

I. Mechanik

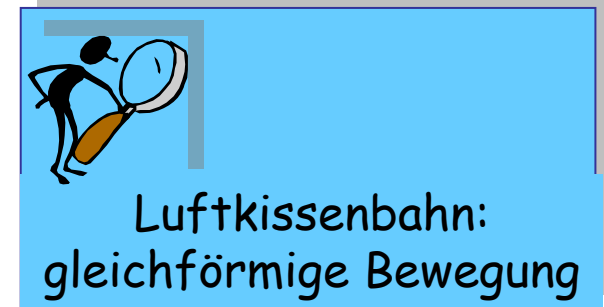
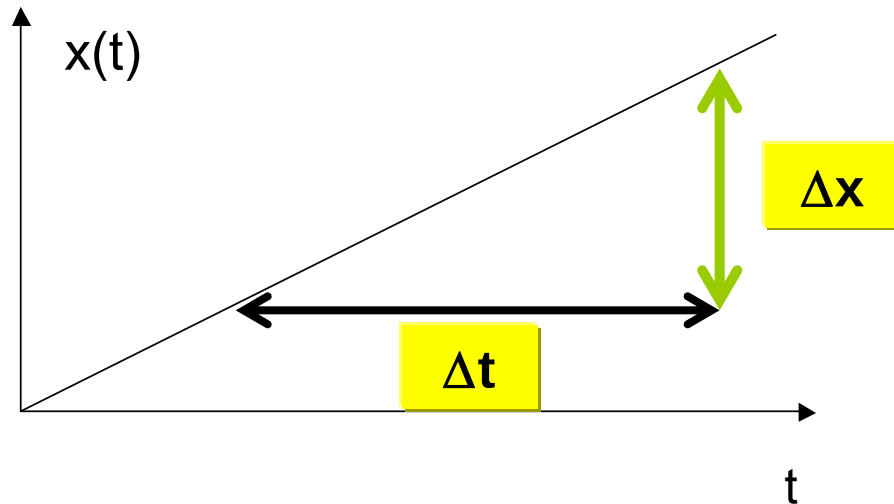
Die Lehre von den Bewegungen und den Kräften

I.1 Kinematik

Die Lehre von den Bewegungen

Mechanik I: Bewegung in einer Dimension

- Idealisierung: Massenpunkt (= Punktmasse)
punktförmiges Objekt mit Masse m
- Zunächst Betrachtung der Bewegung ohne Diskussion ihrer Ursache:
Kinematik
- Beschreibung der Bewegung des Massepunkts durch Weg-Zeit
- Funktion $x(t)$ in einer Dimension: Beispiel
im Experiment: Luftkissenbahn:
Ausschaltung der Reibung



in gleichgroßen Zeitintervallen werden gleichgroße Strecken zurückgelegt:
gleichförmige Bewegung; Weg-Zeit-Funktion ist eine Gerade

Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\text{Durchschnittsgeschwindigkeit} = \frac{\text{Gesamtstrecke}}{\text{Gesamtzeit}}$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- Wir verwenden das Symbol v (= velocity) für die Geschwindigkeit
Die Einheit der Geschwindigkeit ergibt sich aus den Basiseinheiten entsprechend:

$$[v] = [x] / [t] \Rightarrow \text{Meter/Sekunde}$$

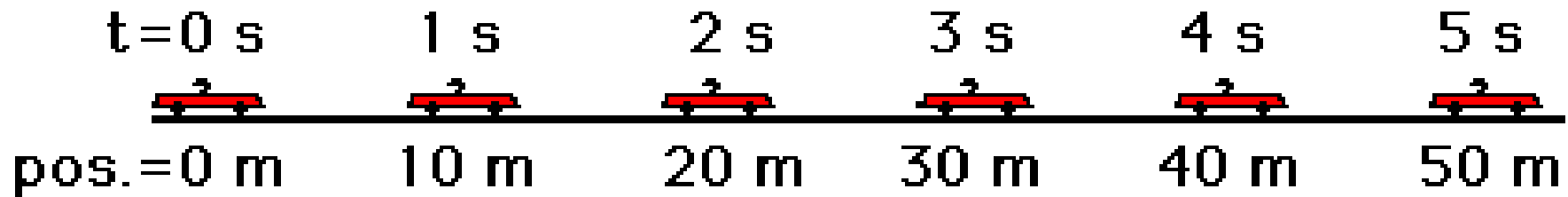
Umrechnung von Einheiten

Michael Schumacher fährt kurz vor Erreichen des Ziels mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 360 km/h.

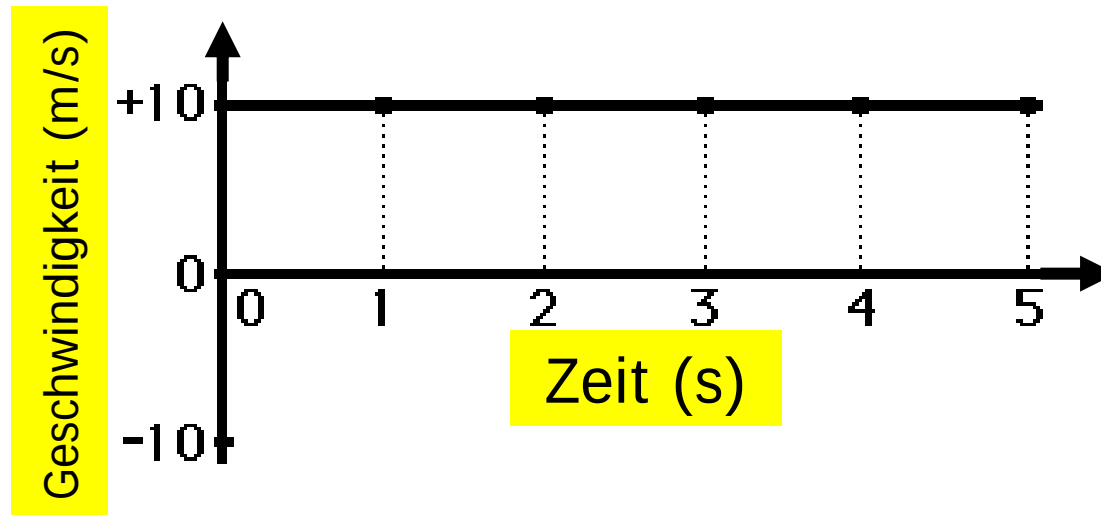
Wie groß ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in SI-Einheiten?

$$360 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 360 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = 360 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz für gleichförmige Bewegung



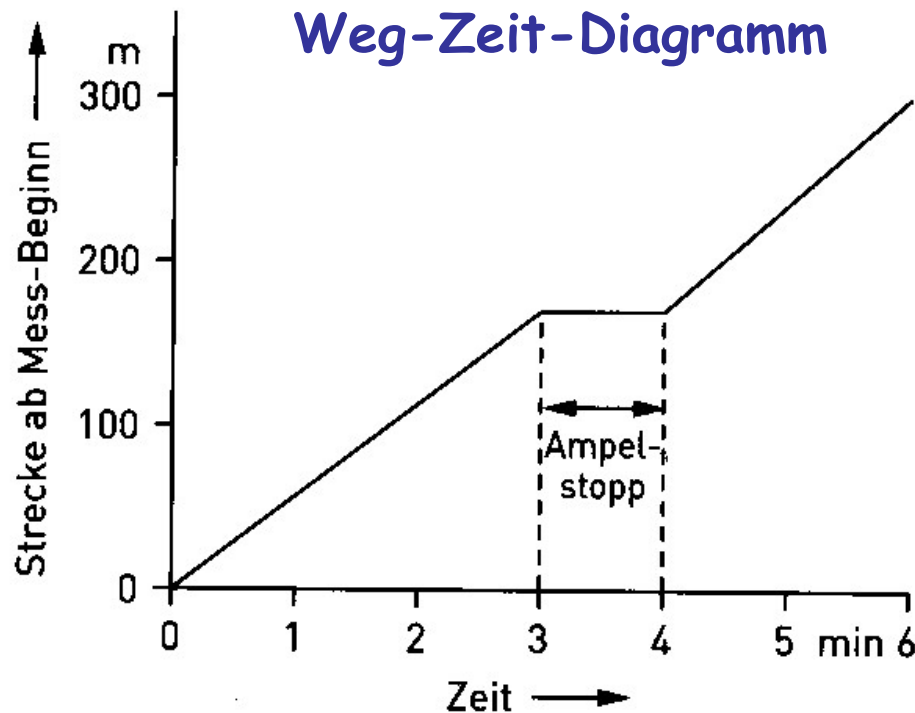
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Beschreibung von Bewegungen

