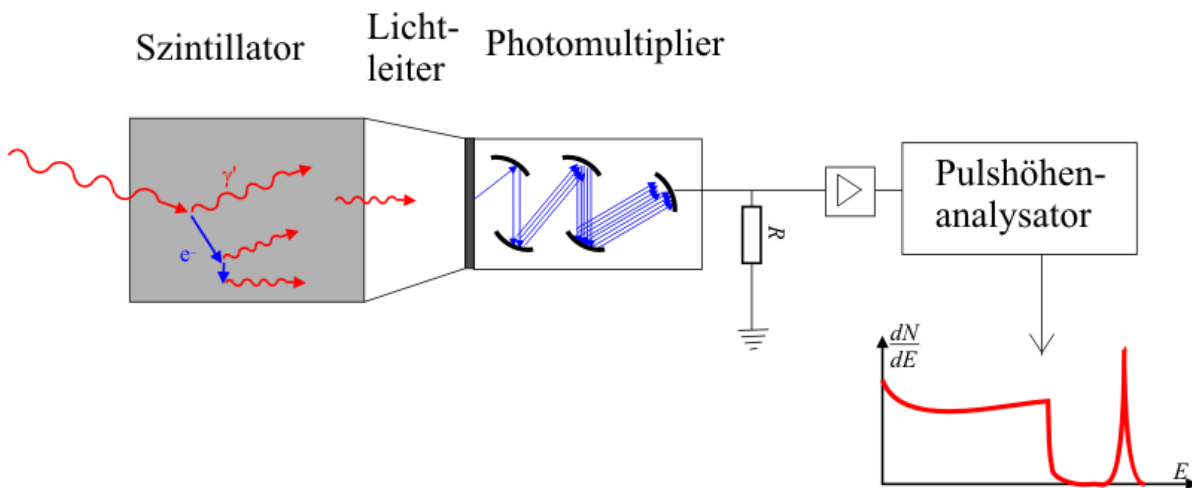


Abbildung 18.4: Schematische Darstellung der Funktionsweise eines Szintillationsdetektors.

zunächst auf den eigentlichen *Szintillator*, der im Versuch aus einem speziellen Kunststoff gefertigt ist, aber im Allgemeinen auch eine Flüssigkeit oder ein Kristall sein kann. Dort wird das Szintillatormaterial durch Energiedeposition zur Lumineszenz angeregt, d.h. der Szintillator emittiert nach der Anregung beim Übergang in den Grundzustand Licht im sichtbaren oder nahen UV-Bereich. Dieser Prozess findet viele Male statt und ist proportional zur Weglänge des γ -Quants im Szintillatormaterial. Es können auch andere Prozesse wie der Comptoneffekt oder die Paarbildung stattfinden, wobei die dabei freigesetzten Elektronen dann wiederum Szintillationslicht aussenden. In der Summe entsteht eine makroskopisch nachweisbare Lichtmenge, die sich im Inneren des Szintillators ausbreitet und über einen *Lichtleiter* zu einem Photomultiplier geleitet wird. Die Szintillatoroberfläche ist verspiegelt um gestreutes Licht im Inneren zu halten und lichtdicht verpackt um Störungen von externem Streulicht zu vermeiden. An den Lichtleiter ist ein *Photomultiplier* zum Nachweis des Szintillationslicht gekoppelt. Dieser besteht aus einer Vakuumröhre mit einem Eingangsfenster seitens des Szintillators, hinter dem sich eine Photokathode befindet. Das Szintillationslicht wird über den Photoeffekt einzelne Elektronen aus der Photokathode herauslösen. Die freigesetzten Photoelektronen werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und treffen auf weitere Elektroden (sogenannte Dynoden), aus deren Oberfläche jedes auftreffende Elektron mehrere Sekundärelektronen herausschlägt und sich somit eine Ladungslawine zur Anode ausbreitet. Das entstan-

ne elektrische Signal wird verstärkt und in einem *Pulshöhenanalysator* (Diskriminator) verarbeitet. So kann, wie im Versuch, der Durchgang von einzelnen γ -Quanten gezählt werden, in umfangreicheren Experimenten kann auch die Energie der γ -Quanten und deren genaue Ortsposition gemessen werden.

18.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

1. Messung des Absorptionskoeffizienten von Blei und Aluminium für Gammastrahlung.
2. Berechnung des Massenschwächungskoeffizienten für Pb und Al sowie Bestimmung der mittleren γ -Energie eines ^{60}Co -Präparates.
3. Vergleichen sie die von ihnen ermittelte mittlere Energie mit den Literaturwerten aus der Nuklidkarte.

Versuchsdurchführung und Fehlerabschätzung

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 18.5 gezeigt.

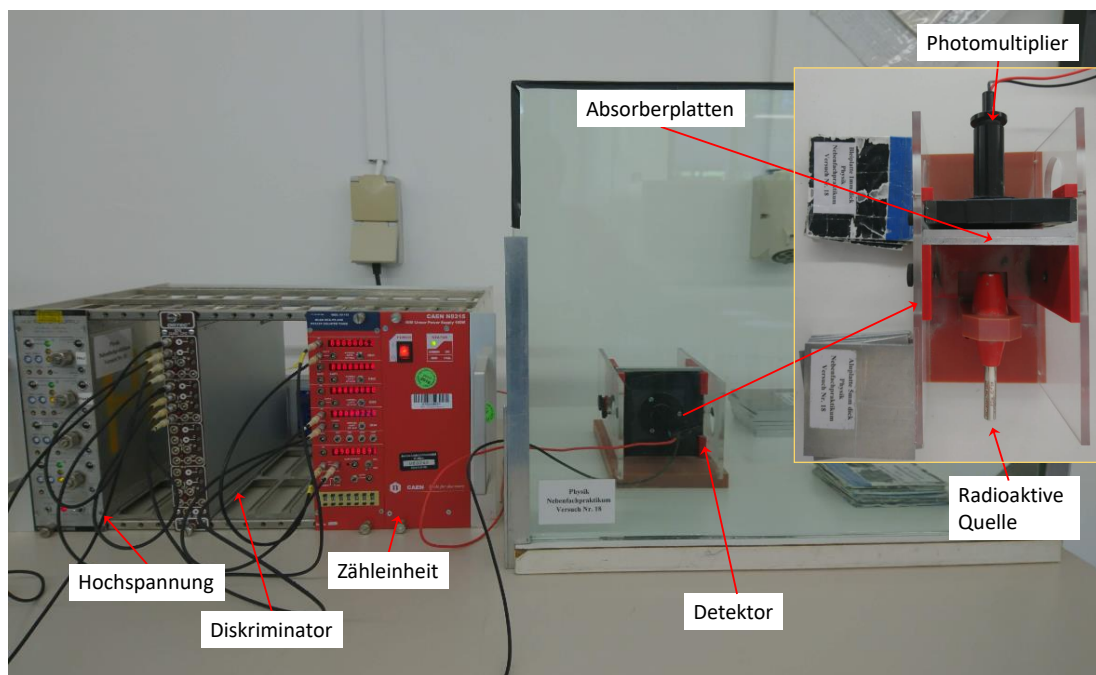


Abbildung 18.5: Ansicht des Versuchsaufbaus.