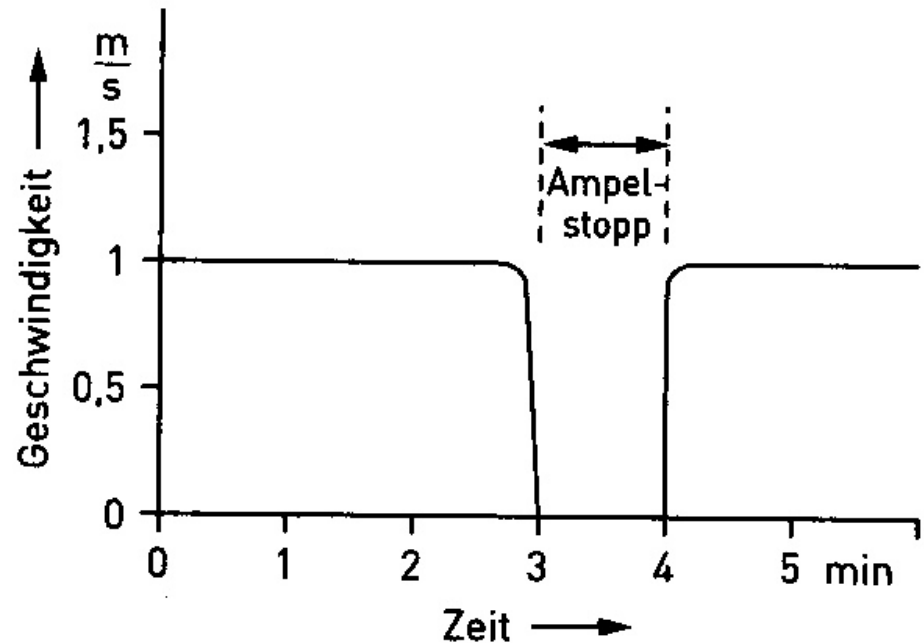
- Fußgänger geht mit konstanter Geschwindigkeit auf rote Ampel zu. Nach der Rot-Phase setzt der Fußgänger seinen Weg mit der gleichen Geschwindigkeit fort

Weg-Zeit-Diagramm



$$v = \frac{180\text{m}}{3\text{min}} = \frac{180\text{m}}{3 \cdot 60\text{s}} = \frac{180\text{m}}{180\text{s}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Beispiele für Geschwindigkeiten

Lichtgeschwindigkeit	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	$3 \times 10^2 \text{ m/s}$
Schallgeschwindigkeit in Wasser	$1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$
Blut in der Nähe der Aorta	1 m/s
Blut in den Kapillaren	$5 \times 10^{-3} \text{ m/s}$
Signalgeschwindigkeit von Nervenzellen, normal	20 m/s
Signalgeschwindigkeit mit Alkohol	5 m/s

Momentangeschwindigkeit als Vektor

- **Momentangeschwindigkeit:**

gegeben durch den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit:

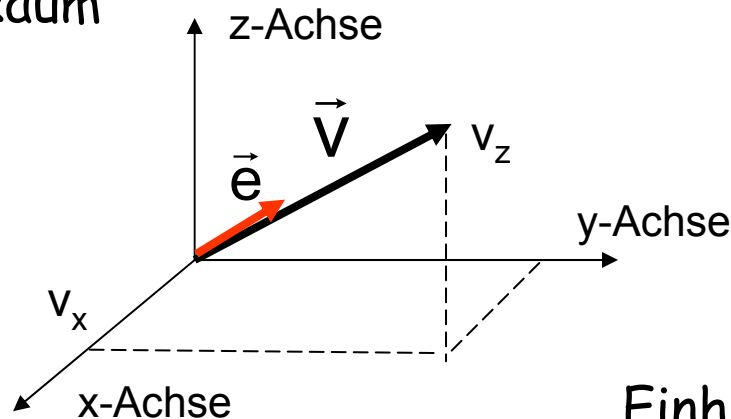
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Luftkissenbahn:
mittlere und
momentane Geschwindigkeit

Das Zeitintervall Δt und damit auch die zurückgelegte Strecke Δx werden immer kleiner gemacht.

- Die Geschwindigkeit hat nicht nur einen Betrag sondern auch eine Richtung; d.h. die Geschwindigkeit ist ein **Vektor**;
- ein **Vektor** ist charakterisiert durch seine Länge und seine Richtung im Raum



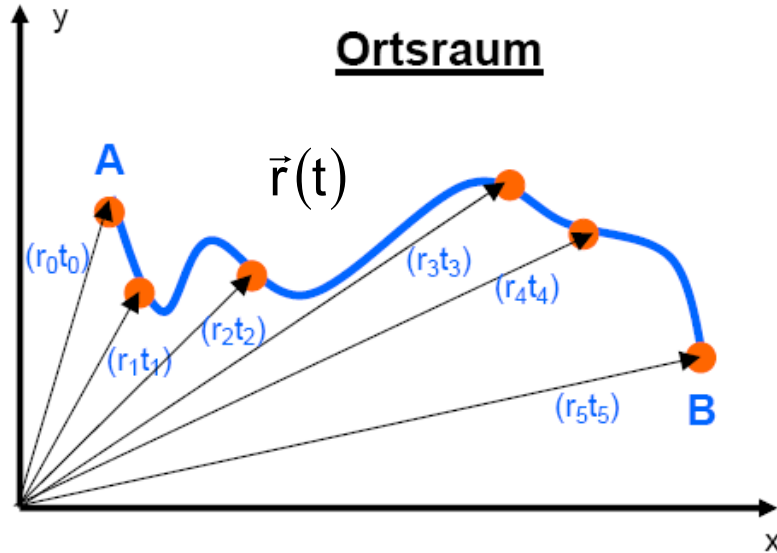
Vektor: $\vec{V} = \{ v_x, v_y, v_z \}$

Betrag: $|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\vec{v} = v \vec{e}; \quad |\vec{e}| = 1$$

Einheitsvektor $\vec{e}$ gibt **Richtung** im Raum an

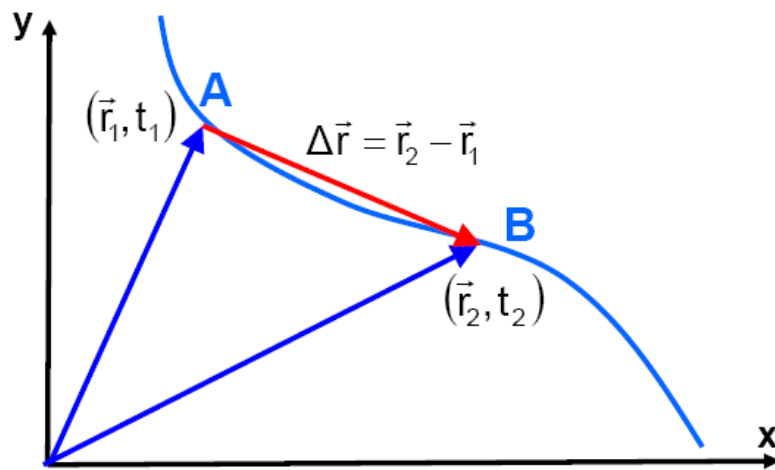
Bahnverlauf und Momentangeschwindigkeit



Die Bewegung eines Körpers lässt sich vollständig durch den Bahnverlauf als Funktion der Zeit beschreiben.

Ortsvektor: $\vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$

gibt den Ort des Massenpunkts zu jedem Zeitpunkt an.



Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 am Ort A erhält man, wenn man das Zeitintervall Δt immer kleiner macht, in dem man t_2 an t_1 heranrückt und damit auch $\vec{r}_2$ an $\vec{r}_1$.

Die Momentangeschwindigkeit ist ein **Vektor tangential zur Trajektorie** (Bahnkurve) und zeigt in Bewegungsrichtung.

Beschleunigung

- Eine Bewegung, bei der sich die Geschwindigkeit ändert, heißt **beschleunigt**
- Analog zur Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit ist die **Durchschnittsbeschleunigung**:

Durchschnittsbeschleunigung = $\frac{\text{Änderung der Momentangeschwindigkeit}}{\text{Zeitintervall}}$

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- Wir verwenden das Symbol **a** (= acceleration) für die Beschleunigung
Die Einheit der Beschleunigung ergibt sich aus den Basiseinheiten entsprechend:

$$[a] = [v] / [t] \Rightarrow \text{Meter/Sekunde} / \text{Sekunde} = \mathbf{m/s^2}$$

- Analog zur Momentangeschwindigkeit können wir die **Momentanbeschleunigung** für eine lineare Bewegung entlang der x-Achse definieren:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

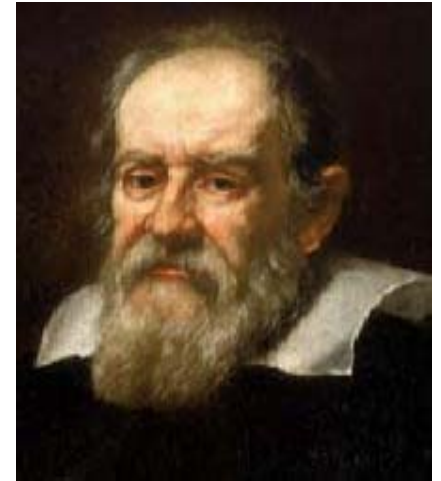
Gleichförmig beschleunigte Bewegung: freier Fall

- Einfachstes Beispiel für Bewegung mit konstanter Beschleunigung
Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Alle Körper erfahren in der Nähe der Erdoberfläche die Erdbeschleunigung;
scheinbarer Widerspruch zur Beobachtung
manche Materialien fallen schneller als andere



freier Fall in
Luft und Vakuum

- Einfluss des Luftwiderstandes
- Ergebnis: **im Vakuum werden alle Körper unabhängig von ihrer Masse oder Zusammensetzung gleich beschleunigt**



Galilei (1564- 1642)



Pisa

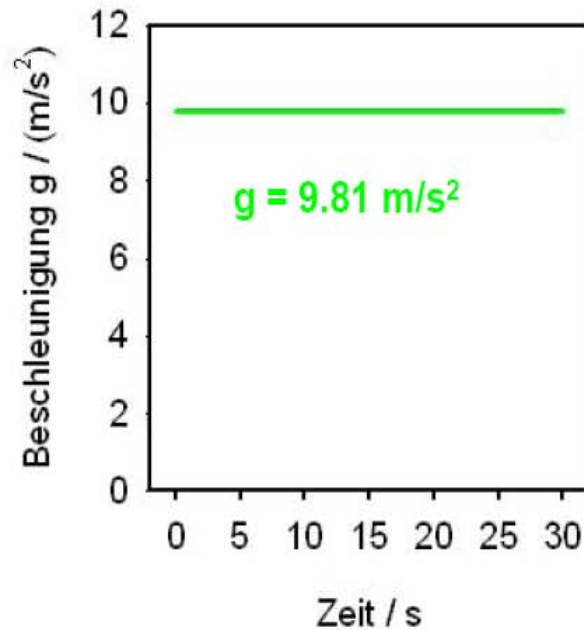
Gleichförmig beschleunigte Bewegung



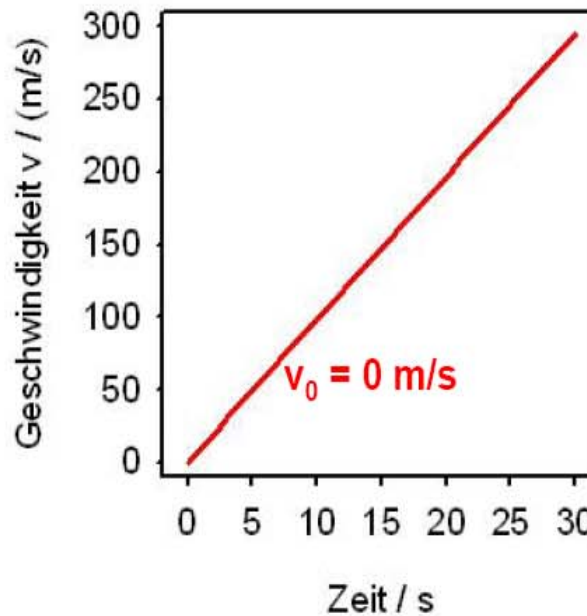
freier Fall

Direkte Vermessung der Flugbahn eines Objekts mit Kamera und Rechner in Echtzeit

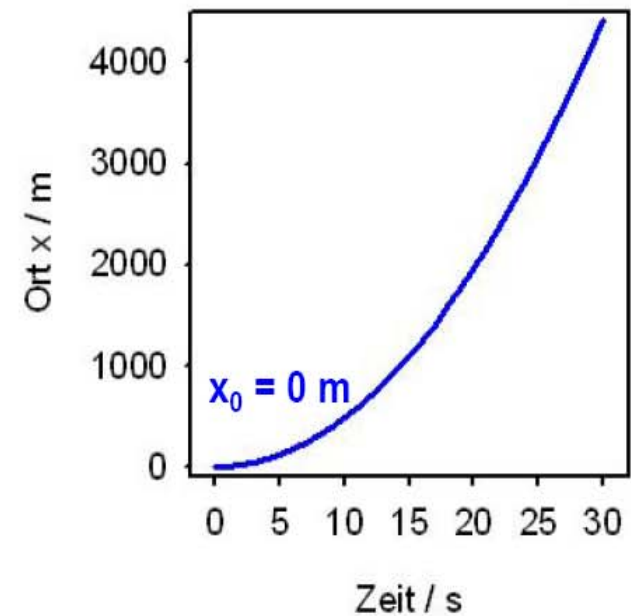
Beschleunigung-Zeit-Diagramm



Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm



Weg-Zeit-Diagramm



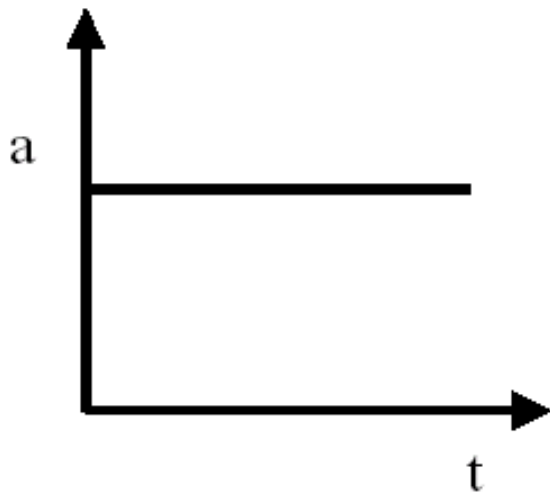
Luftschiene:
gleichförmig
beschleunigte Bewegung