Die Apparatur ist bereits komplett aufgebaut und verkabelt und wird von dem Betreuer für Sie in Betrieb genommen. Halten Sie sich während der Messung hinter der

abschirmenden Glasplatte auf und berühren Sie die Detektorhalterung nur um die Absorberplatten vorsichtig einzuschieben ohne den Photomultiplier oder die radioaktive Quelle zu berühren.

Bestimmung des sog. Nulleffekts:

Unter dem Nulleffekt, der über eine Messzeit von mindestens 15 Minuten bestimmt werden soll, versteht man die Anzahl von Zählimpulsen, die vom Photomultiplier bei angelegter Betriebsspannung auch in Abwesenheit einer radioaktiven Quelle gezählt wird.

Kosmische Strahlung, Untergrundradioaktivität und elektronisches Rauschen sind dafür verantwortlich. Dieser Betrag ist bei allen weiteren Messungen abzuziehen. Beachten sie die durch die unterschiedlichen Messdauern notwendig Normierung der Untergrundrate.

Die Gammaquelle:

Als Gammaquelle wird ein ^{60}Co -Präparat verwendet. ^{60}Co zerfällt durch β^- -Zerfall in ein angeregtes ^{60}Ni , das sich die Emission zweier koinzidenter γ -Quanten vergleichbarer Energie in den Grundzustand übergeht.

Messung des Absorptionskoeffizienten für Blei und Aluminium:

Bei unverändertem Abstand Zählrohr - Präparat werden in zwei Versuchsreihen von jeweils 10 Einzelmessungen immer mehr Absorberplatten zwischen Quelle und Detektor gebracht. In einer Messzeit von jeweils **5 Minuten** wird die Zahl (Intensität) der nicht absorbierten γ -Quanten I bestimmt.

Tipp: Noch vor dem Kolloquium beginne man mit Hilfe des Betreuers die Nullmessung. Nach der Messung mit einer Platte führe man zunächst die Messung mit allen Platten durch, so ergibt sich bereits der Wertebereich für das aufzutragende Diagramm.

Trägt man nun nach Abzug des Nulleffektes den natürlichen Logarithmus der Zählrate I ($\ln I$) gegen die Absorberdicke x in Millimeterpapier ein, so muß sich eine lineare Abhängigkeit ergeben. μ ist gleich der Steigung S der Geraden. (Man beachte die Hinweise im Abschnitt über grafische Darstellungen.)

Zur Berechnung des Massenschwächungskoeffizienten benötigt man die Dichten der betreffenden Substanzen:

$\rho(\text{Al}) = 2,7 \text{ g/cm}^3$; $\rho(\text{Pb}) = 11,35 \text{ g/cm}^3$.

Fehlerbetrachtung

Die Zählrate I bei radioaktiven Zerfallsereignissen ist generell mit einem statistischen Fehler der Größe $\sqrt{I}$ behaftet. Man trage diesen Fehler in Form von Fehlerbalken an den beiden zur Bestimmung der Steigung gezeichneten Punkten (P_1 und P_2) ein. Die Ober- und Untergrenzen der Balken sind jeweils durch $\ln(I \pm \sqrt{I})$ gegeben.

Um den Fehler der Steigung (= Fehler des Absorptionskoeffizienten) zu bestimmen, setze man in Formel G6 (Graphische Darstellungen) für $2 \cdot \Delta y$ die Hälfte der Summe der beiden Fehlerbalken ein.

Den Fehler der mittleren γ -Energie bestimme man aus dem Fehler für μ indem man die

Energien für $\mu \pm \Delta_\mu$ aus dem Diagramm ermittelt.

Literaturhinweise

- K. Kleinknecht, *Detektoren für Teilchenstrahlung*, Teubner Studienbücher Physik 2005, ISBN-13: 978-3-8351-0058-9

19. Radioaktiver Zerfall

Das muss man wissen

- *Nuklidkarte - Radioaktivität - α -, β -, γ -Strahlung*
- *Zerfallsgesetz - Halbwertszeit - Lebensdauer*
- *Eigenschaften von α -Teilchen: Energie - Absorption in Materie - Reichweite*
- *Nachweis von α -Teilchen : Ionisationskammer*

Anwendungen:

- Altersbestimmungsmethoden
 ^{14}C - Methode
- Nachweis von radioaktiver Strahlung
- Biologische Wirksamkeit radioaktiver Strahlung
- Unterschiede in der biologischen Wirksamkeit radioaktiver Strahlung
- Schäden durch radioaktive Strahlung:
 - Krebs
 - Genom
 - Veränderung
 - ...
- Nuklearmedizin
- Markierungstechniken
- natürliche Radioaktivität

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Erläutern Sie den Aufbau von Atom und Kern!

Was sind Protonen, Neutronen, Elektronen und Neutrinos?

Wie sind die Massenverhältnisse dieser Elementarteilchen?

Was bezeichnen A , Z und N ?

Was sind Isotope?

Wie groß sind Atomkern und -hülle?

Was sind instabile Kerne?

Welche Zerfallsarten gibt es, was passiert dabei?

Was zeigt die Nuklidkarte?

Was bedeutet „monoenergetisch“? Und warum entsteht beim β -Zerfall ein $\bar{\nu}$?

Wie sind die Massenverhältnisse der Elementarteilchen?

Was ist der Massendefekt, was die Ruhemasse (z.B. vom e^-)?

Woher kommt die Energie bei den Kernzerfällen?

Und in welcher Form wird diese Energie frei?

Was sind die natürlichen Zerfallsreihen? Und wie viele gibt es?

Erläutern Sie das Zerfallsgesetz anschaulich! Und nennen Sie ähnliche Gesetze
z.B. aus der Biologie!

Was sind Zerfallskonstante, Halbwertszeit und mittlere Lebensdauer?

Wandeln Sie die integrale Form des Zerfallsgesetzes in die differentielle Form um!

Warum benutzen wir eine logarithmische Skala?

Womit befasst sich die Dosimetrie und was sind ihre Basisgrößen?