Für $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$:
$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

→ bei Ver-4-Fachung des Wegs doppelte Zeit

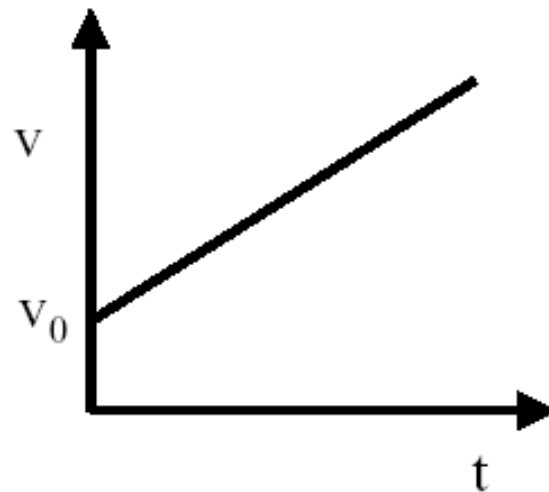
Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- konstante Beschleunigung a
- Geschwindigkeit wächst proportional mit der Zeit
- Weg wächst proportional zum Quadrat der Zeit
- **Anfangsbedingungen**
Zur Zeit $t=0$ hat der Körper eine Geschwindigkeit v_0 und befindet sich am Ort x_0



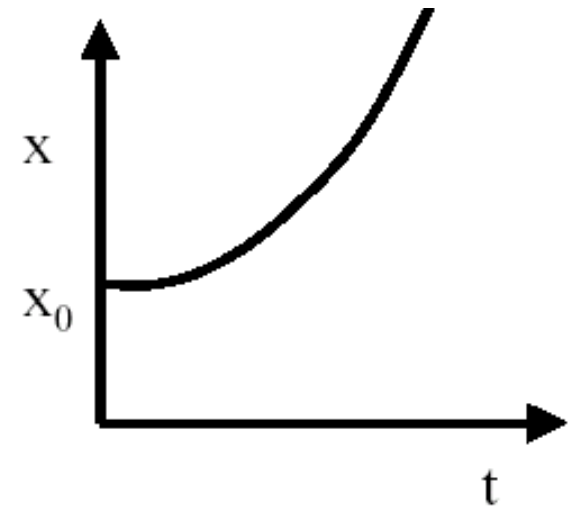
$$a = \text{const}$$

Beschleunigungs-Zeit-
Beziehung.



$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

Geschwindigkeits-Zeit-
Beziehung



$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0$$

Weg-Zeit-Beziehung

Mathematischer Exkurs

Kennen wir die Weg-Zeit-Beziehung, so ergibt sich daraus die Geschwindigkeits - Zeit-Beziehung als erste Ableitung und die Beschleunigungs - Zeit-Beziehung als zweite Ableitung

Differenzieren von $f(t)$

$$\left. \begin{array}{l} f(t) = \text{const} \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0; \\ f(t) = t \Rightarrow \frac{df}{dt} = 1; \\ f(t) = t^2 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 2t; \end{array} \right\} \text{allgemein: } f(t) = t^n \Rightarrow \frac{df}{dt} = n \cdot t^{(n-1)}$$

Weg-Zeit-Beziehung

$$v(t) = \frac{d}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt} \left(x_0 + \underset{\downarrow}{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \right) = \frac{d}{dt}(x_0) + \frac{d}{dt}(v_0 \cdot t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} a \cdot t^2 \right)$$
$$= 0 + v_0 + \frac{1}{2} a \cdot 2 \cdot t = v_0 + a \cdot t \quad \text{Geschwindigkeits-Zeit-Beziehung}$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)) = \frac{d}{dt}(v_0 + a \cdot t) = \frac{d}{dt}(v_0) + \frac{d}{dt}(a \cdot t) = 0 + a = a$$

↑
Beschleunigungs-Zeit-Beziehung

Rechen-Beispiel zum freien Fall

- Eine Münze wird von einem Hochhaus aus 240.50 m Höhe geworfen
- Wie lange dauert es, bis die Münze auf dem Boden auftrifft?
- Anfangsbedingungen: $x(t=0) = 240.50 \text{ m}$; $v(t=0) = 0$;

$$x(t) = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad \text{Auflösen nach } t^2: \Rightarrow t^2 = \frac{2x}{g}; \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 240,50 \text{ m}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \sqrt{49,0 \text{ s}^2} = 7,0 \text{ s}$$

- Wie schnell ist die Münze beim Auftreffen auf dem Boden ?

$$v(t) = g \cdot t; \quad t = 7 \text{ s}; \quad v(t = 7 \text{ s}) = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7 \text{ s} = 68,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Resultat: Werfen Sie keine Münze aus einem Hochhaus;
das Ergebnis könnte unangenehm sein !!

Bewegungen in mehreren Dimensionen

- Um Bewegungsvorgänge in 2 oder 3 Dimensionen zu beschreiben, reicht die Angabe einer Zahl zur Charakterisierung von Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung offensichtlich nicht aus
- Im Gegensatz hierzu kann man die Masse eines Objekts auch in drei Dimensionen durch eine einzige Zahl angeben
- Wir unterscheiden daher in der Physik
 - skalare Größen**, die – wie z.B. die Masse – durch Angabe einer Zahl (und Maßeinheit) definiert sind;
 - vektorielle Größen**, die zusätzlich eine Richtungsinformation enthalten
- Ein **Vektor** ist charakterisiert durch seine Länge und seine Richtung im Raum z.B. Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung
- Mathematisch kann dies z.B. durch Angabe von 3 Komponenten in einem kartesischen Koordinatensystem geschehen:
z.B. Ortsvektor: $\vec{r} = \{x, y, z\}$
Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$

Rechenregeln für Vektoren

- Ein Vektor ist nur durch Länge und Richtung bestimmt
Alle diese Vektoren sind identisch !



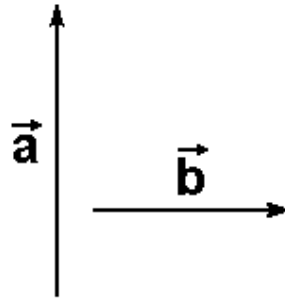
- Zwei Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten der beiden Vektoren addiert

$$\text{Beispiel: } \left. \begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left\{ 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, -7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 21 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right\} \\ \vec{v}_2 &= \left\{ -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, -19 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right\} \end{aligned} \right\} \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \left\{ -1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right\}$$

Geometrische Bedeutung der Vektoraddition

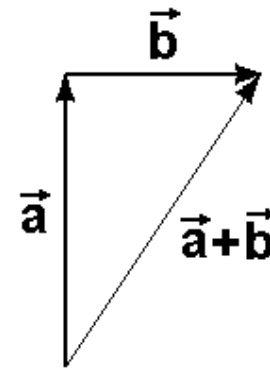
Addition: $\vec{a} + \vec{b}$

1

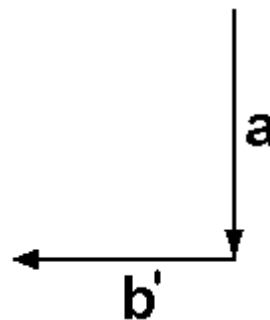
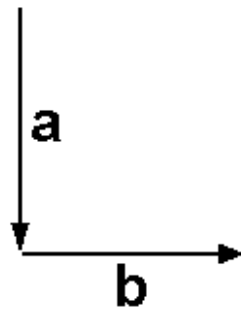


Verschieben
von $\vec{b}$ an die
Spitze von $\vec{a}$

2

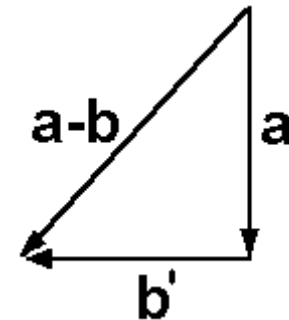


Subtraktion: $\vec{a} - \vec{b}$



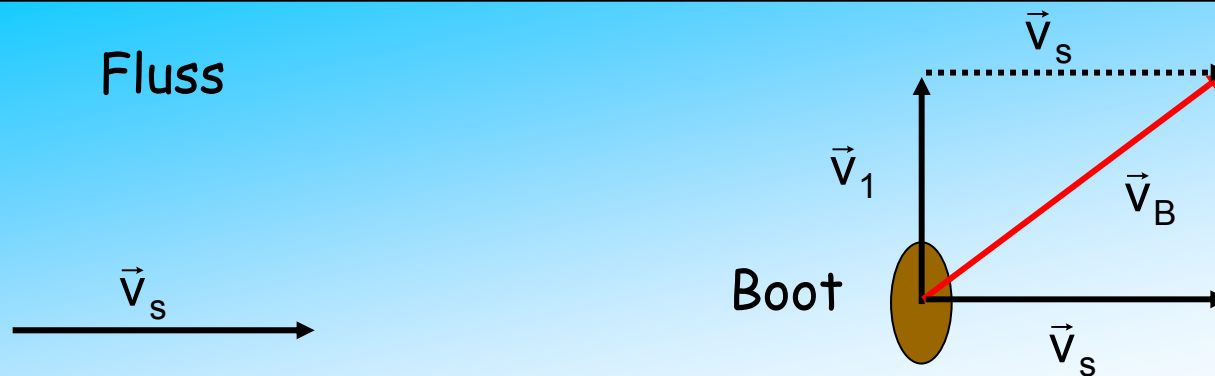
$$\vec{b}' = -\vec{b}$$

Richtungsumkehr



Addition von Geschwindigkeiten

- Geschwindigkeiten addieren sich wie Vektoren

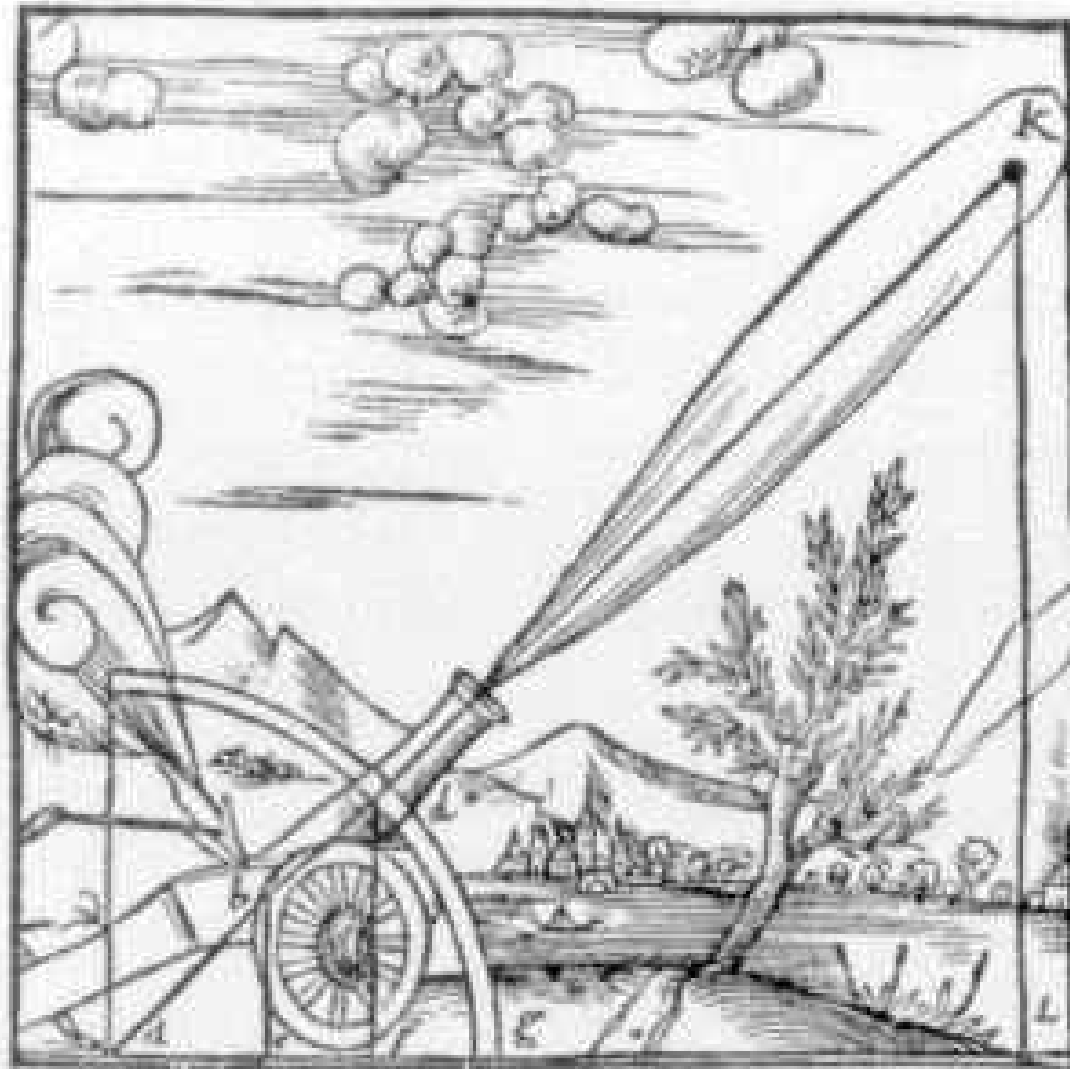


- Boot möchte mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ den Fluss überqueren, wird jedoch von Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}_s$ abgetrieben
- Boot vollführt Bewegung mit Richtung und Betrag der Gesamtgeschwindigkeit $\vec{v}_B = \vec{v}_1 + \vec{v}_s$
- Ermittlung zeichnerisch: $\vec{v}_s$ an Spitze von $\vec{v}_1$ anlegen; Vektoren dürfen verschoben werden, wenn man die Richtung beibehält !!



Überlagerung
gleichförmiger
Bewegungen

Wurfbewegungen



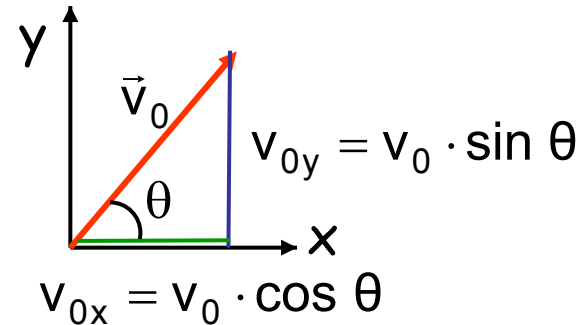
Wie weit schießt unser *Geschütz* ??