19.1 Physikalische Grundlagen

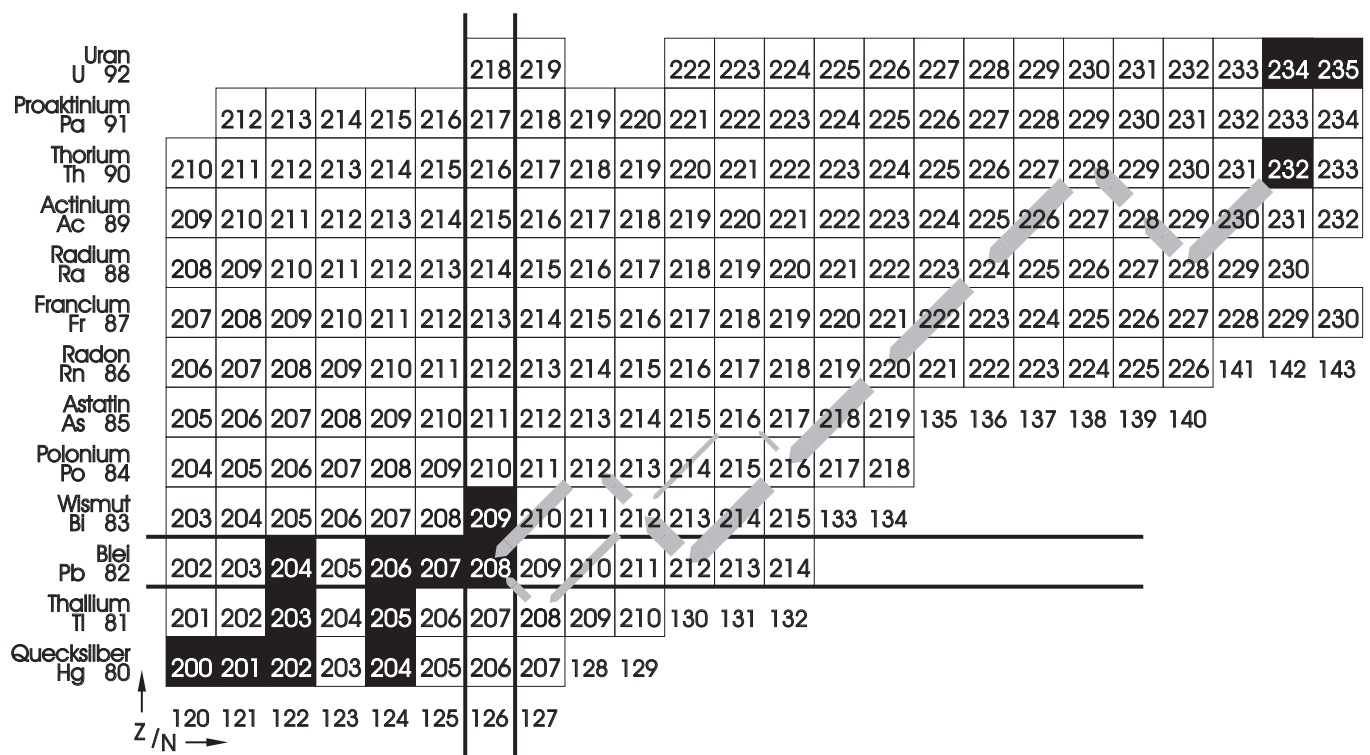


Abbildung 1. Ausschnitt aus der Nuklidkarte. Die grauen Pfeile markieren die Thorium-Zerfallsreihe. α -Zerfall: Pfeil runter nach links; β -Zerfall: Pfeil hoch nach links; Die Dicke des Pfeils soll die Wahrscheinlichkeit andeuten

19.1.1 Nuklidkarte

In der Nuklidkarte sind die Daten aller lebensfähigen Atomkerne (**Nuklide**) eingetragen (Das Bild zeigt nur einen kleinen Ausschnitt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit ist hier nur die Massenzahl eingezeichnet). Die meisten Kerne sind **instabil**, sie zerfallen nach der **Lebensdauer** von ca. 10^{-10} s bis weit über 10^{10} Jahre. Es gibt ca. 300 **stabile Kerne** (stabile Kerne sind schwarz hinterlegt). Außer den stabilen Kernen gibt es auf der Erde nur noch wenige instabile, diese werden von den sehr langlebigen laufend nachgeliefert (**Zerfallsketten**). In den Labors konnten bisher ca. 3000 weitere Nuklide erzeugt und vermessen werden.

In jeder Reihe der Nuklidkarte stehen die Nuklide eines **Elements** (gleiche **Ordnungszahl** Z = Anzahl der Protonen). Diese Kerne sind die **Isotope**, da sie auch die gleiche Elektronenhülle besitzen, sich daher chemisch gleich verhalten und im **Periodensystem** den gleichen Platz einnehmen. Nur bei den ganz leichten Kernen entstehen auf Grund der Massendifferenzen Unterschiede. Einige Elemente haben mehrere stabile Isotope (Blei) andere haben kein stabiles Isotop (Radon).

Die Kerne in einer Spalte haben die gleiche Neutronenzahl N , man nennt diese Nuklide **Isotone**. Kerne gleicher **Nukleonenzahl** $A=Z+N$ befinden sich auf den Diagonalen von linksoben nach rechtsunten. Kerne auf diesen **Isobaren** haben etwa die gleiche Masse. **Isomere** sind angeregte Kerne mit gleichem Z und N , sie haben daher fast die gleiche Masse. Sie sind nur für wenige Sekunden stabil (**metastabil**) und regen sich durch Aussenden eines Photons ab.

Markiert sind noch die Kerne mit **magischen Zahlen** (z. B. wie hier: $Z=82$ und $N=126$). Solche Kerne sind besonders stabil, wie auch der **doppeltmagische** Kern $^{208}_{82}\text{Pb}$.

Die Zerfallsreihen

Einige in der Natur vorkommenden radioaktiven Kerne bilden den Anfang einer sogenannten **Zerfallsreihe**. Man versteht darunter, dass die jeweiligen Zerfallsprodukte wiederum instabil und damit **aktiv** sind. Der Zerfall wird sich dann solange fortsetzen, bis die Reihe bei einem stabilen **Nuklid** endet.

Die natürlichen Zerfallsreihen beginnen bei den Kernen $^{232}_{90}\text{Th}$, $^{235}_{92}\text{U}$ und $^{238}_{92}\text{U}$. Endprodukte sind jeweils Isotope des Blei. In den frühen Jahren der Erdgeschichte gab es noch eine vierte Zerfallsreihe, die bei $^{241}_{94}\text{Pu}$ startete und bei $^{209}_{83}\text{Bi}$ endete. Diese tritt aber in der Natur nicht mehr auf, da das langlebigste Isotop der Reihe eine mit dem Alter der Erde verglichen kurze Halbwertszeit besitzt.

Die **Thoriumreihe** ist in Abb.1 vollständig dargestellt. Das in der Thoriumreihe auftretende **Isotop** des Edelgases Radon ($^{220}_{86}\text{Rn}$) ist gasförmig. Daher die historische Bezeichnung Thorium-Emanation. Es kann leicht abgetrennt werden und eignet sich gut zur Bestimmung der Halbwertszeit. Die Folgeprodukte sind α - und β -Strahler mit anderen Halbwertszeiten, die innerhalb der Beobachtungszeit für den Thoriumzerfall keinen Einfluss auf die Messung haben.

Das Zerfallsgesetz

Das Zerfallsgesetz gibt an, nach welcher zeitlichen Gesetzmäßigkeit eine radioaktive Probe ihre **Aktivität** verliert. Unter der Aktivität einer radioaktiven Probe versteht man die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde.