Wurfbewegungen (in 2 Dimensionen)

- Wird ein Körper auf der Erdoberfläche in eine bestimmte Richtung geworfen, so überlagert sich diese Bewegung mit der Fallbewegung:

Anfangsgeschwindigkeit des Pfeils
(Abwurfwinkel θ):

$$\vec{v}_P = \{v_{0x}, v_{0y}\} = \{v_0 \cdot \cos \theta, v_0 \cdot \sin \theta\}$$

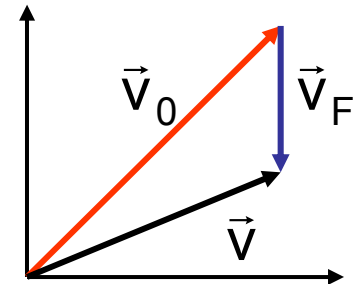


Fallbewegung: freier Fall in y-Richtung: $v_{Fy} = -g \cdot t$; $v_{Fx} = 0 \Rightarrow \vec{v}_F = \{0, -gt\}$

Überlagerung der Bewegungen: die Bewegungen in beiden Dimensionen (x-, y- Richtung) addieren sich unabhängig:

- horizontal** (entlang x-Achse): gleichförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta$
- vertikal** (entlang y-Achse): Überlagerung von gleichförmiger Bewegung $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$ mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung: $v_y = -g \cdot t$ mit $g = 9,81 \text{ m/s}^2$:

$$\vec{v} = \vec{v}_P + \vec{v}_F = \{v_{0x}, v_{0y} - g \cdot t\} = \{v_0 \cdot \cos \theta, v_0 \cdot \sin \theta - g \cdot t\}$$



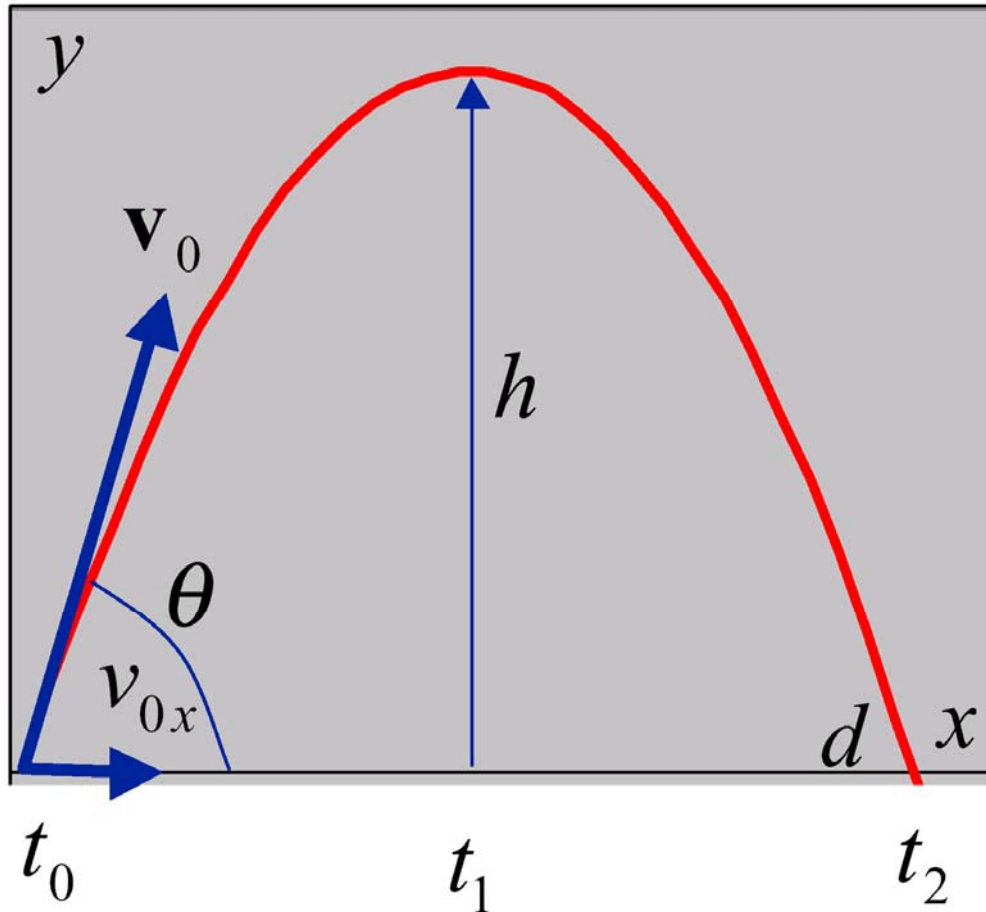
Wurfparabel

Luftreibung und Erdrotation vernachlässigt !!

Ergebnis der Überlagerung: Wurfparabel



Wurfparabel:
Wasserstrahl



- Wurfbeginn bei $t=t_0$
- maximale Höhe bei $t = t_1$
- Wurf-Ende bei $t = t_2$

gesuchte Größen:

- Flugzeit t_2
- maximale Flughöhe h
- Flugweite d
- optimaler Abwurfwinkel

Berechnung der Wurfparabel

- Beschleunigung: $a_y = -g$ $a_x = 0$
- Anfangsgeschwindigkeit: $v_{0x} = v_0 \cos \theta$; $v_{0y} = v_0 \sin \theta$
- keine Beschleunigung in x-Richtung: $v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos \theta = \text{konstant}$
- Die y-Komponente der Geschwindigkeit ist zeitabhängig:
 $v_y(t) = v_{0y} - gt$
- der Ort des Objekts ändert sich entsprechend:
 $x(t) = v_{0x}t$; $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$
- die **Flugzeit** t_2 finden wir, indem wir $y(t)=0$ setzen und nach t auflösen:
 $t_2 = 2v_{0y}/g$
- die **Reichweite** ist dann $d = v_{0x}t_2 = 2v_{0x}v_{0y}/g$
- der **Zeitpunkt** t_1 der **maximalen Höhe** ergibt sich aus der Bedingung $v_y(t)=0$: $\Rightarrow t_1 = v_{0y}/g$
- die **maximale Höhe** h ist dann $h = y(t_1) = \frac{1}{2} v_{0y}^2/g$

Allgemeine Gleichung für die Wurfparabel

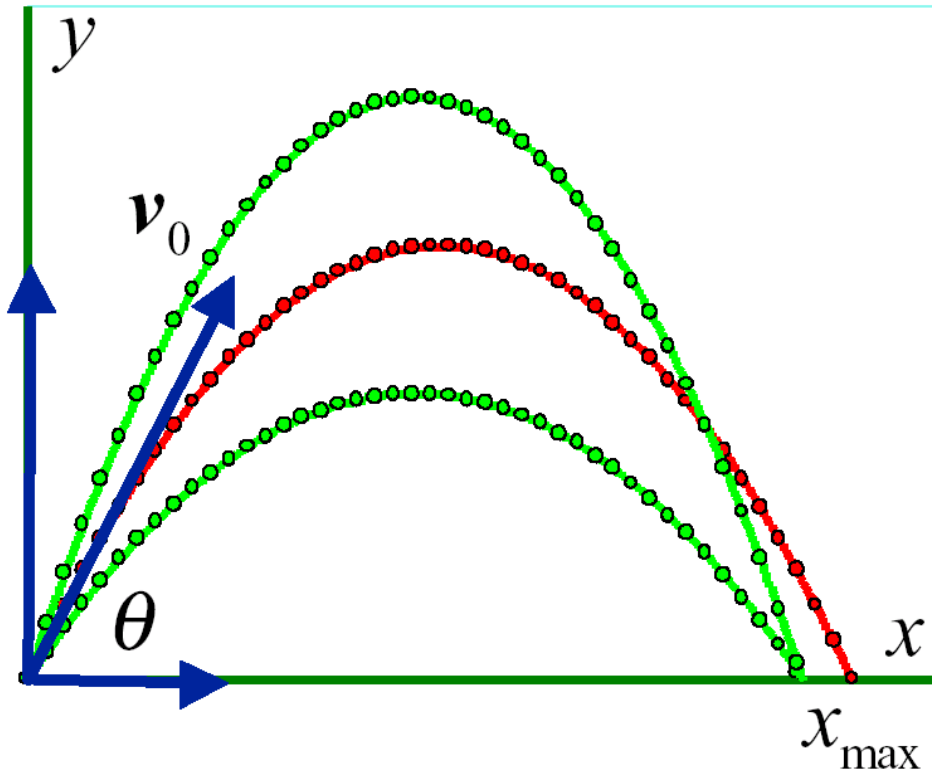
- Wir gehen aus von den zeitabhängigen Beziehungen

$$x(t) = v_{0x}t \quad y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

- Wir eliminieren t und erhalten eine Beziehung zwischen y und x

$$y = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right) \cdot x - \frac{1}{2} \left(\frac{g}{v_{0x}^2} \right) \cdot x^2$$

Optimaler Abwurfwinkel für maximale Reichweite



Wurfparabel:
Wasserstrahl:
verschiedene θ

$$\bullet d = x_{\max} = 2v_{0x}v_{0y}/g$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \theta$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$$

$$\bullet d = 2v_0^2/g \cos \theta \sin \theta$$

Winkelfunktionstheorem:

$$2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = \sin 2\theta$$

$$\bullet d = v_0^2 / g \sin 2\theta$$

maximale Reichweite für
 $\sin 2\theta = 1$; d.h. $2\theta = 90^\circ$

$\Rightarrow$ optimaler Abflugwinkel: $\theta = 45^\circ$

Überlagerung unabhängiger Bewegungen: der Bärenschuss

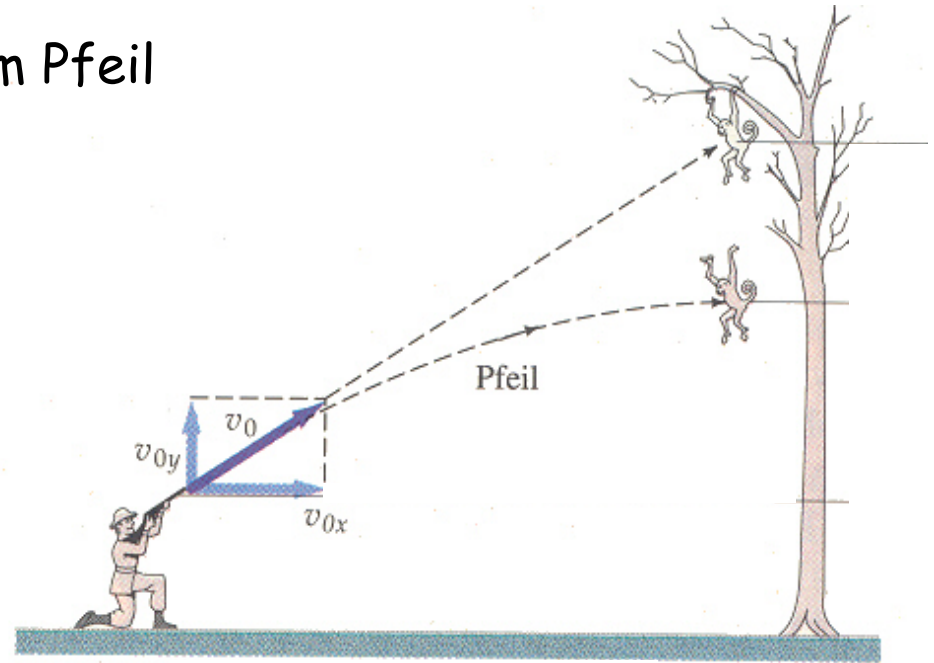
- der Bär fällt gleichzeitig mit dem Pfeil

Unabhängige Überlagerung

- der horizontalen Pfeilbewegung mit konstanter Geschwindigkeit
- der vertikalen Pfeilbewegung (freier Fall)



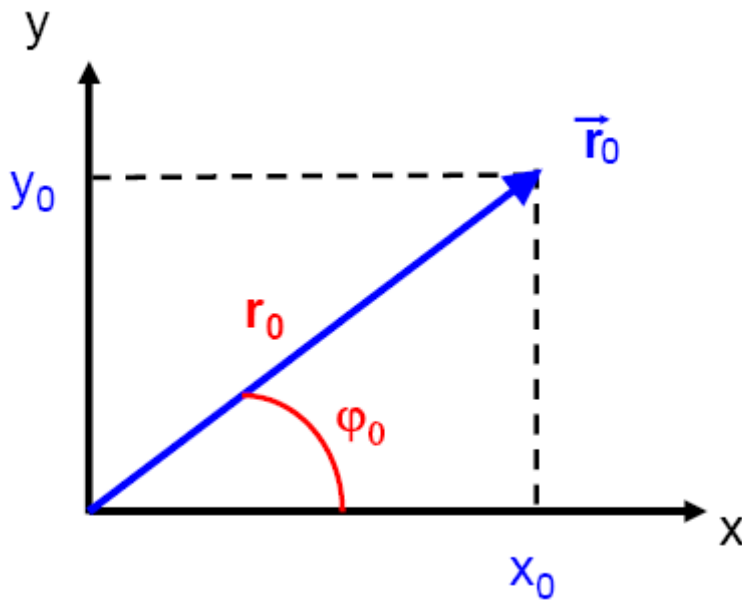
Bärenschuss



Resultat:

- zielt der Pfeil vor dem Abschuss auf den Bär, so wird er in jedem Fall getroffen
- die Pfeilspannung entscheidet nur darüber, in welcher Höhe der Treffer erfolgt

Kreisbewegung



Der Punkt $\vec{r}_0$ im Ortsraum kann durch die kartesischen Koordinaten (x_0, y_0) oder durch die **Polarkoordinaten** (r_0, φ_0) beschrieben werden.

r_0 : Länge (Betrag) des Ortsvektors $\vec{r}_0$
 φ_0 : Winkel zwischen Ortsvektor und x-Achse

Umrechnung zwischen
kartesischen Koordinaten und **Polarkoordinaten**:

$$x_0 = r_0 \cdot \cos \varphi_0$$

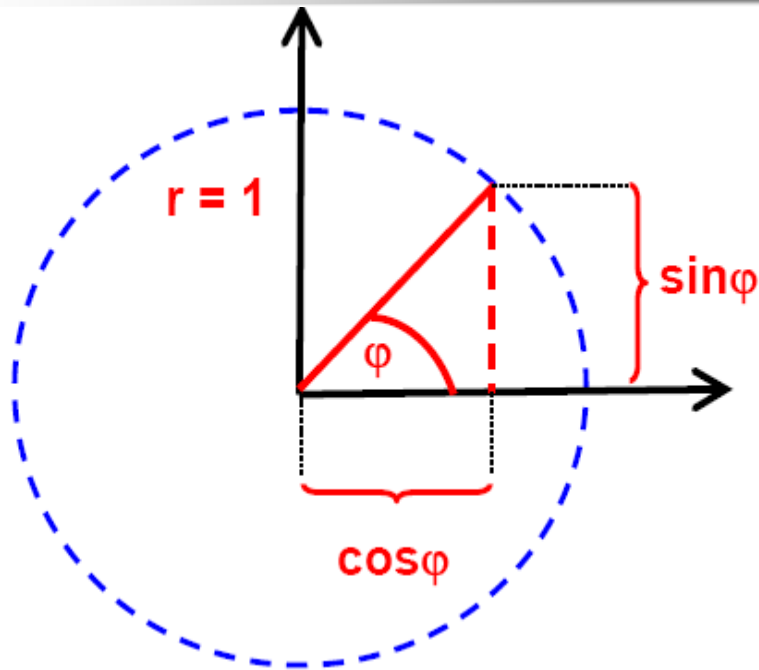
$$y_0 = r_0 \cdot \sin \varphi_0$$



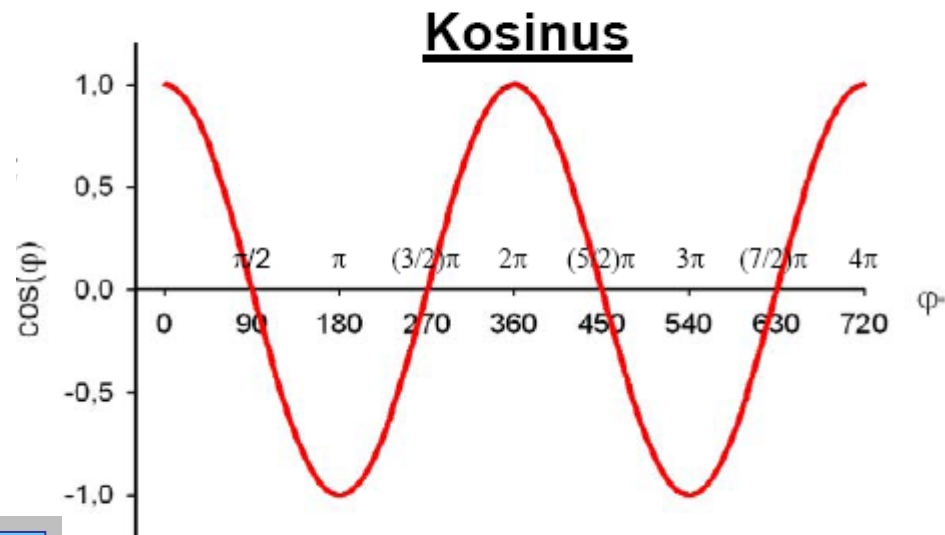
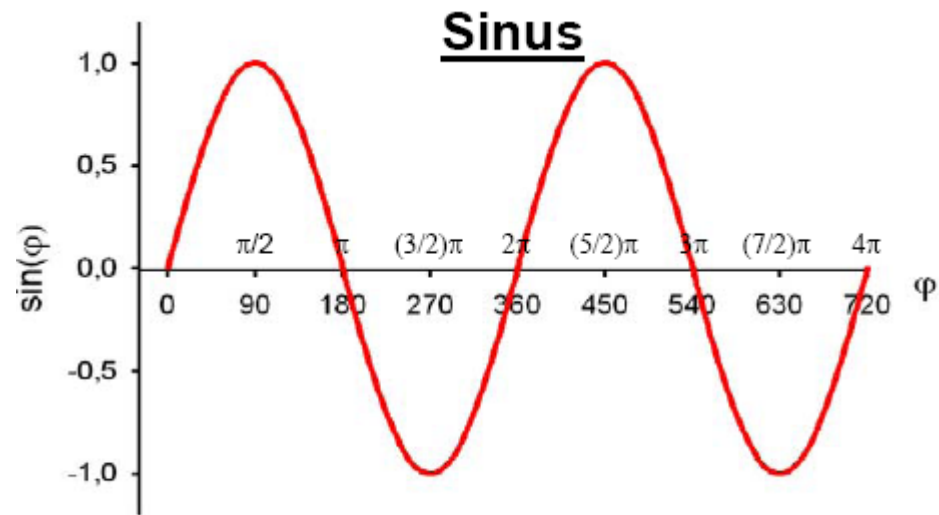
$$r_0 = |\vec{r}_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{y_0}{x_0}; \quad \varphi_0 = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

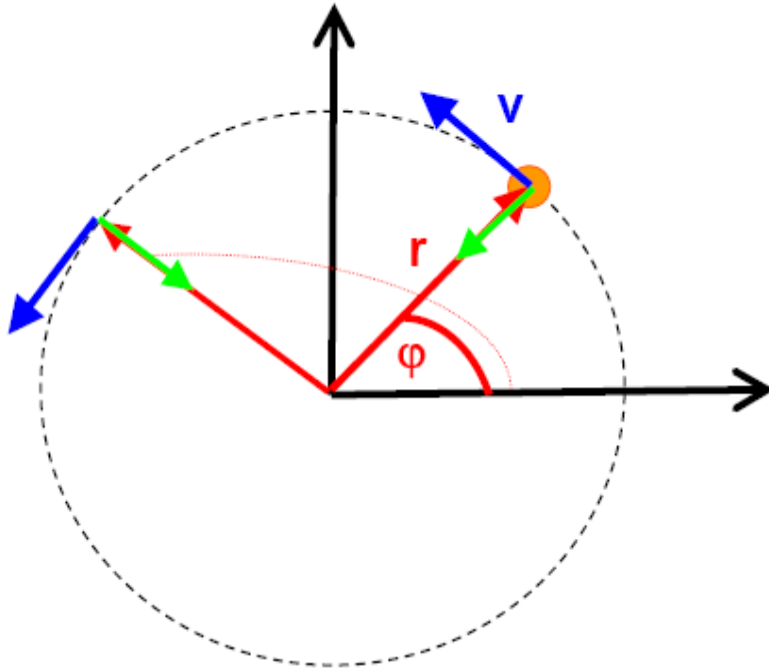
Zusammenhang: Kreisbewegung $\Leftrightarrow$ trigonometrische Funktion



- Einheitskreis mit Radius $r=1$ und Umfang 2π
Winkel:
Bogenmaß: φ in Bruchteilen von 2π
Grad: $0 \leq \varphi \leq 360^\circ$
- Die Kreisbewegung ist äquivalent einer zeitlichen harmonischen Schwingung



Kreisbewegung



Kreisbewegung mit konstanter **Winkelgeschwindigkeit** ω :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varphi = \omega \cdot t$$

Erinnerung: lineare Bewegung:

$$s = v \cdot t$$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist gegeben durch $v = \omega \cdot r$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist nicht konstant. Der Geschwindigkeitsvektor ist immer tangential zur Kreisbahn. Es muss eine Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung geben, also radial:

Der Wert der **Radialbeschleunigung** ist:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 \cdot r$$

Harmonische Bewegung

Harmonische Bewegung als periodische Bewegung in einer Dimension

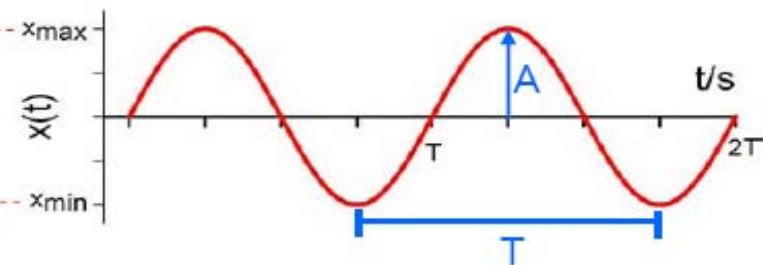


**Bewegung entlang
einer Koordinatenachse**

$$x(t) = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Amplitude **A**

Periodendauer: **T**



Federpendel
mit Videocom

Zusammenfassung

Bewegungen lassen sich beschreiben durch Angabe von

Ortsvektor: $\vec{r}$

Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

und Beschleunigungsvektor: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Lineare Bewegung (eindimensional)

gleichförmig: $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$

beschleunigt: $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

Kreisbewegung:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$v = \omega \cdot r$$

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\omega^2 \cdot r$$

- Komplizierte Bewegungsvorgänge lassen sich als Überlagerung unabhängiger Bewegungen entlang der Koordinatenachsen darstellen (**Superpositionsprinzip**)

Beispiele: Wurfparabel, Bärenschuss, Kreisbewegung