Der radioaktive Zerfall ist ein statistischer Prozess, d.h. wir können nicht genau sagen, wann ein bestimmter Kern zerfällt, sondern nur die Wahrscheinlichkeit dafür angeben, dass in der nächsten Sekunde ein Zerfall erfolgt. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit mit λ und besitzt die Probe zu einem bestimmten Zeitpunkt N Atomkerne, dann werden in einer Sekunde λN Kerne zerfallen. Die Aktivität A ist dann gleich der sekundlichen Abnahme der vorhandenen Kerne:

$$* \quad A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

λ nennt man die **Zerfallskonstante**. Die Integration dieser Gleichung liefert das **Zerfallsgesetz**:

$$* \quad N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (19.1)$$

Die Anzahl der Kerne und damit auch die Aktivität nehmen exponentiell ab. Die reziproke Zerfallskonstante $1/\lambda = \tau$ gibt die **mittlere Lebensdauer** der betrachteten Atomkerne an.

Anschaulicher als diese Größe ist die Zeit, die vergeht, bis die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne auf die Hälfte abgenommen hat (oder mit anderen Worten, bis genau die Hälfte der Kerne zerfallen ist). Diese **Halbwertszeit** $T_{1/2}$ hängt natürlich mit der mittleren Lebensdauer τ zusammen. Setzt man in Gl (19.1) $N = N_0/2$ und $t = T_{1/2}$, so erhält man

$$* \quad \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Daraus ergibt sich

$$* \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \quad (\ln 2 = 0,693) \quad (19.2)$$

Die Halbwertszeit kann beispielsweise aus dem zeitlichen Abklingen des Sättigungsstromes ermittelt werden, der durch die Strahlung in einer Ionisationskammer erzeugt wird.

19.2 Apparative Grundlagen

Die Ionisationskammer

Eine Ionisationskammer besteht im Prinzip aus einem (Platten- oder Zylinder-) Kondensator, zwischen dessen Elektroden sich ein Detektorgas befindet. In unserem Fall handelt es sich um Luft unter Atmosphärendruck. An die Elektroden wird eine Gleichspannung gelegt und ein hochempfindlicher Strommesser in den Kreis geschaltet.

Der α -Strahler wird in das aktive Zählvolumen der Ionisationskammer gepumpt. Die emittierten α -Teilchen ionisieren durch Stoß die Gasmoleküle in der Kammer. Infolge der angelegten Spannung wandern die entstandenen Ladungen (negative Elektronen und positive Ionen) je nach Polarität zur entsprechenden Elektrode. Der von den beweglichen Ladungen erzeugte Strom kann mit Hilfe eines Verstärkers gemessen werden.

Jedes α -Teilchen erzeugt auf Grund seiner hohen kinetischen Energie von einigen MeV etwa 10^5 Ion/Elektron-Paare durch Ionisation. Dies genügt nicht, um mit der einfachen Ionisationskammer des Praktikums ein einzelnes Teilchen nachzuweisen. Damit ist nur der Nachweis einer kontinuierlichen Strahlungsintensität möglich. Zum Einzelnachweis von radioaktiven Teilchen muss ein Zählrohr verwendet werden (sh. Versuch 18).

19.3 Versuchsanleitung

Aufgabe

Es ist die Halbwertszeit von Thoriumemanation = $^{220}_{86}\text{Rn}$ zu messen.

Versuchsdurchführung

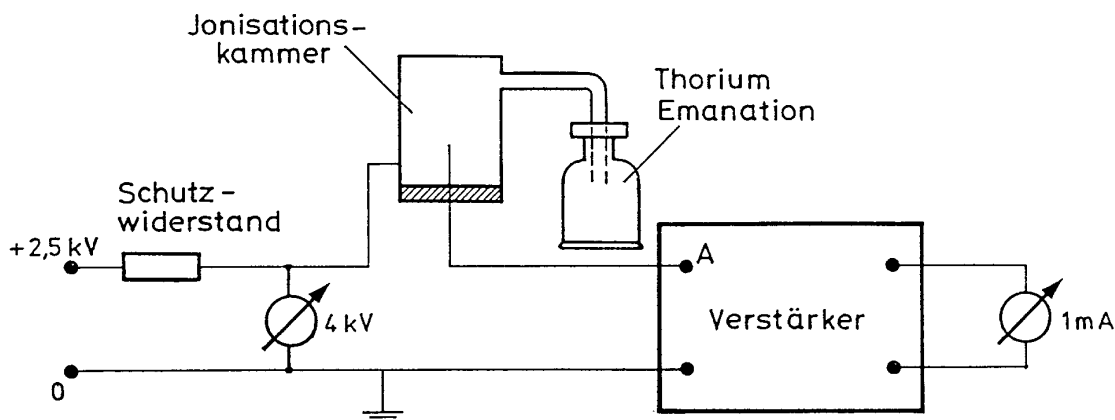


Abbildung 2. Versuchsaufbau

Zunächst wird die Schaltung aufgebaut, wie sie in Abb.2 gezeichnet ist. Durch wiederholtes Pumpen an dem Einweg-Blasebalg wird so viel Emanation aus dem Plexiglasbehälter in die Ionisationskammer gebracht, bis der Zeiger des Instrumentes über Vollausschlag steht. Nun wird die zeitliche Abnahme des Stromes gemessen, indem alle 10 Sekunden der Ausschlag am Instrument abgelesen wird. Beim Durchgang des Zeigers durch Vollausschlag ist $t = 0$ s. Die Messreihe soll über eine Zeitspanne von 5 Minuten aufgenommen und insgesamt 5 mal wiederholt werden.

Auswertung und Fehlerabschätzung

In unserem Versuchsaufbau wird nicht die Zählrate N sondern der Strom I (in Skalenteilen) in der Ionisationskammer gemessen. Da beide Größen zueinander proportional sind, kann auch aus der zeitlichen Stromabnahme die Halbwertszeit bestimmt werden. Die Werte der 5 Einzelmessungen werden dann zuerst gemittelt. Für die quantitative Auswertung formen wir nun Gleichung (19.1) um, indem wir die Zählrate N durch den Strom I ersetzen und beide Seiten logarithmieren (siehe Gleichung (G.4) im Abschnitt über grafische Darstellungen):

$$\ln(I) = \ln(I_0) - \lambda t$$

In dieser Form erhalten wir eine Gerade, wenn wir den $\ln(I)$ gegen die Zeit t auftragen. Die (negative) Steigung der Geraden ist gleich der Zeitkonstanten λ (Gleichung (G.5)), die Halbwertszeit erhält man nach Gleichung (19.2).

Den Fehler bestimme man entsprechend Gleichung (G.6).

Bitte beachten: Das Arbeiten mit radioaktiven Substanzen erfordert **große Sorgfalt und Sauberkeit**. Die Nuklide, die in diesem Praktikum verwendet werden, besitzen eine so geringe Aktivität, dass biologische Schäden nicht zu befürchten sind. Es ist aber strengstens darauf zu achten, dass keine aktive Substanz mit den Fingern berührt wird! Während dem Experiment und auch generell am Experimentierplatz ist **das Essen, Trinken und Rauchen strengstens untersagt**. Nach Beendigung der Versuche und vor dem Verlassen des Praktikumsraumes sind **die Hände gründlichst zu waschen**. **Praktikumsteilnehmerinnen, bei denen eine Schwangerschaft vorliegt, dürfen an diesem Experiment nicht teilnehmen.**

20. Röntgenstrahlen

Das muss man wissen

- *Bohrsches Atommodell – Aufbau schwererer Atome – Schalenmodell*
- *Elektromagnetische Strahlung: Energie, Frequenz, Wellenlänge*
- *Entstehung von Röntgenstrahlung – charakteristische Strahlung – Bremsstrahlung*
- *Streuung – Interferenz – Braggsche Bedingung*
- *Röntgenröhre – Geiger-Müller-Zähler*
- *Absorption von Röntgenstrahlen (siehe Absorption von γ -Strahlen)*

Hinweis: Dieser Versuch hat enge Verbindungen zu Versuch 15 und 16.

Anwendungen:

- biologische Wirkung von Röntgenstrahlung
- Röntgenstrukturanalyse zur Bestimmung von Materialeigenschaften
- Röntgenastronomie
- Bildgebende Diagnoseverfahren
- Röntgenfluoreszenzspektroskopie
- Kristallographie
- Laue-Diagramme

Mit folgenden Fragen und Aufgaben müssen Sie rechnen:

Wie groß sind Wellenlänge, Frequenz, Energie von Röntgen-Strahlen (ca.) ?

Nennen Sie weitere elektromagnetische Wellen (Energie, Wellenlänge) !

Wie hängen Energie, Frequenz und Wellenlänge zusammen ?

Was schwingt bei einer elektromagnetischen Welle ?

Was beschreibt das Huygensches Prinzip ?

Was ist ein Spektrum ?

Was sind Phase, Gangunterschied und Interferenz ?

Erläutern Sie die Beugung am Gitter !

Was ist die Braggsche Bedingung ?

Größe von Kern und Hülle. Beschreiben Sie den Aufbau von Atomkern und -hülle !

Woher kommen die charakteristischen Röntgenstrahlen ?

Woher kommen Röntgen-Bremsstrahlen ?

Wieso gibt es ein $\lambda_{\min}$?

Erklären Sie die Funktionsweise einer Röntgenröhre !

20.1 Physikalische Grundlagen

Röntgenstrahlen

Röntgenstrahlen sind kurzwellige elektromagnetische Strahlen, deren Wellenlängen mit atomaren Dimensionen vergleichbar sind. Nach den Vorstellungen der modernen Physik kann man den Röntgenstrahlen einen Strom von Röntgenquanten zuordnen, deren Energie der Frequenz der Strahlung proportional ist.

*	$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$	(20.1)
---	---------------------------------	--------

h = Plancksches Wirkungsquantum = $6.62 \cdot 10^{-34}$ Js

c = Vakuumlichtgeschwindigkeit = $2.998 \cdot 10^8$ m/s

Von Röntgenstrahlen spricht man ab einer Energie von ca. 10 keV. Dem entspricht eine Wellenlänge von ca. 0.1 nm.

Röntgenstrahlen entstehen beim Auftreffen von energiereichen geladenen Teilchen (Elektronen, Protonen usw.) auf Materie mit hoher Ordnungszahl. Je nach der Art des zugrundeliegenden Elementarprozesses unterscheidet man zwei verschiedene Erzeugungsmechanismen, **Bremsstrahlung** und **charakteristische Strahlung**. Man erkennt das auch an der spektralen Verteilung, d.h. Intensität (Häufigkeit) der Strahlung in Abhängigkeit von der Wellenlänge : Einem kontinuierlichen Anteil mit kurzwelliger Grenze sind scharfe, charakteristische Linien überlagert.

Bremsstrahlung

Nach den Gesetzen der Elektrodynamik strahlen beschleunigte (oder verzögerte, abgebremste) elektrische Ladungen elektromagnetische Strahlung ab. (Man denke z.B. an die im Takt einer Wechselspannung schwingenden Elektronen in einer Sendeantenne.) Treffen Elektronen auf Materie, dann gelangen sie in die sehr starken elektrischen Felder der Atomkerne. Je nach dem Grad der Annäherung zwischen Elektron und Kern wird dieses mehr oder weniger stark abgelenkt d.h. abgebremst bzw. negativ beschleunigt. Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, bedeutet eine Ablenkung eine Geschwindigkeitsänderung d.h. eine Verzögerung. Das Elektron verliert dabei einen Teil seiner Energie in Form eines Röntgenquants. Dieser Anteil kann beliebig sein, was zu einem kontinuierlichem Spektrum mit einer kurzwelligen Grenze $\lambda_{\min}$ führt (Abb. 20.1).

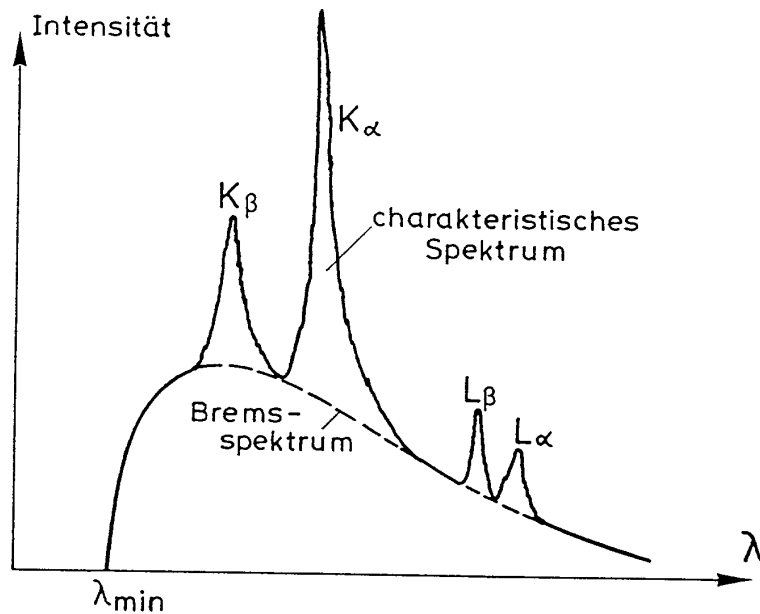


Abbildung 20.1: Das Röntgenspektrum.

Diese kleinste Wellenlänge (d.h. größte Photonenenergie) entspricht dem Fall, dass das Elektron seine gesamte Energie in einem einzigen Prozess abgibt. Werden die Elektronen mit der Spannung U beschleunigt, so ist ihre Energie gleich eU . Für $\lambda_{\min}$ ergibt sich somit nach Gleichung (20.1) die Beziehung

*	$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} \quad (20.2)$
---	--

Werden die Konstanten mit ihren Zahlenwerten eingesetzt, so erhält man

$$\lambda_{\min} = \frac{1,234}{U[\text{kV}]} \text{ nm},$$

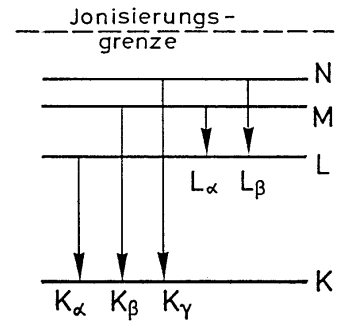
wenn U in kV eingesetzt wird.

Die kurzwellige Grenze des Bremsspektrums ist also nur von der Betriebsspannung U der Röntgenröhre und nicht vom Anodenmaterial abhängig.

Das charakteristische Spektrum

Da jedes Element bestimmte und für seine Ordnungszahl Z charakteristische Energieniveaus besitzt, hat die entstehende Strahlung ganz bestimmte Energien (bzw. Wellenlängen) und ist charakteristisch für das Anodenmaterial. Für einen bestimmten Übergang z.B. $L \rightarrow K$ (K_{α} -Linie) ist λ umgekehrt proportional zu Z^2 :

Die charakteristische Röntgenstrahlung entsteht, wenn durch ein auftreffendes schnelles Elektron aus einer der innersten Schalen (K- oder L-Schale) des Anodenmaterials (z.B. Kupfer oder Wolfram), das die Ordnungszahl Z haben soll, ein Elektron herausgeschlagen wird. Die entstandene Lücke wird sofort durch Elektronen äußerer Schalen aufgefüllt. Die dabei freiwerdende Energie wird in Form eines Röntgenquants $h\nu$ ausgestrahlt.



$$\lambda \propto \frac{1}{Z^2} \quad (\text{Moseleysches Gesetz})$$

Während also die kurzwellige Grenze der Bremsstrahlung nur von U abhängt, hängt die charakteristische Strahlung nur von Z ab.

Beugung von Röntgenstrahlen am Einkristall

Unter einem Kristall versteht man einen Festkörper, der einen gleichmäßig periodischen Aufbau aus identischen Bausteinen (Atomen, Molekülen) besitzt.

Wird ein solcher Kristall von Röntgenstrahlen getroffen, dann werden die Gitterbausteine ihrerseits zu Strahlungsquellen (elastische Streuung mit unveränderter Wellenlänge). Aus den dabei zu beobachtenden Interferenzbildern kann man bei bekannter Wellenlänge der verwendeten Strahlung auf den Aufbau des Kristalls schließen.

Dies ist im allgemeinen ein dreidimensionales Problem. Für eine spezielle Situation lässt sich jedoch eine Bedingung für die Richtung des Interferenzmaximums angeben.

Braggsche Bedingung

Wir betrachten zwei bestimmte Netzebenen, also Ebenen, die regelmäßig mit Gitterpunkten besetzt sind und die den Abstand d von einander haben, siehe Abb. 20.2).

Auf sie treffe unter verschiedenen Winkeln ein schmales Bündel monoenergetischer Röntgenstrahlen. Aus der Zeichnung erkennt man unmittelbar, dass nur für die Richtung ein Interferenzmaximum beobachtet werden kann, für die der Gangunterschied zwischen zwei interferierenden, an benachbarten Netzebenen gestreuten Wellenzügen gleich einem ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge λ ist, d.h.

$$* \quad 2d \sin \alpha = n\lambda \quad (= \text{Strecke } \overline{ABC}) \quad (20.3)$$

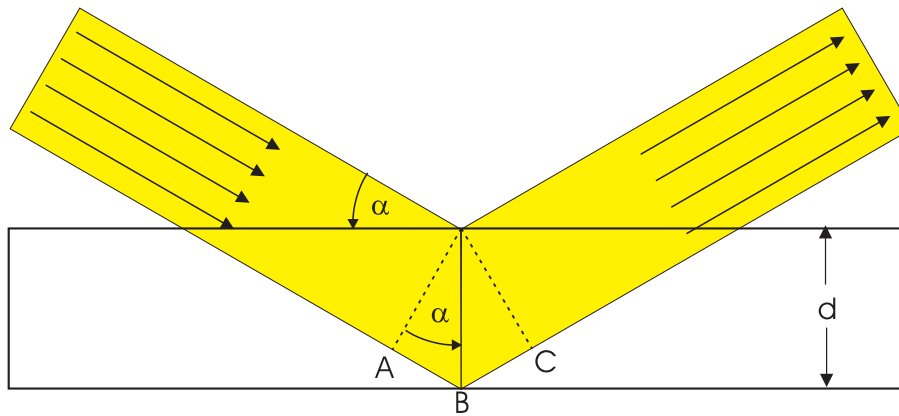


Abbildung 20.2: Bragg-Streuung am Kristall.

Aus Gleichung (20.3) kann bei bekannter Wellenlänge der Netzebenenabstand d , bei bekanntem Netzebenenabstand die Wellenlänge λ der Strahlung bestimmt werden (n nennt man die Ordnung).

20.2 Apparative Grundlagen

Die Röntgenröhre

In einem evakuierten Glaskolben werden mit Hilfe einer Glühkathode freie Elektronen erzeugt, die durch die zwischen Anode und Kathode angelegte Hochspannung zur Anode hin beschleunigt werden, siehe Abb. 20.3. Beim Auftreffen entstehen Röntgenstrahlen, die unter flachem Winkel zur Anodenoberfläche abgestrahlt werden. Nur etwa 1% der von den Elektronen an die Anode abgegebene Energie wird in Röntgenstrahlen umgewandelt. Der Rest wird in Wärme umgesetzt.

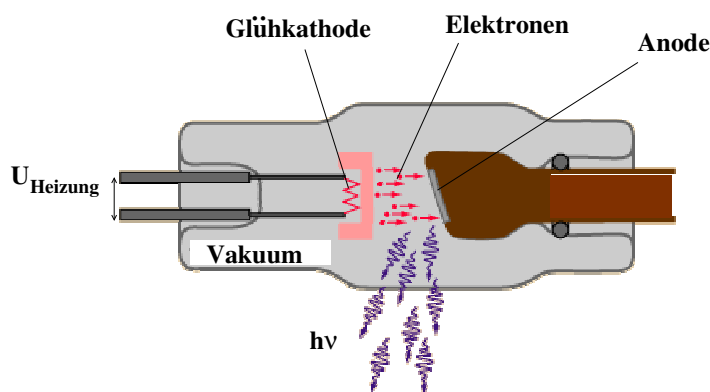


Abbildung 20.3: Schematischer Aufbau der Röntgenröhre.

Die Messapparatur

Ein durch zwei enge Spalte K_1 und K_2 ausgeblendeter Röntgenstrahl (durch einen entsprechenden Filter F könnte er monochromatisch gemacht werden; **warum wird dies in diesem Versuch nicht gemacht ?**) fällt auf die Oberfläche eines schwenkbaren Kristalls, siehe Abb. 20.4.

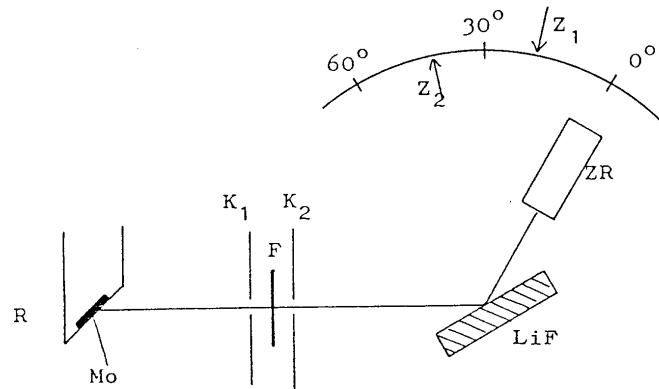


Abbildung 20.4: Die Messapparatur.

Mit einem Zählrohr wird unter dem doppelten Winkel nach reflektierten Röntgenquanten gesucht. Die Schwenkmechanismen für Kristall und Zählrohr sind mechanisch so gekoppelt, dass diese Bedingung automatisch erfüllt ist. Als Kristalle werden entweder ein LiF-Kristall (Netzebenenabstand $d=201,4$ pm) oder ein NaCl-Kristall (Netzebenenabstand $d=282,5$ pm) benutzt. Auf diese Weise können die Winkel festgestellt werden, unter denen Interferenzmaxima auftreten. Die im Versuch verwendete Apparatur ist in Abb. 20.5 gezeigt.

20.3 Versuchsanleitung

Aufgaben

1. Aus dem Spektrum ermittle man die Wellenlängen der K_α - und der K_β -Linie der Molybdänanode.
2. Aus der kurzwelligen Grenze des Spektrums ist das **Plancksche Wirkungsquantum h** zu bestimmen.

Versuchsdurchführung und Auswertung

Für den Betrieb der Röntgenapparatur beachte man die Hinweise am Arbeitsplatz. Für die gestellten Aufgaben muss das **Spektrum** aufgenommen werden. Dazu wird über

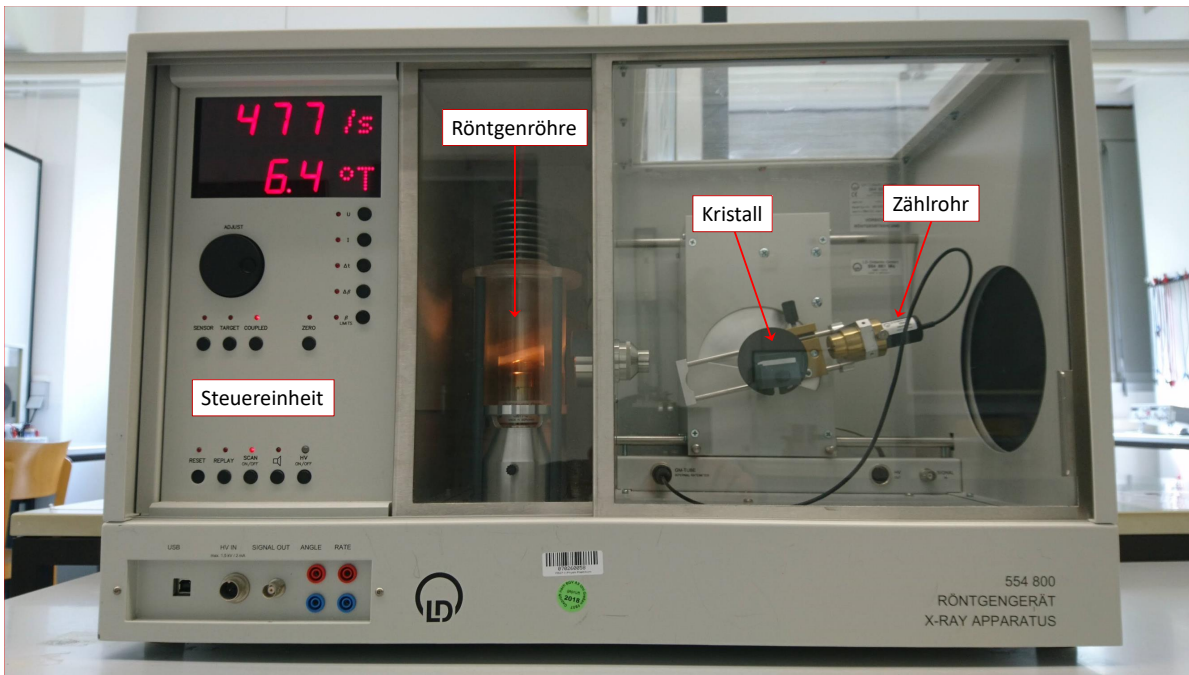


Abbildung 20.5: Schematischer Aufbau der Röntgenröhre.

einen Winkelbereich für α zwischen 2° und 30° in Halbgradschritten (im Bereich der Linien in Viertelgradschritten) die Intensität der gebeugten Strahlung aufgenommen (Messzeit pro Einstellung 10s). Die gemessene Intensität bzw. Zählrate ist in einem Diagramm gegen den eingestellten Winkel aufzutragen. Dabei ist darauf zu achten, daß der obere Zeiger stets den doppelten Wert des unteren anzeigt. Zwischen 2° und 30° liegen für den NaCl-Kristall die Beugungsmaxima der 1., 2. und 3. Ordnung, für den LiF-Kristall diejenigen der 1. und 2. Ordnung.

Zu 1): Wellenlängen der K_α - und K_β -Linie

Aus den erkennbaren Linienmaxima ermittelt man mittels Gleichung (20.3) die gesuchten Wellenlängen. Als Ergebnis gebe man das Mittel, als Fehler die grösste Abweichung vom Einzelwert an.

Zu 2) Plancksches Wirkungsquantum

Aus der kurzwelligen Grenzwellenlänge kann nach Gleichung (20.2) die gesuchte Größe errechnet werden. Da die Zählrate nicht tatsächlich auf Null zurück geht (gegen Null kommt die gesamte ungebeugte Intensität in das Zählrohr), wird aus dem Abfall auf λ_{min} extrapoliert. Für die Vakuumlichtgeschwindigkeit nehme man $c = 2.9979 \cdot 10^8$ m/s an und für die Elementarladung $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C. Angaben zur Beschleunigungsspannung an der Röhre liegen beim Versuch aus. Man versuche, den Fehler von h aus der Genauigkeit der λ_{min} -Bestimmung abzuschätzen.

Index

- α -Zerfall 18.2
- β -Zerfall 18.3
- γ -Quant 18.3

- Abbildung 14.1
- Ablenkkondensatoren 13.4
- absoluter Fehler M.10
- Absorption 18.4
- Absorptionskoeffizient 18.5
- AC 13.6
- ADC 10.2
- adiabatisch 7.2
- Akkommodation 14.4
- aktiv 19.3
- Aktivität 19.3
- Aliasing 13.7
- allgemeine Gasgleichung 8.2
- Alternate-Mode 13.6
- Analog-Digital-Converter 10.2
- analoge Messgröße 10.2
- Anode 13.4
- Antineutrino 18.3
- Archimedisches Prinzip 1.3
- Assoziationsgrad 6.4
- Auflösung 16.4
- Auflösungsvermögen 14.5; 16.5
- Auftrieb 1.2
- Ausbreitungsgeschwindigkeit 5.2; 15.2

- Balmer-Serie 15.6
- bestimmtes Integral M.14
- Beugungsscheibchen 14.8
- Bindungsenergie 18.2
- Bindungskräfte 2.1
- Boyle-Mariotte 8.3
- Braunschen Röhre 13.4
- Brechkraft 14.4
- Brechungsindex 15.2
- Brechzahl 15.2
- Bremsstrahlung 20.2
- Brennweite 14.1
- Brennpunkt 14.1

- Charakteristik 10.2
- charakteristische Strahlung 20.2
- Chop-Mode 13.6
- Comptoneffekt 18.4
- Comptonstreuung 18.5
- cosinus M.10

- Dampfdruckkurve 8.6
- DC 13.6
- deutliche Sehweite 14.5
- Diamagnetismus 23.4
- Dichte 1.1
- Dielektizitätskonstante 13.4
- Differentialquotient M.12
- Differentialrechnung M.11
- Digitalzahl 10.2
- Dispersion 15.3
- doppeltmagisch 19.3
- Drehschieberpumpe 9.4
- Drehspulgalvanometer 11.2

- e-Funktion M.11
- Eigenfrequenz 3.3
- Einsatzspannung 18.7
- elastisch 2.3
- Elastizitätsmodul 2.3
- Elektronenhülle 15.4
- Elektronenlinse 13.4
- Element 19.2
- Elementarteilchen 18.2
- Elementarwelle 16.2

Empfindlichkeit einer Waage 1.6
Exponentialfunktion M.11

Fehlerfortpflanzungsgesetz F.9
Ferromagnetismus 23.4
Fixtemperaturen 8.3
Flächenträgheitsmoment 2.4
Fluoreszenzschirm 13.4
Freiheitsgrade 7.3

Gangunterschied 16.3
Gasthermometer 8.3
Gay-Lussac 8.2
Glühkathode 13.4
Gleichgewichtsabstand 2.2
Gleichspannung 12.1
Gravitationsgesetz 4.1
Grundgleichung der Mechanik 3.3

Halbwertszeit 19.4
harmonische Schwingung 3.2
harmonische Welle 5.1
homogenes Magnetfeld 23.1
Hookesches Gesetz 2.2
hydrostatischer Druck 1.2
Hystereseschleife 23.5

ideales Gas 8.1
Induktion 23.2
Innenwiderstand 10.3
innere Energie 7.2
instabil 19.2
Integralrechnung M.13
Integrationsverfahren 10.2
Interferenzmuster 16.2
ionisieren 15.5
Isobare 19.3
Isomer 19.3
isothermen 7.2
Isoton 19.3
Isotop 19.2; 19.3

Joulesche Wärme 10.2

Kehrwert M.3
Kern 15.4
Kernkräfte 18.2
Kirchhoffsche Maschengleichung 12.2
Koerzitivkraft 23.5
Kosmische Strahlung 18.8
kritische Temperatur 6.3

Lawinenbildung 18.7
Lebensdauer 19.2
Leitwert 10.1
linear polarisiertes Licht 17.2
linkszirkulares Licht 17.3
Logarithmus M.11

magischen Zahlen 19.3
magnetische Feldstärke 23.1
Magnetisierung 23.2
Massendefekt 18.2
Massenschwächungskoeffizient 18.5
metastabil 19.3
Mittelwert F.8
mittlere Lebensdauer 19.4
mittlere Reichweite 18.3
molare Oberflächenspannung 6.4
molare Wärmekapazität 7.2
Multimeter 10.3

neutrale Faser 2.4
Neutrino 18.3
Neutronen 18.2
Newtonsches Axiom 3.3
Nukleonen 18.2
Nukleonenzahl 18.2; 19.3
Nuklid 19.2; 19.3
numerische Apertur 14.9

Oberflächenspannung 6.2
Objektiv 14.6
Ohmsche Gesetz 10.2
Okular 14.6
optisch aktiv 17.3
Ordnungszahl 18.2; 19.2
Orientierungspolarisation 13.3

Paarbildung 18.4
Parabel M.10
Paramagnetismus 23.4
partielle Ableitung M.12
Periodensystem 19.2
Permantmagnete 23.5
Permeabilität 23.3
Phasenverschiebung 12.2
Photoeffekt 18.4
Plancksche Wirkungsquantum 20.7
Plateaubereich 18.7
polarisiertes Licht 17.1
Positron 18.3
Potenzen M.6
Protonen 18.2
Prozentrechnung M.4

Quantenzahl 15.5
Quantisierungsregel 15.5
Quecksilberbarometer 8.6

Röntgenstrahlen 18.3
Rampenverfahren 10.2
Raumladung 18.7
rechtszirkular 17.3
reelles Bild 14.4
Reflexion 5.3
relative Permeabilität 23.2
relativer Fehler F.10
Remanenz 23.5
Resonanzfrequenz 12.5
Runden M.1

Schallgeschwindigkeit 5.5
Schweredruck 1.2
Schwingungsbäuche 5.5
Schwingungsdauer 3.3
Schwingungsknoten 5.5
sinus M.10
sinusförmiger Wechselstrom 12.2
Spannung 10.2
Spektrallinien 15.4
Spektrum 20.7

spezifische Oberflächenenergie 6.2
 spezifische Wärmekapazität 7.2
 spezifischer Widerstand 10.2
 stabile Kerne 19.2
 Standardabweichung F.8
 statistischer Fehler F.6
 Stefan-Boltzmann 9.2
 Strom-Spannungs-Kennlinie 10.2
 Stromstärke 10.2
 Suszeptibilität 23.3
 sweep 13.6
 Systematischer Fehler F.6

Temperaturkoeffizient 11.2
Termschema 15.6
Thermoelement 9.3
Thermometer 8.3
Thermospannung 9.4
Thoriumreihe 19.3
TK 11.2
Torsionsmodul 3.1
Trägheitsmoment 3.4
Trigger 13.6

unpolarisiert 17.1
Untergrundradioaktivität 18.8

van-der-Waals-Kräfte 6.1
Vektoren M.6
Verdampfungswärme 6.1
Verlustleistung 10.3
Verschiebungspolarisation 13.2
virtuelles Bild 14.4

Wärmeleitfähigkeit 9.3
Wechselspannung 12.1
Wechselspannungsquelle 12.1
Wehneltzylinder 13.4
Widerstand 10.1
Widerstandskennlinie 10.2

x-y-Darstellung 13.6

Zeitbasis 13.6

Zerfallsgesetz 19.4
Zerfallsketten 19.2
Zerfallskonstante 19.4
Zerfallsreihe 19.3
zirkular polarisiertes Licht 17.2
Zweikanal-Oszilloskop 13.6